POLITECHNIKA POZNAŃSKA

WYDZIAŁ AUTOMATYKI, ROBOTYKI I ELEKTROTECHNIKI

INSTYTUT ELEKTROTECHNIKI I ELEKTRONIKI
PRZEMYSŁOWEJ

ZAKŁAD MECHATRONIKI I MASZYN ELEKTRYCZNYCH

mgr inż. Wojciech Ludowicz

Rozprawa doktorska

Polowa analiza rozpływu prądów przesunięcia dielektrycznego w wysokoczęstotliwościowych układach z polem elektromagnetycznym

Promotor: Dr hab. inż. Rafał M. Wojciechowski, prof. PP

Poznań 2024

Spis treści

Streszczenie

Polowa analiza rozpływu prądów przesunięcia dielektrycznego w wysokoczęstotliwościowych układach z polem elektromagnetycznym

W rozprawie omówiono współcześnie stosowane metody polowe oraz sformułowania wykorzystywane do analizy układów z polem elektromagnetycznym EM wyższych częstotliwości z uwzględnieniem wpływu prądów wirowych, prądów przesunięcia dielektrycznego, a także nasycenia rdzenia na wypadkowy rozkład pola EM. Sporządzony został przegląd literatury dotyczący wyników najnowszych badań nad materiałami ferromagnetycznymi i wpływie wzrostu częstotliwości pola elektromagnetycznego na właściwości materiałowe badanych ferrytów. Autor pracy przedstawił uzasadnienie podjęcia badań nad wyżej wymienionym tematem, a także sformułował tezę i wyjaśnił cel pracy. W pierwszej rozprawy omówione zostały najczęściej stosowane metody do analizy układów z polem elektromagnetycznym tj.: Metoda Elementów Skończonych MES, Metoda Różnic Skończonych (z ang. *Finite Difference Time Domain* FDTD), a także metody quasi statyczne oraz metoda całkowa FIT (z ang. Finite Integral Technique). W kolejnej części pracy omówione zostało szczegółowo zastosowane w pracy wielostopniowe ujęcie Metody Elementów Skończonych. Autor przedstawił podział, różnice oraz korelacje pomiędzy elementami poszczególnych stopni tj.: elementami węzłowymi, krawędziowymi oraz ściankowymi. W następnym etapie pracy zaprezentowane oraz wyjaśnione zostały rodzaje analiz wykorzystujących MES tj.: analizy w dziedzinie czasu, w dziedzinie częstotliwości oraz w dziedzinie częstotliwości i czasu. Ostatnia z analiz nazywana również metodą HBFEM (z ang. *Harmonic Balance Finite Element Method*) wykorzystana została przez Autora pracy do stworzenia oprogramowania będącego przedmiotem niniejszej pracy. W głównej części rozprawy przedstawiony został stworzony przez Autora algorytm służący do analizy układów z polem elektromagnetycznym. Omówiony został zarówno algorytm typu 2D HBFEM dla układów osiowo-symetrycznych jak i algorytm 3D HBFEM dla układów nieposiadających symetrii osiowej. Wykorzystując oprogramowanie autorskie przeprowadzone zostały obliczenia symulacyjne, których wyniki oraz wykorzystane zasoby porównane zostały z danymi uzyskanymi w profesjonalnym oprogramowaniu COMSOL Multiphysics.

Słowa kluczowe:

Analiza MES, Metoda Elementów Skończonych, modele polowe, prądy przesunięcia dielektrycznego, metoda bilansu harmonicznych, analiza częstotliwościowo-czasowa, rdzenie ferrytowe, przetworniki elektromagnetyczne.

Abstract

Field analysis of distribution of displacement currents in high-frequency circuits with electromagnetic field

The dissertation discusses contemporary field methods and formulations used for the analysis of systems with higher-frequency electromagnetic fields EM with contribution of the influence of eddy currents, dielectric displacement currents as well as core saturation on the EM field distribution. A literature review has been prepared including the latest research on ferromagnetic materials and the impact of increasing electromagnetic field frequencies on the material properties of the studied ferrites. The Author justifies the need for research on the aforementioned topic, formulates a thesis, and explains the goal of the work. In the first part of the dissertation, the most commonly used methods for electromagnetic system fields analyzes are discussed, namely: the Finite Element Method (FEM), the Finite Difference Time Domain (FDTD) method as well as quasi-static methods, and the Finite Integral Technique (FIT) method. The next section presents a detailed discussion of the multi-stage approach applied in the work within the Finite Element Method framework. The Author introduces the classification, differences, and correlations between the elements of individual degrees, such as nodal, edge, and facet elements. In the following stage, various types of analyses utilizing FEM are explained, including time-domain analysis, frequency-domain analysis, and frequency-time domain analysis. The last mentioned analysis, also known as the Harmonic Balance Finite Element Method (HBFEM), was employed by the Author to create the software that is the subject of this dissertation. The main part of the work presents an algorithm developed by the Author for the analysis of systems with electromagnetic fields. Both a 2D HBFEM algorithm for axisymmetric systems and a 3D HBFEM algorithm for non-axisymmetric systems are discussed. Using the Author's self-developed software, simulation calculations are performed, and their results as well as utilized computational resources are compared with data obtained by means of the professional software COMSOL Multiphysics.

Keywords:

FEM analysis, Finite Element Method, field models, displacement currents, Harmonic Balance Method, frequency-time domain analysis, ferrite cores, electromagnetic converters.

Wykaz ważniejszych skrótów:

HBM	–	metoda bilansu harmonicznych (z ang. *Harmonic Balance Method*)
FPM	–	metoda punktu ustalone (z ang. Fixed Point Method)
MES	–	metoda elementów skończonych
HBFEM	–	kombinacyjne podejście łączące metodę bilansu harmonicznych oraz metodę elementów skończonych (z ang. Harmonic Balance Finite Element Method)
FDTD	–	metoda różnic skończonych (z ang. Finite Diference Time Domain)
FIT	–	metoda całkowa (z ang. Finite Integral Technique)
EQS	–	metoda elektro-quasi-statyczna (z ang. Electro-Quasi-Static Method)
MQS	–	metoda magneto-quasi-statyczna (z ang. Magneto-Quasi-Static Method)
EMQS	–	metoda elektro-magneto-quasi-statyczna – Model Darwina
MSS	–	magnetyczna siatka ściankowa
ESK	–	elektryczna siatka krawędziowa
SR	–	siatka reluktancyjna
SKP	–	siatka konduktanycjno-pojemnościowa
SRKP	–	siatka reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowa
FFT	–	szybka transformata Fouriera (z ang. Fast Fourier Transform)

Wykaz ważniejszych oznaczeń:

$\boldsymbol{A}$ – wektorowy potencjał magnetyczny

V – skalarny potencjał elektryczny

$\boldsymbol{T}$ – wektorowy potencjał elektryczny

$\boldsymbol{T_0}$ – elektryczny potencjał wektorowy pola przepływowego prądu o zdefiniowanym kierunku wektora gęstości prądu

Ω – skalarny potencjał magnetyczny

$\boldsymbol{E}$ – wektor natężenia pola elektrycznego

$\boldsymbol{B}$ – wektor indukcji magnetycznej

$\boldsymbol{J}$ – wektor gęstości prądu będący sumą składników $\boldsymbol{J}_p$ oraz $\boldsymbol{J}_c$

$\boldsymbol{J}_p$ – wektor gęstości prądu przewodnictwa

$\boldsymbol{J}_c$ – wektor gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego

$\boldsymbol{J}_0$ – wektor gęstości prądu o zdefiniowanym kierunku przepływu prądu

$\boldsymbol{H}$ – wektor natężenia pola magnetycznego

$\boldsymbol{D}$ – wektor indukcji elektrycznej

ε – przenikalność dielektryczna

μ – przenikalność magnetyczna

σ – konduktywność

$\boldsymbol{\Phi}$ – wektor gałęziowych strumieni magnetycznych reluktancyjnej siatki ściankowej

$\boldsymbol{\varphi}$ – wektor oczkowych strumieni magnetycznych reluktancyjnej siatki ściankowej

$\boldsymbol{\Psi}$ – wektor strumieni magnetycznych skojarzonych z uzwojeniami

$\boldsymbol{i}_g$ – wektor prądów gałęziowych rezystancyjnej siatki ściankowej

$\boldsymbol{i}_0$ – wektor prądów oczkowych rezystancyjnej siatki ściankowej

$\boldsymbol{i}_c$ – wektor wartości prądów przepływających przez uzwojenia

$\boldsymbol{u}_0$ – wektor napięć oczkowych rezystancyjnego modelu siatkowego

$\boldsymbol{R}_{\mu g}$ – wektor reluktancji gałęziowych reluktancyjnej siatki ściankowej

$\boldsymbol{R}_{\mu 0}$ – wektor reluktancji oczkowych reluktancyjnej siatki ściankowej

$\boldsymbol{k}_s$ – macierz incydencji siatki ściankowej

$\boldsymbol{k}_w$ – macierz incydencji siatki krawędziowej

$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{g}}$ – wektor konduktancji gałęziowych konduktancyjno-pojemnościowej siatki krawędziowej

$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{g}}$ – wektor pojemności gałęziowych konduktancyjno-pojemnościowej siatki krawędziowej

$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{g}}$ – wektor rezystancji gałęziowych ściankowej siatki rezystancyjnej

$\boldsymbol{z}_k$ – wektor opisujący rozkład gęstości uzwojeń w przestrzeni krawędzi elementów skończonych.

$\boldsymbol{K}$ – macierz współczynników opisujących wagę z jaką wartości ściankowe obwodu o grafie ściankowym są uwzględniane w źródłach oczkowych tego obwodu

ω_0 – pulsacja podstawowa obwodu

Rozdział 1
Wprowadzenie, cel i teza pracy

Analizując najnowsze badania z obszaru elektrotechniki nie da się przeoczyć postępującego trendu coraz to bardziej zaawansowanej miniaturyzacji urządzeń oraz przetworników elektromagnetycznych. Postępująca miniaturyzacja nie byłaby jednak możliwa, gdyby nie rozwój energoelektroniki, wzrost częstotliwości źródeł zasilania, a także opracowywanie i wdrażanie nowych rodzajów materiałów, w tym proszkowych materiałów ferromagnetycznych. Kryzys środowiskowy zauważalny na przestrzeni ostatniej dekady przyczynił się w sposób szczególny do wzmożonej aktywności naukowców w obszarze inżynierii materiałowej. Obecnie opracowywane materiały ferromagnetyczne (wykonane m. in. na bazie proszków) znajdują zastosowanie już nie tylko w elektrotechnice, ale również w obszarze ochrony środowiska, między innymi do oczyszczania wody lub monitoringu zanieczyszczeń [1–3].

Najnowsze badania z obszaru elektrotechniki skupiają się obecnie na wpływie pól o wysokiej częstotliwości na właściwości magnetyczne i elektryczne proszkowych materiałów ferromagnetycznych [4,5]. Efekty tych prac wykazują wyraźny wpływ wzrostu częstotliwości na wartość strat generowanych w rdzeniu ferromagnetycznym. Badania potwierdzają, że niektóre typy ferrytów, jak na przykład: ferryty z rodziny MnZn, mimo niewielkiej przenikalności dielektrycznej w zakresie wysokich częstotliwości, wykazują straty w skutek indukowania się prądów przesunięcia dielektrycznego [5–8].

Szeroka gama materiałów ferromagnetycznych i różnorodność ich w właściwości wymaga od projektantów kompleksowej wiedzy z zakresu stosowanych materiałów i zjawisk w nich zachodzących. W aplikacjach wymagających dużej precyzji wykonania, a tym samym i dokładności obliczeniowej, najczęściej tworzy się kompleksowe modele polowe projektowanych obiektów z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). Stanowi ona jedną z najbardziej rozpowszechnionych technik numerycznych wykorzystywanych w inżynierii i fizyce do rozwiązywania złożonych problemów związanych z polem elektromagnetycznym. Geneza tej metody sięga połowy XX wieku, kiedy to inżynierowie i matematycy zaczęli szukać skutecznych sposobów analizowania i modelowania zjawisk fizycznych w skomplikowanych strukturach i materiałach. MES zyskała popularność m. in. dzięki możliwościom efektywnego odwzorowywania odpowiedzi systemów elektromagnetycznych, pracujących w różnorodnych warunkach.

Było to nieosiągalne dla wcześniej stosowanych metod analitycznych; zwłaszcza w przypadku wykorzystania materiałów o silnie nieliniowych właściwościach magnetycznych.

Początki MES można datować na lata 40. XX wieku, choć podstawowe koncepcje, które doprowadziły do jej sformułowania, były rozwijane już wcześniej. Warto zauważyć, że metoda ta wyewoluowała z potrzeb w dziedzinie analizy struktur lotniczych i innych dużych konstrukcji mechanicznych. Pionierskie prace w zakresie MES przypisywane są Richardowi Courantowi, który w 1943 roku zaproponował metodę umożliwiającą aproksymację rozwiązań równań różniczkowych z zadanymi warunkami brzegowymi poprzez rozbicie kontinuum na skończone elementy i zastosowanie wariacyjnych metod rozwiązywania zagadnień mechanicznych [9]. Rozwój Metody Elementów Skończonych nabrał tempa w latach 50. i 60., kiedy to inżynierowie zaczęli rozszerzać jej zastosowanie na inne niż tylko mechaniczne problemy inżynierskie. W tym okresie kluczowe były prace takich naukowców jak Aleksander Zienkiewicz, który znacząco przyczynił się do rozwoju metodyki MES [10–12].

Rozwój Metody Elementów Skończonych jest ściśle związany z postępem w dziedzinie obliczeń komputerowych. Początkowo stosowana w mechanice strukturalnej i inżynierii lądowej do analizy naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w konstrukcjach budowlanych, z czasem znalazła zastosowanie w wielu innych dziedzinach, w tym w elektrotechnice. Dzięki rozwojowi algorytmów numerycznych i zwiększaniu mocy obliczeniowej komputerów, MES umożliwiła efektywne modelowanie zjawisk elektromagnetycznych w trójwymiarowych obszarach o skomplikowanej geometrii i z różnorodnymi właściwościami materiałowymi. Kluczowym momentem dla zastosowania MES w obliczeniach elektromagnetycznych było wprowadzenie równań Maxwella do modelu siatkowego tej metody. Umożliwiło to precyzyjniejsze odwzorowanie pól elektromagnetycznych oraz analizę ich interakcji z otoczeniem. To podejście otworzyło nowe możliwości w projektowaniu urządzeń elektromagnetycznych, takich jak silniki elektryczne, transformatory, anteny czy urządzenia do rezonansu magnetycznego, gdzie dokładna analiza pola elektromagnetycznego ma kluczowe znaczenie dla ich poprawnego i bezpiecznego użytkowania. Postępujący wzrost popularności MES oraz rosnąca liczba jej aplikacji doprowadziły do wzmożenia badań w poszukiwaniu nowych interpretacji numerycznych Metody Elementów Skończonych, które umożliwiłyby szybszą i bardziej ukierunkowaną analizę zjawisk fizycznych. Obecnie wyróżnić można dwie podstawowe typy analiz numerycznych wykorzystujących MES dla obszarów z polem elektromagnetycznym - analiza w dziedzinie czasu oraz analiza w dziedzinie częstotliwości. Oba podejścia omówione zostaną w dalszych rozdziałach pracy. Sama metoda MES dla obszarów z polem elektromagnetycznym doczekała się także wielu uproszczonych interpretacji, których celem jest ukierunkowanie obliczeń na wybrane zjawisko fizyczne i tym samym zmniejszenie sumarycznego czasu konwergencji i wymaganych zasobów obliczeniowych. Przykładami takich metod są metody quasi-statyczne, w których skład wchodzi m. in. popularny Model Darwina [13,14].

Współcześnie, oprogramowanie do analizy MES stało się nieodłącznym narzędziem w inżynierii, umożliwiając symulację i analizę zjawisk w niemal każdej dziedzinie nauki i techniki, od projektowania komponentów samolotów, przez badanie przepływów cieczy i gazów, aż po symulację procesów biologicznych i projektowanie systemów elektronicznych. Najpopularniejsze środowiska obliczeniowe takie jak ANSYS, ABAQUS, CST Studio Suite, COMSOL Multiphysics, Catia i inne, oferują użytkownikom potężne narzędzia do modelowania zjawisk fizycznych, pozwalając na badanie zachowania złożonych systemów w warunkach, które byłyby trudne lub niemożliwe do z replikowania w rzeczywistych eksperymentach. Korzystając ze wspomnianych środowisk, a także analizując dostępne źródła Autor pracy zwrócił uwagę, że obecnie nie ma zbyt wielu źródeł literaturowych, publikacji, ani też efektywnych narzędzi, które obejmowałyby kompleksowo zagadnienia związane z analizą polową dotyczącą modelowania obszarów z polem elektromagnetycznym przy uwzględnieniu wpływu prądów przesunięcia dielektrycznego. Zjawisko to jest często pomijane, szczególnie w aplikacjach o wymuszeniach niskoczęstotliwościowych, ze względu na niewielki wpływ tego zjawiska na wypadkowy rozkład pola. Jednakże, w obliczu ciągłej miniaturyzacji obiektów technicznych (zmniejszanie efektywnych odległości izolacyjnych pomiędzy elementami układu) oraz wzrostu częstotliwości sygnałów zasilających, rzeczywisty wpływ jaki wywierają prądy przesunięcia dielektrycznego na działanie przetworników jest coraz większy [5,7,8].

Mimo widocznego deficytu efektywnych narzędzi do kompleksowej analizy wspomnianego wyżej zjawiska, istnieje wiele metod umożliwiających wyznaczanie rozkładu gęstości prądów przesunięcia dielektrycznego. Obok najpopularniejszych i najbardziej czasochłonnych metod takich jak Metoda Elementów Skończonych MES czy Metoda Różnic Skończonych FDTD istnieją także ich uproszczone interpretacje takie jak

Metoda Całki Skończonej FIT czy też Metoda Quasi-magneto-elektro-statyczna (Model Darwina). Jedną z najczęściej wykorzystywanych metod do analizy obszarów z polem elektromagnetycznym jest niewątpliwie Metoda Elementów Skończonych. W zależności od właściwości materiałowych i warunków pracy układu do wyznaczenia rozpływu pola wykorzystać można analizę w dziedzinie czasu lub w dziedzinie częstotliwości. Pierwsza z analiz, co prawda, cechuje się dużą dokładnością obliczeń, jednakże jest też bardzo czasochłonna ze względu na konieczność dyskretyzacji całego badanego przebiegu czasowego na tzw. próbki a następnie wykonywanie obliczeń iteracyjnej dla każdej z nich [15]. Duże wydłużenie czasu obliczeń jest szczególnie zauważalne w przypadku pracy układu w obszarze nieliniowym – w stanie nasycenia rdzenia. W takim przypadku konieczne jest zwiększenie próbek czasowych co skutkuje zwiększeniem liczby wykonywanych iteracji i wydłużeniem czasu obliczeń. Druga z metod umożliwia szybką i dokładną analizę, natomiast ogranicza się jedynie do układów, w których nie występują zniekształcenia przebiegów czasowych na skutek zmienności parametrów materiałowych.

Czas konwergencji jest często kluczową kwestią w czasie projektowania przetworników elektromagnetycznych. Skomplikowane obliczenia trwać mogą niekiedy kilkanaście a nawet kilkadziesiąt godzin w zależności od przydzielonej mocy obliczeniowej. Jeśli analizowane są wysokie stany saturacji rdzenia to wówczas obliczenia wydłużają się do wielu dni paraliżując przy tym możliwości operacyjne wybranej stacji obliczeniowej. W związku z powyższym, inżynierowie często korzystają z wspomnianych wcześniej uproszczonych metod ukierunkowanych na interesujące ich zjawiska fizyczne. W ostatnich latach pojawiło się także kilka interesujących badań wykorzystujących do analizy rozkładu pola elektromagnetycznego połączone metody punktu ustalonego (z ang. *Fixed-Point Method*) oraz bilansu harmonicznych (z ang. *Harmonic Balance Method*) [16–18]. Elementem charakterystycznym dla tego podejścia jest pominięcie fazy przejściowej przebiegów, co znacząco przyspiesza obliczenia, a także kombinacyjna technika analizy rozkładu pola zarówno w domenie częstotliwości jak i czasu.

Doceniając korzyści z zastosowania wyżej wspomnianych metod oraz brak efektywnych narzędzi do analizy oddziaływania prądów przesunięcia dielektrycznego w przetwornikach elektromagnetycznych Autor pracy podjął się opracowania autorskich metod obliczeniowych, które umożliwiłyby efektywną, trójwymiarową analizę polową układu przetwornika elektromagnetycznego uwzględniającą wpływ prądów przesunięcia dielektrycznego, prądów wirowych, a także nasycenia rdzenia na wypadkowy rozkład pola elektromagnetycznego wykorzystując nowy typ połączonej analizy w dziedzinie czasu i częstotliwości. W związku z powyższym Autor postawił sobie następując cel pracy.

Celem niniejszej rozprawy *jest opracowanie algorytmów oraz procedur numerycznych umożliwiających efektywną analizę rozkładu pola elektromagnetycznego z uwzględnieniem wpływu prądów wirowych oraz przesunięcia dielektrycznego przetwornika elektromagnetycznego zasilanego ze źródeł wyższych częstotliwości. Do opracowania wspomnianych algorytmów planuje się zastosowanie analizy częstotliwościowo-czasowej oraz wielostopniowego ujęcia metody elementów skończonych. Podczas badań opracowany zostanie reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowy model siatkowy przetwornika, który opisany zostanie za pomocą sformułowania* $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$.

Autor podejmujący się realizacji przedstawionego celu postawił następującą tezę:

W analizie rozkładu pola elektromagnetycznego układów przetworników elektromagnetycznych istnieje możliwość uwzględnienia wpływu prądów przesunięcia dielektrycznego na wypadkowy rozkład pola elektromagnetycznego poprzez zastosowanie sprzężonej analizy częstotliwościowo-czasowej w połączeniu z modelami polowymi wykorzystującymi wielostopniowe ujęcie metody elementów skończonych.

Zastosowanie powyższych modeli numerycznych zapewnia przyspieszenie obliczeń symulacyjnych dotyczących analizy rozpływu prądów przesunięcia dielektrycznego w układach z polem trójwymiarowym i tym samym przyśpieszenie procesu projektowego przetworników elektromagnetycznych zasilanych ze źródeł wysokich częstotliwości.

W rozdziale drugim rozprawy sporządzony został przegląd metod stosowanych w analizie układów z polem elektromagnetycznym, a także zaprezentowane zostały najnowsze wyniki badań nad właściwościami elektrycznymi i magnetycznymi manganowo-cynkowych ferrytów proszkowych Mn-Zn. Zaprezentowane prace wykazują znaczący wpływ częstotliwości pola elektromagnetycznego na przenikalności elektryczną, dielektryczną oraz magnetyczną badanych materiałów. Zagadnienie to jest szczególnie istotne z uwagi na fakt, że od wspomnianych właściwości materiałowych zależy zarówno rozkład pola magnetycznego w obwodzie magnetycznym jak i również wszystkie parametry pracy układu. Od przenikalności elektrycznej i dielektrycznej ferrytu zależą także straty wydzielane w formie ciepła na skutek indukowania się prądów wirowych i przesunięcia dielektrycznego. Poziom strat cieplnych jest szczególnie istotny w wysokoczęstotliwościowych aplikacjach małomocowych, w których każda dodatkowa strata energii znacząco zmniejsza wypadkową efektywność układu. W omawianym rozdziale przedstawione zostaną dwie podstawowe metody analizy polowej, a także kilka ich najbardziej znanych interpretacji. Rozważaniom poddane zostaną: Metoda Elementów Skończonych MES wraz jej interpretacjami tj. metodami quasi-statycznymi, oraz Metoda Różnic skończonych FDTD (*z ang. Finite Difference Time Domain*) wraz z jej zmodyfikowaną wersją – Metodą Całki Skończonej FIT (*z ang. Finite Integral Method*).

W rozdziale trzecim rozprawy opisano Metodę Elementów Skończonych. Autor pracy wyjaśnił jej wielostopniowe ujęcie, które wykorzystano w obliczeniach. Autor niniejszej rozprawy podjął się zdefiniowania pojęć i wyjaśnienia różnic pomiędzy elementami węzłowym, krawędziowym oraz ściankowym. Przedstawione zostały stosowne równania oraz interpretacje graficzne mające na celu zobrazowanie i wyjaśnienie roli danego elementu w metodzie, a także jego powiązanie z konkretnymi wielkościami fizycznymi. Omówione zostały związki matematyczne i geometryczne pomiędzy elementami poszczególnych rzędów oraz wprowadzone zostały tzw. macierze incydencji mające na celu opisanie wielkości fizycznej związanej z siatką wyższego rzędu za pomocą wielkości fizycznej siatki niższego rzędu. Następnie omówiono zagadnienia związane z sprzężonymi modelami siatkowymi i przystąpiono do analizy modeli siatkowych reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowego oraz uproszczonego modelu reluktancyjno-rezystancyjnego. Swoje rozważania nad modelami siatkowymi Autor pracy podzielił na interpretacje 3D oraz 2D. Zaprezentowane zostały różnice oraz uproszczenia pomiędzy powyższymi podejściami, a także obszary ich zastosowań.

W rozdziale czwartym rozprawy skoncentrowano się na omówieniu metod stosowanych w analizie układów z polem elektromagnetycznym z uwzględnieniem prądów przesunięcia dielektrycznego. Rozdział ten jest kontynuacją rozważań z rozdziałów 2 oraz 3. W rozdziale tym Autor pracy przedstawił efektywną metodę umożliwiająca analizę obszaru, w którym występuje zmienne w czasie pole elektromagnetyczne w dziedzinie częstotliwości i czasu. Dla każdego z zaprezentowanych podejść sformułowane został odpowiednie równania początkowe, a także końcowe układy równań.

W rozdziale piątym przedstawiono wyniki obliczeń przeprowadzonych za pomocą opracowanego oprogramowania autorskiego. Analizie podlegać będzie układ dławika elektromagnetycznego o określonych wymiarach oraz parametrach materiałowych rdzenia ferrytowego. Przedstawione zostały warunki brzegowe, a także parametry obwodów elektrycznych i magnetycznych układu. Otrzymane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi w efekcie obliczeń przeprowadzonych z wykorzystaniem oprogramowania profesjonalnego COMSOL Multiphysics. Analizie porównawczej poddano rozkłady gęstości strumienia magnetycznego, prądów wirowych, a także prądów dielektrycznych. Porównano także przebiegi chwilowe prądu przewodzenia i strumienia skojarzonego.

Rozdział 2
Przegląd metod stosowanych w analizie układów z polem elektromagnetycznym

2.1. Wprowadzenie

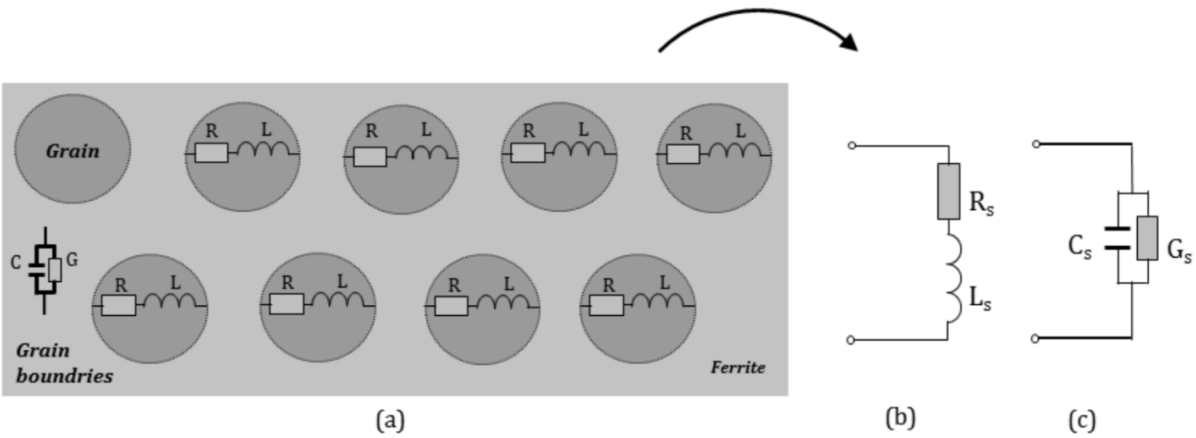
Projektując przetworniki elektromagnetyczne, w tym także transformatory i dławiki wyższych częstotliwości, dąży się do uzyskania maksymalnej efektywności przetwarzania energii. Badania realizowane nad nowoczesnymi materiałami magnetycznymi wykorzystywanymi do produkcji rdzeni ferromagnetycznych pokazują, iż w bilansie energetycznym przetworników, poza stratami cieplnymi występującymi w obwodzie elektrycznym, należy uwzględnić także szereg strat powstałych w ferrytach. Do tych strat należą między innymi straty wynikające ze strumienia rozproszenia, straty histerezowe, straty wiroprądowe wynikające z powstawania prądów wirowych oraz straty dielektryczne, tj. straty pochodzące od prądów przesunięcia dielektrycznego [19–23]. W ostatnich latach prowadzonych jest coraz więcej badań nad wpływem wzrostu częstotliwości sygnałów zasilających przetworniki na ich parametry materiałowe, a w tym także parametry pasożytnicze. Obecnie, intensywne badania prowadzone są również w zakresie wpływu pojemności pasożytniczych wynikających ze stosowania rdzeni ferrytowych na sposób działania oraz sprawność przetworników elektromagnetycznych, a także nad metodami redukcji strat z nich wynikających [4,7,8].

Wartości parametrów pasożytniczych wyznaczane mogą być numerycznie poprzez zastosowanie popularnej metody elementów skończonych MES. Przykład takich badań przedstawiony został w pozycji [24], gdzie Autorzy skupili się na wyznaczeniu wartości pasożytniczych w uzwojeniu wtórnym przetwornika. Dla uzwojenia wielopoziomowego, Autorzy, poprzez zmianę liczby poziomów, warstw oraz liczby zwojów przypadających na warstwę, starają się wyznaczyć optymalną budowę cewki dla badanego przykładu. Z przeprowadzonej w tej pracy analizy wynika, że dla niezoptymalizowanego przypadku wartość wypadkowa pojemności pasożytniczej cewki może wynieść do 150pF.

Wyznaczanie wartości pojemności pasożytniczych układu przeprowadzić można także w sposób eksperymentalny. Podejście takie zostało szczegółowo omówione w pracy [25]. Autorzy tej pracy zaprezentowali możliwe podejścia eksperymentalnego wyznaczenia pojemności pasożytniczych tj.: *Two-Port Network Approach* oraz *Step Response*

Approach. Pierwsza z metod wymaga wykonania serii testów stanu jałowego i zwarcia przetwornika w celu wyznaczenia jego parametrów obwodu zastępczego. Druga z metod umożliwia wyznaczenie pojemności pasożytniczej dla jednej z cewek poprzez analizę odpowiedzi skokowej przetwornika. Autorzy pracy wykazują, iż wartość pojemności pasożytniczej dla badanego przez nich przypadku może wynieść do kilku nanofaradów.

Poza pojemnościami pasożytniczymi związanymi z uzwojeniami przetworników wyróżnić można także pojemności występujące w rdzeniu ferrytowym wykonanym na jako kompozyt z proszku żelaza. Zgodnie z hipotezą E. Blechschmidta [26], uproszczoną mikrostrukturę ferrytu można przedstawić jak na Rysunku 2.1. Ciemnoszare koła reprezentują przewodzące cząstki magnetyczne (nazywane zwykle ziarnami), podczas gdy jasnoszara strefa (obszar między ziarnami) jest traktowana jako obszar stanowiący dielektryk, który można rozpatrywać jako pojemność i upływność materiału. Tak więc, oprócz zdolności koncentracji strumienia magnetycznego (wysoka wartość przenikalności magnetycznej) oraz wysokiej wartości rezystywności ograniczającej wpływ strat prądów wirowych, materiał magnetyczny będzie również wykazywał właściwości dielektryczne. Z powodu tej ostatniej właściwości, umieszczenie ferrytu w obszarze zmiennego w czasie pola elektromagnetycznego o wystarczająco wysokiej wartości częstotliwości spowoduje powstanie strat generowanych przez indukcję prądów wirowych oraz prądów przesunięcia dielektrycznego. W ekstremalnym przypadku może to nawet spowodować zmianę charakteru odbiornika z indukcyjnego na pojemnościowy.



Rys. 2.1. *Ekwiwalentny układ ferrytu proszkowego* [27]

Analizując literaturę, zauważyć można tendencje do nieuwzględniania wewnętrznych pojemności pasożytniczych rdzenia ferrytowego w obliczeniach numerycznych. Wynika to z przede wszystkim z ich ograniczonego wpływu na działanie przetwornika, szczególnie w zakresie niskich częstotliwości. Najnowsze badania pokazują jednak, że właściwości dielektryczne ferrytów proszkowych powinny stanowić istotne kryterium wyboru materiału ze względu na bardzo wysoką przenikalność dielektryczną w zakresie niskich częstotliwości oraz rosnące straty dielektryczne w zakresie bardzo wysokich częstotliwości [4,7,8].

W pracy [4] Autorzy poddają szczegółowym badaniom kilka ferrytów proszkowych z grupy manganowo - cynkowych (Mn-Zn). Rdzenie ferrytowe o różnych wielkościach tj.: T6, T29, T50, T87 oraz T152 zostały poddane szczegółowej analizie pod względem zmienności przenikalności magnetycznej, zarówno jej części rzeczywistej jak i urojonej, w warunkach rosnącej częstotliwości pola elektromagnetycznego na nie oddziaływującego. Autorzy pracy przeprowadzili także badania pod kątem wpływu wzrostu częstotliwości pola elektromagnetycznego na przenikalność elektryczną dla różnych materiałów ferrytowych tj.: 3E10, 3F36, 3E65 oraz 3C95. Na podstawie przeprowadzonej analizy wyciągnąć można interesujące wnioski, a mianowicie, że wraz z wzrostem częstotliwości oddziaływującego pola zarówno część rzeczywista jak i urojona przenikalności elektrycznej maleje. Szczególną uwagę należy zwrócić jednak na rząd wielkości względnej przenikalności dielektrycznej. Przykładowo dla materiału 3E10 i częstotliwości pola 1MHz rzeczywista względna przenikalność dielektryczna wyniosła 60678 a urojona 103988. Tak duże wartości przenikalności dielektrycznej rdzenia ferrytowego muszą wiązać się z indukowaniem się w jego wnętrzu znaczących wartości prądów przesunięcia dielektrycznego, a w związku z tym również i strat dielektrycznych.

Podobne wnioski wysunąć można analizując artykuł [8]. W pracy tej analizie poddane zostały serie ferrytów polikrystalicznych o podstawowym składzie MnFe2-2*x*Al2*x*O4, gdzie *x* waha się od 0.0 do 0.5. Badania związane z wpływem wzrostu częstotliwości na zmianę stałej dielektrycznej pozwalają wysunąć te same wnioski co w [4], a mianowicie wzrost częstotliwości pola elektromagnetycznego oddziałującego na magnetyczny materiał proszkowy skutkuje spadkiem względnej przenikalności elektrycznej ε_r. Autorzy pracy [8] przedstawili także skuteczną metodę na zmniejszenie wartości stałej dielektrycznej materiału poprzez zwiększenie wartości domieszki glinu. Modyfikacja składu chemicznego ferrytu wiąże się jednak nie tylko ze zmianą wielkości stałej dielektrycznej, ale również wpływa na wartości konduktywności i impedancji wewnętrznej materiału. Badania pokazują, że nieodpowiednia proporcja domieszek może negatywnie wpłynąć na ogólne właściwości materiału, z jednej strony zmniejszając straty związane ze stałą dielektryczną, a z drugiej strony zwiększając konduktywność materiału i straty wynikające z indukowania się prądów wirowych.

W obu publikacjach [4,8] wykazano istnienie stosunkowo wysokiej względnej przenikalności dielektrycznej ε_r szczególnie dla niskich i średnich wartości częstotliwości. Rezultaty prowadzonych badań eksperymentalnych stoją niestety często w sprzeczności z danymi parametrów podawanymi przez producentów. Prowadzi to do odstępstw i znaczących różnić w wynikach prowadzonych symulacji i obliczeń numerycznych. W związku z powyższym szczegółowa analiza przetworników elektromagnetycznych pod kątem rozpływu prądów przesunięcia dielektrycznego staje się niezwykle ważna i przydatna. W dalszej części rozdziału zaprezentowane zostaną podstawowe metody wykorzystywane w elektrotechnice w analizie zjawisk związanych z polem elektromagnetycznym, w tym zjawisk indukowania się prądów wirowych oraz prądów dielektrycznych w przetwornikach elektromagnetycznych.

2.2. Metoda Elementów Skończonych MES

2.2.1. Równania Maxwella

Analiza pola elektromagnetycznego jest fundamentalnym narzędziem wykorzystywanym zarówno w nauce, jak i w przemyśle umożliwiającym zrozumienie i wykorzystanie zjawisk elektromagnetycznych [28]. Geneza MES sięga XIX wieku, kiedy to naukowcy tacy jak Michael Faraday i James Clerk Maxwell zrewolucjonizowali rozumienie natury elektryczności i magnetyzmu, formułując podstawowe prawa i równania opisujące elektromagnetyzm. Równania Maxwella, zestaw sześciu równań różniczkowych (2.2.1) - (2.2.5) [29,30], stały się kamieniem węgielnym teorii elektromagnetyzmu, otwierając drogę do rozwoju nowoczesnej elektrotechniki i fizyki:

Prawo Faraday'a:
$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}, \tag{2.2.1}$$

Prawo Ampere'a:
$$rot\boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}_p, \tag{2.2.2}$$

Prawo Gauss'a:
$$div\boldsymbol{B} = 0, \tag{2.2.3}$$

$$div\boldsymbol{D} = \rho, \tag{2.2.4}$$

Prawo ciągłości:
$$div\boldsymbol{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho, \tag{2.2.5}$$

gdzie: $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{E}$ są odpowiednio wektorami natężenia pola magnetycznego i elektrycznego, natomiast $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}_p$ i $\boldsymbol{D}$ reprezentują wektory opisujące gęstości odpowiednio strumienia magnetycznego, prądu przewodnictwa oraz strumienia elektrycznego. Wielkość ρ stanowi gęstość ładunku elektrycznego. Występujący w równaniu (2.2.5) wektor $\boldsymbol{J}$ jest sumą dwóch składników: składnika $\boldsymbol{J_p}$ $(\boldsymbol{J_p} = \sigma\boldsymbol{E})$ reprezentującego wektor gęstości prądów przewodnictwa oraz składnika $\boldsymbol{J_c}$ wyrażającego wektor gęstości prądów przesunięcia dielektrycznego, $\boldsymbol{J_c} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}$.

Powyższe równania w sposób kompleksowy opisują dynamikę pola elektromagnetycznego w próżni jak i w ośrodkach materialnych, a każde z nich odnosi się do konkretnej wielkości fizycznej. Równanie (2.2.1) – prawo Faradaya, inaczej prawo indukcji elektromagnetycznej - mówi, że zmiana strumienia magnetycznego w czasie, przenikającego przez powierzchnię otoczoną przez pętlę przewodzącą, indukuje w tej pętli siłę elektromotoryczną. Równanie (2.2.2) zwane prawem Ampère'a-Maxwella łączy pole magnetyczne z prądem elektrycznym i zmianą pola elektrycznego w czasie. Stwierdza, że pole magnetyczne wokół zamkniętej ścieżki jest proporcjonalne do sumy prądu elektrycznego przepływającego przez powierzchnię ograniczoną tą ścieżką oraz zmiany strumienia pola elektrycznego w obrębie tej powierzchni. Równanie (2.2.3) zwane prawem Gaussa dla pola magnetycznego stwierdza, że suma linii pola wnikających w daną powierzchnie zamkniętą musi być równa sumie linii z niej wychodzących. Oznacza to, że pole magnetyczne jest bezźródłowe oraz nie istnieją izolowane bieguny magnetyczne (monopole magnetyczne), a linie pola magnetycznego zawsze tworzą zamknięte pętle. Równanie (2.2.4) zwane jest prawem Gaussa dla elektryczności opisuje, jak pole elektryczne rozchodzi się wokół ładunków elektrycznych. Strumień pola elektrycznego przenikający przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do ładunku elektrycznego zamkniętego w tej powierzchni.

2.2.1. Równania konstytutywne

Przedstawione powyżej równania dodatkowo uzupełnia się tzw. równaniami konstytutywnymi opisującymi związki materiałowe pomiędzy poszczególnymi wektorami pól.

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \tag{2.2.6}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{2.2.7}$$

$$\boldsymbol{J_p} = \sigma\boldsymbol{E}, \tag{2.2.8}$$

gdzie: μ stanowi przenikalność magnetyczną, σ to konduktywność elektryczna, ε to przenikalność dielektryczna.

2.2.2. Warunki brzegowe

Ważnym elementem każdej metody opisującej zjawiska i relacje zachodzące w przestrzeni jest właściwe przypisanie odpowiednich warunków brzegowych. Prawidłowy dobór warunków brzegowych pozwala nie tylko na skrócenie czasu konwergencji, ale również zmniejsza znacząco wielkość dyskretyzowanego obszaru co skutkuje lepszym wykorzystaniem zasobów obliczeniowych. W metodzie elementów skończonych wykorzystuje się trzy podstawowe warunki brzegowe przedstawione poniżej [31].

Tabela 2.1.*Warunki brzegowe wykorzystywane w MES*

Warunek brzegowy	Obszar jednorodny	Obszar niejednorodny
Dirichlet – warunek brzegowy I-go stopnia	$\alpha = 0$ dla Γ_1	$\alpha = \alpha_f$ dla Γ_1
Neumann – warunek brzegowy II-go stopnia	$\frac{\partial\alpha}{\partial n} = 0$ dla Γ_2	-
Neumann – warunek brzegowy III-go stopnia	$\frac{\partial\alpha}{\partial n} + k\alpha = 0$ dla Γ_2	$\frac{\partial\alpha}{\partial n} + k\alpha = \alpha_g$ dla Γ_2

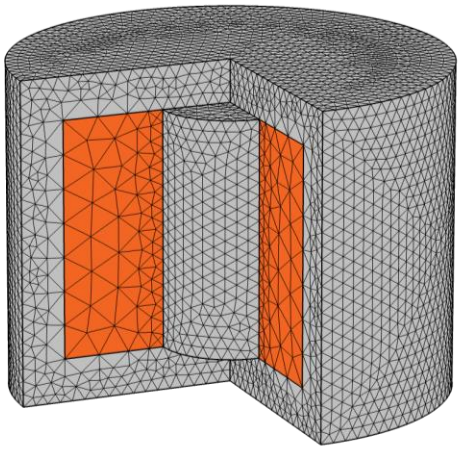
gdzie: α jest nieznaną funkcją opisująca rozkład wartości funkcji na granicy Γ obszaru *D*, Γ_1 oraz Γ_2 są wycinkami granicy Γ między którymi zachodzi zależność: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ oraz $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$, α_g jest zadaną wartością początkową funkcji, natomiast k jest przyjętą wartością stałą.

W praktyce spotkać możemy jeszcze dwa inne rodzaje warunków brzegowych tj.: warunek okresowy [31,32] oraz warunek asymptotyczny (z ang. *Asymptotic boundary condition* - ABC) [33]. Pierwszy z wymienionych rodzajów warunków brzegowych jest szczególnie przydatny podczas pracy strukturami, które wykazują pewną symetrię w rozkładzie pola elektromagnetycznego, ale ani warunki brzegowe Dirichleta, ani Neumanna nie mogą zostać zastosowane. Przypisując warunki okresowe wzdłuż co najmniej dwóch linii granicznych, można zredukować strukturę i przeprowadzić analizę tylko na jej części, a pominięte części stają się jej lustrzanymi odbiciami.

Drugi z wspomnianych warunków jest stosowany głównie dla geometrii o symetrii osiowej, czyli struktur symetrycznych względem osi obrotu. Struktury takie charakteryzują się symetrycznym rozkładem pola wzdłuż całej osi, dlatego analizy 3D tychże geometrii upraszcza się do układu 2D. Przykład geometrii osiowosymetrycznej przedstawiony został na Rysunku 2.2.

2.2.3. Siatka dyskretyzacyjna

Kolejny istotnym elementem MES jest dyskretyzacja przestrzenna badanego obszaru. Cały analizowany obszar D_m dzielony jest na m mniejszych elementów ($m = 1, 2, 3, \ldots, N_m$). Sposób, w jaki przeprowadzany jest podział oraz kształt elementów jakimi jest dzielony ma znaczący wpływ na dokładność rozwiązania, czas uzyskania zbieżności obliczeń, a także ilość wymaganych zasobów obliczeniowych. Zagadnienia, do rozwiązywania których wykorzystywany jest MES, podzielić można na jednowymiarowe, dwuwymiarowe oraz trójwymiarowe. Dla przypadków jednowymiarowych analizowany obszar jest krzywą, a każdy podobszar (element) jest odcinkiem. Połączenie sąsiednich odcinków ze sobą tworzy oryginalną krzywą. Dla problemów dwuwymiarowych analizowany obszar jest powierzchnią, a elementy siatki dyskretyzacyjnej są wielokątami – najczęściej trójkątami lub prostokątami. Dla obiektów trójwymiarowych, do podziału przestrzennego badanego obszaru wykorzystywane są najczęściej czworościany oraz sześciościany. Przykład takiego podziału przedstawiony został na Rys. 2.2.



Rys. 2.2. *3D siatka dyskretyzacyjna czworościenna dla metody elementów skończonych*

2.2.4. Metody wykorzystujące potencjały

Współcześnie do analizy rozkładów pola elektromagnetycznego stosuje się metody wykorzystujące potencjały wektorowe i skalarne [28]. Wśród nich wyróżnia się skalarne potencjały: magnetyczny Ω [34,35] i elektryczny V [36–38] oraz wektorowe potencjały magnetyczny $\boldsymbol{A}$ [39,40] oraz elektryczne $\boldsymbol{T}$ i $\boldsymbol{T}_0$ [41]. W Tabeli 2.2. zestawiono podstawowe metody występujące w metodzie elementów skończonych, a także związane z nimi zależności [28].

Dla obszarów, w których występuje pole elektromagnetyczne, równania związane z polem magnetycznym i elektrycznym należy rozwiązywać wspólnie jako pola wzajemnie sprzężone [42,43]. W tym celu łączy się ze sobą równania opisujące rozkład pola magnetycznego i elektrycznego w jeden układ równań.

- sformułowanie $\boldsymbol{A}$-V – sformułowanie to wykorzystuje wektorowy potencjał $\boldsymbol{A}$ do opisu pola magnetycznego oraz potencjał skalarny V dla pola elektrycznego [42,44].
- sformułowanie $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ – sformułowanie wykorzystywane dla układów, w których występują wielospójne obszary przewodzące. Wykorzystuje się w nim wektorowy potencjał $\boldsymbol{A}$ do opisu pola magnetycznego, potencjał skalarny V dla pola elektrycznego, natomiast wektorowy potencjał $\boldsymbol{T}_0$ wykorzystywany jest do opisu elektrycznego pola przepływowego prądów indukowanych w uzwojenia cienkozwojnych.
- sformułowanie $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{T}$ – sformułowanie to wykorzystuje wektorowy potencjał $\boldsymbol{A}$ do opisu pola magnetycznego oraz wektorowy potencjał $\boldsymbol{T}$ do opisu pola elektrycznego w masywnych obszarach jednospójnych [45].
- sformułowanie Ω-$\boldsymbol{T}$ – sformułowanie to wykorzystuje skalarny potencjał Ω do opisu pola magnetycznego oraz potencjał wektorowy $\boldsymbol{T}$ do opisu pola elektrycznego w masywnych obszarach jednospójnych [46].
- sformułowanie Ω-$\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{T}_0$ – sformułowanie wykorzystywane w analizie układów, w których występują wielospójne obszary przewodzące. Do opisu pola magnetycznego wykorzystywany jest skalarny potencjał magnetyczny Ω, a do opisu pola elektrycznego w masywnych, wielospójnych obszarach przewodzących – potencjały wektorowe $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{T}_0$
- sformułowania $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{T}_0$ oraz $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{T}_0$ – wykorzystuje do opisu pola elektrycznego i magnetycznego tylko wektorowe potencjały magnetyczny $\boldsymbol{A}$ oraz elektryczny $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}_0$, przy czym sprzężenie $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{T}_0$ wykorzystuje się w analizie masywnych układów wielospójnych, podczas gdy potencjał $\boldsymbol{T}_0$ do analizy układów uzwojeń wykonanych z cienkich przewodów.

W rozprawie, do analizy układu z polem elektromagnetycznym i udziałem prądów przesunięcia dielektrycznego, wykorzystano metodę $\boldsymbol{A}$-V oraz $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$. W związku z tym tylko te metody zostaną w dalszej części rozprawy omówione bardziej szczegółowo.

Tabela 2.2. *Metody wykorzystujące potencjały do opisu rozkładu pola elektromagnetycznego*

Metoda	Zależności	Równania	Warunki brzegowe
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{rot}(\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}$	$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$
V	$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \mathrm{grad}V$	$\mathrm{div}\delta(\mathrm{grad}V) = \mathrm{div}\delta\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$	$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
$\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{T} = \mathrm{grad}\Omega$	$\mathrm{div}\mu(\mathrm{grad}\Omega) = -\mathrm{div}(\mu\boldsymbol{T})$	$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$
	$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{T}_0 = \mathrm{grad}\Omega$	$\mathrm{div}\mu(\mathrm{grad}\Omega) = -\mathrm{div}(\mu\boldsymbol{T}_0)$	$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$
	$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_0 = \mathrm{grad}\Omega$	$\mathrm{div}\mu(\mathrm{grad}\Omega) = -\mathrm{div}\mu(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_0)$	$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{J} = \mathrm{rot}\boldsymbol{T}$	$\mathrm{rot}\delta^{-1}(\mathrm{rot}\boldsymbol{T}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\mathrm{div}\boldsymbol{J} = 0$
$\boldsymbol{T}_0$	$\boldsymbol{J}_0 = \mathrm{rot}\boldsymbol{T}_0$	$\mathrm{rot}\delta^{-1}(\mathrm{rot}\boldsymbol{T}_0) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\mathrm{div}\boldsymbol{J}_0 = 0$
$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T_0}$	$\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_0 = \mathrm{rot}\boldsymbol{T} + \mathrm{rot}\boldsymbol{T}_0$	$\mathrm{rot}\delta^{-1}(\mathrm{rot}\boldsymbol{T} + \mathrm{rot}\boldsymbol{T}_0) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_0) = 0$

2.3. Metody Quasi-statyczne

Rozwiązywanie układu polowego metodą elementów skończonych bywa często bardzo czaso- i zasobo-chłonne, w szczególności dla skomplikowanych modeli trójwymiarowych. W zależności od gęstości siatki dyskretyzacyjnej i jej rodzaju liczba równań wymagających rozwiązania sięgać może od kilkuset tysięcy do nawet kilkunastu milionów. Mimo, że obecnie stosowane stacje robocze posiadają wystarczające zasoby obliczeniowe, żeby poradzić sobie z tak skomplikowanymi obliczeniami, to często budując modele przyjmuje się pewne uproszczenia w celu skrócenia czasu konwergencji. Jednym z zastosowanych uproszczeń jest zaniedbanie składnika opisującego zmiany w czasie wektora indukcji magnetycznej - $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$, wektora indukcji elektrycznej - $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ lub zjawisk związanych z propagacją fal elektromagnetycznych [47,48]. Wybór konkretnej metody obliczeniowej zależy ściśle od selekcji zjawisk jakie podlegają analizie. W tym celu stosuje się często teorię propagacji fali elektromagnetycznej w próżni.

Przyjmując, że:

$$\boldsymbol{E} = E'\mathbb{E}, \tag{2.3.1}$$

$$\boldsymbol{B} = B'\mathbb{B}, \tag{2.3.2}$$

gdzie: *E*' oraz *B*' są względnymi wartościami natężenia pola elektrycznego oraz indukcji magnetycznej, natomiast parametry $\mathbb{E}$ oraz $\mathbb{B}$ są bezwymiarowymi wielkościami pierwszego rzędu.

Należy zauważyć, że w analizie przestrzennej dla pochodnych przestrzennych i czasowych wektora natężenia elektrycznego oraz indukcji magnetycznej można przyjąć następujące przybliżenia:

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial x} \approx \frac{E'}{L}, \tag{2.3.3}$$

$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \approx \frac{E'}{T}, \tag{2.3.4}$$

gdzie: *L* i *T* odpowiadają kolejno jednostkom przestrzeni i czasu.

Zakładając, że fala elektromagnetyczna propagowana jest w próżni, przyjąć można:

$$\frac{E'}{L} \approx \frac{B'}{T} \rightarrow E' \approx |v|B', \tag{2.3.5}$$

$$\frac{B'}{\mu L} \approx \frac{\varepsilon E'}{T} \rightarrow B' \approx \frac{|v|}{c^2}E', \tag{2.3.6}$$

gdzie: v to prędkość układu $|v| = \frac{L}{T}$ natomiast *c* stanowi prędkość propagacji fali w próżni równą $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Stosując powyższe zależności można wyznaczyć jednoznaczne kryteria wyboru poszczególnych modeli quasi-statycznych.

2.3.1. Metoda elektro-quasi-statyczna (EQS)

Metoda EQS pozwala w sposób skuteczny prowadzić analizy związane z rozpływem prądów przewodzenia oraz przesunięcia dielektrycznego powstałych na skutek oddziaływania pola elektrycznego. Warunkiem koniecznym do zastosowania metody jest założenie: $E' \gg |v|B'$. Przyjęty wówczas warunek umożliwia zaniedbanie członu $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

związanego z indukcją magnetyczną i tym samym sprowadzenie równań Maxwella do poniższej postaci:

$$
\begin{aligned}
&div\left(\boldsymbol{J}_p + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0,\\
&rot\boldsymbol{E} = 0,\\
&div\boldsymbol{J}_p = 0,\\
&div\boldsymbol{D} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.7}
$$

W celu uzyskania rozwiązania wykorzystać można metodę V z Tabeli 2.2. wykorzystującą skalarny potencjał elektryczny opisany wzorem (2.3.8):

$$
\boldsymbol{E} = gradV. \tag{2.3.8}
$$

Podstawiając równanie (2.3.8) do uproszczonego równania prawa Ampere'a z zestawu równań (2.3.7) uzyskać można sformułowanie opisujące rozkład elektrycznego potencjału skalarnego w analizowanym obszarze [49–51]:

$$
div\left(\sigma \cdot gradV + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \cdot gradV\right) = 0. \tag{2.3.9}
$$

Modele elektro-quasi-statyczne są często wykorzystywane tam gdzie badane są struktury o właściwościach rezystywno-pojemnościowych takie jak izolatory energetyczne czy też przepusty wysokonapięciowe [49–51].

2.3.2. Metoda magneto-quasi-statyczna (MQS)

Metoda MQS umożliwia analizę obszarów z polem elektromagnetycznym zakładając znikomy wpływ indukcji elektrycznej $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ i zjawiska indukowania się prądów przesunięcia dielektrycznego [52]. Zakładając, że $B' >> \left(\frac{|v|}{c^2}\right) E'$, wyprowadzić można uproszczoną formę równań Maxwell'a dla metody MQS:

$$
\begin{aligned}
&rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\
&rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_p,\\
&div\boldsymbol{B} = 0,\\
&div\boldsymbol{J}_p = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.10}
$$

Stosując metodę MQS wygodnie jest posłużyć się sprzężonym sformułowaniem $\boldsymbol{A}$-V z Tabeli 2.2 wykorzystujący do opisu pola magnetycznego wektorowy potencjał magnetyczny $\boldsymbol{A}$, a do opisu pola elektrycznego elektryczny potencjał skalarny:

$$\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = gradV. \tag{2.3.11}$$

Podstawiając równania (2.3.11) do uproszczonego równania prawa Ampere'a oraz do równania wynikającego z prawa Gausa dla pola elektrycznego, tj. z równania (2.3.10) uzyskać można sformułowania opisujące rozkład pola elektromagnetycznego w badanej przestrzeni. W przedstawionym przykładzie założono brak źródeł zewnętrznych.

$$rot\left(\frac{1}{\mu} rot\boldsymbol{A}\right) + \sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - gradV\right) = 0,$$
$$div\sigma\left(gradV - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{2.3.12}$$

Modele magneto-quasi-statycznych znajdą zastosowanie w analizie struktur rezystywno-indukcyjnych, takich jak proste modele transformatorów niskich częstotliwości czy też maszyn elektrycznych, gdyż wszelkie zjawiska związane z prądami przesunięcia dielektrycznego i pojemością struktury są w tych przypadkach zazwyczaj pomijane.

2.3.3. Metoda magneto-elektro-quasi-statyczna – model Darwin'a

Model Darwina pozwala na analizę obszarów z polem elektromagnetycznym włączając w nią zarówno efekty związane z indukcją magnetyczną jak i elektryczną. To znaczy, że poza rozpływem prądów przewodzenia i strumienia magnetycznego, metoda umożliwia także analizę dystrybucji prądów wirowych oraz przesunięcia dielektrycznego. Uproszczenie zastosowane w modelu względem pełnego modelu MES polega na wyeliminowaniu zjawisk związanych z prorogacją fali elektromagnetycznej. Zjawiska te wywierają znaczący efekt na działanie przetwornika dopiero pod wpływem pola o bardzo wysokiej częstotliwości, często na poziomie setek MHz. Z tego względu model Darwina jest szczególnie przydatny w aplikacjach niskich częstotliwości, gdzie zjawiska falowe mogą zostać pominięte.

Głównym elementem metody Darwina jest rozkład wektora natężenia elektrycznego na dwa składniki zgodnie z równaniem (2.3.13) [13,14]:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{irr} + \boldsymbol{E}_{sol}, \tag{2.3.13}$$

gdzie: $\boldsymbol{E}_{irr}$ to przepływowy wektor natężenia pola elektrycznego, gdzie $rot\boldsymbol{E}_{irr}=0$, natomiast $\boldsymbol{E}_{sol}$ stanowi solenoidalny składnik natężenia pola elektrycznego, gdzie $div\boldsymbol{E}_{sol}=0$.

Wykorzystując równanie (2.3.13) oraz zaniedbując efekt promieniowania w oparciu o teorie quasi-statycznych wartości granicznych [53], równania Maxwell'a można zapisać w formie przedstawionej poniżej

$$\begin{gathered} rot\boldsymbol{E}_{sol} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_p + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \boldsymbol{E}_{irr}, \\ div\boldsymbol{B} = 0, \\ div(\varepsilon \boldsymbol{E}_{irr}) = 0, \\ div\boldsymbol{J}_p = 0 \end{gathered} \tag{2.3.14}$$

Do rozwiązania modelu Darwina, w którym badane są zjawiska związane zarówno ze zmiennym polem magnetycznym jak i elektrycznym, dobrze jest ponownie posłużyć się sformułowaniem $\boldsymbol{A}$-V. Wykorzystując zależności z równania (2.3.11) wyznaczyć można układ równań opisujący rozkład pola magnetycznego oraz elektrycznego w badanym obszarze. Podobnie jak we wcześniejszym przykładzie przyjęto brak źródeł zewnętrznych.

$$\begin{gathered} rot\left(\frac{1}{\mu} rot\boldsymbol{A}\right) + \sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - gradV\right) + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon gradV = 0, \\ div\left(\sigma\left(gradV - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon gradV\right) = 0. \end{gathered} \tag{2.3.15}$$

Uproszenie zaimplementowane w modelu Darwina polegające na zaniedbaniu zjawisk związanych z propagacją fali elektromagnetycznej, umożliwia to znaczące zmniejszenie czasu konwergencji i ilości potrzebnych zasobów obliczeniowych. Jednocześnie umożliwia analizę zjawisk istotnych dla obszarów z polem elektromagnetycznym o niskiej częstotliwości. Metoda ta znajdzie zastosowanie w analizach polowych wszystkich struktur wykazujących właściwości rezystancyjno-indukcyjno-pojemnościowe.

2.4. Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych (z ang. *Finite-Difference-Time-Domain* FDTD), zwana również metodą Yee's, została pierwotnie zaproponowana przez Kane'a S. Yee w 1966 roku [54]. Yee przedstawił dyskretne rozwiązanie równań Maxwella, oparte na centralnych przybliżeniach różnicowych, które pozwalały na uzyskanie dokładności drugiego rzędu dzięki rozłożeniu pól elektrycznych i magnetycznych w przestrzeni i czasie. Mimo, że początkowo nie zyskała szerokiego zainteresowania, w 1975 roku Taflove i Brodwin zastosowali ją do symulacji rozpraszania i ogrzewania, a w 1977 roku Holland użył jej do obliczania prądów indukowanych przez impuls elektromagnetyczny na powierzchni samolotów. Rozwój technologii komputerowej od końca lat 70. umożliwił praktyczne zastosowanie metody Yee, która stała się popularna dzięki swojej prostocie i efektywności obliczeniowej. Metoda FDTD jest stosunkowo prosta w aplikacji, a jednocześnie zdolna do rozwiązywania bardzo złożonych problemów inżynieryjnych.

2.4.1. Różniczkowy opis pola

Celem metody FDTD jest na rozwiązanie równań Maxwell'a wykorzystując ich różniczkową formę, przedstawioną w równaniach (2.2.1)-(2.2.6) i wykorzystując centralne przybliżenia różnicowe pochodnych zarówno po przestrzeni jak i po czasie. W metodzie tej warunki brzegowe przyjmuje się takie same jak przy metodzie elementów skończonych. Wykorzystując przedstawione wcześniej prawa Faraday'a i Ampere'a w formie operatorowej tj.: równania (2.2.1) oraz (2.2.2), a także zależności konstytutywne z równań (2.2.6) oraz (2.2.8) wyznaczyć można sformułowania opisujące rozkład natężenia pola magnetycznego i elektrycznego dla poszczególnych osi układu współrzędnych.

Tabela 2.3. *Równania różniczkowe w metodzie FDTD*

Natężenie pola magnetycznego	Natężenie pola elektrycznego
$\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}$	$\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_{px}$
$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}$	$\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} - J_{py}$
$\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}$	$\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} - J_{pz}$

2.4.2. Metoda różnic centralnych

Równania przedstawione w Tabeli 2.3 można rozwiązać poprzez zastosowanie metody zwanej metodą różnic centralnych (z ang. *Central Difference Approximation Method*) [55]. Zakładając, że funkcja *f(x)* jest ciągła w całej swojej dziedzinie, jej rozwiniecie w szereg Taylora dla argumentu $x \pm \frac{\Delta x}{2}$ wyglądać będzie następująco:

$$f\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x) \pm \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\frac{1}{1!} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\frac{1}{2!} \pm \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3\frac{1}{3!} + \cdots \tag{2.4.1}$$

Odejmując od siebie rozwinięcia Taylora funkcji $f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ oraz funkcji $f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)$ i dzieląc wyrażenie obustronnie przez Δx otrzymuje się następującą zależność:

$$\frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \Delta x^2 \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\frac{1}{24} + \cdots \tag{2.4.2}$$

Z zapisu równania (2.4.2) wynika, że człony związane z parzystymi pochodnymi znoszą się. Przekształcając następnie równanie (2.4.2), pochodną funkcji *f(x)* wyznaczyć można poprzez następujące wyrażenie:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + \zeta, \tag{2.4.3}$$

gdzie: ζ to błąd przybliżenia, którego amplituda jest proporcjonalna do Δx^2oraz pochodnej 3-go rzędu funkcji *f(x)*.

Wyrażenie (2.4.3) nazywane jest przybliżeniem różnic centralnych i wykorzystywane będzie w dalszych rozważaniach do przekształcenia równań z Tabeli 2.3. w celu uzyskania wielkości fizycznych opisujących rozkład pola magnetycznego w badanym obszarze.

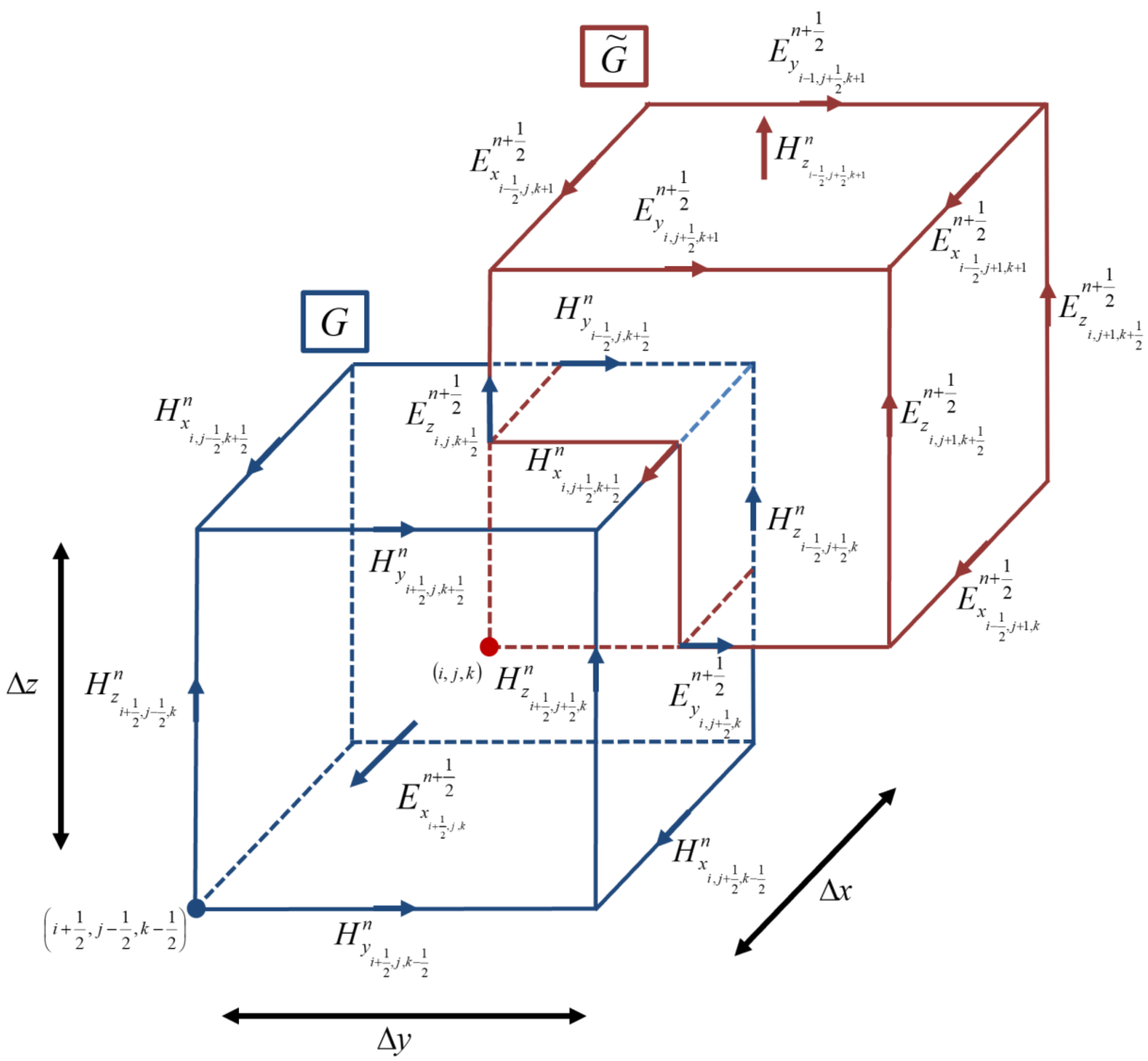
2.4.3. Siatka dyskretyzacyjna

Próbki dyskretne natężeń pola magnetycznego i elektrycznego nie mogą być zlokalizowane w tej samej przestrzeni i czasie. Zbieżność równań można uzyskać przesuwając próbki względem siebie w czasie o $\frac{\Delta t}{2}$ i w przestrzeni o $\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta z}{2}$ tworząc tym samym tzw. pół-kroki czasowe i przestrzenne. Przesunięcie względem siebie wspomnianych wielkości skutkuje powstaniem specyficznej dla metod z rodziny FDTD siatki dyskretyzacyjnej zwanej także siatką dualną przedstawioną na Rysunku 2.3.

W pierwszej kolejności wydzielić należy dwa osobne modele siatkowe G oraz $\hat{G}$, z czego model $\hat{G}$ nazwany zostanie modelem siatkowym drugiego stopnia. Tworząc wspomniane modele siatkowe trzeba przestrzegać kilku podstawowych zależności:

- Każda z krawędzi $L_m \in G$ może przecinać tylko jedną ściankę $\hat{S}_m \in \tilde{G}$, to samo tyczy się krawędzi $\tilde{L}_m \in \tilde{G}$ i ścianki $S_m \in G$
- Każdy z węzłów $N_l \in G$ może mieścić się w obszarze tylko jednej komórki drugiego stopnia $\tilde{V}_e \in \tilde{G}$, to samo tyczy się węzłów $\tilde{N}_l \in \tilde{G}$ i $V_e \in G$
- Suma objętości wszystkich komórek siatki pierwszego stopnia $V_e \in G$ musi być równa sumie objętości wszystkich komórek siatki drugiego stopnia $\tilde{V}_e \in \tilde{G}$. Sumaryczny obszar obu siatek stanowi dyskretyzowany obszar.

Dla każdego z modeli siatkowych G oraz $\hat{G}$ da się wyróżnić wielkości opisujące poszczególne komórki tj.: L, S, V oraz $\hat{L}$, $\hat{S}$, $\hat{V}$, które oznaczają odpowiednio długość krawędzi komórki, powierzchnie ścianki komórki oraz objętość komórki dla odpowiednio modelu siatkowego G oraz $\hat{G}$. Wartości m, l oraz e są liczbami całkowitymi i odpowiadają odpowiednio liczbie krawędzi, węzłów i elementów.



Rys. 2.3. *Dualna siatka dyskretyzacyjna dla metody FDTD*

2.4.4.Równania polowe FDTD

Stosując formułę (2.4.3) można przekształcić równania z Tabeli 2.3. w formę dyskretną w postaci (2.4.4) oraz (2.4.5).

$$\mu\left(\frac{H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+1}-H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta t}\right)=\left(\frac{E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\right)-\left(\frac{E_{z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right),$$

$$\mu\left(\frac{H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1}-H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta t}\right)=\left(\frac{E_{z_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k+1}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\right),$$

$$\mu\left(\frac{H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n+1}-H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n}}{\Delta t}\right)=\left(\frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j+1,k}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)-\left(\frac{E_{y_{i+1,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right),$$

(2.4.4)

$$\varepsilon\left(\frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right)=\left(\frac{H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n}-H_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}^{n}}{\Delta y}\right)-\left(\frac{H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n}-H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta z}\right)-J_{px_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n},$$

$$\varepsilon\left(\frac{E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right)=\left(\frac{H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n}-H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta z}\right)-\left(\frac{H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n}-H_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n}}{\Delta x}\right)-J_{py_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n},$$

$$\varepsilon\left(\frac{E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right)=\left(\frac{H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n}-H_{y_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n}-H_{x_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta y}\right)-J_{pz_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n},$$

(2.4.5)

gdzie: n, i, j, k są liczbami całkowitymi. Czas dla badanego układu podlega dyskretyzacji i jest równy iloczynowi kroku czasowego i czasu próbkowania $t = n \cdot \Delta t$. Identyczna zależność zachodzi dla współrzędnych siatki dyskretyzacyjnej, które wyrażone mogą zostać w następujący sposób: $(x, y, z)_{i,j,k} = (i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, k \cdot \Delta z)$.

Po przeprowadzeniu prostego przekształcenia zależności (2.4.4) oraz (2.4.5) uzyskać można iteracyjną formę równań opisujących rozkład natężeń pola magnetycznego i elektrycznego wzadanym kierunku osi w następnym kroku czasowym wykorzystując dane z poprzedniej iteracji.

$$H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+1} = H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n} + \frac{\Delta t}{\mu}\left[\left(\frac{E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\right) - \left(\frac{E_{z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)\right],$$

$$H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1} = H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n} + \frac{\Delta t}{\mu}\left[\left(\frac{E_{z_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right) - \left(\frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k+1}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\right)\right],$$

$$H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n+1} = H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n} + \frac{\Delta t}{\mu}\left[\left(\frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j+1,k}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right) - \left(\frac{E_{y_{i+1,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right)\right],$$

(2.4.6)

$$E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} = E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left[\left(\frac{H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n} - H_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}^{n}}{\Delta y}\right) - \left(\frac{H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n} - H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta z}\right) - J_{px_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n}\right],$$

$$E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} = E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left[\left(\frac{H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n} - H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta z}\right) - \left(\frac{H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n} - H_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n}}{\Delta x}\right) - J_{py_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n}\right],$$

$$E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left[\left(\frac{H_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n} - H_{y_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta x}\right) - \left(\frac{H_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n} - H_{x_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n}}{\Delta y}\right) - J_{pz_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n}\right].$$

(2.4.7)

Z uwagi na przesunięcie względem siebie próbek natężeń pola magnetycznego i elektrycznego w czasie o $\frac{\Delta t}{2}$ i w przestrzeni o $\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta z}{2}$ do rozwiązywania układu równań stosuje się często metodę kroków czasowych typu *„Leapfrog”* [56–58].

2.4.5. Prawo Grauss'a

W celu uzyskania konwergencji równań (2.4.6) oraz (2.4.7) modelowany układ musi spełniać prawo Gauss'a (2.2.3). Zakładając, że badana przestrzeń jest wolna od ładunków zewnętrznych, wówczas:

$$div\boldsymbol{B} = 0, \tag{2.4.8}$$

jeśli wyrażenie (2.4.8) poddamy różniczkowaniu po czasie to:

$$\frac{\partial}{\partial t} div\boldsymbol{B} = 0. \tag{2.4.9}$$

Stosując wcześniej zaprezentowaną metodę różnic centralnych(2.4.3), prawo Gauss'a zapisać można w formie dyskretnej:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{{B_x}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} - {B_x}_{i-1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{{B_y}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - {B_y}_{i+\frac{1}{2},j-1,k+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{{B_z}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - {B_z}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-1}^{n+1}}{\Delta z}\right) = 0. \tag{2.4.10}$$

Dyskretna reprezentacja równań (2.4.6) oraz (2.4.7) spełnia prawo Gaussa, jeśli całkowita gęstość ładunku w układzie dyskretnym jest stała. Dlatego też, jeśli początkowa gęstość ładunku wynosi zero, wówczas całkowita gęstość ładunku w układzie dyskretnym również pozostanie zerowa a Prawo Gauss'a zostanie zachowane.

2.5. Metoda całkowa

Wszystkie makroskopowe zjawiska elektromagnetyczne występujące w praktyce można opisać matematycznie za pomocą konkretnego zestawu równań Maxwella. W związku z powyższym, równania te wykorzystywane są w znaczącej większości metod do analizy obszarów z polem elektromagnetycznym. Cechą odróżniającą poszczególne metody od siebie jest natomiast interpretacja i podejście do danego problemu. Tak również jest w przypadku metody całkowej FIT (z ang. *The Finite Integral Technique*). Metoda ta jest wariacją opisanej wyżej metody różnic skończonych FDTD. Sformułowana i opisana została przez Thomasa Weiland'a w 1977 roku [59]. Znana jest z jej efektywnego podejścia do analiz elektromagnetycznych, szczególnie tych związanych z zastosowaniami inżynieryjnymi o złożonej geometrii i różnorodnych materiałach. Dla omawianego podejścia, siatkę dyksretyzacyjną formułuje się w sposób identyczny jak zostało do przedstawione przy okazji omawiania metody FDTD w rozdziale 2.4.

2.5.1. Równania Maxwell'a

Metoda FIT wykorzystuje całkową formę równań Maxwell'a przedstawioną poniżej [54]:

Prawo Faraday'a: $$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\iint_{S(L)} \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{2.5.1}$$

Prawo Ampere'a: $$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_{S(L)} \left(\boldsymbol{J}_p + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}\right) \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (2.5.2)$$

Prawo Gauss'a: $$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \qquad (2.5.3)$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \boldsymbol{\rho} \cdot dV, \qquad (2.5.4)$$

2.5.2. Równania i przekształcenia

Równania (2.5.1)-(2.5.4) mogą zostać przedstawione w formie macierzowej za pomocą operatorów dyskretnej dywergencji oraz rotacji [60].

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{e}} = -\frac{\partial}{\partial t}\hat{\hat{\boldsymbol{b}}}, \\
\widetilde{\boldsymbol{C}}\hat{\boldsymbol{h}} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\hat{\boldsymbol{d}}} + \hat{\hat{\boldsymbol{j}}}, \\
\boldsymbol{S}\hat{\hat{\boldsymbol{b}}} = 0, \\
\tilde{\boldsymbol{S}}\hat{\hat{\boldsymbol{d}}} = \boldsymbol{q}_E,
\end{gathered} \qquad (2.5.5)$$

gdzie: $\boldsymbol{S}$ oraz $\boldsymbol{C}$ są odpowiednio operatorami dyskretnej dywergencji i rotacji dla modelu siatkowego pierwszego stopnia *G*, $\tilde{\boldsymbol{S}}$ oraz $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ są operatorami dyskretnej dywergencji i rotacji dla modelu siatkowego drugiego stopnia $\hat{G}$, $\hat{\boldsymbol{e}}$ jest macierzą napięć elektrycznych wzdłuż krawędzi wyznaczających granice komórek *L* siatki *G*, $\hat{\hat{\boldsymbol{b}}}$ jest macierzą strumieni magnetycznych przenikających przez ścianki komórek *S* siatki *G*, $\hat{\hat{\boldsymbol{d}}}$ jest wektorem strumieni indukcji elektrycznej przenikających przez ścianki komórek $\hat{S}$ siatki $\hat{G}$, $\hat{\boldsymbol{h}}$ jest wektorem sił elektromotorycznych przyporządkowanych do krawędzi wyznaczających granice komórek $\hat{L}$ siatki $\hat{G}$, $\hat{\hat{\boldsymbol{j}}}$ jest wektorem prądów przenikających przez ścianki komórek $\hat{S}$ siatki $\hat{G}$ natomiast $\boldsymbol{q}_E$ wektorem ładunków elektrycznych zgromadzonych w komórkach siatki $\hat{G}$.

Należy mieć na uwadze, że macierze $\mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\mathbf{S}$ oraz $\tilde{\mathbf{S}}$ są macierzami incydencji o wyrazach równych -1, 1 albo 0. Zawierają one informacje na temat zależności pomiędzy krawędziami siatki G oraz $\hat{G}$, a także na temat orientacji tych krawędzi w stosunku do ścianek komórek.

W celu dalszej analizy równania (2.5.5) należy uzupełnić o tak zwane związki konstytutywne wynikające z równań (2.2.6) - (2.2.8) [60].

$$\hat{\hat{\boldsymbol{d}}} = \boldsymbol{M}_{\varepsilon}\hat{\boldsymbol{e}},$$
$$\hat{\hat{\boldsymbol{j}}} = \boldsymbol{M}_{\kappa}\hat{\boldsymbol{e}}, \qquad (2.5.6)$$
$$\hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{M}_{\upsilon}\hat{\hat{\boldsymbol{b}}},$$

gdzie: $\boldsymbol{M}_{\varepsilon}$, $\boldsymbol{M}_{\kappa}$, $\boldsymbol{M}_{\upsilon}$ są odpowiednio macierzami przenikalności elektrycznej, konduktywności oraz reluktywności komórek.

Metoda FIT wykorzystuje w przekształceniach dwie podstawowe zależności wektorowo-analityczne związane z iloczynem dywergencji i rotacji oraz iloczynem rotacji i gradientu.

$$div \cdot rot = 0, \qquad (2.5.7)$$
$$rot \cdot grad = 0. \qquad (2.5.8)$$

Wykorzystując równanie (2.5.7) oraz dyskretne macierze rotacji i dywergencji wyznaczyć można następujące zależności pomiędzy macierzami incydencji dla siatki G oraz dualnej siatki $\hat{G}$:

$$\boldsymbol{SC} = 0,$$
$$\tilde{\boldsymbol{S}}\tilde{\boldsymbol{C}} = 0. \qquad (2.5.9)$$

Kolejną ważną zależnością wykorzystywaną w metodzie FIT, wynikającą z dualnego charakteru siatek G oraz $\hat{G}$, omówionych w rozdziale 2.3., jest zależność dyskretnych macierzy rotacji [61]:

$$\boldsymbol{C} = \tilde{C}^{T}. \qquad (2.5.10)$$

Podstawiając zależność (2.5.10) do równań (2.5.9) otrzymuje się relacje dyskretne, przedstawione w (2.5.11), będące jednocześnie dyskretnymi odpowiednikami równania (2.5.8).

$$\tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}} = 0,$$
$$\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}} = 0. \qquad (2.5.11)$$

2.6. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale omówione zostały wybrane metody z zakresu analizy układów z polem elektromagnetycznym. Autor pracy w sposób szczegółowy opisał podstawy dwóch dobrze znanych metod tj.: Metody Elementów Skończonych MES oraz Metody Różnic Skończonych FDTD. Omówione zostały także wariacje wspomnianych metod mające na celu uproszczenie procesu obliczeń tj.: metody quasi-statyczne, a w tym model Darwina, dla MES oraz Metoda Całki Skończonej FIT dla FDTD.

Pierwsza z zaprezentowanych metod, metoda elementów skończonych MES, cieszy się obecnie bardzo dużą popularnością ze względu na uniwersalność jej aplikacji oraz mnogość komercyjnych wersji programów obliczeniowych ją wykorzystujących. Używana jest nie tylko w analizie rozkładu pół elektromagnetycznych i ich wpływu na otoczenie, ale także w obliczeniach związanych z wytrzymałością materiałów czy też w obliczeniach całych konstrukcji mechanicznych [62–64]. W swoich badaniach naukowych Autor rozprawy wykorzystuje interpretację FEM polegającą na podziale elementów skończonych na 4 rodzaje tj.: element węzłowy, element krawędziowy, element ściankowy oraz element objętościowy. Bardziej szczegółowy opis wspomnianego podejścia wraz z prezentacją poszczególnych sformułowań wykorzystywanych do stworzenia modelu polowego z polem elektromagnetycznych przedstawiony zostanie w rozdziale 3 niniejszej pracy poświęconym wielostopniowym podejściu MES.

W dziedzinie analizy numerycznej rozpływu pól elektromagnetycznych dąży się zawsze do maksymalnego uproszczenia i tym samym przyśpieszenia obliczeń przy zachowaniu maksymalnej dokładności. Z tego względu znaną i stosowaną praktyką jest często pomijanie obliczeń związanych z wybranym zjawiskiem fizycznych, jeśli jego wpływ na wypadkowy rozpływ badanego pola jest znikomy. W związku z tym w literaturze odnaleźć można wiele interpretacji upraszczających metodę MES w celu zmniejszenia czasu konwergencji, a także wymaganych do obliczeń zasobów pamięciowych. Spośród nich wyróżnić można wszystkie metody quasi-statyczne tj.: elektro-quasi-statyczna EQS, magneto-quasi-statyczna MQS oraz magneto-elektro-quasi-statyczna, czyli tzw. model Darwina. Każda z wspomnianych metod zaniedbuje wybrane zjawisko w celu uproszczenia procesu obliczeniowego. Metoda EQS pomija wpływ indukcji magnetycznej i skupia się jedynie na analizie rozkładu pola elektrycznego, natomiast metod MQS ignoruje wpływ indukcji elektrycznej na rozpływ pola magnetycznego czego skutkiem jest całkowite pominięcie zjawisk związanych z pojemnością pasożytniczą materiału. Obie metody wykluczają się wzajemnie, gdyż pierwsza z nich może być stosowana tylko w ośrodkach, gdzie wpływ pola magnetycznego jest znikomy, natomiast druga – gdzie wpływ pola elektrycznego jest pomijalny. Dobrym kompromisem pomiędzy oboma metodami jest tzw. model Darwina, czyli metoda magneto-elektro-quasi-statyczna EMQS. Stosowana może być dla układów z polem elektromagnetycznym, w którym żadnego ze składników nie można zaniedbać. Uproszczeniem metody względem standardowej MES jest zaniedbanie zjawisk związanych z propagacją fali elektromagnetycznej, które wywierają znaczący wpływ dla układów pracujących z wysoką częstotliwością. Z tego względu metoda EMQS wykorzystywana może być do kompleksowej analizy rozkładu pola elektromagnetycznego układów pracujących głównie z niską częstotliwością.

Kolejna przestawiona metoda - metoda FDTD - obok MES jest jedną z najpopularniejszych i najbardziej skutecznych metod do rozwiązywania zagadnień z zakresu analizy rozkładu pola elektromagnetycznego. Swoją popularność zawdzięcza przede wszystkim łatwości jej aplikacji dla obiektów o nieregularnej i skomplikowanej siatce. Metoda FDTD umożliwia wykonywanie obliczeń dla pól zmiennych w czasie o nieliniowych parametrach. Jest także często stosowana w analizie uwzględniającej wpływ wysokich częstotliwości. Nietypowy sposób dyskretyzacji przestrzennej pozwala na analizę układów nie tylko w standardowej trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej ale również w układach współrzędnych ortogonalnych, jak i nieortogonalnych [65,66]. W literaturze odnaleźć można także jej wariację, tj. Metodę Całkową FIT zaprezentowaną przez Thomasa Weiland'a w 1977 roku, która polega na analizie równań Maxwell'a w formie całkowej zamiast różniczkowej tak jak miało to miejsce dla metody FDTD. FIT pozwala na rozwiązywanie wielu problemów charakteryzujących się osobliwymi układami macierzy, przy których alternatywne metody, opierające się na stabilności przestrzennej i czasowej, mogą wykazywać brak stabilności lub dokładności przy długoterminowych obliczeniach.

Rozdział 3
Analiza elektromagnetyczna – modele polowe

3.1. Wprowadzenie

W przemyśle, analiza pola elektromagnetycznego ma kluczowe znaczenie w projektowaniu i optymalizacji szerokiej gamy urządzeń i systemów. Od prostych aplikacji, takich jak silniki elektryczne i transformatory [67–69], po zaawansowane technologie, w tym systemy telekomunikacyjne, urządzenia do obrazowania medycznego, takie jak MRI, a także technologie radarowe i satelitarne [70,71]. Zrozumienie i kontrolowanie pola elektromagnetycznego pozwala na zwiększenie wydajności, niezawodności i bezpieczeństwa urządzeń, a także na minimalizację ich wpływu na środowisko oraz oddziaływania na ludzi. W ostatnich dekadach, dzięki postępowi w dziedzinie obliczeń komputerowych, analiza pola elektromagnetycznego stała się wysoce zaawansowana i szeroko dostępna. Wykorzystanie metod numerycznych, takich jak metoda elementów skończonych MES [11,28] czy metoda różnic skończonych FDTD [54,72], pozwoliło na wysoce dokładne modelowanie i symulację zjawisk elektromagnetycznych w układach o skomplikowanych geometriach. To umożliwia projektantom i inżynierom tworzenie nowych urządzeń z unikalnymi właściwościami, a także optymalizację istniejących systemów/układów pod względem wyższej wydajności i mniejszego oddziaływania elektromagnetycznego na środowisko i otoczenie.

W niniejszym rozdziale omówione zostanie szczegółowo wielostopniowe podejście do metody elementów skończonych, a także wybrane sformułowania, które wykorzystane zostały w niniejszej pracy do utworzenia specjalistycznego oprogramowania do analizy układów z polem elektromagnetycznym. W rozdziale zaprezentowany zostanie charakterystyczny podział modelu siatkowego na poszczególne elementy tj.: elementy węzłowe, krawędziowe, ściankowe oraz objętościowe. W dalszej części rozdziału przedstawione zostaną sformułowania wykorzystujące wektorowy potencjał magnetyczny $\boldsymbol{A}$ [73,74], skalarny potencjał V [28], oraz wektorowy potencjał elektryczny $\boldsymbol{T}_0$ [34,75,76]. Dyskusji poddane zastaną także sprzężone modele siatkowe wykorzystujące do opisu obszarów z polem elektromagnetycznym połączone sformułowania $\boldsymbol{A}$-V [42,44] oraz $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ [27]. W niniejszej rozdziale omówieniu podlegać będą dwa rodzaje modeli polowych tj.: 3D model polowy układu dławika elektromagnetycznego oraz 2D model polowy układu dławika elektromagnetycznego o symetrii osiowej.

3.2. Wielostopniowe ujęcie MES

Wielostopniowe podejście do Metody Elementów Skończonych polega na rozpatrywaniu elementu skończonego jako elementu węzłowego (element stopnia zerowego), elementu krawędziowego (element stopnia pierwszego), elementu ściankowego (element stopnia drugiego) oraz elementu objętościowego (element stopnia trzeciego) [30]. Zastosowanie funkcji interpolacyjnych elementu wielostopniowego oraz zależności jakie wiążą ze sobą elementy: (a) objętościowy z ściankowym, (b) ściankowy z krawędziowym, oraz (c) krawędziowy z węzłowym, co pozwala na opracowanie sformułowań kompleksowo opisujących rozkład pola elektromagnetycznego. Wielostopniowe funkcje interpolacyjne umożliwiają również łatwiejszą adaptację siatki MES do specyficznych wymagań rozpatrywanego problemu. Pozwala to na bardziej efektywne rozwiązanie problemów elektromagnetycznych, minimalizując przy tym błędy numeryczne i zwiększając wiarygodność wyników. Autor realizując swoje badania symulacyjne korzystał z elementów węzłowych, krawędziowych oraz ściankowych. Dlatego w niniejszej pracy opis elementu objętościowego nie będzie podejmowany.

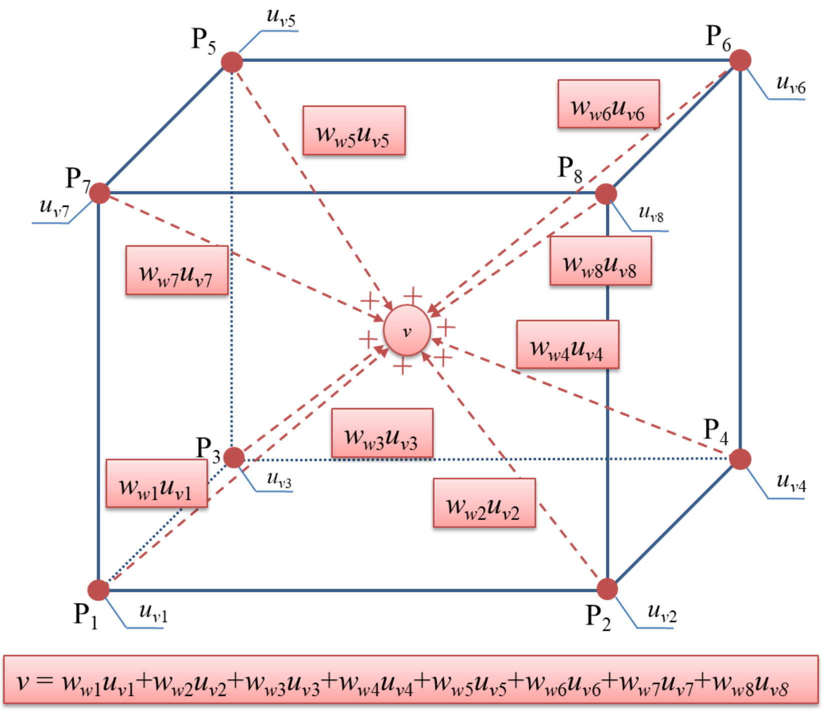
3.2.1. Element węzłowy

W elemencie węzłowym do opisu rozkładu wielkości skalarnej stosowane są klasyczne funkcje kształtu. Elementowi przyporządkowuje się funkcje skalarne w_{wi}, na podstawie których tworzy się wyrażenia opisujące rozkład wielkości skalarnej przy zadanych wartościach tej wielkości w węzłach elementu. Najczęściej za węzły przyjmuje się naroża elementu. Dla elementu skończonego o n_w węzłach rozkład funkcji skalarnej $v(x,y,z)$ można przestawić za pomocą następującego wyrażenia:

$$v = \sum_{i=1}^{n_w} w_{wi} u_{vi} = w_w u_w, \tag{3.2.1}$$

gdzie: u_{vi} (i = 1,2…n_w) jest wartością funkcji $v(x,y,z)$ w węźle P_i, $\boldsymbol{w}_w$ jest wierszową macierzą funkcji w_{wi}, a $\boldsymbol{u}_w$ wektorem wartości węzłowych u_{vi}.

Funkcje w_{wi} zwane są funkcjami interpolacyjnymi elementu węzłowego lub krócej funkcjami węzłowymi i można traktować je jako funkcje wagowe. Celem tworzenia tych funkcji jest opisanie za ich pomocą udziału potencjału skalarnego u_{vi} i-tego węzła wybranego elementu skończonego w wyrażeniu opisującym potencjał punktu Q znajdującego się we wnętrzu tego elementu skończonego. Elementy węzłowe oraz funkcje węzłowe można przestawić w sposób graficzny na podstawie podstawowych elementów takich jak sześcian co zostało wykonane na Rysunku 3.1.



Rys. 3.1. *Graficzna reprezentacja funkcji węzłowych w elemencie sześciościennym*

3.2.2. Element krawędziowy

Elementy krawędziowe, związane są z krawędziami elementu skończonego i przypisuje się im funkcje wektorowe. Element może zostać uznany za krawędziowy, jeśli rozkład wektora $\boldsymbol{a}$ w elemencie reprezentowany jest poprzez całki z tego wektora wzdłuż krawędzi łączącej punktu P_i i P_j zwane dalej wielkościami krawędziowymi wektora $\boldsymbol{a}$.

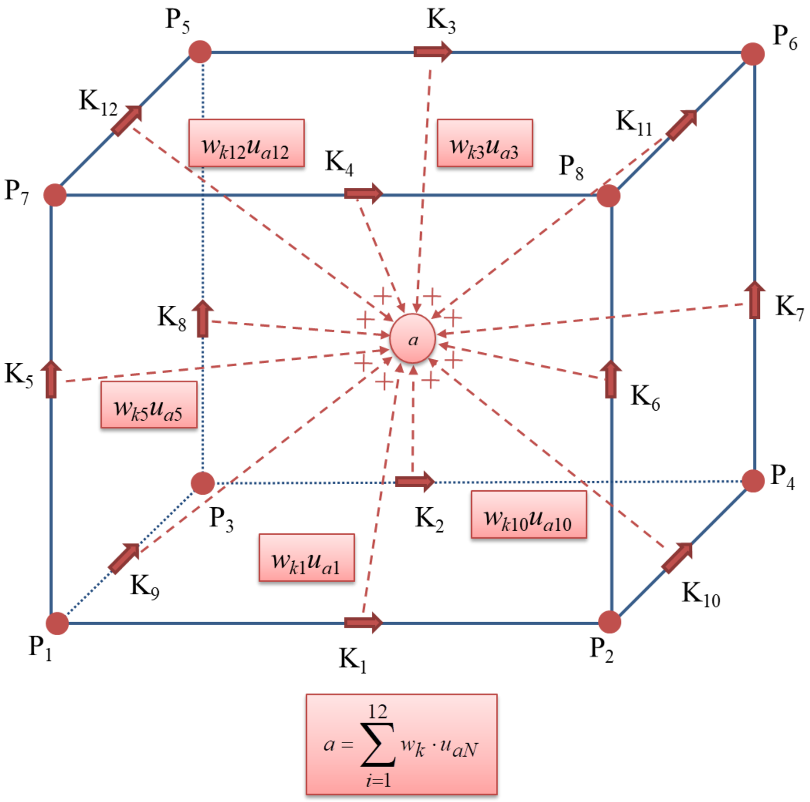
Matematycznie wartość krawędziową u_{aN} wektora $\boldsymbol{a}$ dla krawędzi łączącej punkty P_i i P_j można zapisać w następujący sposób:

$$u_{aN} = \int_{P_i}^{P_j} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{l}\,, \tag{3.2.2}$$

Przedstawiony wyżej zapis wartości krawędziowej możemy wykorzystać do zapisu funkcji interpolacyjnej, opisującej rozkład wektora $\boldsymbol{a}$ w elemencie. Dla elementu o n_k krawędziach funkcję interpolacyjną zapisać można w następujący sposób:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{N=1}^{n_k} \left(w_{kN} \int_{P_i}^{P_j} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{l} \right) = \sum_{N=1}^{n_k} w_{kN} u_{aN} = \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{u}_k \,, \tag{3.2.3}$$

gdzie: $\boldsymbol{w}_{kN}$ dla N=1,2…n_k jest wektorową funkcją interpolacyjną elementu krawędziowego, $\boldsymbol{w}_k$ jest macierzą funkcji interpolujących składającą się z wektorów $\boldsymbol{w}_{kN}$, natomiast $\boldsymbol{u}_k$ jest wektorem wartości krawędziowych u_{aN}.



Rys. 3.2. *Graf krawędziowy elementu sześciościennego*

Na Rysunku 3.2. przedstawiona została interpretacja graficzna elementu krawędziowego. Czerwonymi strzałkami oznaczony zostały przyjęte zwroty przypływu prądów/strumieni wzdłuż danej krawędzi.

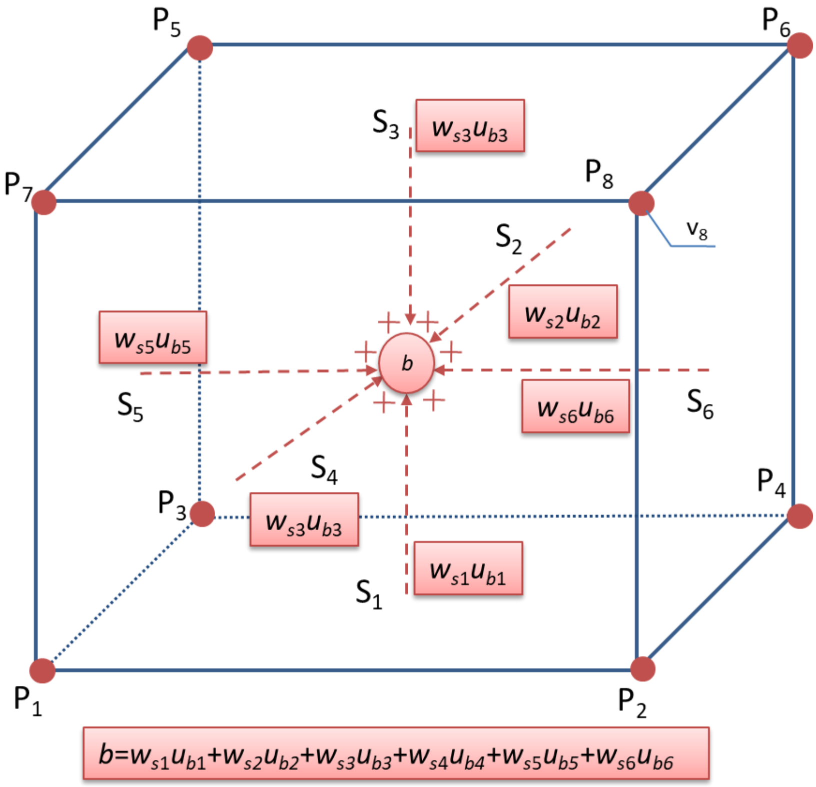
3.2.3. Element ściankowy

Podobnie jak elementowi krawędziowemu, elementowi ściankowemu przyporządkowuje się funkcje wektorowe. Funkcje te wykorzystuje się do opisu rozkładu gęstości danych wielkości wektorowych takich jak gęstość prądu czy strumienia magnetycznego na podstawie zadanych wartości strumieni tych wielkości przenikających przez daną ściankę elementu skończonego.

Dla elementu skończonego o n_s ściankach rozkład wielkości wektorowej w elemencie przedstawić można za pomocą iloczynu ściankowej funkcji interpolacyjnej – funkcji ściankowej – oraz wartości ściankowej będącej całką z wektora $\boldsymbol{b}$ przenikającego przez ścianko elementu.

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n_s} \left(w_{si} \iint_{S_i} \boldsymbol{b} d\boldsymbol{S} \right) = \sum_{i=1}^{n_s} w_{si} u_{bi} = \boldsymbol{w}_s \, \boldsymbol{u}_s, \tag{3.2.3}$$

gdzie: w_{si} jest funkcją interpolacyjną elementu ściankowego dla ścianki S_i, $\boldsymbol{w}_s$ jest macierzą funkcji ściankowych w_{si}, u_{bi} jest wartością ściankową elementu skończonego dla ścianki S_i, natomiast $\boldsymbol{u}_s$ jest macierzą wartości ściankowych u_{bi}.



Rys. 3.3. *Graf ściankowy elementu sześciościennego*

Na Rysunku 3.3. przedstawiona została graficzna interpretacja element ściankowego. Środki poszczególnych ścian elementu łączą się ze sobą w środku elementu a zwroty przepływu prądów/strumieni skierowane są do środka elementu.

3.2.4. Związki pomiędzy elementami niskiego i wysokiego rzędu

Główną zaletą wielostopniowego ujęcia metody elementów skończonych jest możliwość wyrażenia wielkości przyporządkowanych elementowi wyższego stopnia za pomocą równań różniczkowych wielkości przyporządkowanych elementowi niższego stopnia [28]. W ten sposób rozkład wielkości wektorowej $\boldsymbol{a}$ elementu krawędziowego wyrazić możemy za pomocą gradientu wielkości skalarnej v elementu węzłowego, a rozkład wielkości wektorowej $\boldsymbol{b}$ elementu ściankowego - za pomocą rotacji wielkości wektorowej $\boldsymbol{a}$ elementu krawędziowego. Opisane relacje można przedstawić za pomocą poniższych relacji:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}v, \tag{3.2.4}$$

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{rot}\boldsymbol{a}, \tag{3.2.5}$$

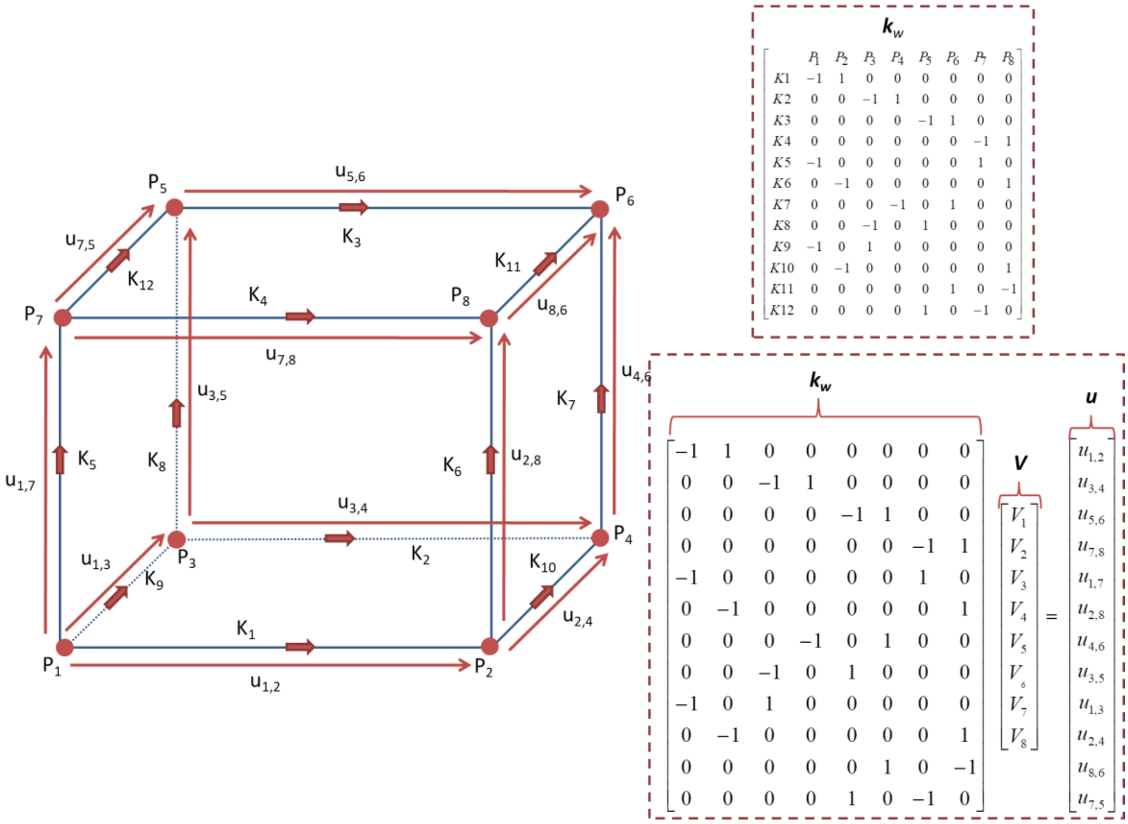
Podstawiając do równania (3.2.2) zależność (3.2.5) otrzymuje się

$$u_{aN} = \int_{P_i}^{P_j} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{l} = \int_{P_i}^{P_j} gradvd\boldsymbol{l} = u_{v_j} - u_{v_i}, \tag{3.2.6}$$

$$\boldsymbol{a} = \sum_{N_{i,j}=1}^{n_k} (w_{kN}u_{aN}) = \sum_{N_{i,j}=1}^{n_k} \left(w_{kN}\left(u_{v_j} - u_{v_i}\right)\right) = \boldsymbol{w}_k\boldsymbol{k}_w\boldsymbol{u}_w, \tag{3.2.7}$$

gdzie: $\boldsymbol{k}_w$ jest macierzą incydencji węzłowych o elementach równych -1, 0, 1.

W standardowych aplikacjach metody elementów skończonych macierz incydencji $\boldsymbol{k}_w$ umożliwia transformacje macierzy związanej z siatką węzłową na macierz związaną z siatką krawędziową. W przypadku równania (3.2.7) iloczyn macierzy incydencji $\boldsymbol{k}_w$ i wektora wartości węzłowych $\boldsymbol{u}_w$ da w wyniku różnicę potencjałów pomiędzy węzłami P_j oraz P_i. Macierz tę tworzy się najczęściej poprzez przyjęcie kierunku wzrostu potencjału dla poszczególnych węzłów elemencie. Dla wyższego potencjału węzła w danej krawędzi przypisuje się wartość 1, dla niższej -1, natomiast dla potencjału węzłowego nie należącego do rozpatrywanej krawędzi przypisuje się wartość równą 0. W ten sposób tworzy się macierz o liczbie wierszy odpowiadającej liczbie krawędzi i liczbie kolumn odpowiadającej liczbie węzłów rozpatrywanego układu rozpatrywanym układzie. Graficzna interpretacja macierzy incydencji $\boldsymbol{k}_w$ przedstawiona została na Rysunku 3.4.



Rys. 3.4. *Graf krawędziowy elementu sześciościennego z wyznaczoną macierzą incydencji* $\boldsymbol{k}_w$

Podobnie jak w przypadku elementu krawędziowego i węzłowego, wektor wartości ściankowych wyrazić można korzystając z wektorowej wartości krawędziowej.

$$u_{bi} = \iint_{Si} \boldsymbol{b} d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{a} d\boldsymbol{l} = \sum_{N_{p,q}} u_{aN_{p,q}}, \tag{3.2.8}$$

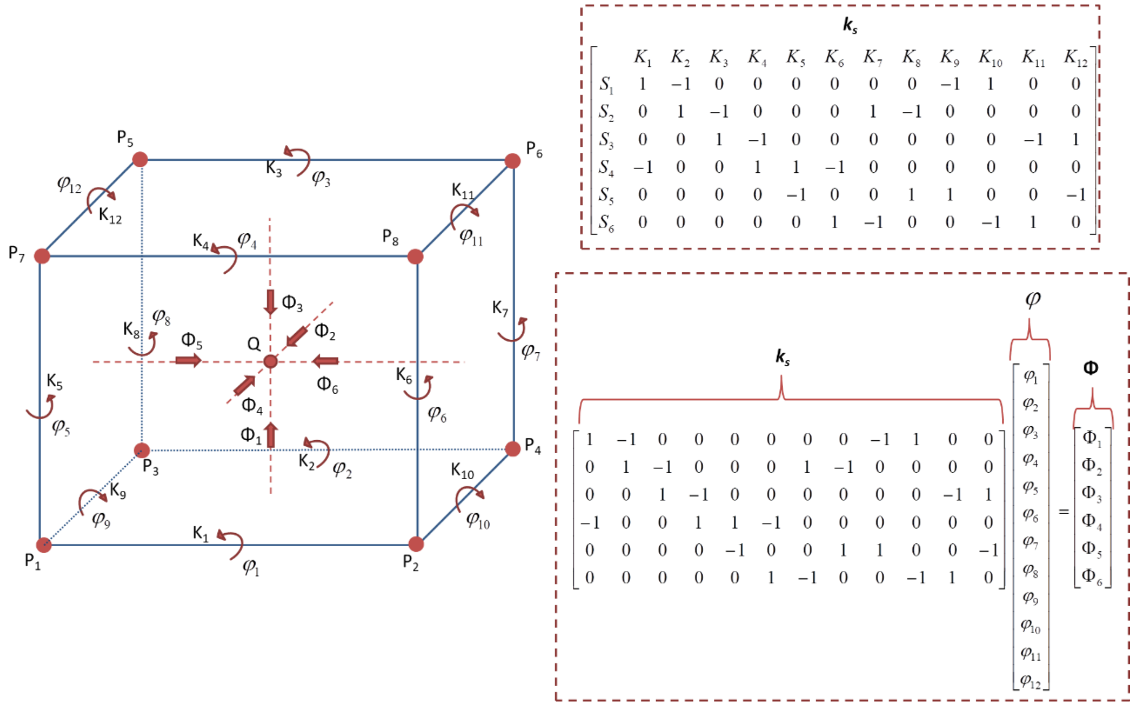
gdzie: $N_{p,q}$ odnosi się do wszystkich krawędzi zawartych w ściance S_i, a następstwo indeksów węzłów p oraz q określa się przy pomocy reguły śruby prawoskrętnej „wkręcanej” w ściankę S_i.

Powyższe wyrażenie wygodniej jest przedstawić w zapisie macierzowym, w którym przyjmuje ono następującą postać.

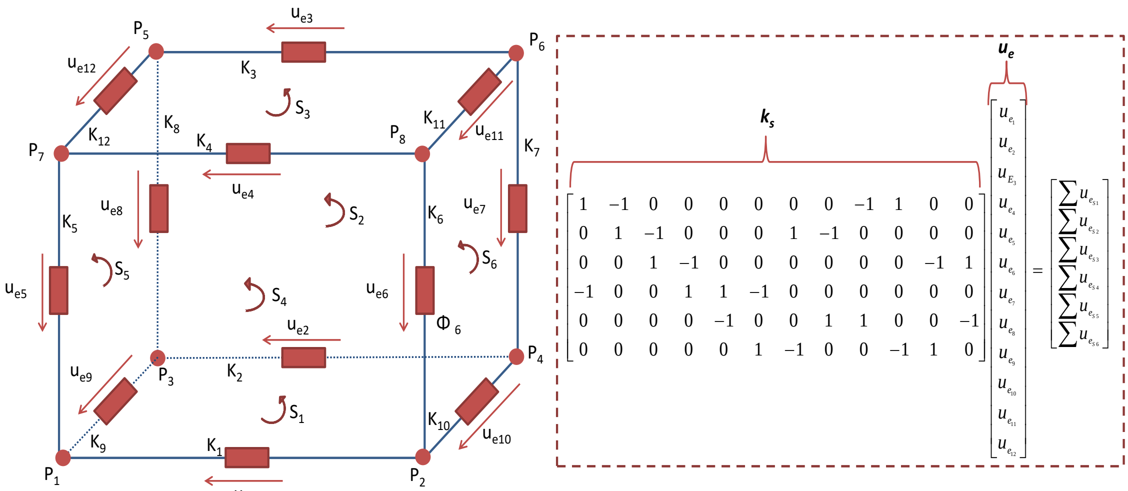
$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{u}_a, \tag{3.2.9}$$

gdzie: $\boldsymbol{u}_s$ jest wektorem wartości ściankowych, $\boldsymbol{u}_a$ jest wektorem wartości krawędziowych, natomiast $\boldsymbol{k}_s$ jest macierzą strukturalna, która przyporządkowuje krawędzie ścianką elementu.

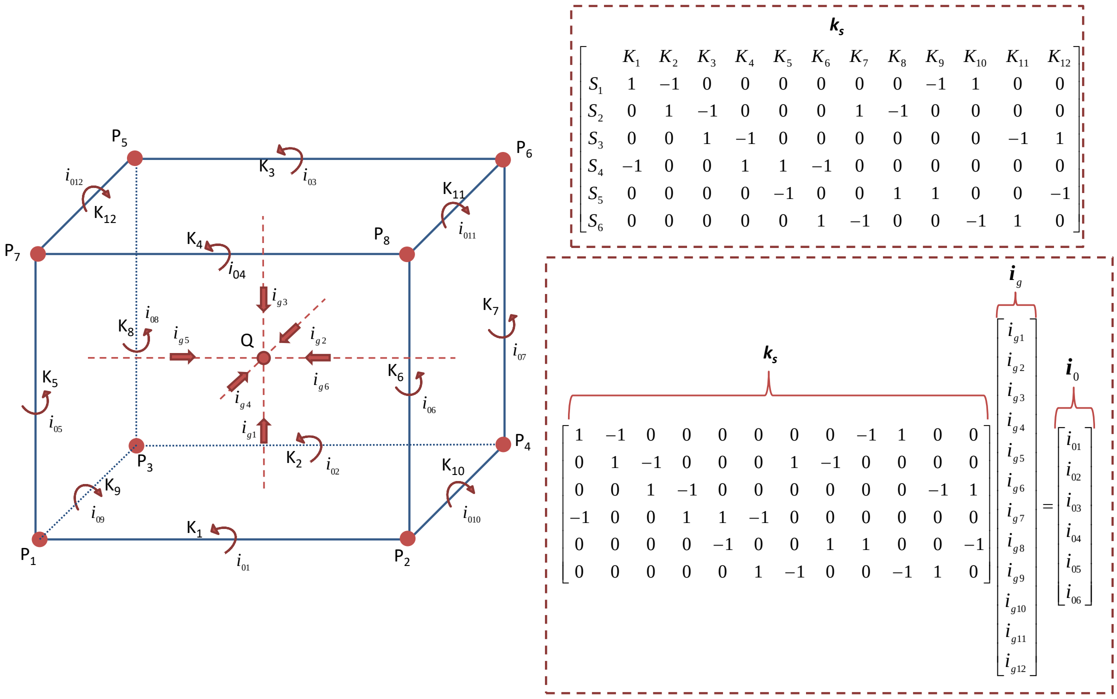
Podobnie jak w przypadku macierzy $\boldsymbol{k}_w$, wyrazami macierzy $\boldsymbol{k}_s$ są wartości -1, 0 oraz 1. Wartość 1 przyjmowana jest, gdy krawędź P_pP_q należy do ścianki S_i oraz iloczyn wektorowy $d\boldsymbol{s}x d\boldsymbol{l}$ jest skierowany do wnętrza ścianki, natomiast wartość -1 przyjmowana jest, gdy krawędź P_pP_q należy do ścianki S_i, ale wcześniej wspomniany iloczyn wektorowy $d\boldsymbol{s}x d\boldsymbol{l}$ skierowany jest na zewnątrz ścianki. Wartość 0 przypisywana jest, gdy krawędź P_pP_q nie należy do ścianki S_i. Graficzna interpretacja przekształcenia wykorzystującego macierz $\boldsymbol{k}_s$ przedstawiona została na Rysunkach 3.5 - 3.7.



Rys. 3.5. *Graf ściankowy elementu sześciościennego z wyznaczoną macierzą incydencji* $\boldsymbol{k}_s$*– strumienie oczkowe*



Rys. 3.6. *Graf ściankowy elementu sześciościennego z wyznaczoną macierzą incydencji* $\boldsymbol{k}_s$*– napięcia gałęziowe*



Rys. 3.7. *Graf ściankowy elementu sześciościennego z wyznaczoną macierzą incydencji* $\boldsymbol{k}_S$*– prądy oczkowe*

Wszystkie wyżej przedstawione zależności i równania można odnieść do wielkości fizycznych wykorzystywanych w analizie rozkładu pola elektromagnetycznego w przetwornikach. W poniższej tabeli zestawiono występujące relacje dotyczące obwodowych modeli elementów sformułowaniach $\boldsymbol{A}$-V oraz $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ [28].

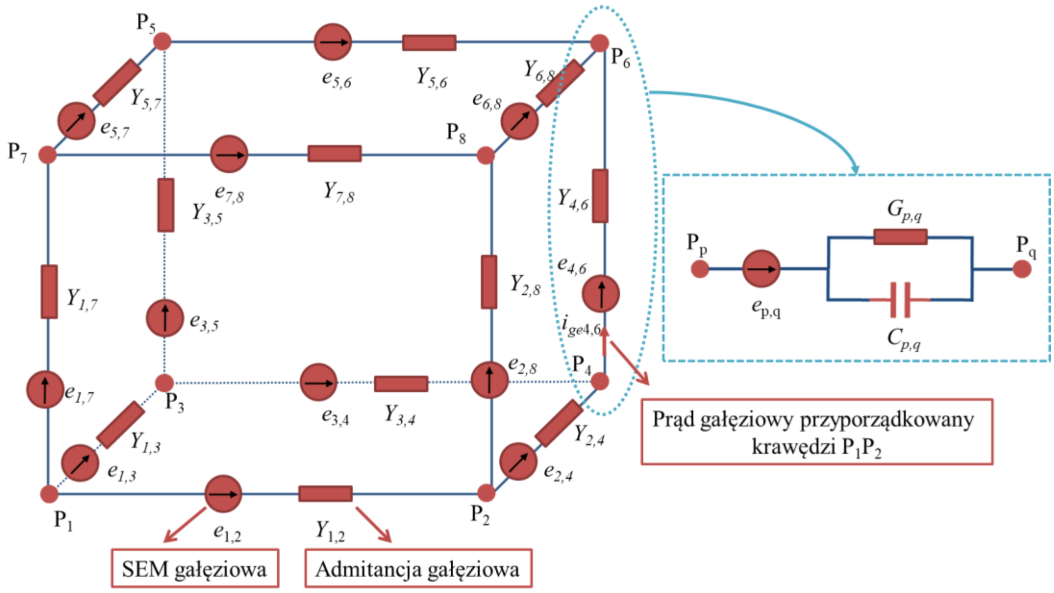
Tabela 3.1. *Obwodowa reprezentacja operatorów i tożsamości różniczkowych*

Zależności różniczkowe	Zależności przedstawione w formie macierzowej	
	Forma macierzowa	Opis
$\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}V$	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}$	Macierz napięć gałęziowych $\boldsymbol{u}$ rozpatrywanego elementu wyrażone za pomocą wartości skalarnego potencjału elektrycznego V węzłów grafu krawędziowego.
$\boldsymbol{J} = \mathrm{rot}\boldsymbol{T}$ $\boldsymbol{J}_0 = \mathrm{rot}\boldsymbol{T}_0$ $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{i}_g = \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{i}_0$ $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{\varphi}$	Wyrażenia opisujące prądy/strumienie gałęziowe $\boldsymbol{i}_g$, $\boldsymbol{\Phi}$ za pomocą odpowiednio prądów/strumieni oczkowych i_0, $\boldsymbol{\varphi}$ grafu ściankowego.
$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$ $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{u}_e$ $\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{u}_\mu$	Relacja opisująca sumę napięć w gałęziach tworzących oczka/ścianki grafu krawędziowego.
$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad} u_v = 0$	$\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{k}_w = 0$	Iloczyn macierzy strukturalnej k_s oraz incydencji k_w jest równy zero.

3.3. Sprzężone modele siatkowe trójwymiarowe (3D)

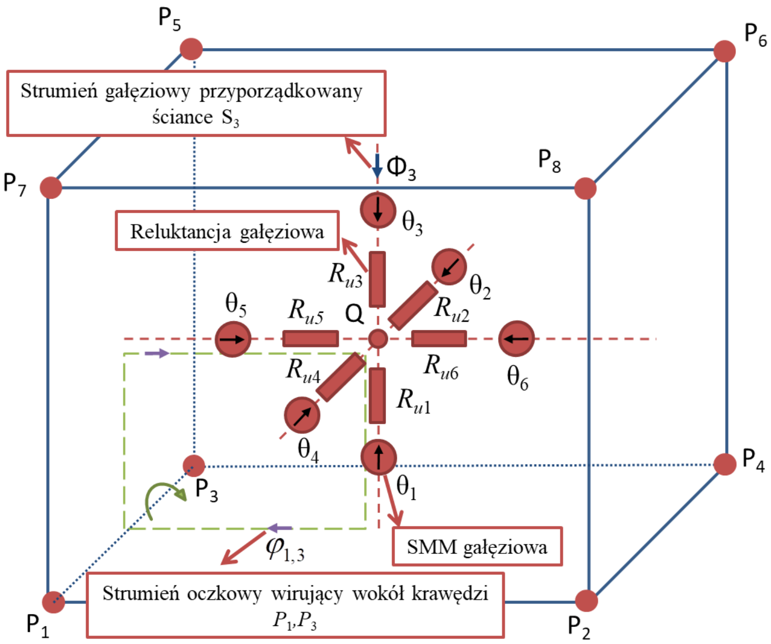
Sprzężone modele siatkowe umożliwiają jednoczesne rozpatrywanie wielu zjawisk fizycznych w jednym modelu obliczeniowym, co jest kluczowe w symulacjach, gdzie interakcje między różnymi rodzajami pola odgrywają zasadniczą rolę w zachowaniu systemu [77,78]. Uzyskuje się je poprzez zintegrowanie równań różniczkowych cząstkowych opisujących wybrane zjawiska fizyczne w jeden schemat obliczeniowy.

W ramach niniejszej rozprawy przeprowadzona zostanie analiza rozkładu map pola elektrycznego i magnetycznego w przetworniku elektromagnetycznym wyższych częstotliwości. W celu opracowania odpowiedniego modelu siatkowego należy zdeterminować wielkości fizyczne jakie będą analizowane wraz z charakterystyką samego obiektu. W opracowanym modelu polowym uwzględniony zostanie wpływ indukowania się prądów wirowych i przesunięcia dielektrycznego w rdzeniu kompozytowym na wypadkowy rozkład pola elektromagnetycznego. Wpływ prądów przesunięcia dielektrycznego w obszarze uzwojeń cienkich nie będzie jednak analizowany w ramach niniejszej rozprawy. W związku z tym Autor pracy zdecydował się zaimplementować metodę $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$, w której do opisu pola magnetycznego w obszarach rdzenia ferrytowego wykorzystane zostaną oczkowe równania magnetycznej siatki ściankowej (MSS) zwanej również siatką reluktancyjną (SR), natomiast do opisu rozkładu pola elektrycznego wykorzystane zostaną równania węzłowe elektrycznej siatki krawędziowej (ESK) nazywanej siatką konduktancyjno-pojemnościową (SKP) [27]. Obie siatki przedstawione zostały odpowiednio na Rysunkach 3.9 oraz 3.8.

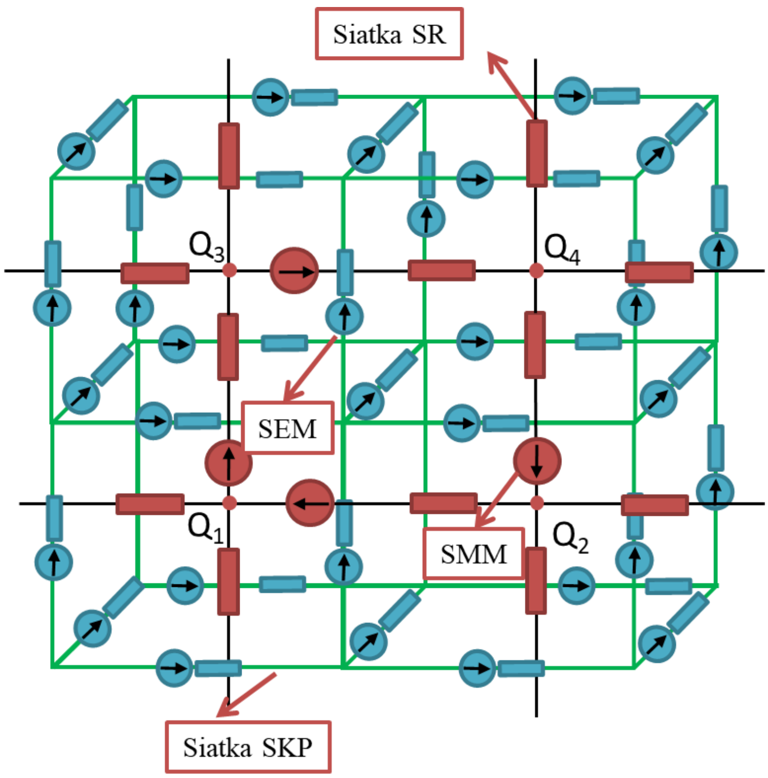


Rys. 3.8. *Siatka krawędziowa elementu skończonego*

W celu utworzenia kompleksowego modelu polowego uwzględniającego wszystkie analizowane zjawiska elektromagnetyczne, siatki SR oraz SKP należy połączyć w jeden układ tworzący sprzężoną siatkę reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościową (SRKP), przedstawioną na Rys. 3.10. Do zdefiniowania wymuszeń w obszarze cienkich uzwojeń wykorzystane zostało sformułowanie wykorzystujące do opisu rozkładu wielkości krawędziowej grafu ściankowego wektorowy potencjał elektryczny $\boldsymbol{T}_0$ [34,75,76].



Rys. 3.9. *Siatka ściankowa elementu skończonego*



Rys. 3.10. *Siatka reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowa*

Równania siatki SRKP otrzymuje się poprzez połączenie zależności wykorzystujących magnetyczny potencjał wektorowy - $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ oraz skalarny potencjał elektryczny - $\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Podstawiając przedstawione zależności do równania (2.2.2) otrzymuje się układ równań opisujący rozkład pola elektromagnetycznego w przetworniku uwzględniając przy tym wpływ prądów wirowych oraz przesunięcia dielektrycznego na wypadkowy rozkład pola oraz wymuszenie pochodzące od pola przepływowego indukowanego przez prąd przewodzenie płynący w obszarze uzwojenia o cienkich przewodach.

$$rot\frac{1}{\mu}(rot\boldsymbol{A}) + \left(\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\right)\left(gradV - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \mathrm{rot}\boldsymbol{T}_0, \tag{3.3.1}$$

$$div\left(\left(\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\right)gradV\right) = div\left(\left(\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\right)\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right), \tag{3.3.2}$$

gdzie: δ oraz ε reprezentują odpowiednio przenikalność elektryczna i dielektryczną ośrodka, natomiast μ stanowi przenikalność magnetyczną ośrodka.

W celu wyprowadzenia pojedynczych równań węzłowych dla węzłów o potencjałach $\boldsymbol{V}$ i krawędziowych dla krawędzi o wartościach krawędziowych $\boldsymbol{\varphi}$ oraz $\boldsymbol{i}_o$posłużyć się należy funkcjonałem energetycznym I. W przypadku rozpatrywanego sformułowania $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ wspomniane równania konstruuje się na podstawie poniższych zależności:

$$\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{V}} = 0, \tag{3.3.3}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0. \tag{3.3.4}$$

Po zdyskretyzowaniu analizowanego obszaru V_o na l_e elementów o objętościach V_{eq} otrzymamy:

$$I = \sum_{q=1}^{le} I_{eq} = \sum_{q=1}^{le}\left(\iiint_{V_{e,q}} f_q(x,y,z)dV\right). \tag{3.3.5}$$

Stosując zależności przedstawione w rozdziale 2.2. rotacje wektorowego potencjału magnetycznego $\boldsymbol{A}$, gradient skalarnego potencjału elektrycznego V oraz rotacje wektorowego potencjału elektrycznego $\boldsymbol{T}_0$ wyrazić można w poniższy sposób [28]:

$$grad V = \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}, \tag{3.3.6}$$

$$rot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w}_s \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{\varphi}, \tag{3.3.7}$$

$$rot\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{J}_0. \tag{3.3.8}$$

Następnie, stosując zależności (3.3.6) oraz (3.3.7) oraz funkcje interpolujące wyrażenia podcałkowe funkcjonału przedstawione w [28] sformułować można wektory pochodnych funkcjonału względem wartości krawędziowych i węzłowych, które stanowić będą dalszą bazę do wyprowadzenia równań węzłowych i krawędziowych elementu skończonego.

$$\frac{\partial I_e}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \left\{\iiint_{V_e} \boldsymbol{w}_k^T \gamma \boldsymbol{w}_k dV\right\} \boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{k}_s^T \left\{\iiint_{V_e} \boldsymbol{w}_s^T \frac{1}{\mu} \boldsymbol{w}_s dV\right\} \boldsymbol{\Phi} + \left\{\iiint_{V_e} \boldsymbol{w}_k^T \boldsymbol{w}_s dV\right\} \boldsymbol{i}_g, \tag{3.3.9}$$

$$\frac{\partial I_e}{\partial \boldsymbol{V}} = \boldsymbol{k}_w^T \left\{\iiint_{V_e} \boldsymbol{w}_k^T \gamma \boldsymbol{w}_k dV\right\} \boldsymbol{u}_e. \tag{3.3.10}$$

Matematyczne równania opisujące zależności pomiędzy przedstawionymi wyżej wielkościami fizycznymi przedstawiono poniżej.

$$\gamma = \sigma + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon, \tag{3.3.11}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{\varphi}, \tag{3.3.12}$$

$$\boldsymbol{i}_g = \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{i}_o, \tag{3.3.13}$$

$$\boldsymbol{G}_g = \iiint_{V_e} (\boldsymbol{w}_k^T \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{w}_k) dV, \tag{3.3.14}$$

$$\boldsymbol{C}_g = \iiint_{V_e} \left(\boldsymbol{w}_k^T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \cdot \boldsymbol{w}_k\right) dV, \tag{3.3.15}$$

$$\boldsymbol{R}_{\mu g} = \int_{V_e} \boldsymbol{w}_s^T \frac{1}{\mu} \boldsymbol{w}_s dV, \tag{3.3.16}$$

$$\boldsymbol{K} = \int_{V_e} \boldsymbol{w}_s^T \boldsymbol{w}_s dV, \tag{3.3.17}$$

gdzie: $\boldsymbol{V}$ jest wektorem potencjałów węzłowych konduktancyjnej siatki krawędziowej, $\boldsymbol{u}_e$ jest wektorem napięć międzywęzłowych konduktancyjnej siatki krawędziowej, $\boldsymbol{\Phi}$ jest wektorem strumieni magnetycznych gałęziowych reluktancyjnej siatki ściankowej, $\boldsymbol{G}_g$ jest wektorem konduktancji gałęziowych konduktancyjno-pojemnościowej siatki krawędziowej, $\boldsymbol{C}_g$ jest wektorem pojemności gałęziowych konduktancyjno-pojemnościowej siatki krawędziowej, $\boldsymbol{R}_{\mu g}$ jest wektorem reluktancji gałęziowych reluktancyjnej siatki ściankowej, $\boldsymbol{\varphi}$ jest wektorem oczkowych strumieni magnetycznych siatki ściankowej oraz krawędziową wartością wektorowego potencjału magnetycznego $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}_o$ jest wektorem prądów oczkowych rezystancyjnej siatki ściankowej i krawędziową wartością wektorowego potencjału $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{i}_g$ jest wektorem prądów gałęziowych rezystancyjnej siatki ściankowej, a $\boldsymbol{K}$ stanowi macierz współczynników opisujących wagę z jaką wartości ściankowe obwodu o grafie ściankowym są uwzględniane w źródłach oczkowych tego obwodu [79].

3.3.1. Model reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowy

Model relukatncyjno-konduktancyjno-pojemnościowy tworzy się zestawiając równania węzłowe elektrycznej siatki krawędziowej z równaniami oczkowymi magnetycznej siatki ściankowej. W celu wyprowadzenia równań krawędziowych reluktancyjnej siatki ściankowej należy posłużyć się wektorem pochodnych funkcjonału względem krawędzi (3.3.9). Uwzględniając zależności (3.3.11)-(3.3.15) równanie wektora uproszczone może zostać do postaci przedstawionej poniżej:

$$\frac{\partial I_e}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{k}_s^T \boldsymbol{R}_{\mu g} \boldsymbol{\Phi}_e + \boldsymbol{K}\boldsymbol{i}_g. \quad (3.3.18)$$

(3.3.16)

Jako, iż rozważane równania zakładają wzajemne sprzężenie siatek SR oraz SKP to:

$$\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{u}_V + \boldsymbol{e}, \quad (3.3.19)$$

gdzie: $\boldsymbol{u}_V$ jest wektorem napięć międzywęzłowych siatki krawędziowej.

$$\boldsymbol{u}_V = \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}. \quad (3.3.20)$$

Wartości wektora $\boldsymbol{e}$ wyrazić możemy za pomocą krawędziowych wartości wektorowego potencjału magnetycznego $\boldsymbol{A}$ tj: oczkowego strumienia magnetycznego $\boldsymbol{\varphi}$.

$$\boldsymbol{e} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varphi} \quad (3.3.21)$$

Dodatkowo stosując do wyrażenia wymuszenia układu sformułowanie $\boldsymbol{T}_0$ wartości prądów gałęziowych $\boldsymbol{i}_g$ zapisać można za pomocą wartości prądu przepływającego przez uzwojenia $\boldsymbol{i}_c$ [80]:

$$\boldsymbol{i}_g = \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c, \tag{3.3.22}$$

gdzie: $\boldsymbol{z}_k$ to wektor opisując rozkład gęstości uzwojeń w przestrzeni krawędzi elementów skończonych.

Co następnie można w uproszczony sposób przedstawić jako oczkową siłę elektromotoryczną $\boldsymbol{\theta}_0$:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c. \tag{3.3.23}$$

Uwzględniając równania (3.3.12) oraz (3.3.19) - (3.3.21), a także zależność przekształcającą macierz reluktancji gałęziowych $\boldsymbol{R}_{\mu g}$ na macierz reluktancji oczkowych $\boldsymbol{R}_{\mu 0} = \boldsymbol{k}_s^T \boldsymbol{R}_{\mu g} \boldsymbol{k}_s$ otrzymuje się:

$$\frac{\partial I_e}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{R}_{\mu 0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{G}_{\mathrm{g}} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\right)\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\theta}_0. \tag{3.3.24}$$

Wyprowadzając równania węzłowe konduktancyjno-pojemnościowej siatki krawędziowej należy podstawić do równania (3.3.10) zależności (3.3.11), (3.3.14) oraz (3.3.15), wówczas wektor pochodnych funkcjonału względem węzłów uprościć można do następującej formy.

$$\frac{\partial I_e}{\partial \boldsymbol{V}} = \boldsymbol{k}_w^T \left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{u}_e. \tag{3.3.25}$$

Mając na uwadze zależność (3.3.3), zauważyć można, że równanie (3.3.25) spełnia I prawo Kirchhoffa odnoszącego się do prądów gałęziowych w węzłach siatki krawędziowej, których suma musi być równa zeru:

$$\boldsymbol{k}_w^T \boldsymbol{i}_{ge} = 0, \tag{3.3.26}$$

przy czym:

$$\boldsymbol{i}_{ge} = \left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{u}_e. \tag{3.3.27}$$

Podstawiając do równania (3.3.25) wyrażenia (3.3.19), (3.3.20) oraz (3.3.21) uzyskamy formułę, która stanowić będzie główne równanie dla siatki krawędziowo-pojemnościowej w niniejszej rozprawie.

$$\boldsymbol{k}_w^T \left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\left(\boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}\right) = 0. \tag{3.3.28}$$

Sprzęgając otrzymane sformułowanie z równaniem (3.3.24) otrzymuje się układ równań siatki SRKP opisujący rozkład pola elektromagnetycznego dla systemu o wymuszeniu prądowym. Poniższa zależność przedstawiona w formie macierzowej stanowić będzie bazę do obliczeń symulacyjnych realizowanych w niniejszej rozprawie.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_w^T\left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w & -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{k}_w^T\left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right) \\ -\left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w & \boldsymbol{R}_{\mu 0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\theta}_0 \end{bmatrix}. \qquad (3.3.29)$$

3.3.2. Wymuszenie napięciowe

W pracy do analizy układu wykorzystano zewnętrzne wymuszenie napięciowe zasilające uzwojenie badanego dławika. W celu wyprowadzenia równania napięciowego posłużyć się należy sformułowaniem wykorzystującym elektryczny potencjał wektorowy $\boldsymbol{T}_0$. W tym celu dla obszaru z uzwojeniem o cienkich przewodach zbudować należy uproszczony siatkowy model rezystancyjny. W modelu tym pomija się zjawiska związane z indukowaniem się prądów wirowych oraz przesunięcia dielektrycznego w poszczególnych zwojach.

Ogólną reprezentacje obwodową równań metody $\boldsymbol{T}_0$ zapisać można jak niżej [80]:

$$\boldsymbol{R}_o\boldsymbol{i}_c + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{u}_o, \qquad (3.3.30)$$

gdzie: $\boldsymbol{R}_o$ stanowi macierz rezystancji oczkowych, u_o jest wektorem napięć oczkowych rezystancyjnego modelu siatkowego, natomiast $\boldsymbol{\Psi}$ jest wektorem strumieni skojarzonych z uzwojeniami reprezentowanymi przez pętle z prądami $\boldsymbol{i}_c$.

W pracy, dla obszarów z uzwojeniami cienki, wykorzystano sformułowanie $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{T}_0$, w związku z czym wektor strumieni skojarzonych $\boldsymbol{\Psi}$ zapisać można w następujący sposób.

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{\varphi}. \qquad (3.3.31)$$

Wartości rezystancji oczkowych $\boldsymbol{R}_o$ wyznaczyć można sumując rezystancje gałęziowe $\boldsymbol{R}_g$ uzwojenia przyporządkowane elementom.

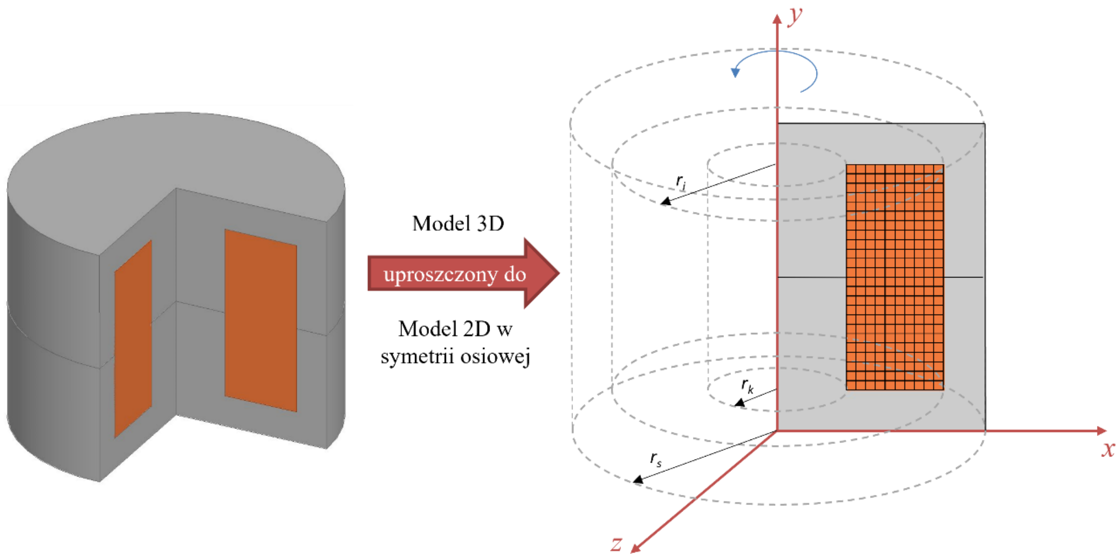
$$\boldsymbol{R}_o = \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k. \qquad (3.3.32)$$

Uwzględniając równania przedstawione w niniejszym podrozdziale w równaniu (3.3.29) otrzymuje się końcową formę układu równań dla sformułowania $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ przedstawioną poniżej:

$$
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{k}_w^T\left(\boldsymbol{G}_g+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w & -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{k}_w^T\left(\boldsymbol{G}_g+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right) & 0 \\
-\left(\boldsymbol{G}_g+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w & \boldsymbol{R}_{\mu 0}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{G}_g+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right) & -\boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k \\
0 & \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s & \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{\varphi}\\ \boldsymbol{i}_c\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}0\\0\\ \boldsymbol{u}_0\end{bmatrix}.
\tag{3.3.33}
$$

3.4. Siatkowe modele dwuwymiarowe (2D)

Symulacje wykorzystujące osiowosymetryczne, dwuwymiarowe modele polowe często są dobrą alternatywą dla czasochłonnych modeli trójwymiarowych. Charakteryzuje je przede wszystkim mały stopień skomplikowania oraz szybkość obliczeń. Dodatkowo często o wiele łatwiej jest za ich pomocą sprzęgać poszczególne zjawiska fizyczne ze względu na nieosobliwy charakter macierzy sztywności badanego obiektu. Modele 2D są często bardzo użyteczne w przypadku konieczności szybkiej weryfikacji obliczeń bądź też testowania nowych metod numerycznych, które nie wymają często skomplikowanych modeli 3D. Podobną taktykę przyjął Autor rozprawy w celu weryfikacji poprawności obliczeń z wykorzystaniem metod Punktu Ustalonego (*ang. Fixed-Point Method*) oraz bilansu harmonicznych (*ang. Harmonic Balance Method*) dla układu przetwornika magnetycznego zasilanego ze źródeł wyższych częstotliwości. Zastosowanie modelu 2D pozwoliło potwierdzić możliwość połączenia obu metod w obrębie jednego algorytmu MES bez konieczności budowy złożonej struktury 3D (Rys. 3.11).



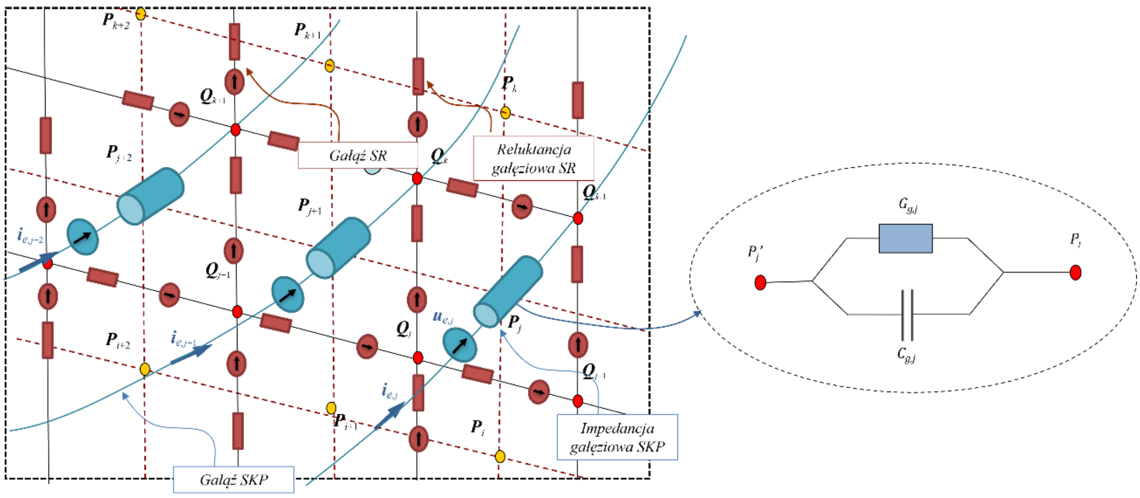
Rys. 3.11. *Transformacja modelu 3D układu dławika o symetrii osiowej do modelu 2D* [27]

Podstawowym uproszczeniem jakie pojawia się dla osiowosymetrycznych modeli 2D dla sformułowania $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$, to założenie że w związku z jednowymiarowym charakterem siatki konduktancyjno-pojemnościowej, różnica potencjałów pomiędzy kolejnymi węzłami siatki krawędziowej jest pomijalna i wynosi w przybliżeniu zero tj.: grad $V \approx 0$ [81]. Przyjmując takie założenie równanie (2.2.10) uprościć można do formuły:

$$rot\frac{1}{\mu}(rot\boldsymbol{A}) - \left(\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\right)\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{J_0}, \tag{3.4.1}$$

$$div\left(\left(\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\right)\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{3.4.2}$$

Zastosowanie uproszczonego opisu rozkładu pola elektromagnetycznego znacząco zmienia strukturę siatkową badanego układu. Równania pola magnetycznego wykorzystujące wektorowy potencjał magnetyczny $\boldsymbol{A}$ mogą zostać zapisane jako równania krawędziowe dwuwymiarowej siatki reluktancyjnej [82], natomiast równania związane z skalarnym potencjałem elektrycznym V – jako równania węzłowe jednowymiarowej siatki konduktancyjno-pojemnościowej [27,44]. Przedstawione to zostało na Rys. 3.12.



Rys. 3.12. *Siatka reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowa dla układu o symetrii osiowej*

Dla powyższego układu możemy zapisać równania uproszczonej siatki ściankowej z wykorzystaniem wartości krawędziowej potencjału wektorowego $\boldsymbol{A}$ tj.: strumieni oczkowych $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{k}_{s_{2D}}^T \boldsymbol{R}_{\mu g} \boldsymbol{k}_{s_{2D}} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Theta}, \tag{3.4.3}$$

gdzie: $\boldsymbol{k}_{s_{2D}}^{T}$ to macierz strukturalna dla układu w symetrii osiowej, która podobnie jak dla układu 3D przyporządkowuje krawędzie ściankom elementu skończonego, natomiast $\boldsymbol{\Theta}$ jest macierzą oczkowych sił elektromotorycznych.

Dla omawianego układu Autor rozprawy zastosował wymuszenie napięciowe w celu zasilenia układu. Rozkład prądów zasilających został wyznaczony przy wykorzystaniu wektorowego potencjału elektrycznego $\boldsymbol{T}_0$ i zależności $\boldsymbol{J}_0$=rot$\boldsymbol{T}_0$ [76,83]. W związku z tym macierz oczkowych sił elektromotorycznych $\boldsymbol{\Theta}$ składa się z trzech składników tj.: a) macierzy reprezentujące oczkowe siły elektromotoryczne w obszarze z prądami przewodzenia $\boldsymbol{\theta}_{CC}$; b) macierzy reprezentującej oczkowe siły elektromotoryczne związane z indukowaniem się prądów wirowych w obszarze rdzenia elektromagnetycznego $\boldsymbol{\theta}_{EC}$; c) macierzy reprezentującej oczkowe siły elektromotoryczne związane z indukowaniem się prądów przesunięcia dielektrycznego w obszarze rdzenia elektromagnetycznego $\boldsymbol{\theta}_{DC}$. Wykorzystując elektryczny potencjał wektorowy $\boldsymbol{T}_0$ i wektor gęstości prądu $\boldsymbol{J}_0$, wartość wyrazy $\boldsymbol{\theta}_{CC}$ możemy wyznaczyć przy pomocy następującego równania [80].

$$\boldsymbol{\Theta}_{CC} = \boldsymbol{k}_{s_{2D}}^{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c. \tag{3.4.4}$$

Składnik związany z siłami magnetomotorycznymi powstałymi na skutek indukowania się prądów wirowych w obszarze rdzenia ferromagnetycznego obliczyć można wykorzystując zależność $\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$:

$$\boldsymbol{\theta}_{EC} = \boldsymbol{i}_{EC} = -\boldsymbol{G}_g \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}. \tag{3.4.5}$$

Natomiast składnik związany z indukowaniem się prądów przesunięcia dielektrycznego w obszarze rdzenia ferromagnetycznego wyznaczyć można stosując poniższą zależność:

$$\boldsymbol{\theta}_{DC} = \boldsymbol{i}_{DC} = -\boldsymbol{C}_g \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}. \tag{3.4.6}$$

Podstawiając do równania (3.4.3) równania (3.4.4), (3.4.5) oraz (3.4.6) otrzymuje się sformułowanie opisujące rozkład pola elektromagnetycznego dla siatki reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowej układu przetwornika w symetrii osiowej.

$$\boldsymbol{R}_{\mu 0} \boldsymbol{k}_{s_{2D}} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{k}_{s_{2D}}^{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c - \boldsymbol{G}_g \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \boldsymbol{C}_g \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}. \tag{3.4.7}$$

W związku z wykorzystaniem w omawianym modelu wymuszenia napięciowego i elektrycznego potencjału skalarnego $\boldsymbol{T}_0$, równanie (3.4.7) musi zostać wzbogacone jeszcze o równanie opisujące obwód elektryczny przetwornika podobnie jak miało to miejsce w przypadku trójwymiarowego modelu w równaniach (3.3.30) - (3.3.32).

Ostatecznie wynikowy układ równań można zapisać w postaci macierzowej jak niżej.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{\mu 0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{G}_g + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{C}_g\right) & -\boldsymbol{k}_{s_{2D}}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{z}_k \\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{z}_k^T \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{k}_{s_{2D}} & \boldsymbol{z}_k^T \boldsymbol{k}_s^T \boldsymbol{R}_g \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u}_0 \end{bmatrix}. \tag{3.4.8}$$

3.5. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono wielostopniowe ujęcie metody elementów skończonych. Omówione zostały poszczególne elementy jakie wykorzystywane są w proponowanej metodzie to jest: element węzłowy, krawędziowy oraz ściankowy. Za pomocą grafów wyjaśnione zostały poszczególne siatki związane z elementami odpowiadających im stopni, także przedstawiono matematyczne zależności opisujące rozkłady dla funkcji skalarnych i wektorów poszczególnych siatek. Następnie Autor rozprawy przedstawił sposób zapisu wielkości elementów wyższych rzędów za pomocą równań różniczkowych wielkości związanych z elementami niższych rzędów, a także zaprezentował w sposób graficzny zależności jakie zachodzą pomiędzy wielkościami oczkowymi a gałęziowymi dla każdej z siatek. Dodatkowo, Autor pracy sporządził także zestawienie sformułowań wykorzystywanych w wielostopniowym ujęciu metody elementów skończonych. W kolejnym kroku przystąpiono do omówienia zastosowanej w pracy metody $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ opisującej rozkład pola elektromagnetycznego w rdzeniu ferromagnetycznym trójwymiarowego przetwornika z uwzględnieniem zjawiska indukowania się prądów przesunięcia dielektrycznego oraz prądów wirowych. W celu łatwego zrozumienia obranej metodyki, zastosowana w pracy sprzężona siatka reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowa została przedstawia za pomocą grafu. Wykorzystując funkcje interpolacyjne elementu krawędziowego i ściankowego oraz odpowiednio wartości krawędziowe i węzłowe, sformułowane zostały równania dla ujęcia 3D MES.

W kolejnym etapie omówiono uproszczony model układu dławika elektromagnetycznego w symetrii osiowej. W sposób graficzny przedstawiona została 2D siatka reluktancyjna sprzężona z 1D siatką konduktancjo-pojemnościowa oraz sformułowane zostały równania MES. Dodatkowo, dla ujęcia 2D, wykorzystując elektryczny potencjał wektorowy $\boldsymbol{T}_0$ i wektor gęstości prądu $\boldsymbol{J}_0$, wyprowadzone zostały równania pozwalające wyznaczyć wektor wymuszeń $\boldsymbol{\theta}_{CC}$ pojawiający się w obszarze uzwojeń przetwornika oraz wektory wymuszeń $\boldsymbol{\theta}_{EC}$ i $\boldsymbol{\theta}_{DC}$ związane odpowiednio z prądami wirowymi i przesunięcia dielektrycznego oddziaływujące na rozkład pola w rdzeniu ferromagnetycznym przetwornika.

Rozdział 4
Przegląd metod stosowanych w analizie układów z polem elektromagnetycznym z uwzględnieniem prądów przesunięcia dielektrycznego

4.1.Wprowadzenie

Problem zniekształceń przebiegów prądowych spowodowanych obecnością wyższych harmonicznych jest obecny w systemach elektrycznych od samego początku ich powstawania, to jest od początku XX wieku. Pierwsze problemy związane z zniekształcaniem sygnałów poprzez wyższe harmoniczne związane były z istnieniem trzeciej harmonicznej prądu powstającej w wyniku nasycania się materiałów ferromagnetycznych stosowanych na obwody maszyn i transformatorów [84,85]. Następnie, wskazano również, że obciążenia łukowe, takie jak oświetlenie i elektryczne piece łukowe, powodują generację wyższych harmonicznych. Kolejny typ, obciążenia elektroniczne, pojawił się w energetyce w latach 70. I 80. XX wieku i od tego czasu reprezentuje najszybciej rosnącą kategorię układów generujących wyższych harmonicznych [86–88]. W związku z powyższym na przestrzeni ostatnich lat pojawiło się wiele narzędzi umożliwiających analizę przebiegów odkształconych a także metod umożliwiających eliminacje wyższych harmonicznych z przebiegów czasowych badanych wielkości [89,90]. W układach transformatorów i dławików głównym elementem powodującym pojawienie się wyższych harmonicznych prądu jest nieliniowy charakter rdzenia magnetycznego i zjawisko nasycania się obwodu magnetycznego. W zależności od zastosowań, do jakich wykorzystywany będzie projektowany przekształtnik elektromagnetyczny zastosować można różne typy materiałów magnetycznych o określonych właściwościach, które pozwalają na pracę układu w obszarze liniowym charakterystyki magnesowania dla określonych parametrów pracy [91–93]. We współczesnej literaturze można znaleźć wiele pozycji, omawiających problem nasycenia rdzenia oraz metod kompensacji odkształceń sygnałów [87,94,95]. Szczegółowe badania prowadzone są w tym zakresie przede wszystkim dla transformatorów prądowych i impulsowych wykorzystywanych w elektronice sterującej oraz pomiarowej.

Jedną z najczęściej stosowanych metod zapobiegania pracy transformatora w nieliniowym obszarze charakterystyki magnesowania jest wprowadzenie do konstrukcji rdzenia szczeliny powietrznej o określonych wymiarach. Zagadnienie to omówione zostało w sposób szczegółowy w [96]. Autorzy tej pracy posłużyli się w swoich badaniach zarówno stanowiskiem eksperymentalnym jak i również modelem obliczeniowym układu prądowego transformatora impulsowego. Celem obranej metodologii było wyznaczenie skutecznej oraz niezawodnej metody wyznaczania optymalnych wymiarów szczeliny powietrznej w celu wyeliminowania wpływu saturacji oraz histerezy rdzenia, których obecność jest szczególnie niepożądana w wszelkich układach pomiarowych ze względu na przekłamywanie pomiarów. Wiarygodność przedstawionego w pracy modelu obliczeniowego została potwierdzona poprzez pomiary wykorzystawszy model eksperymentalny.

Kolejną interesującą pozycją, która porusza temat obecności wyższych harmonicznych w odpowiedzi przetworników elektromagnetycznych jest artykuł autorstwa C. Laurano, S. Toscani oraz M. Zenomi [97]. Autorzy wskazują na istotny problem, jaki stanowią zniekształcenia harmoniczne w transformatorach prądowych wykorzystywanych w układach pomiarowych. W związku z brakiem możliwości wyeliminowania negatywnego wpływu nasycenia rdzenia na pracę przetwornika Autorzy pracy proponują prostą i skuteczną metodę kompensacji odkształceń wynikających z nieliniowości obwodu magnetycznego opartą na wielomianowym modelu zniekształceń harmonicznych. Przedstawione wyniki zarówno obliczeń jak i pomiarów potwierdzają skuteczność metody w eliminacji negatywnego wpływu nieliniowości obwodu magnetycznego na sygnał pomiarowy.

Przedstawione wyżej prace wskazują jak istotna jest analiza wpływu nasycenia rdzenia na pracę układu magnetycznego na etapie projektu przetwornika elektromagnetycznego. Analizę taką przeprowadzić można stosując wybrane podejścia do omawianej we wcześniejszych rozdziałach metody elementów skończonych, tj.: podejścia czasowe, częstotliwościowe oraz częstotliwościowo-czasowe. Każda z przedstawionych interpretacji FEM pozwala na analizę rozpływu pola elektromagnetycznego w przetworniku z uwzględnieniem wpływu nasycenia rdzenia na odkształcenie harmoniczne przebiegów prądu i napięcia. Metody te, jednakże różnią się między sobą przede wszystkim czasem obliczeń, ilością wymaganych zasobów obliczeniowych, a także dokładnością wyników. Wszystkie przedstawione podejścia omówione zostaną w sposób szczegółowy w dalszej części rozdziału.

4.2.Analiza MES w domenie czasu

Jedną z najczęściej wykorzystywanych interpretacji metody elementów skończonych jest tzw. podejście czasowe (z ang. *time domain analysis*) [98,99]. Punkt wyjścia metody dla sformułowania $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ stanowi układ równań omawiany w rozdziale 3, przedstawiony w postaci operatorowej:

$$\begin{cases} rot\dfrac{1}{\mu}(rot\boldsymbol{A}) + \left(\sigma + \dfrac{d}{dt}\varepsilon\right)\left(gradV - \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right) - rot\boldsymbol{T}_0 = 0 \\ div\left(\left(\sigma + \dfrac{d}{dt}\varepsilon\right)gradV\right) = div\left(\left(\sigma + \dfrac{d}{dt}\varepsilon\right)\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right) \\ rot\dfrac{1}{\gamma}(rot\boldsymbol{T}_0) = \dfrac{d}{dt}(rot\boldsymbol{A}) \end{cases} . \qquad (4.2.1)$$

Powielając kroki przedstawione w rozdziale 3, układ równań (4.2.1) sprowadzić można do układu równań obwodowych:

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{0}} + \dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_g + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{C}_g\right)\right)\underline{\boldsymbol{\varphi}} - \left(\boldsymbol{G}_g + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_c} \\ \boldsymbol{k}_w^T\left(\boldsymbol{G}_g + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{C}_g\right)\left(\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{\boldsymbol{\varphi}}\right) = 0 \\ \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_c} + \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s\dfrac{d}{dt}\underline{\boldsymbol{\varphi}} = \underline{\boldsymbol{u}_0} \end{cases} . \qquad (4.2.2)$$

Tak sformułowany układ równań rozpatrywać należy w dziedzinie czasu. W tym celu przeprowadzić należy dyskretyzacje przestrzeni czasu T na N próbek (n = 1, 2, 3 …, N) o równym odstępie czasowym $\varDelta t = t_n - t_{n-1}$ (4.2.3).

W celu zaimplementowania dyskretyzacji czasu do równania (4.2.2) posłużyć można się tzw. schematem numerycznym z wagami.

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dx}{dt}dt = x(t_n) - x(t_{n-1}). \qquad (4.2.3)$$

Średnią wartość pochodnej w przedziale [t_{n-1}, t_n] określić można na podstawie jej wartości w punkcie t_{n-1} i t_n:

$$\frac{1}{\varDelta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dx}{dt}dt = (1-\vartheta)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_{n-1}} + \vartheta\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_n}. \qquad (4.2.4)$$

Przyjmując, że:

$$
\begin{aligned}
(1-\vartheta)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_{n-1}} + \vartheta\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_n} &= (1-\vartheta)(px)_{n-1} + \vartheta(px)_n \\
&= \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{\Delta t},
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

oraz zakładając, że krok czasowy Δt jest dostatecznie mały, przyjąć można, że średnia wartość pochodnej w przedziale $[t_{n-1}, t_n]$ ~ $(\tilde{p}x)_n$ wynosi:

$$
(\tilde{p}x)_n \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{\Delta t}. \tag{4.2.6}
$$

Podstawiając równanie (4.2.6) do równania (4.2.2) otrzymuje się:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\vartheta \boldsymbol{R}_{\mu 0}\boldsymbol{\varphi}(t_n) - (1-\vartheta)\boldsymbol{R}_{\mu 0}\boldsymbol{\varphi}(t_{n-1}) + \boldsymbol{G}_g \dfrac{\boldsymbol{\varphi}(t_n) - \boldsymbol{\varphi}(t_{n-1})}{\Delta t} + \boldsymbol{C}_g \dfrac{\boldsymbol{\varphi}(t_n) - 2\boldsymbol{\varphi}(t_{n-1}) + \boldsymbol{\varphi}(t_{n-2})}{(\Delta t)^2} \\
\qquad -\vartheta \boldsymbol{G}_g \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}(t_n) - (1-\vartheta)\boldsymbol{G}_g \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}(t_n) + \boldsymbol{C}_g \boldsymbol{k}_w \dfrac{\boldsymbol{V}(t_n) - \boldsymbol{V}(t_{n-1})}{\Delta t} = \\
\qquad \vartheta \boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c(t_n) - (1-\vartheta)\boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c(t_n) \\
\vartheta \boldsymbol{k}_w^T \boldsymbol{G}_g \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}(t_n) - (1-\vartheta)\boldsymbol{k}_w^T \boldsymbol{G}_g \boldsymbol{k}_w \boldsymbol{V}(t_{n-1}) - \boldsymbol{k}_w^T \boldsymbol{G} \dfrac{\boldsymbol{\varphi}(t_n) - \boldsymbol{\varphi}(t_{n-1})}{\Delta t} + \\
\qquad \boldsymbol{k}_w^T \boldsymbol{C}_g \boldsymbol{k}_w \dfrac{\boldsymbol{V}(t_n) - \boldsymbol{V}(t_{n-1})}{\Delta t} - \boldsymbol{k}_w^T \boldsymbol{C}_g \dfrac{\boldsymbol{\varphi}(t_n) - 2\boldsymbol{\varphi}(t_{n-1}) + \boldsymbol{\varphi}(t_{n-2})}{(\Delta t)^2} = 0 \\
\vartheta \boldsymbol{z}_k^T \boldsymbol{k}_s^T \boldsymbol{R}_g \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c(t_n) - (1-\vartheta)\boldsymbol{z}_k^T \boldsymbol{k}_s^T \boldsymbol{R}_g \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{i}_c(t_{n-1}) + \boldsymbol{z}_k^T \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{k}_s \dfrac{\boldsymbol{\varphi}(t_n) - \boldsymbol{\varphi}(t_{n-1})}{\Delta t} = \\
\qquad \vartheta \boldsymbol{u}_0(t_n) - (1-\vartheta)\boldsymbol{u}_0(t_{n-1})
\end{array}
\right. .
\tag{4.2.7}
$$

Omówiona metoda jest szczególnie często wykorzystywana wszędzie tam, gdzie wymagana jest analiza sygnałów odkształconych lub stanów przejściowych. Niestety ze względu na konieczność wykonywania dodatkowych iteracji związanych z dyskretyzacją czasu, analiza MES w domenie czasu wymaga z reguły dużych zasobów obliczeniowych.

4.3. Analiza MES w domenie częstotliwości

Podejście częstotliwościowe stosowane w metodzie elementów skończonych pozwala na analizę rozkładu pola elektromagnetycznego pod kątem wybranej częstotliwości – najczęściej częstotliwości fundamentalnej. Wykorzystując do analizy opisany w rozdziale 3.3 siatkowy model reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowo-rezystancyjny, zastosowane równania opisujące wzajemny rozkład pól elektrycznych i magnetycznych przedstawić można w formie operatorowej:

$$\begin{cases} rot\frac{1}{\mu}(rot\boldsymbol{A}) + (\sigma + j\omega_0\varepsilon)(gradV - j\omega_0\boldsymbol{A}) - rot\boldsymbol{T}_0 = 0 \\ div\big((\sigma + j\omega_0\varepsilon)gradV\big) = div\big((\sigma + j\omega_0\varepsilon)j\omega_0\boldsymbol{A}\big) \\ rot\frac{1}{\gamma}(rot\boldsymbol{T}_0) = j\omega_0(rot\boldsymbol{A}) \end{cases}, \tag{4.3.1}$$

gdzie: ω_0 to pulsacja podstawowa układu $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 to wartość częstotliwości podstawowej harmonicznej,

W oparciu o powyższe równania wyjściowe i przekształcenia przedstawione w rozdziale 3.3 dla reluktancyjno-konduktancyjno-pojemościowo-rezystancyjnego modelu siatkowego wyprowadzić można układ równań opisujący rozkład pola elektromagnetycznego w badanym układzie w domenie częstotliwości.

$$\begin{cases} \big(\boldsymbol{R}_{\mu 0} + j\omega_0(\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g)\big)\underline{\boldsymbol{\varphi}} - (\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g)\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_c} \\ \boldsymbol{k}_w^T(\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g)\big(\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}} - j\omega_0\underline{\boldsymbol{\varphi}}\big) = 0 \\ \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_c} + \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s j\omega_0\underline{\boldsymbol{\varphi}} = \underline{\boldsymbol{u}_0} \end{cases}. \tag{4.3.2}$$

Powyższy układ równań przedstawić można także w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_w^T(\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g)\boldsymbol{k}_w & -j\omega_0\boldsymbol{k}_w^T(\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g) & 0 \\ -(\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g)\boldsymbol{k}_w & \boldsymbol{R}_{\mu 0} + j\omega_0(\boldsymbol{G}_g + j\omega_0\boldsymbol{C}_g) & -\boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k \\ 0 & j\omega_0\boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s & \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{V}} \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}} \\ \underline{\boldsymbol{i}_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{\boldsymbol{u}_0} \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

Największymi zaletami opisywanego podejścia są przede wszystkim szybkozbieżność, mała zasobochłonność oraz bardzo prosta implementacja. Metoda jest szczególnie często wykorzystywana do szybkich obliczeń pozwalających wstępne oszacowanie pożądanych rozkładów indukcji magnetycznej czy gęstości prądu. Niestety, ze względu na uwzględnienie w obliczeniach tylko częstotliwości podstawowej, metoda ta nadaje się jedynie do analizy pól o bardzo małym stopniu nieliniowości.

4.4. Analiza MES w domenie częstotliwości i czasu

Analiza częstotliwościowo-czasowa HBFEM (z ang. Harmonic Balance Finite Element Method), jest kombinacyjną interpretacją metody elementów skończonych MES, metody bilansu harmonicznych HBM (z ang. Harmonic Balance Method) oraz metody punktu ustalonego FPM (z ang. Fixed-Point Method) [100–102]. Metoda umożliwia pełną analizę widmową rozkładu pola elektromagnetycznego i w związku z tym może być stosowana w układach nieliniowych [27]. Podejście HBFEM zakłada możliwość występowania okresowej niesinusoidalnej odpowiedzi układu w stanie ustalonym na sinusoidalne wymuszenie zewnętrzne. Odkształcenie harmoniczne odpowiedzi układu względem wymuszenia związane jest z nieliniowym charakterem obwodu magnetycznego odbiornika. W układach liniowych w obszarze całego badanego układu przyjmuje się stałą wartość przenikalności magnetycznej, której wartość zależeć będzie od doboru materiałów. Niestety, założenia takiego nie można przyjąć w przypadku analizy nieliniowych układów magnetycznych. Ze względu na nieliniowość obwodu i różną wartość indukcji magnetycznej dla poszczególnych obszarów rdzenia, układ charakteryzować się będzie zmienną wartością przenikalności magnetycznej w całej swojej objętości. Zjawisko to wprowadza zniekształcenia do odpowiedzi układu w postaci wyższych harmonicznych. Wypadkową odpowiedź układu na wymuszenie przedstawić można za pomocą szeregu Fourier'a. Wykorzystanie transformaty Fourier'a wymaga jednak znajomości wartości amplitudy poszczególnej m-tej harmonicznej, w związku z czym równanie (4.3.2) przekształcić należy do poniższej formy.

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{R}_{\mu 0}(\nu) + jm\omega_0\left(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g\right)\right)\underline{\boldsymbol{\varphi}_m} - \left(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g\right)\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}_m} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_{c_m}} \\ \boldsymbol{k}_w^T\left(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g\right)\left(\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}_m} - jm\omega_0\underline{\boldsymbol{\varphi}_m}\right) = 0 \\ \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_{c_m}} + \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s jm\omega_0\underline{\boldsymbol{\varphi}_m} = \underline{\boldsymbol{u}_{0_m}} \end{cases} . \tag{4.4.1}$$

Cały algorytm opiera się przede wszytkim o założenie, że wymuszenie układu, a w tym przypadku napiecie zasilające, jest przebiegiem okresowym i zapisać je można w postaci szeregu Fouriera jak niżej:

$$u_0(t) = Re\left\{\boldsymbol{u}_{0_0} + \sum_{m=1}^{M}\left(\underline{\boldsymbol{u}_{0_m}}e^{jm\omega_0 t}\right)\right\}. \tag{4.4.2}$$

Przebiegi czasowe poszczególnych odpowiedzi i wymuszeń przestawić można w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = Re\left\{\boldsymbol{\varphi}_0 + \sum_{m=1}^{M}\left(\underline{\boldsymbol{\varphi}_m}e^{jm\omega_0 t}\right)\right\}, \tag{4.4.3}$$

$$\boldsymbol{i}_c(t) = Re\left\{\boldsymbol{i}_{c_0} + \sum_{m=1}^{M}\left(\underline{\boldsymbol{i}_{c_m}} e^{jm\omega_0 t}\right)\right\}, \tag{4.4.4}$$

gdzie: $\boldsymbol{u}_{0_0}$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ oraz $\boldsymbol{i}_{c_0}$ są wartościami odpowiednio napięcia, strumienia magnetycznego oraz prądu przewodzenia związanymi z zerową harmoniczną ich przebiegów czasowych.

W podobnej formie wyrazić możemy wartość chwilową relatywności $\nu = \frac{1}{\mu}$, która ze względu na nieliniowy charakter badanego obiektu jest funkcją indukcji magnetycznej.

$$\nu\big(B(t)\big) = \frac{H\{B(t)\}}{B(t)} = Re\left\{\nu_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\underline{\nu_m} e^{jk\omega_0 t}\right)\right\}. \tag{4.4.5}$$

W związku z nieliniowością parametru ν do rozwiązania (4.4.1) zastosować należy wybraną metodę rozwiazywania nieliniowych układów równań. Ze względu na łatwość aplikacji oraz dobry stopień zbieżności Autor pracy zastosował Metodę Punktu Ustalonego (z ang. *Fixed-Point Method* FPM) [102,103]. Idea metody polega na przekształceniu nieliniowego członu równania na człon liniowy oraz człon nieliniowy.

$$\nu = \nu_{FP} + (\nu - \nu_{FP}), \tag{4.4.6}$$

tym samym otrzymując następującą zależność:

$$\boldsymbol{R}_{\mu 0}(\nu) = \boldsymbol{R}_{\mu 0}(\nu_{FP}) + \boldsymbol{R}_{\mu 0}(\nu - \nu_{FP}). \tag{4.4.7}$$

Podstawiając zależność (4.4.7) do układu równań (4.4.1) otrzymuje się następujący układ równań dla *m*-tej harmonicznej:

$$\begin{cases} \Big(\boldsymbol{R}_{\mu 0}(\nu_{FP}) + jm\omega_0\big(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g\big)\Big)\underline{\boldsymbol{\varphi}_m^{i+1}} - \big(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g\big)\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}_m} \\ \qquad = \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s\underline{\boldsymbol{i}_{c_m}} - \boldsymbol{R}_{\mu 0}\big(\nu^i - \nu_{FP}\big)\underline{\boldsymbol{\varphi}_m^i} \\ \boldsymbol{k}_w^T\big(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g\big)\Big(\boldsymbol{k}_w\underline{\boldsymbol{V}_m} - jm\omega_0\underline{\boldsymbol{\varphi}_m^{i+1}}\Big) = 0 \\ \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k\underline{\boldsymbol{i}_{c_m}} + \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s jm\omega_0\boldsymbol{\varphi}_m^{i+1} = \underline{\boldsymbol{u}_{0_m}} \end{cases}, \tag{4.4.8}$$

gdzie: *i* stanowi numer iteracji (i = 1, 2 … N), natomiast ν_{FP} jest przyjętą stałą wartością przenikalności magnetycznej materiału.

Wykorzystując zależności (4.4.2)-(4.4.4) oraz szybką transformatę Fouriera (ang. *Fast Fourier Transform* FFT) uzyskać można następującą macierzową formę układu (4.4.8) pozwalająca na analizę układów z polem elektromagnetycznym zarówno dziedzinie częstotliwości jak i czasu.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_w^T(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g)\boldsymbol{k}_w & -jm\omega_0\boldsymbol{k}_w^T(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g) & 0 \\ -(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g)\boldsymbol{k}_w & \boldsymbol{R}_{\mu0}(\nu_{FP}) + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{G}_g + jm\omega_0\boldsymbol{C}_g) & -\boldsymbol{K}\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k \\ 0 & jm\omega_0\boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{k}_s & \boldsymbol{z}_k^T\boldsymbol{k}_s^T\boldsymbol{R}_g\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{V}_m^{i+1}} \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}_m^{i+1}} \\ \underline{\boldsymbol{i}_{cm}^{i+1}} \end{bmatrix} = FFT_m \begin{bmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{R}_{\mu0}(\nu^i - \nu_{FP}, t)\boldsymbol{\varphi}^i(t) \\ \boldsymbol{u}_0(t) \end{bmatrix}. \tag{4.4.9}$$

Powyższy układ równań, ze względu na osobliwy charakter macierzy sztywności, rozwiązywać należy metodami iteracyjnymi takimi jak SOR (z ang. *Successive Over Relaxation*) lub BICG (z ang. *Biconjugate Gradients*).

4.5.Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawione zostały najważniejsze interpretacje Metody Elementów Skończonych. Wybór odpowiedniego podejścia do MES zależy od formatu i typu danych wejściowych oraz o oczekiwanego typu danych wyjściowych. Wyróżnić można 3 podstawowe interpretacje MES tj.: analiza w domenie czasu, analiza w domenie częstotliwości, a także analiza łącząca obie domeny, czyli tzw. Metoda Bilansu Harmonicznych. W celu porównania każdego z podejść sporządzona i przedstawiona poniżej została Tabela 4.1. [100].

Na podstawie porównania przedstawionego w Tabeli 4.1. stwierdzić można, że analiza MES w domenie czasu najlepsza jest dla układów o wymuszeniach, które trudne przedstawić za pomocą szeregu Fouriera oraz wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z analizą stanów przejściowych. Metoda ta jest także stosunkowo łatwa w implementacji i nie wymaga dodatkowej obróbki otrzymanych wyników, gdyż dane wyjściowe stanowią przebiegi czasowe poszukiwanych wielkości fizycznych. Niestety, podejście to jest mało efektywne w analizie rozpływu pól o dużym stopniu nieliniowości, ze względu na konieczność znacznego zwiększenia liczby kroków czasowych co skutkuje zauważalnym wydłużeniem czasu obliczeń w stosunku do metod alternatywnych.

Tabela 4.1. *Porównanie wybranych interpretacji MES.*

	Analiza w domenie częstotliwości	**Analiza w domenie czasu**	**Metoda bilansu harmonicznych**
Domena obliczeniowa	Domena pojedynczej częstotliwości	Domena czasu	Domena wielu częstotliwości
Przypadki nieliniowe i przebiegi odkształcone	Tak, tylko dla pól o bardzo małym stopniu nieliniowości. Brak możliwości uwzględniania odkształceń harmonicznych w przebiegach	Tak, dla pól o dużym stopniu nieliniowości, Możliwość uwzględnienia odkształceń harmonicznych w przebiegach.	Tak, możliwość analizy pól o dużym stopniu nieliniowości. Możliwość uwzględnienia odkształceń harmonicznych w przebiegach.
Niesinusoidalne wymuszenia (np.: sygnał prostokątny)	Brak możliwości implementacji	Złożona implementacja	Łatwa implementacja
Czas obliczeń zależy od:	Rzędu stopnia swobody	Liczba kroków czasowych oraz od rzędu stopnia swobody	Liczby analizowanych harmonicznych oraz rzędu stopnia swobody.
Dokładność obliczeń	Znaczący uchyb dla wysokich częstotliwości i dla pól o nieliniowym charakterze	Zależy od stopnia dyskretyzacji czasu	Zależy od liczby badanych harmonicznych
Analiza spektrum częstotliwościowego	Niemożliwa	Możliwa na podstawie otrzymanych wyników	Spektrum częstotliwościowe jest wynikiem obliczeń.
Analiza zawartości wyższych harmonicznych	Niemożliwa	Pośrednia	Bezpośrednia

Kolejnym omówionym podejściem wykorzystującym MES jest analiza w domenie częstotliwości. Jest to zdecydowanie jedna z najprostszych interpretacji, aczkolwiek służy tylko do wybranego zakresu zagadnień. Ze względu na możliwość analizy tylko harmonicznej podstawowej, metoda nie nadaje się do analizy przebiegów odkształconych, a także słabo radzi sobie w układach zawierające elementy nieliniowe. Omawiane podeście jest natomiast bardzo często stosowane do oszacowywania wyników oraz w prostych układach, w których nie występują odkształcenia oraz nieliniowość właściwości materiałowych, lub ich wpływ jest pomijalny. Uwzględniając powyższe założenia, czas obliczeń zależy wówczas tylko od ilości stopni swobody w układzie i jest zdecydowanie krótszy w porównaniu do pozostałych dwóch omawianych metod.

Metoda HBFEM łączy w sobie cechy zarówno analizy w domenie czasu jak i analizy w domenie częstotliwości. W szczególności chętnie jest wykorzystywana dla układów charakteryzujących się nieliniowością. Ze względu na uwzględnienie w obliczeniach całego spektrum wyższych harmonicznych omawiana interpretacja cieszy się bardzo dużą dokładnością obliczeń w stosunku do rzeczywistych pomiarów. Dane wyjściowe w postaci widma harmonicznego wybranej wielkości fizycznej pozwalają na przekształcenie wyników do postaci czasowej. Istotną wadą przedstawionej metody jest niestety stosunkowo duży poziom skomplikowania obliczeń ze względu na konieczność korzystania z transformat Fouriera podczas każdego kroku iteracyjnego.

Rozdział 5
Wyniki badań

5.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawione oraz omówione zostaną wybrane wyniki badań weryfikujące skuteczność opracowanego przez Autora pracy algorytmu obliczeniowego służącego do częstotliwościowo – czasowej analizy elektromagnetycznej EM układów z polem elektromagnetycznych metodą elementów skończonych HBFEM. Opracowana przez Autora metoda wykorzystuje znane sformułowanie $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$, gdzie dla obszaru rdzenia ferrytowego z prądami przewodnictwa zastosowany został reluktancyjno – konduktancyjno – pojemnościowy model siatkowy. Wybrane przez Autora sformułowanie umożliwiło wyznaczenie wartości indukujących się gałęziowych prądów wirowych oraz przesunięcia dielektrycznego z wykorzystaniem wartości krawędziowych wektorowego potencjału magnetycznego $\boldsymbol{A}$ oraz wartości węzłowych skalarnego potencjału elektrycznego V. Wymuszenie układu odwzorowane zostało za pomocą wektorowego potencjału elektrycznego $\boldsymbol{T}_0$ dla obszaru z cienkimi uzwojeniami, w którym zaniedbać można efekt wypierania prądu. W pracy analiza rozkładu prądów przesunięcia dielektrycznego została ograniczona przez Autora jedynie do analizy obszaru rdzenia ferromagnetycznego. W niniejszym rozdziale zaprezentowane zostaną dwa podejścia, opracowane przez Autora podczas realizacji rozprawy, tj.: (a) podejście, wykorzystujące dwuwymiarowe ujęcie MES umożliwiające analizę częstotliwościowo – czasową układów z polem EM - 2D HBFEM; oraz (b) podejście wykorzystujące trójwymiarowe ujęcie MES pozwalające na analizę częstotliwościowo –czasową układów elektromagnetycznych – 3D HBFEM.

Analizie poddany zostanie układ dławika elektromagnetycznego zbudowanego z manganowo - cynkowego rdzenia ferrytowego wykonanego w technologii proszkowej oraz uzwojenia nawiniętego na kolumnę rdzenia. W zależności od prezentowanego podejścia rozpatrzone zostaną dwa rodzaje rdzeni ferrytowych. Do analizy 2D użyty zostanie rdzeń o symetrii osiowej i przekroju ferrytu typu E, natomiast do analizy 3D wykorzystany zostanie klasyczny ferryt typu E. Układ zasilany będzie ze źródła napięciowego o różnym kształcie przebiegu napięcia oraz różnych wartościach częstotliwości. Wyznaczone zostaną rozkłady wektora gęstości strumienia magnetycznego, prądów wirowych, a także prądów przesunięcia dielektrycznego. Symulacje przeprowadzone zostaną dla 3 różnych przypadków. Pierwszy z rozpatrywanych przypadków dotyczyć będzie 2D analizy dławika zasilanego z sinusoidalnego źródła napięcia o częstotliwości równej 1 kHz, w celu weryfikacji podstawowych parametrów pracy układu wykorzystując 2D podejście HBFEM. W kolejnym etapie, wcześniej przeprowadzona analiza 2D, rozszerzona zostanie do układu dławika zasilanego ze źródła napięcia o prostokątnym przebiegu i częstotliwości równej 150kHz. Celem niniejszej analizy będzie prezentacja możliwości obliczeniowych metody harmonicznego bilansu oraz zalet płynących z wykorzystania domeny częstotliwości. W ostatnim przykładzie, przeprowadzona zostanie trójwymiarowa analiza układu induktora zasilanego ze sinusoidalnego źródła napięciowego o częstotliwości równej 1kHz. W niniejszym przykładzie, do analizy obszaru rdzenia ferromagnetycznego z polem EM, zaimplementowany zostanie pełny 3D reluktancyjno – konduktancyjno – pojemnościowy model siatkowy. Głównym celem przedstawionych w rozdziale etapów będzie weryfikacja skuteczności opracowanych algorytmów wykorzystujących metodę HBFEM m.in. na odwzorowanie wpływu stanu nasycenia rdzenia, kształtu przebiegów prądów przewodzenia przepływających przez uzwojenie układu, a także rozkładów rozpływu prądów wirowych oraz prądów przesunięcia dielektrycznego wewnątrz obwodu magnetycznego. Wszystkie badane w pracy przypadki zostaną zweryfikowane poprzez analizę porównawczą pomiędzy wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem oprogramowania własnego, a wynikami uzyskanymi w profesjonalnym oprogramowaniu Comsol Multiphysics.

Do analizy powyższych przypadków Autor pracy wykorzystuje autorskie oprogramowanie, w którym zaimplementował następujące funkcjonalności:

- analizę 3D obszarów z polem magnetycznym poprzez zastosowanie siatki reluktancyjnej oraz sformułowania wykorzystującego wektorowy potencjał magnetyczny $\boldsymbol{A}$,
- analizę 3D obszarów z prądami wirowymi oraz prądami przesunięcia dielektrycznego poprzez zastosowanie modeli o sprzężonych siatkach reluktancyjno – kontutancyjno - pojemnościowej oraz sformułowaniu $\boldsymbol{A} - V$,
- wprowadzenie wymuszenia napięciowego w analizie układu poprzez zastosowanie siatki reluktancyjnej i sformułowania $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{T}_0$ dla obszarów uzwojeń o cienkich przewodach,
- obliczenia wykonywane z wykorzystaniem rachunku liczb zespolonych poprzez zastosowanie metody punktu ustalonego (FPM) do rozwiązania nieliniowego układu równań MES,

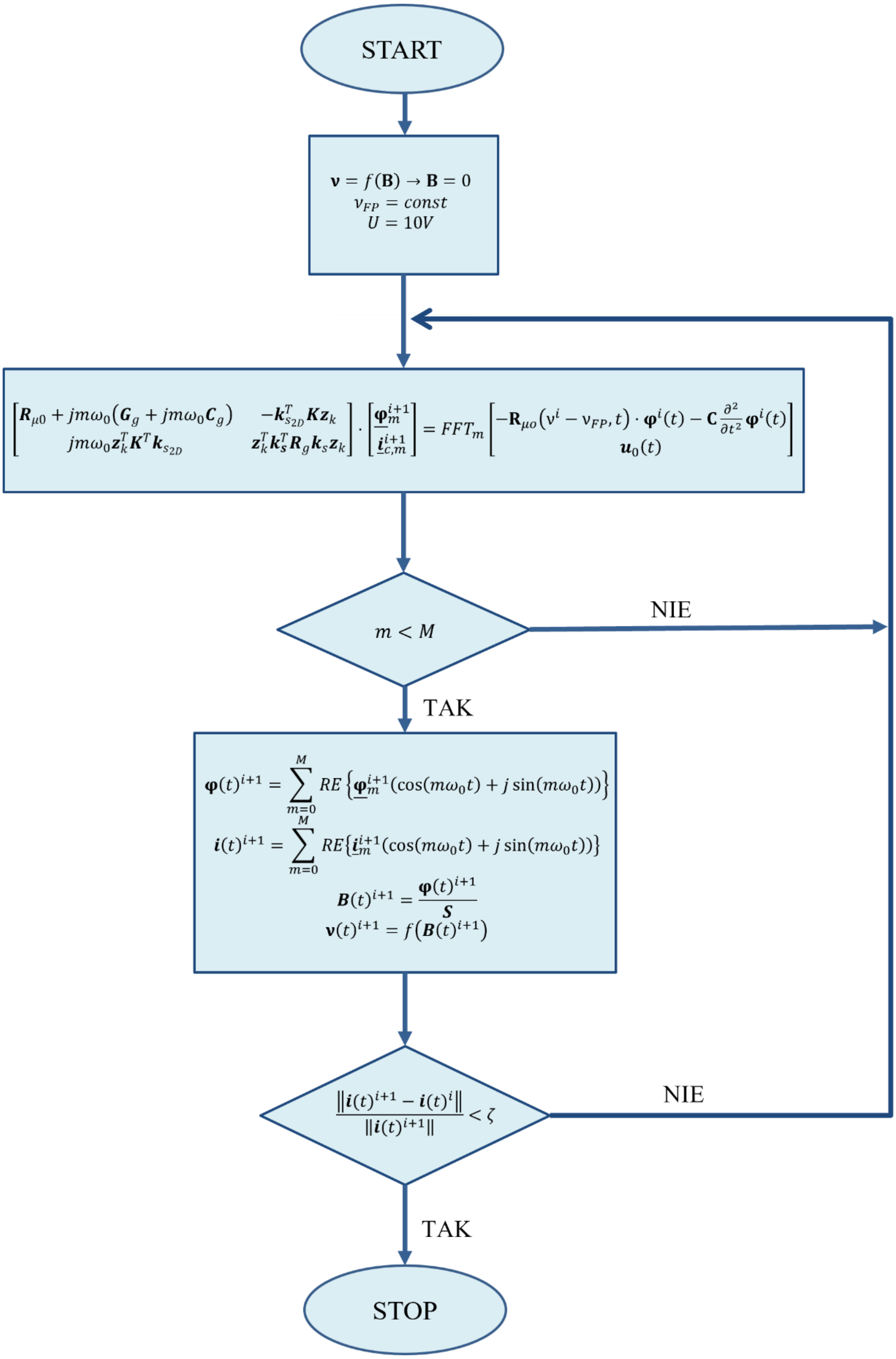
- zredukowanie wymaganej liczby pamięci operacyjnej poprzez zastosowanie macierzy numerycznych typu „Sparse”,
- możliwość wprowadzenia okresowego wymuszenia o dowolnym kształcie przebiegu – prostokąt, trójkąt, sinus – dzięki wykorzystaniu metody bilansu harmonicznych HBM,
- włączenie do analizy wpływu nasycenia rdzenia poprzez implementacje metody bilansu harmonicznych HBM,
- analiza prowadzona w domenie częstotliwościowo – czasowej,
- znaczące ograniczenie czasu obliczeń poprzez pominięcie etapu ustalania się przebiegów czasowych.

Dodatkowo, w rozdziale wskazano potencjał metody HBFEM ze względu na możliwość zrównoleglenia obliczeń wykonywanych dla poszczególnych rzędów harmonicznych, a także wskazano obszary dalszego rozwoju niniejszej metody.

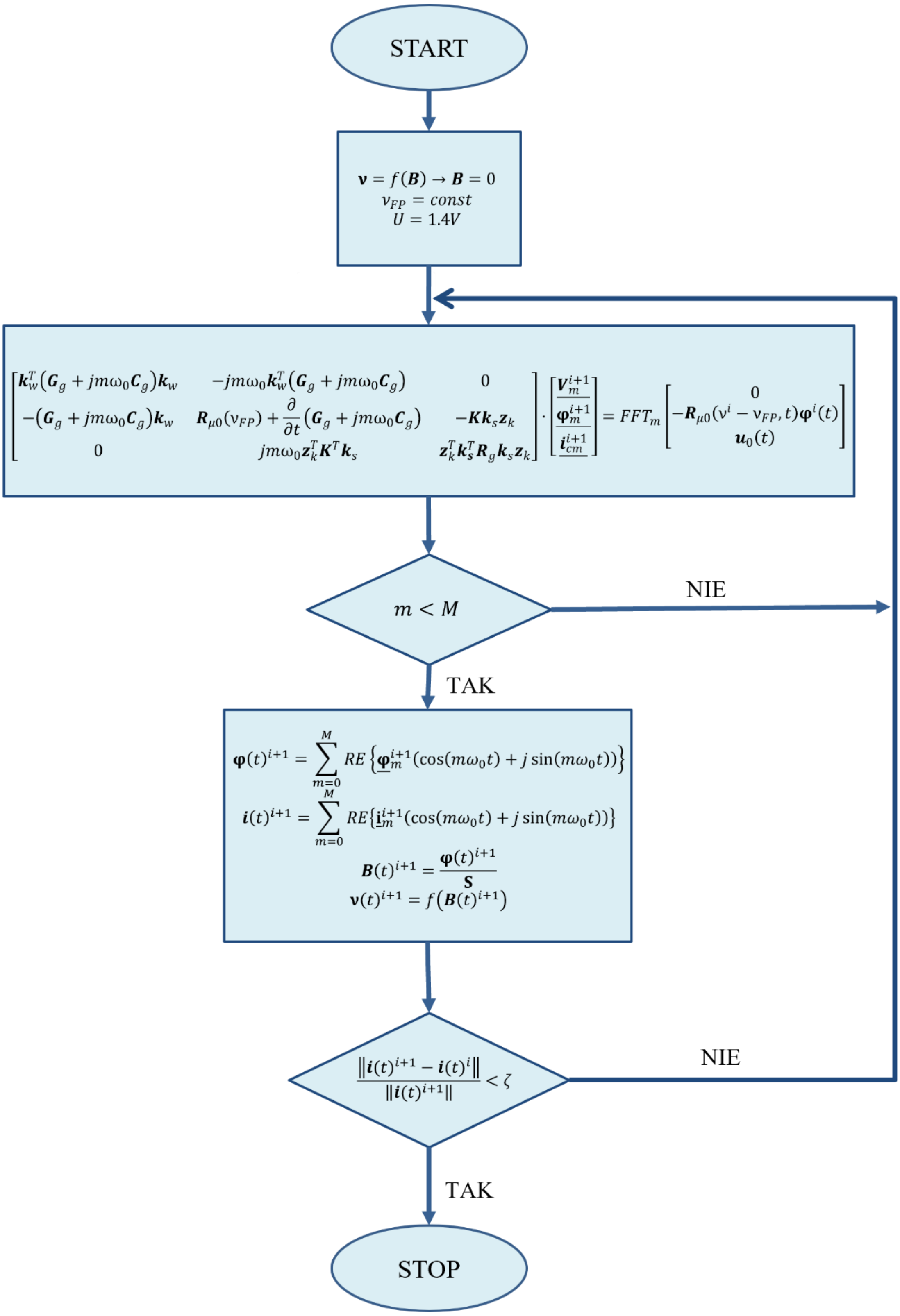
5.2. Opis algorytmu postępowania

W rozdziale zaprezentowano oraz omówiono dwa opracowane algorytmy dotyczące odpowiednio: (a) podejścia 2D HBFEM oraz (b) 3D HBFEM. Schematy blokowe dla każdej z prezentowanych metod przedstawione zostały na Rysunkach 5.1 oraz 5.2.

Celem opracowanego systemu obliczeniowego, wykorzystującego metodę 3D HBFEM, jest wyznaczenie wartości potencjałów węzłowych krawędziowego modelu siatkowego V, oczkowych strumieni magnetycznych $\boldsymbol{\varphi}$ ściankowego modelu siatkowego, a także prądów przewodzenia $\boldsymbol{i}_c$ również modelu ściankowego. W tym celu w programie zaimplementowany został układ równań (4.4.9) przedstawiony w rozdziale 4. Parametry obwodowe układu wyznaczono wykorzystując zależności całkowe podane w rozdziale 5.4. Wartości parametrów przenikalności magnetycznej dla poszczególnych elementów siatki dyskretyzacyjnej wyznaczane były na podstawie charakterystyki magnesowania przestawionej na Rys. 5.5 oraz metod interpolacyjnych. W celu rozwiązania skonstruowanego układu równań Autor pracy posłużył się metodą sukcesywnej nadrelaksacji (SOR). Posiadając zdefiniowane parametry układu, wymuszenie napięciowe oraz wartości początkowe dla przenikalności magnetycznej wyznaczyć można wartości wektorów potencjałów węzłowych $\boldsymbol{V_m}$, strumieni magnetycznych $\boldsymbol{\varphi_m}$ oraz prądów $\boldsymbol{i_{c,m}}$ dla każdej z rozpatrywanych harmonicznych. Otrzymane drogą obliczeń spektrum harmonicznych strumieni oczkowych $\boldsymbol{\varphi_m}$ przekształcić należy następnie do formy czasowej stosując odwrotną transformatę Fourier’a. Następnie, na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych strumieni oczkowych dla każdej z uwzględnianych w obliczeniach krawędzi, oblicza się średnie wartości indukcji dla każdego z elementów siatki dyskretyzacyjnej.



Rys. 5.1. *Schemat blokowy algorytmy HBFEM podejście 2D dla układów o symetrii osiowej*



Rys. 5.2. *Schemat blokowy algorytmy HBFEM podejście 3D*

W kolejnym kroku, posiadając uzyskane wartości średniej indukcji wewnątrz poszczególnych elementów siatki wyznaczyć należy przebiegi czasowe reluktywności magnetycznej dla odpowiadających elementów. Nowe wartości reluktywności magnetycznej pozwalają wyznaczyć w kolejnej iteracji nowe wymuszenie układu. Iteracje powtarzane są do momentu uzyskania wartości rozbieżności pomiędzy wynikami na satysfakcjonującym poziomie. Błąd metody wyznaczyć można na podstawie poniższego relacji:

$$\frac{\left\| \boldsymbol{i}_g^{i+1}(t) - \boldsymbol{i}_g^{i}(t) \right\|}{\left\| \boldsymbol{i}_g^{i+1}(t) \right\|} < \zeta, \tag{5.2.1}$$

gdzie: ζ jest wartością zadaną będącą warunkiem zakończenia obliczeń.

Wyznaczanie nowej wartości reluktywności magnetycznej, na podstawie otrzymanej indukcji dla poszczególnych elementów siatki, jest częścią procedury rozwiązywania nieliniowego układu równań, do czego posłużono się metodą punktu ustalonego – FPM.

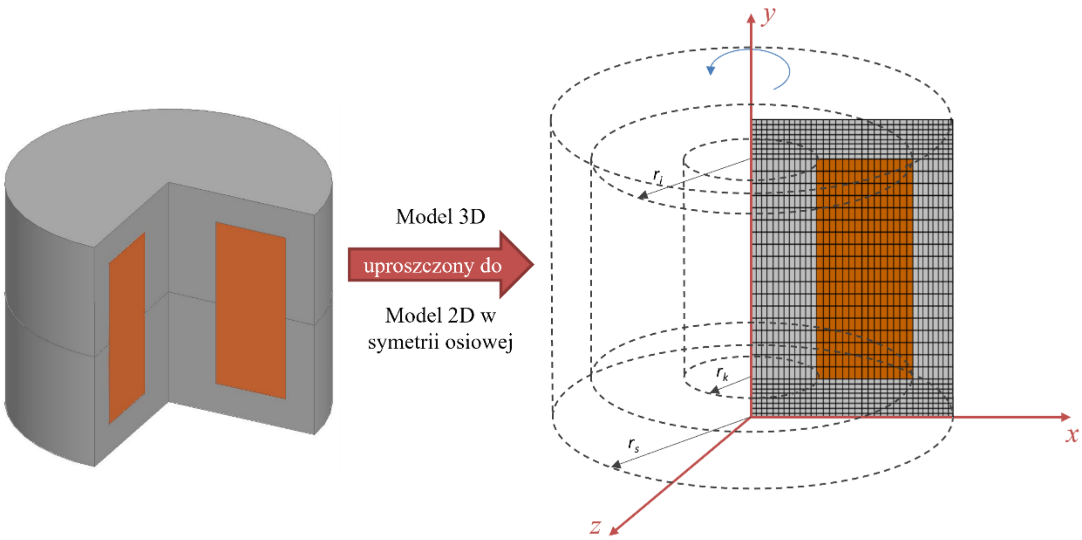
Algorytm obliczeniowy wykorzystujący metodę 2D HBFEM otrzymuje się poprzez implementacje uproszczenia wynikającego z właściwości geometrycznych układów o symetrii osiowej - grad $V \approx 0$.

5.3. Metoda HBFEM - model 2D

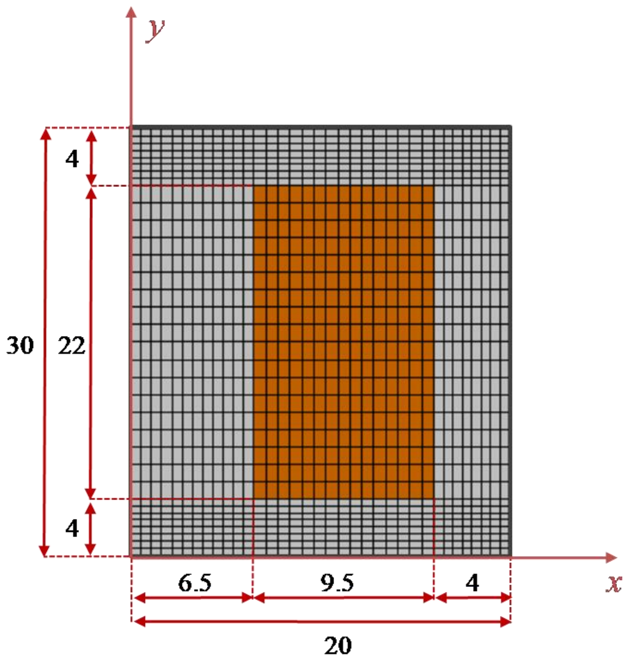
5.3.1. Opis modelu

W pierwszym etapie badań przygotowany został dwuwymiarowy model osiowosymetryczny układu dławika elektromagnetycznego. Zasady konstruowania modelu siatkowego oraz wykorzystywane równania i zależności przedstawione zostały w rozdziale 3.3. Na Rysunku 5.3. przedstawiony został zarówno model 3D analizowanego układu jak i jego interpretacja 2D o symetrii osiowej. Autor pracy zdecydował się na niniejsze podejście, ze względu na wiele uproszczeń występujących w analizie 2D umożliwiających szybką i dokładną weryfikacje użyteczności wybranych przez niego metod numerycznych. Na prezentowanym etapie pracy skonstruowany został 2D reluktancyjno – konduktancyjno – pojemnościowy model siatkowy opisany za pomocą krawędziowych wartości wektorowego potencjału magnetycznego $\boldsymbol{A}$. Uproszczenie siatki konduktancyjno – pojemnościowej, w modelu polegające na przyjęciu, że $grad\, V \approx 0$, umożliwia stworzenie układu równań MES wykorzystującego jedynie wielkości związane z siatką ściankową. Dodatkowo, cechą charakterystyczną układów 2D jest nieosobliwa macierz sztywności układu, co w przeciwieństwie do układów 3D pozwala na zastosowanie bezpośrednich metod rozwiązywania liniowych układów równań takich jak UMFPACK (z ang. *Unsymmetric-pattern Multifrontal Method*) czy też MUMPS (z ang. *Multifrontal Massively Parallel sparse direct Solver*). Konieczność zastosowania metod iteracyjnych lub czasochłonnych przekształceń macierzowych w modelach trójwymiarowych znacząco wydłuża czas analizy i ilość wymaganych zasobów obliczeniowych. Dla opracowanego modelu siatkowego Autor rozprawy zastosował kombinacyjne podejście metod bilansu harmonicznych HBM oraz punktu ustalonego FPM. Pozytywne wyniki, jakie otrzymane zostały w badaniach, pozwoliły na zastosowanie wspomnianej metody w dalszym etapie pracy, jakim był pełny 3D model układu dławika elektromagnetycznego.

Na Rys. 5.4 przedstawione zostały szczegółowe wymiary układu wraz z zastosowana siatką dyskretyzacyjną.

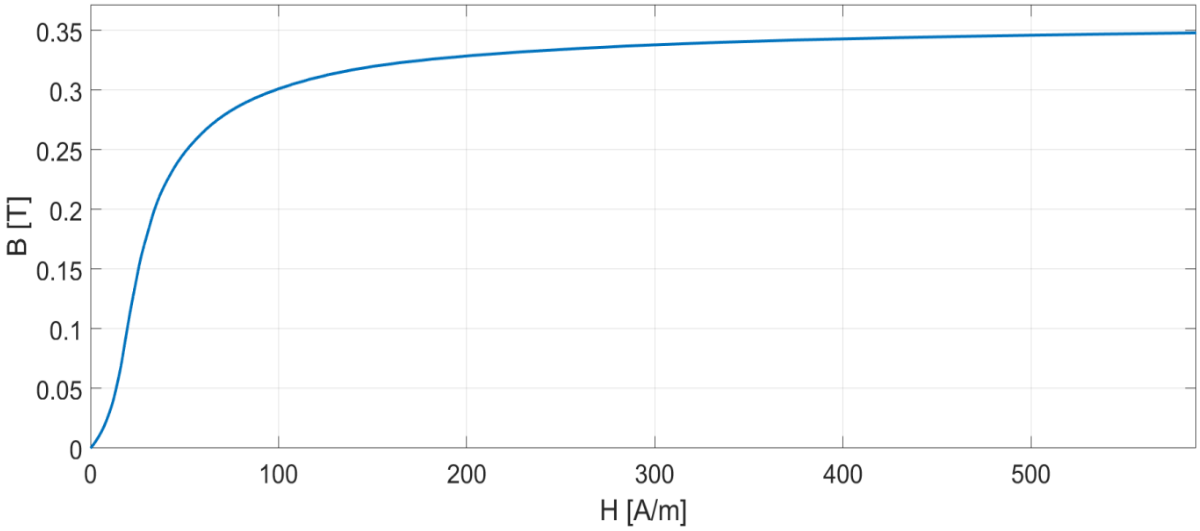


Rys. 5.3. *Transformacja modelu 3D w 2D osiowosymetryczny wraz z 2D siatką dyskretyzacyjną*



Rys. 5.4. *Model dławika elektromagnetycznego 2D o symetrii osiowej – wymiary w milimetrach*

Rdzeń ferrytowy wykonany został z manganowo – cynkowego MnZn proszku o charakterystyce magnesowania przedstawionej na Rys. 5.5. Autor zdecydował się na wykorzystanie siatki złożonej z elementów prostokątnych, ze względu na prostszą strukturę badanego obiektu oraz łatwość implementacji.



Rys. 5.5. *Charakterystyka magnesowania B(H) rdzenia ferrytowego*

Zastosowana przez Autora pracy prostokątna siatka dyskretyzacyjna układu o symetrii osiowej charakteryzuje się podobnymi właściwościami i zależnościami, co siatka sześciościenna. Właściwości siatki sześciościennej omówione zostaną szczegółowo w sekcji następnej poświęconej modelowi 3D dławika.

5.3.2.Wyniki obliczeń

W niniejszym podrozdziale zaprezentowane oraz omówione zostaną wyniki obliczeń otrzymanych z wykorzystaniem autorskiego oprogramowania do analizy 2D układów o symetrii osiowej. Analizie podlegać będzie przedstawiony wyżej układ dławika zasilany napięciem o różnym kształcie przebiegu. Badany układ zasilony zostanie źródłem napięciowym o sinusoidalnym przebiegu i częstotliwości 1 kHz oraz źródłem napięciowym o przebiegu prostokątnym i częstotliwości 150 kHz. Oba analizowane przypadki zostaną poddane analizie porównawczej wykonanej w oprogramowaniu komercyjnym celu weryfikacji poprawności obliczeń. Porównanie przeprowadzone zostanie z wykorzystaniem oprogramowania COMSOL Multiphysics oraz analizy w domenie czasu typu „transient”. Podstawowe parametry badanego układu dla wymuszenia sinusoidalnego przedstawione zostały w Tabeli 5.1.

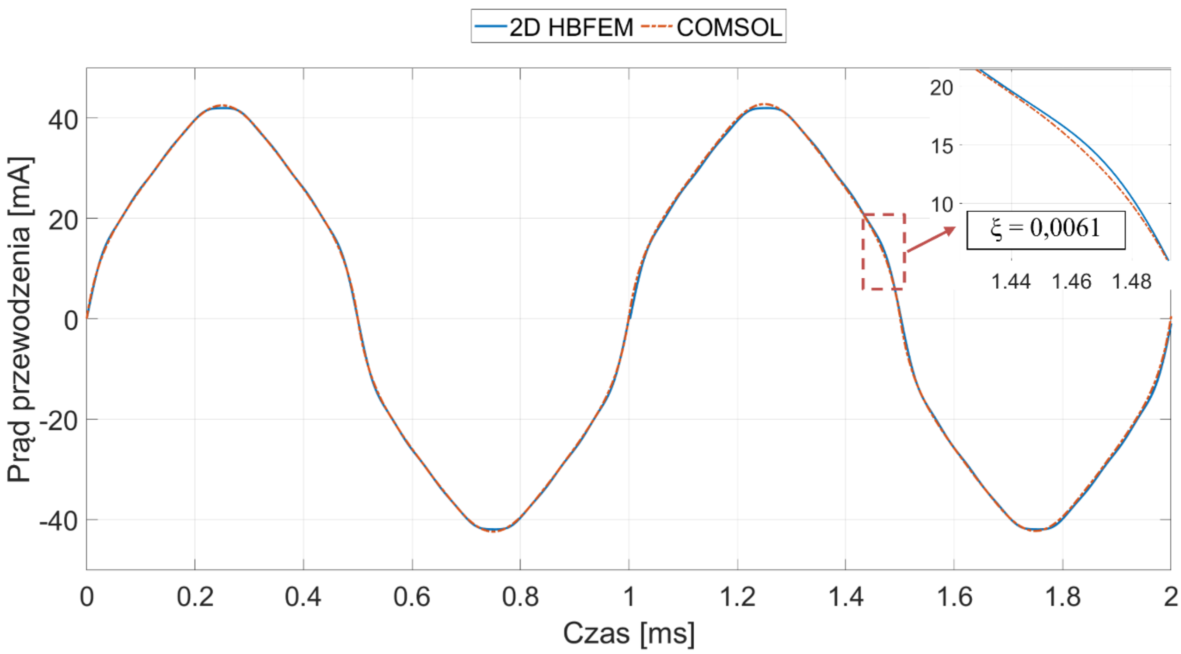
Tabela 5.1. *Parametry modelu symulacyjnego HBFEM dla wymuszenia sinusoidalnego*

Amplituda napięcia zasilania u_{zmax}	**Częstotliwość f**	**Liczba zwojów**	**Rezystancja uzwojenia R_c**	**Przenikalność elektryczna rdzenia ferrytowego ε**	**Przewodność elektryczna rdzenia ferrytowego γ**	**Ilość analizowanych harmonicznych K**
10 [V]	1 [kHz]	50	39 [mΩ]	$12 \cdot \varepsilon_0 \left[\frac{F}{m}\right]$	$10 \left[\frac{S}{m}\right]$	50

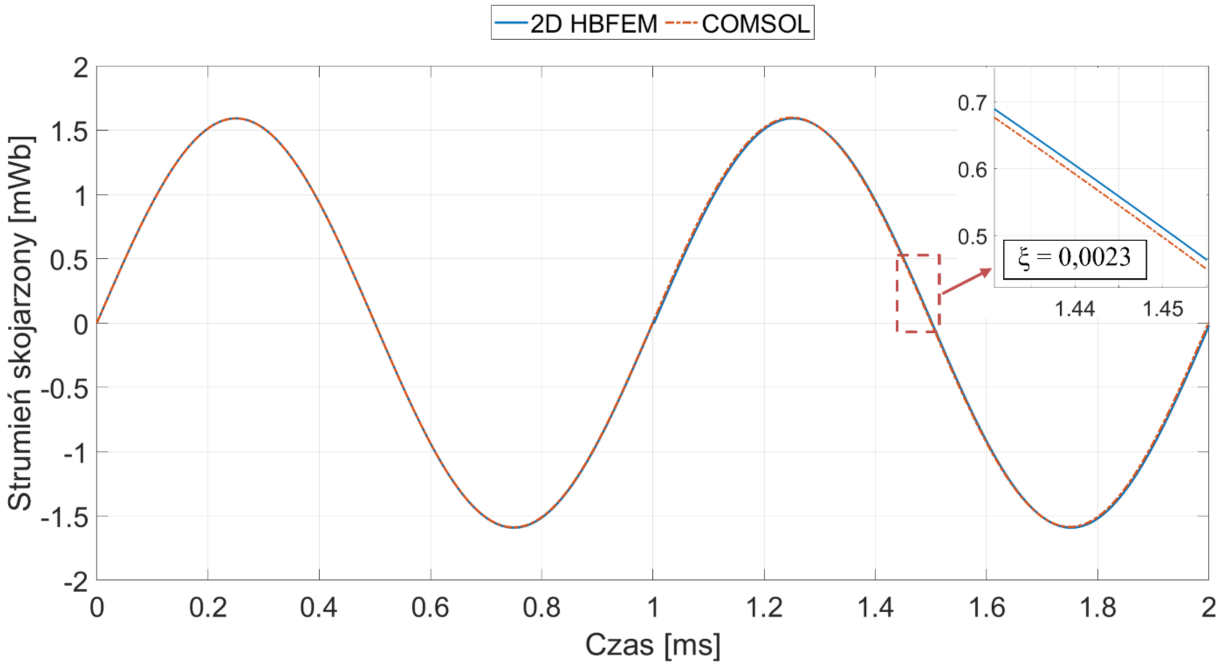
Analizując przebiegi przedstawione na Rysunkach 5.6 – 5.7 można zauważyć wysoką zbieżność wyników otrzymanych przy zastosowaniu proponowanego podejścia 2D HBFM oraz wyników uzyskanych z wykorzystaniem oprogramowania COMSOL Multiphysics. Do numerycznego określenia poziomu uchybu pomiędzy przedstawionymi wynikami posłużono się poniższym wzorem.

$$\xi = \frac{\|\boldsymbol{I}_c^r - \boldsymbol{I}_c^o\|}{\|\boldsymbol{I}_c^r\|}, \tag{5.3.1}$$

gdzie: $\boldsymbol{I}_c^r$ to przebieg referencyjny prądu przewodzenia uzyskany w oprogramowaniu COMSOL, natomiast $\boldsymbol{I}_c^o$ to przebieg odniesienia prądu przewodzenia uzyskany w oprogramowaniu własnym.

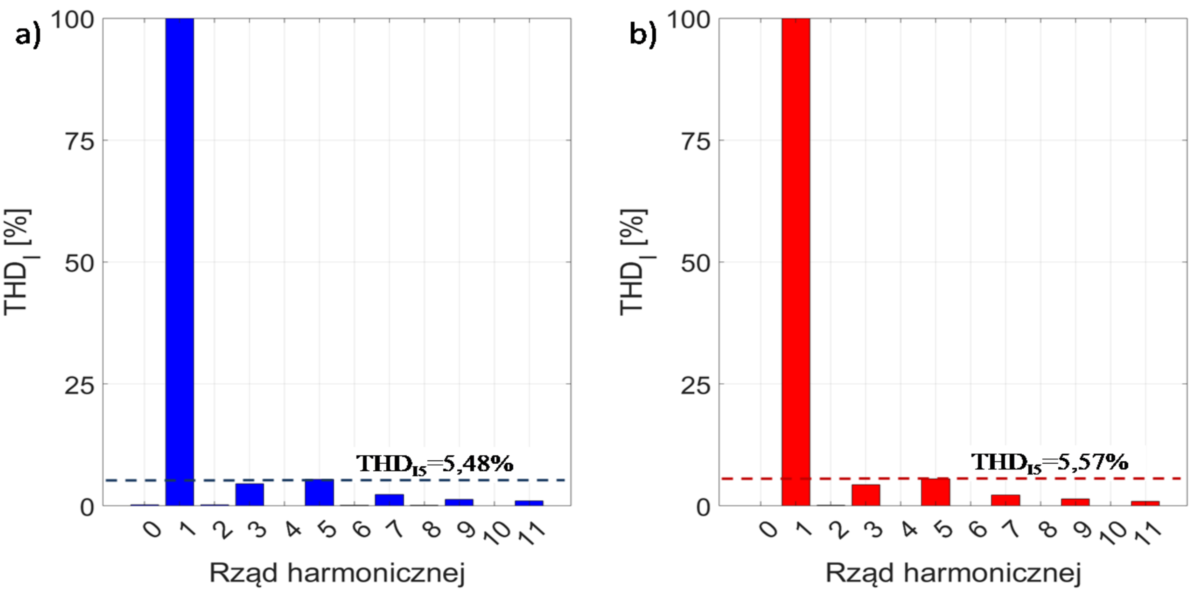


Rys. 5.6. *Przebieg prądu cewki dławika w stanie ustalonym dla sinusoidalnego wymuszenia napięciowego o częstotliwości f = 1 kHz*



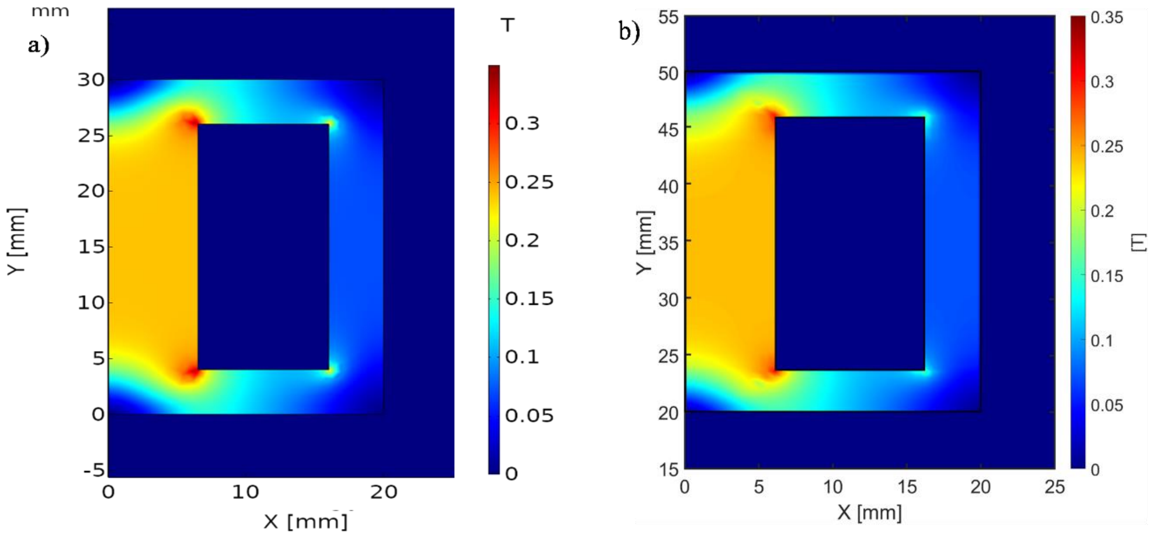
Rys. 5.7. *Przebieg strumienia skojarzonego z uzwojeniem dławika dla sinusoidalnego wymuszenia napięciowego o częstotliwości f = 1 kHz*

W celu weryfikacji poziomu odkształcenia prądu uzwojenie dławika, spowodowanego wpływem nieliniowości obwodu magnetycznego, sporządzona została także analiza harmonicznych dla porównywanych wyżej przebiegów.

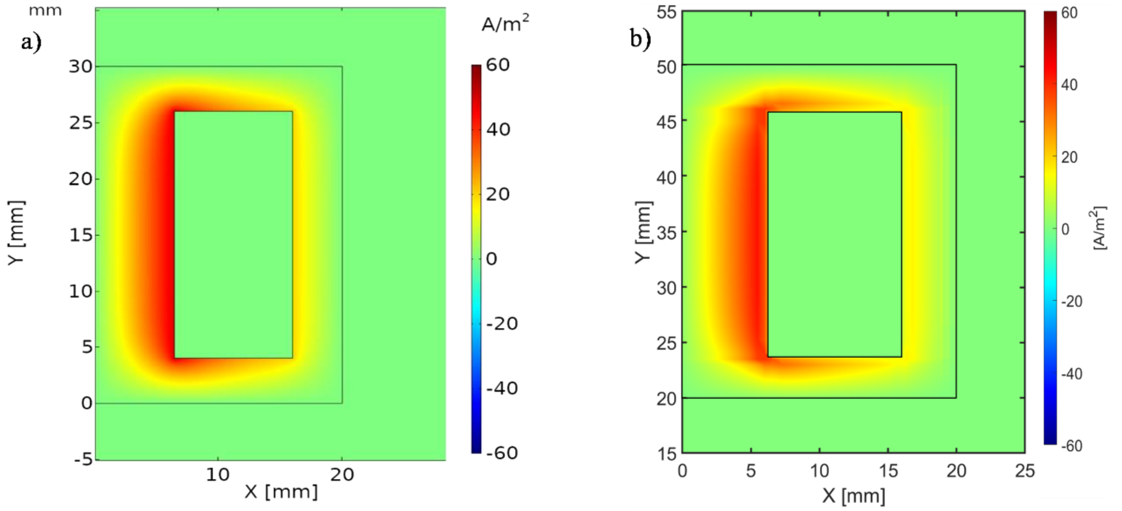


Rys. 5.18. *Analiza harmoniczna przebiegów prądów dławika wykonanych a) metodą 2D HBFEM (oprogramowanie własne), b) metodą analizy w domenie czasu typu „transient" (COMSOL)*

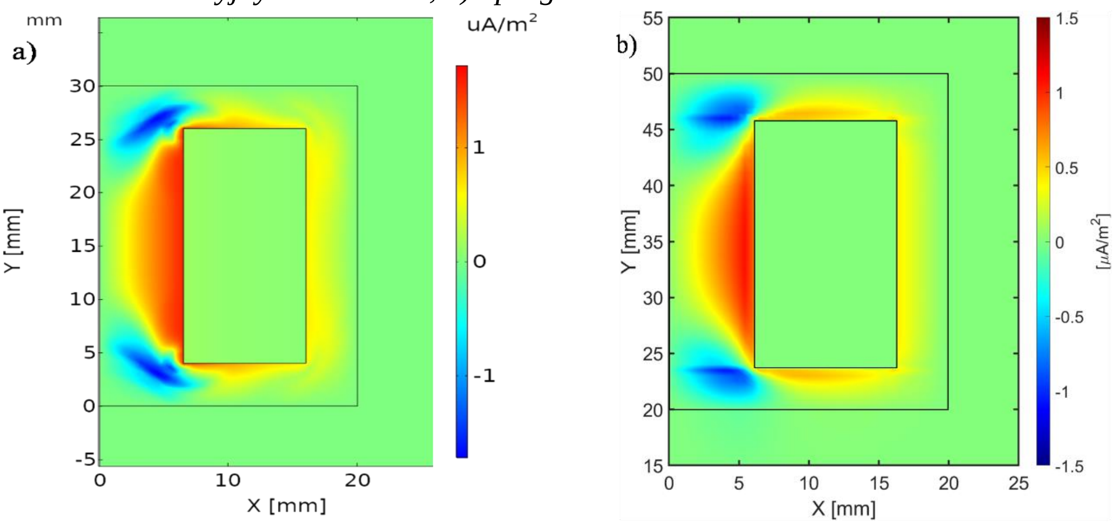
W kolejnym etapie analizy porównane zostały poszczególne rozkłady gęstości, tj.: gęstości strumienia magnetycznego, prądów wirowych oraz prądów przesunięcia dielektrycznego.



Rys. 5.9. *Rozkład gęstości strumienia magnetycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.25ms*

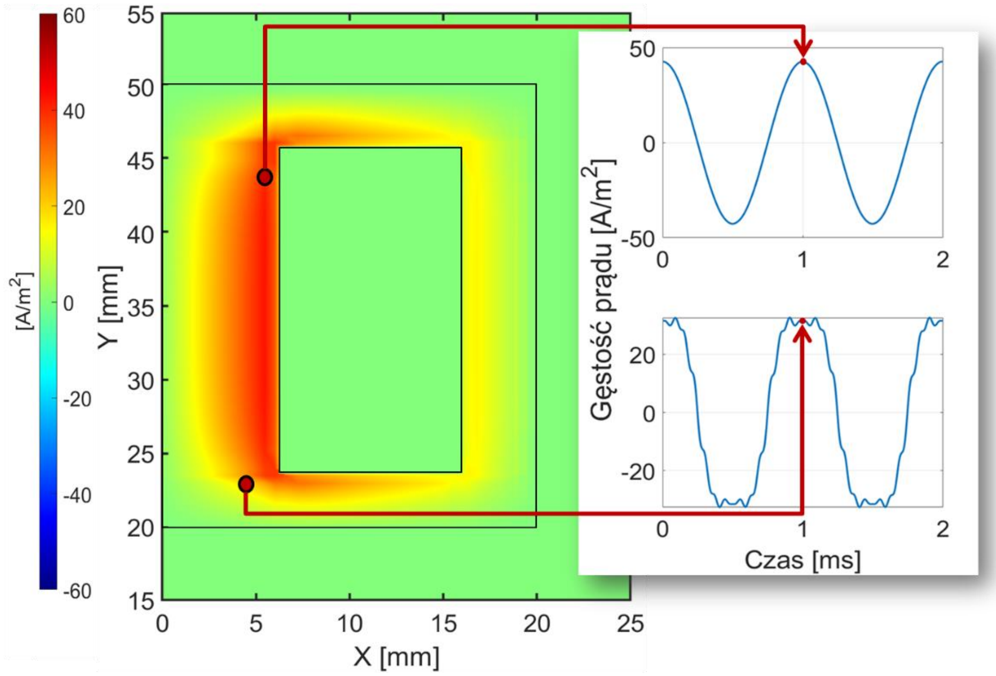


Rys. 5.10. *Rozkład gęstości prądów wirowych otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 1ms*

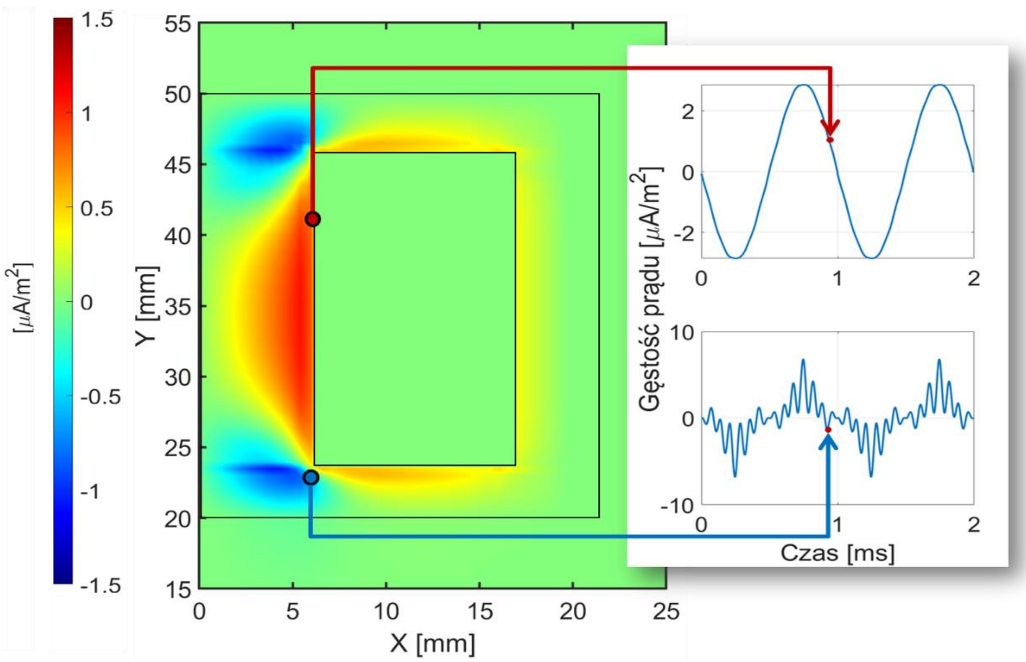


Rys. 5.11. *Rozkład gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.92ms*

Po pomyślnej weryfikacji rozkładów gęstościowych strumienia magnetycznego oraz prądów wirowych i dielektrycznych w rdzeniu Autor pracy przystąpił do wizualizacji przebiegów gęstości indukowanych prądów dla wybranych punktów badanego układu. Otrzymane wyniki przedstawione zostały na Rysunkach 5.12 - 5.13. W rozkładzie gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego (Rys. 5.13) zauważyć można, że dla określonych chwil czasowych, wektory gęstości prądów przesunięcia dielektrycznego skierowane są przeciwnie w różnych obszarach rdzenia.



Rys. 5.12. *Przebiegi czasowe gęstości prądów wirowych w rdzeniu dla f=1kHz*



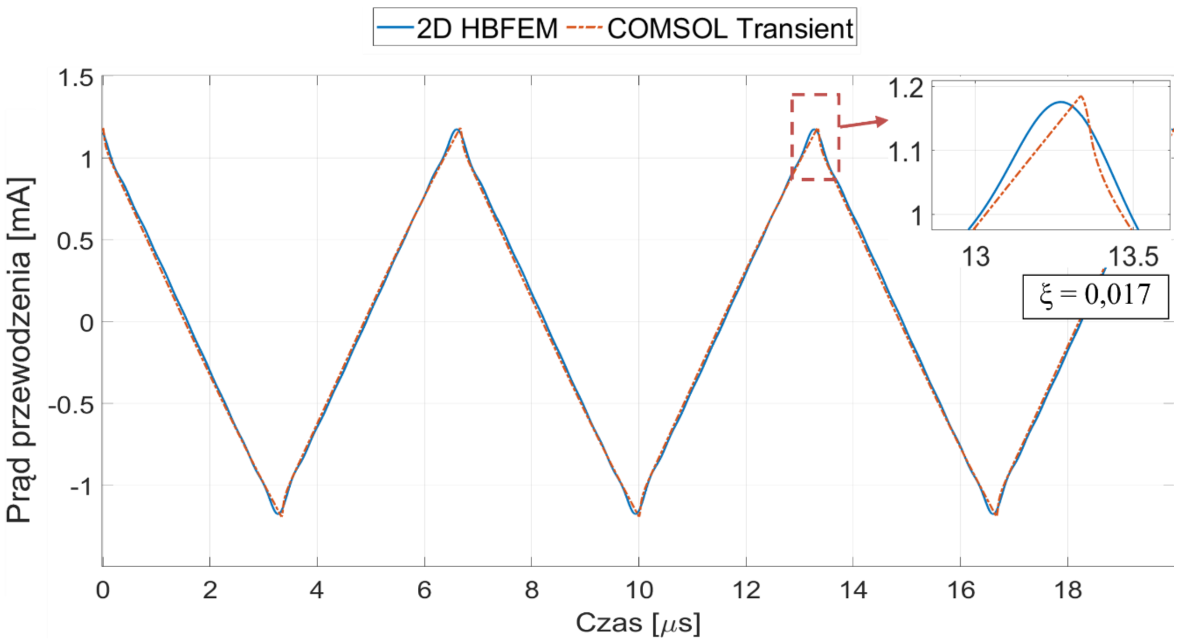
Rys. 5.13. *Przebiegi czasowe gęstości prądów dielektrycznych w rdzeniu dla f=1kHz*

W kolejnym kroku porównane zostały przebiegi czasowe oraz rozkłady gęstości strumienia i prądów dla wymuszenia napięciowego o przebiegu prostokątnym i stałej amplitudzie. W Tabeli 5.2. zestawiono podstawowe parametry symulacji, natomiast na Rysunkach 5.13 oraz 5.14 przestawiono odpowiednio przebiegi prądu przepływającego przez uzwojenie dławika, a także strumienia skojarzonego z tym uzwojeniem.

Tabela 5.2. *Parametry modelowanego 2D układu dławika o symetrii osiowej*

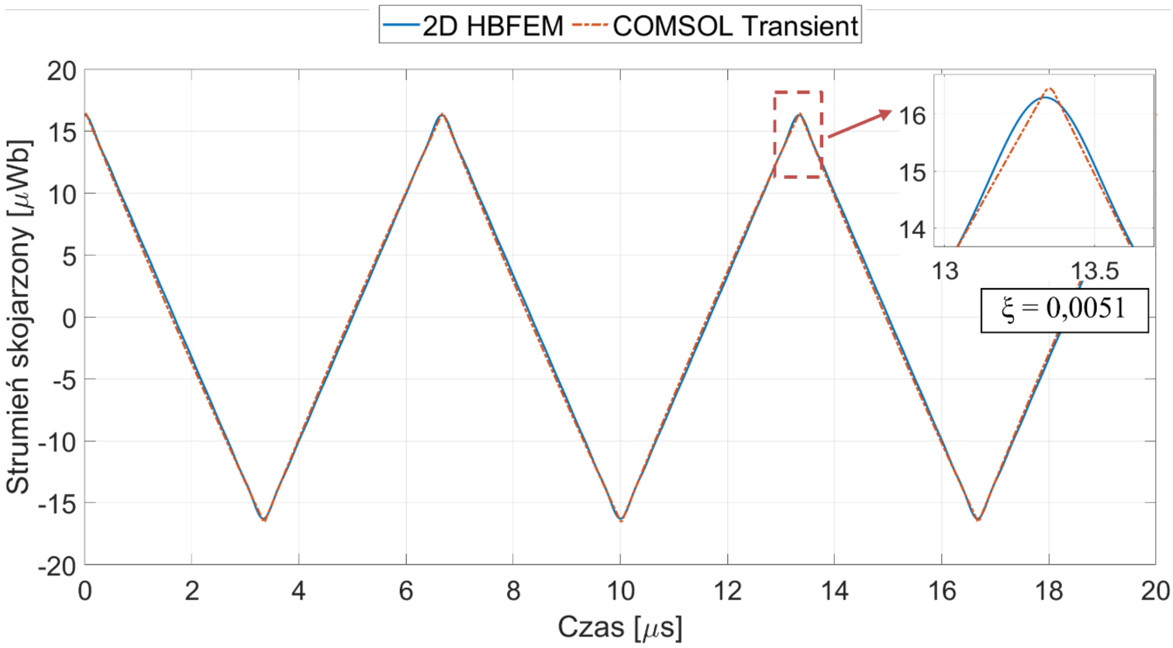
Amplituda napięcia zasilania u_{zmax}	**Częstotliwość** f	**Liczba zwojów**	**Rezystancja uzwojenia** R_c	**Przenikalność elektryczna rdzenia ferrytowego ε**	**Przewodność elektryczna rdzenia ferrytowego γ**	**Ilość analizowanych harmonicznych K**
10 [V]	150 [kHz]	50	39 [mΩ]	$12 \cdot \varepsilon_0 \left[\frac{F}{m}\right]$	$10 \left[\frac{S}{m}\right]$	180

W związku z prostokątnym przebiegiem zasilającym układ dławika dla prądu przewodzenia oraz strumienia skojarzonego z cewką spodziewać się należy przebiegów piłokształtnych symetrycznych (trójkątnych) (Rys. 5.13-5.14).

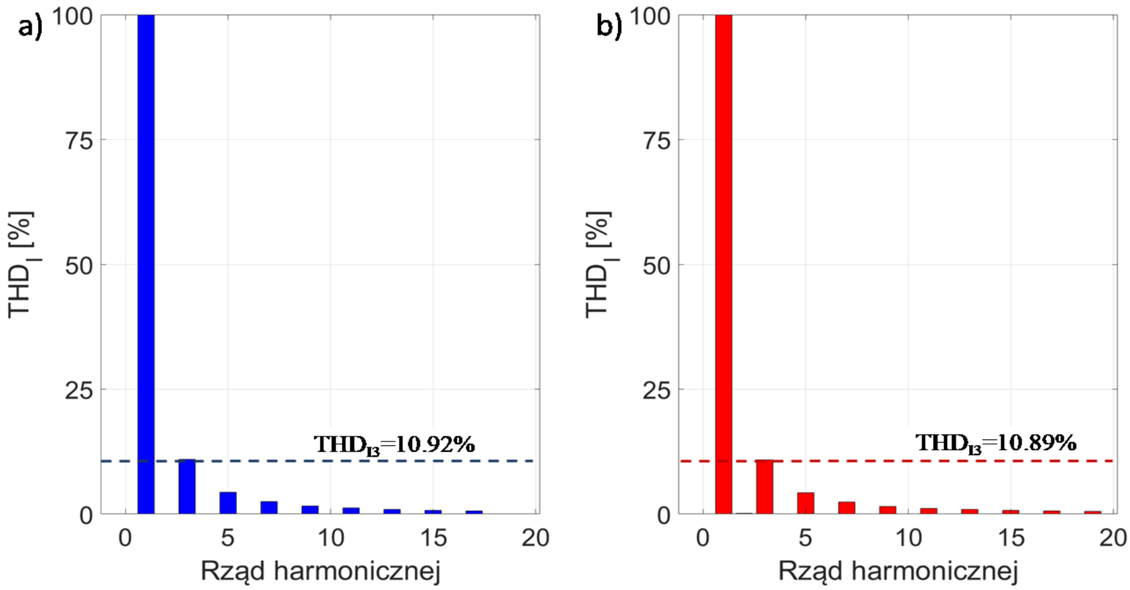


Rys. 5.13. *Przebieg prądu dławika w stanie ustalonym dla wymuszenia napięciowego prostokątnego o częstotliwości f = 150 kHz*

Analiza zawartości wyższych harmonicznych w przebiegu prądu dławika przedstawiona została na Rysunku 5.18 i wskazuje obecność głównie 3-ciej oraz 5-tej harmonicznej co jest charakterystyczne dla przebiegów piłokształtnych symetrycznych (trójkątnych).

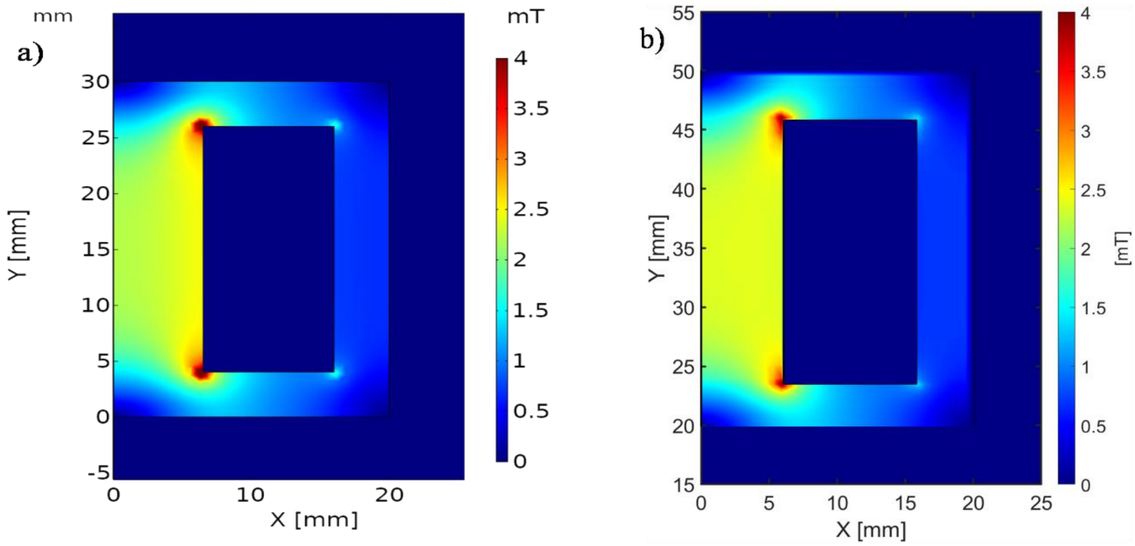


Rys. 5.14. *Przebieg strumienia skojarzonego cewką w stanie ustalonym dla wymuszenia napięciowego prostokątnego o częstotliwości f = 150 kHz*

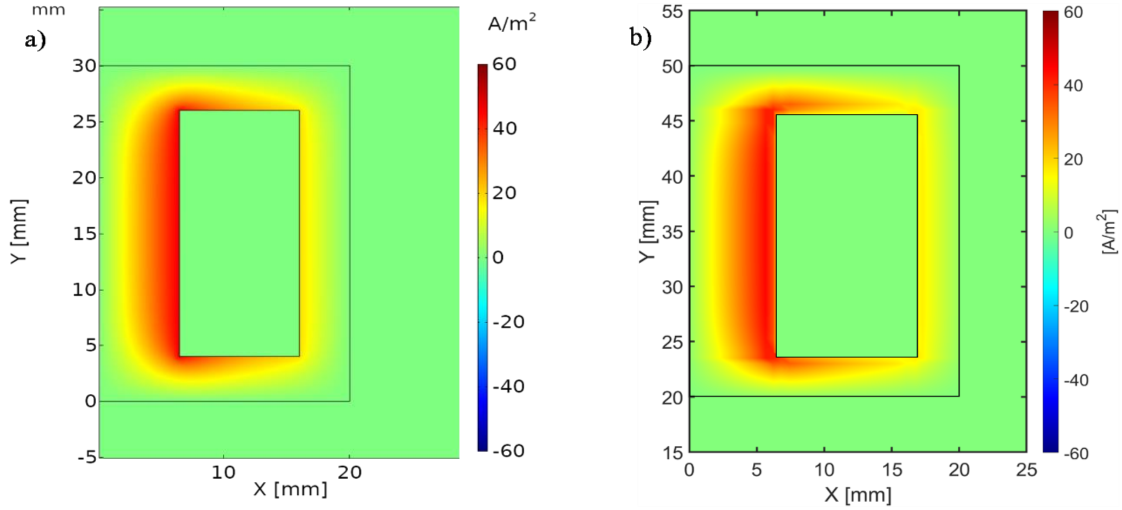


Rys. 5.18. *Analiza harmoniczna przebiegów prądów dławika wykonanych a) metodą 2D HBFEM (oprogramowanie własne), b) metodą analizy w domenie czasu typu „transient" (COMSOL)*

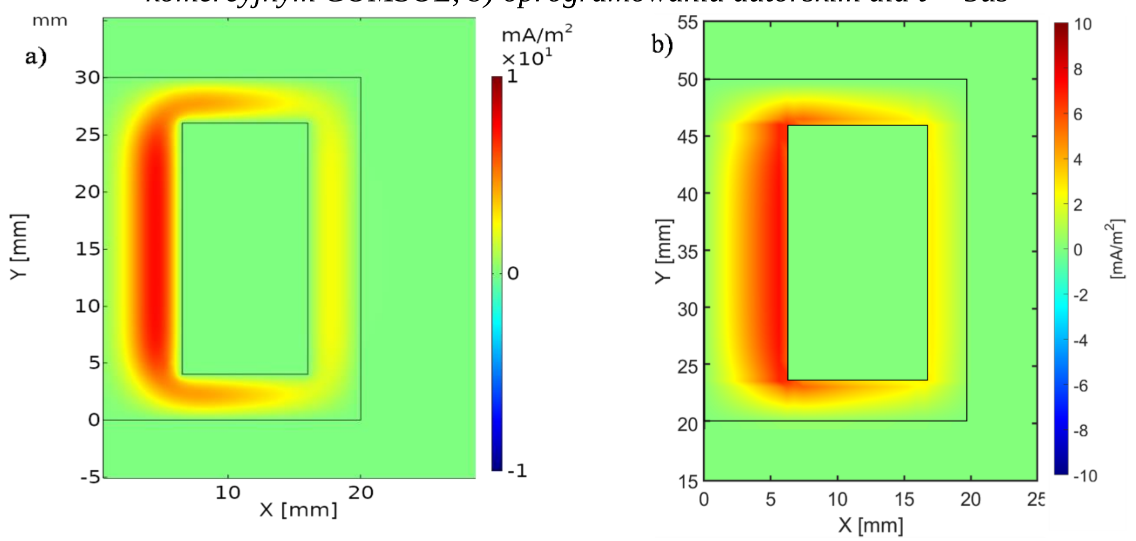
Podobnie jak w przykładzie z sinusoidalnym wymuszeniem napięciowym, kolejnym krokiem przeprowadzonej analizy było zestawienie na Rysunkach 5.15 - 5.17 kolejno: rozkładów gęstości strumienia magnetycznego, prądów wirowych oraz prądów przesunięcia dielektrycznego indukowanych w rdzeniu ferromagnetycznym układu.



Rys. 5.15. *Rozkład gęstości strumienia magnetycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 3.4us*

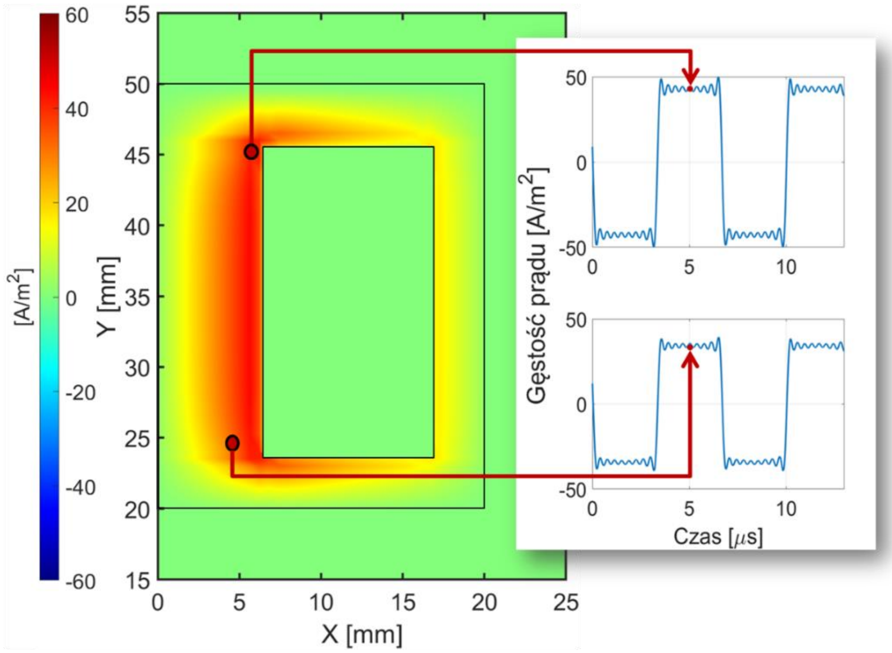


Rys. 5.16. *Rozkład gęstości prądów wirowych otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 5us*

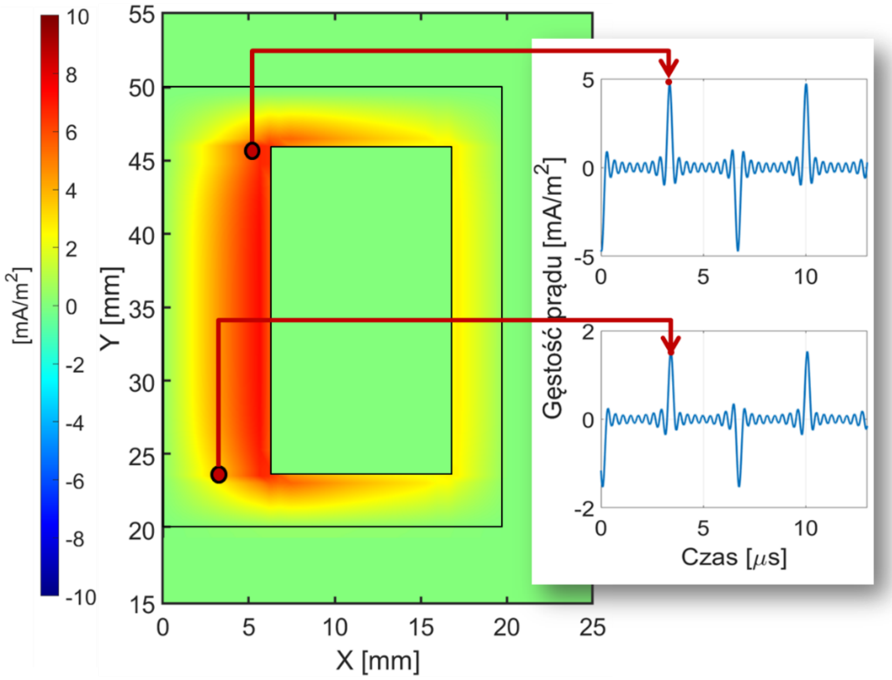


Rys. 5.17. *Rozkład gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 3.4us*

Dla układu zasilanego przebiegiem prostokątnym ze źródła napięcia sporządzone zostały także rysunki obrazujące przebiegi gęstości prądów wirowych oraz dielektrycznych w rdzeniu (Rys. 5.18 -5.19). Warto zwrócić uwagę na kształty zaprezentowanych przebiegów. Prądy wirowe w rdzeniu, w związku z trójkątnym przebiegiem strumienia skojarzonego z cewką (pochodna pierwszego stopnia), przyjmą kształt prostokąta, natomiast prądy przesunięci dielektrycznego przyjmą kształt impulsów (pochodna drugiego stopnia).



Rys. 5.18. *Przebiegi czasowe gęstości prądów wirowych w rdzeniu dla f=150kHz*



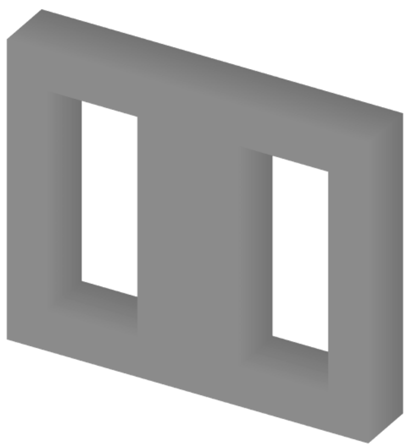
Rys. 5.19. *Przebiegi czasowe gęstości prądów dielektrycznych w rdzeniu dla f=150kHz*

Oba zastosowane podejścia związane z analizą w domenie czasu typu „transient” wykonaną w oprogramowaniu COMSOL oraz analizą w domenie częstotliwości i czasu 2D HBFEM wykonana w oprogramowaniu autorskim, dają zbieżne rezultaty. Jednak w przeciwieństwie do analizy typu „transient”, metoda HBFEM pozwala na pominięcie stanu nieustalonego rozpatrywanego obwodu, co umożliwia skrócenie czasu obliczeń, w szczególności dla przebiegów charakteryzujących się stromymi zboczami jak omawiany w rozdziale przebieg stanowiący wymuszenie napięciem prostokątnym.

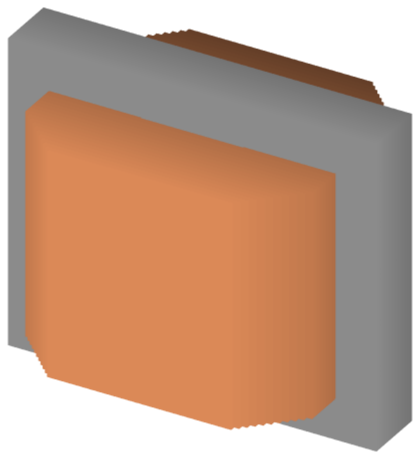
5.4. Metoda HBFEM - model 3D

5.4.1. Opis modelu

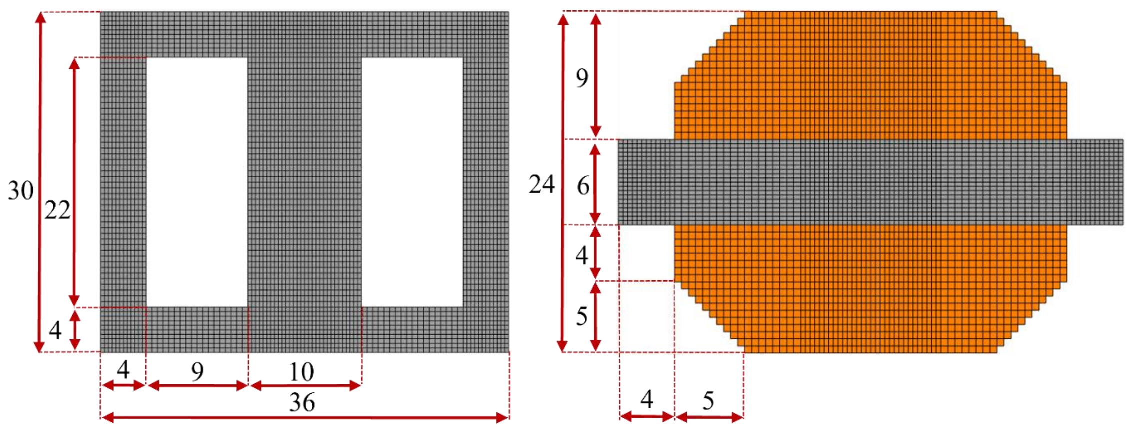
Analizie podlegać będzie układ dławika, przedstawionego na Rysunkach 5.20. oraz 5.21, składającego się z mangano-cynkowego rdzenia ferrytowego typu E oraz uzwojenia wykonanego z cienkich przewodów nawiniętego na środkową kolumnę rdzenia. Na Rys. 5.22. przedstawione zostały wymiary analizowanego dławika.



Rys. 5.20. *Rzut izometryczny modelowanego układu rdzenia ferrytowego*

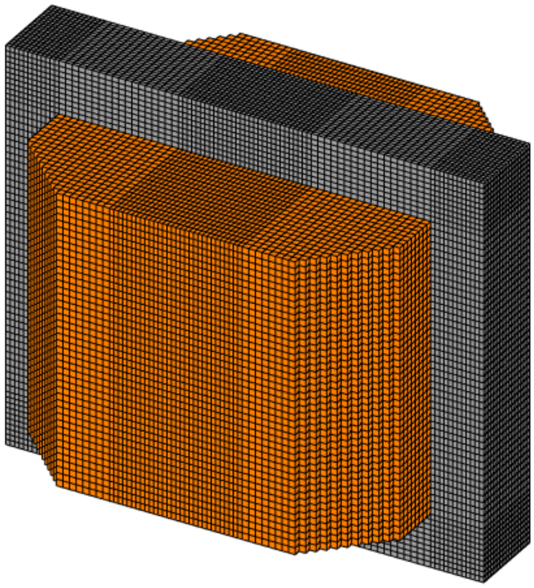


Rys. 5.21. *Rzut izometryczny modelowanego układu dławika*



Rys. 5.22 *Rzuty 2D modelu 3D dławika elektromagnetycznego – wymiary w milimetrach*

Podobnie jak w przypadku układu 2D rdzeń ferrytowy wykonany został z proszku manganowo - cynkowego MnZn o charakterystyce magnesowania przedstawionej na Rys. 5.5. Model układu poddany został dyskretyzacji w przestrzeni za pośrednictwem elementów sześciościennych. Przygotowana siatka sześciościenna przedstawiana została na Rysunku 5.23. W celu zwiększenia dokładności obliczeń, w obszarze rdzenia ferrytowego siatka dyskretyzacyjna została zagęszczona. Całkowita liczba elementów powstała na skutek dyskretyzacji przestrzeni wyniosła ponad 420 tys. W celu zmaksymalizowania efektywności algorytmu poprzez minimalizacje wymaganych zasobów obliczeniowych, a także ze względu na prostą strukturą analizowanego obiektu, Autor pracy wykorzystał siatkę sześciościenną.



Rys. 5.23. *Opracowana siatka dyksretyzacyjna 3D badanego obiektu*

Ważną zależnością występująca w siatce złożonej z sześciościościanów jest to, że w krawędziowym modelu prostopadłościanu sprzężenia wzajemne występują tylko pomiędzy gałęziami przyporządkowanym krawędziom równoległym [28]. W związku z powyższym Autor pracy, w celu wyznaczenia parametrów obwodowych modelu krawędziowego z równań (3.3.13) oraz (3.3.14), tj.: konduktancji oraz pojemności dla krawędzi pomiędzy w węzłami P_p oraz P_q, wykorzystał następujące sformułowania.

$$G_{g_{p,q}} = \sigma Y_{p,q}, \tag{5.4.1}$$

$$C_{g_{p,q}} = \varepsilon Y_{p,q}, \tag{5.4.2}$$

natomiast do obliczenia reluktancji modelu ściankowego odpowiadającej ściance S_i z równania (3.3.15) wykorzystano:

$$R_{\mu g_i} = \mu \Re_i. \quad (5.4.3)$$

Parametry $Y_{p,q}$ oraz $\Re_i$ wyznaczyć można korzystając z sformułowań:

$$Y_{p,q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{V_{N_{p,q}}}{{l_{p,q}}^2}, \quad (5.4.4)$$

$$\Re_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{N_i}}{{S_i}^2}, \quad (5.4.5)$$

gdzie: $V_{N_{p,q}}$ stanowi objętość elementu zawierającego krawędź P_pP_q, natomiast $l_{p,q}$ stanowi długość krawędzi pomiędzy punktami P_p oraz P_q.

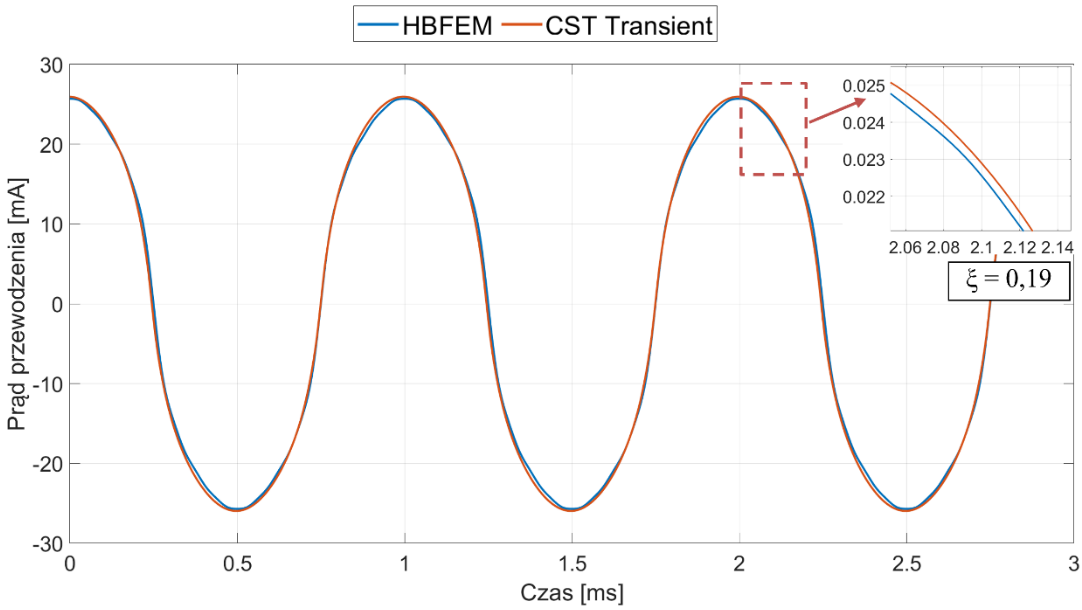
5.4.2. Wyniki obliczeń

W niniejszym podrozdziale zaprezentowane oraz zweryfikowane zostaną wyniki symulacji otrzymane z wykorzystaniem wyżej opisanego oprogramowania autorskiego. Weryfikacji podlegać będą wszystkie wielkości fizyczne istotne dla pracy układu dławika to jest: prąd zasilający, strumień skojarzony, rozkład indukcji w rdzeniu, rozkład gęstości prądów wirowych oraz rozkład gęstości prądów przesunięcia dielektrycznego. Wykorzystany algorytm 3D HBFEM opisany i przedstawiony został szczegółowo w rozdziale 5.2. Użyta w symulacji charakterystyka magnesowania rdzenia pokrywa się z charakterystyką przedstawioną na Rys. 5.5. W poniższej tabeli zaprezentowane zostały podstawowe parametry obwodu elektrycznego oraz magnetycznego badanego dławika.

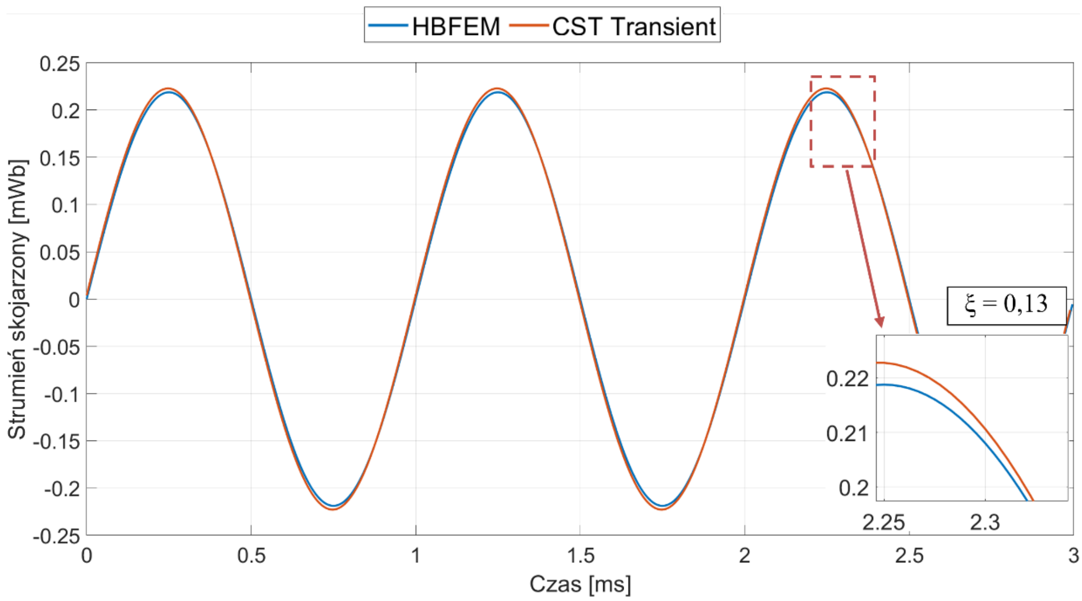
Tabela 5.3. Parametry modelowanego układu dławika elektromagnetycznego

Amplituda napięcia zasilania u_{zmax}	**Częstotliwość f**	**Liczba zwojów**	**Rezystancja uzwojenia R_c**	**Przenikalność elektryczna rdzenia ferrytowego ε**	**Przewodność elektryczna rdzenia ferrytowego γ**	**Ilość analizowanych harmonicznych K**
1.4 [V]	1 [kHz]	50	27 [mΩ]	$12 \cdot \varepsilon_0 \left[\frac{F}{m}\right]$	$10 \left[\frac{S}{m}\right]$	12

Wyniki obliczeń otrzymane na podstawie modelu symulacyjnego porównane zostały z modelem numerycznym o tych samych parametrach przygotowanym w komercyjnym środowisku symulacyjnym COMSOL Multiphysics. W badanym przypadku, zastosowane wymuszenie ma charakter czysto sinusoidalny co oznacza, że wymuszenie zewnętrzne układu występuje tylko dla podstawowej harmonicznej. W pierwszej kolejności weryfikacji poddany został prąd zasilający modelowany dławik, a następnie porównane zostały przebiegi strumienia skojarzonego z uzwojeniem modelowanego układu.

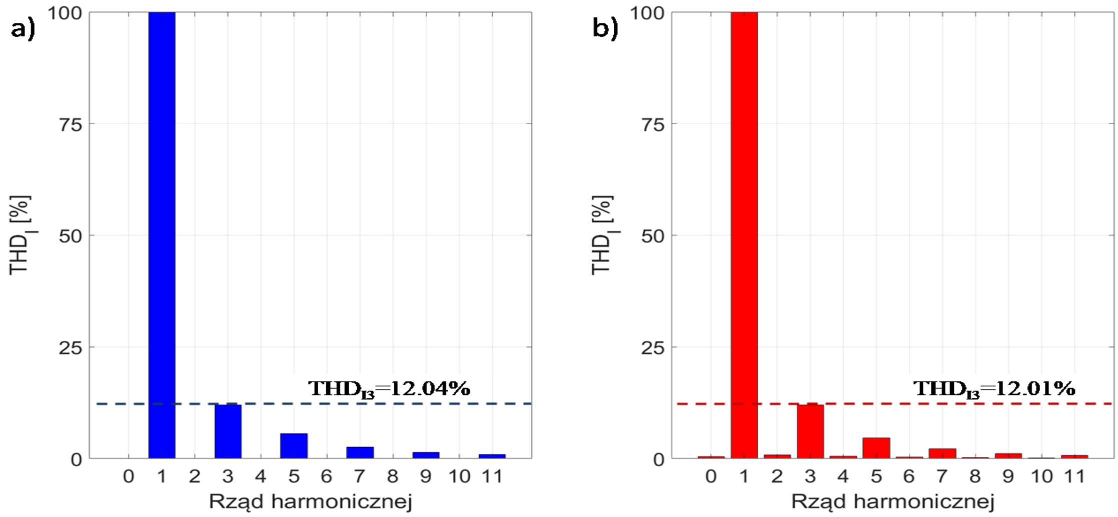


Rys. 5.25. *Przebieg czasowy prądu dławika*



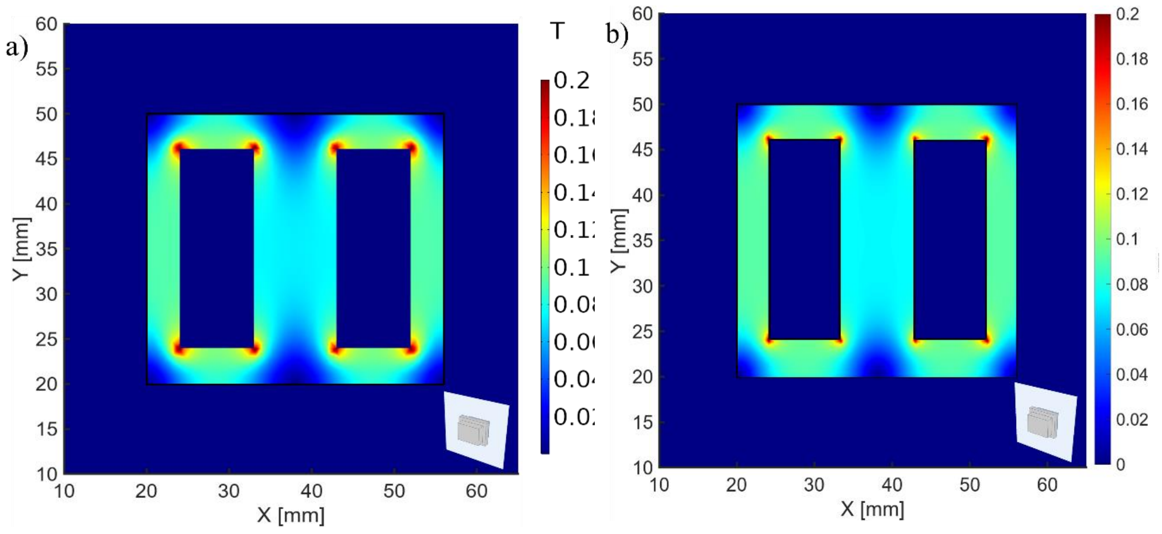
Rys. 5.26. *Przebieg czasowy strumienia skojarzonego z uzwojeniem dławika*

Przedstawione przebiegi prądu i strumienia skojarzonego dla metod HBFEM oraz analizy typu ‘transient’ otrzymane z wykorzystaniem odpowiednio oprogramowania autorskiego oraz oprogramowania komercyjnego pokrywają się ze sobą. Zauważyć, można jednak pewne rozbieżności, które spowodowane mogą być różnicami wynikającymi z zastosowanych metod numerycznych oraz siatek dyskretyzacyjnych. Dodatkowo, mimo iż oba podejścia zapewniają wysoce zbliżone wyniki, ich dokładność związana jest z różnymi czynnikami. Dla podejścia typu „transient”, które oparte jest na podstawowym podejściu czasowym zaprezentowanym w rozdziale 4.2, dokładność obliczeń zależy przede wszystkim od stopnia dyskretyzacji zarówno przestrzeni jak i czasu. Natomiast dla proponowanej metody 3D HBFEM dokładność obliczeń zależy także od stopnia dyskretyzacji przestrzeni, ale przede wszystkim od rzędu maksymalnej rozpatrywanej *M* harmonicznej przebiegu. Parametr *M* określa także liczbę próbek czasowych dla dyskretnej odwrotnej transformaty Fouriera. W celu przeprowadzenia analizy poziomu odkształceń prezentowanych przebiegów prądu sporządzona została analiza częstotliwościowa.

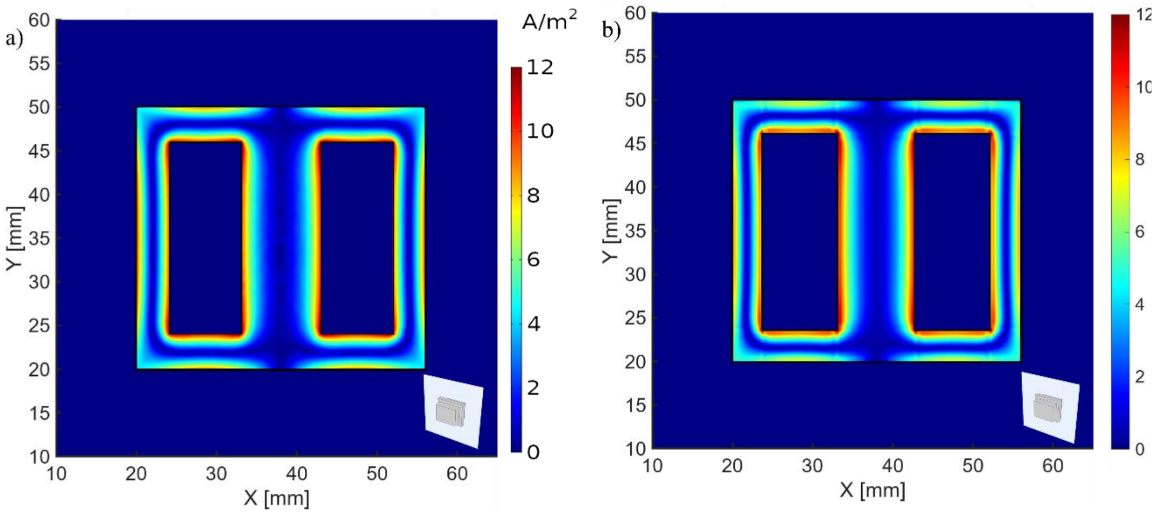


Rys. 5.28. *Analiza harmoniczna przebiegów prądów dławika wykonanych a) metodą HBFEM (oprogramowanie własne), b) metodą analizy w domenie czasu typu „transient” (COMSOL)*

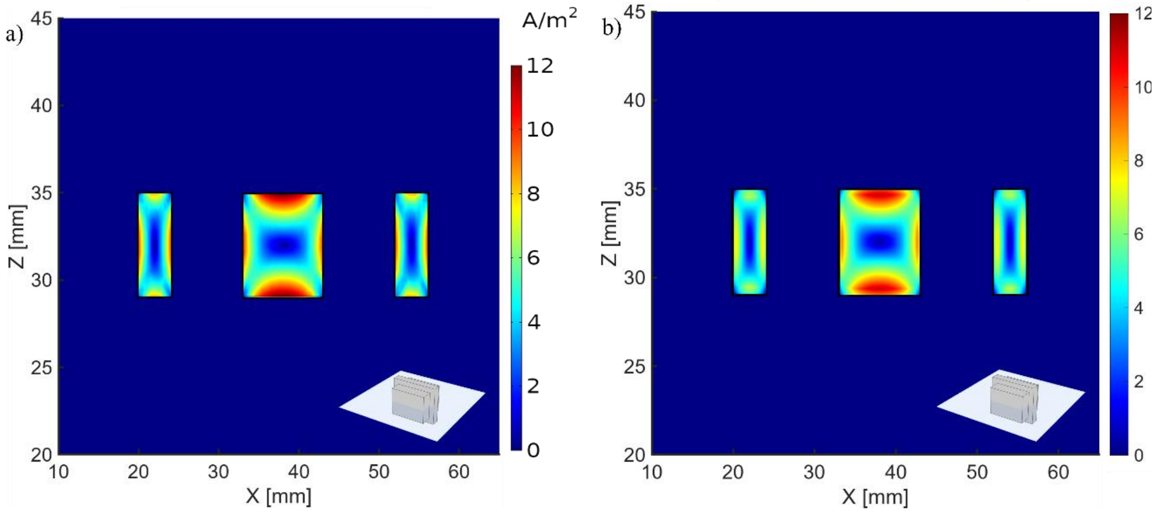
W kolejnym etapie prezentowanej analizy porównawczej porównane zostały rozkłady gęstości strumienia magnetycznego, prądów wirowych, a także prądów przesunięcia dielektrycznego (Rysunki 5.29-5.35). Zaprezentowane mapy dla analizowanego w pracy obiektu zestawione zostały z odpowiadającymi im mapami przygotowanymi w oprogramowaniu profesjonalnym. Dodatkowo, na Rysunkach 5.36 oraz 5.37, przedstawione zostały przestrzenne rozkłady gęstościowe w osiach XZ dla obu typów prądów indukowanych. W obu przypadkach przedstawiono rozkłady, dla których moduły gęstości prądów wirowych i prądów dielektrycznych przyjmowały wartości maksymalne.



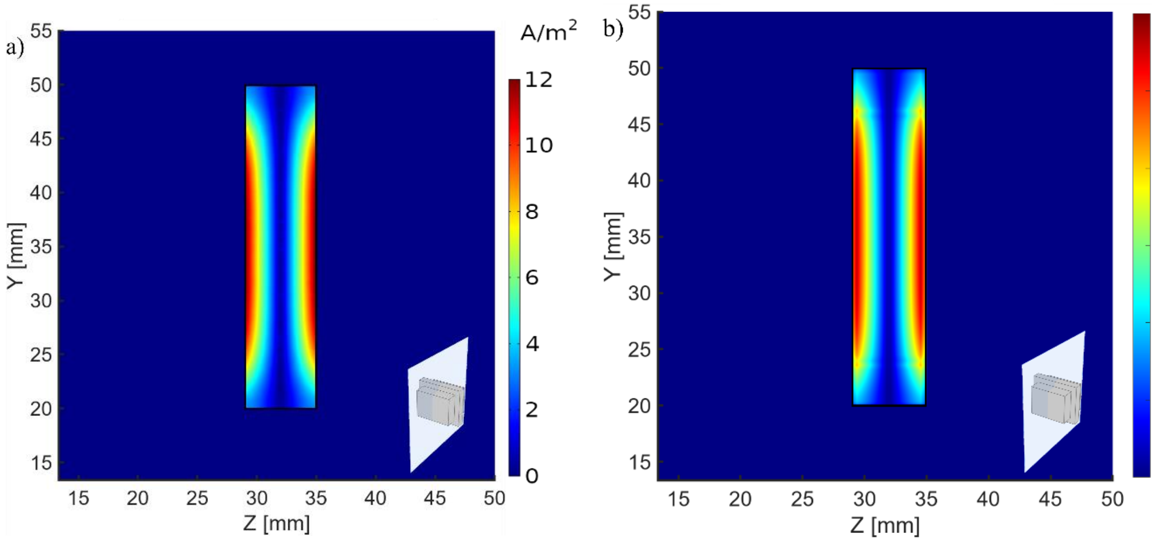
Rys. 5.29. *Rozkład gęstości strumienia magnetycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.25ms*



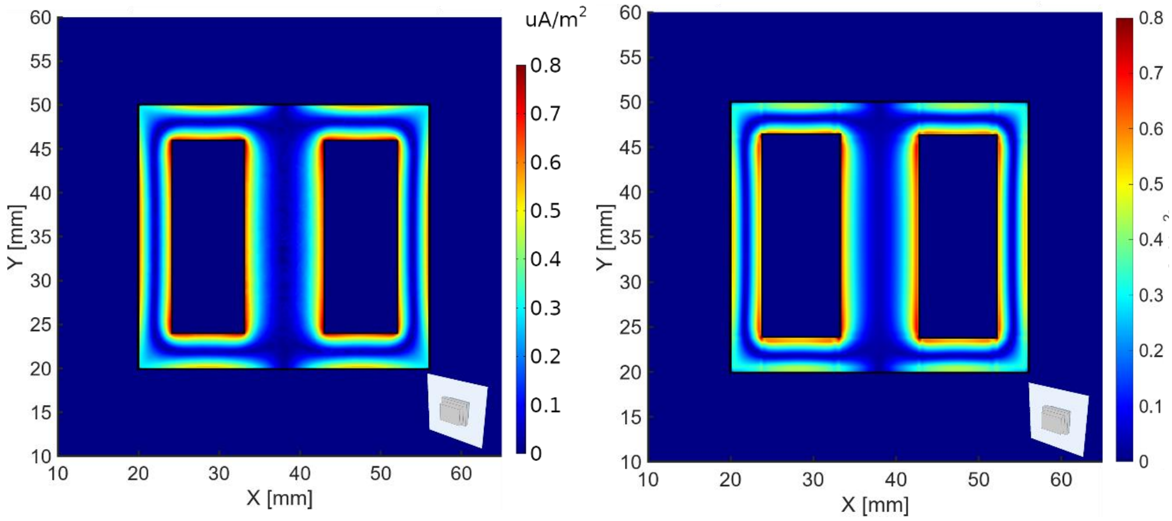
Rys. 5.30. *Rozkład XY gęstości prądów wirowych otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.5ms*



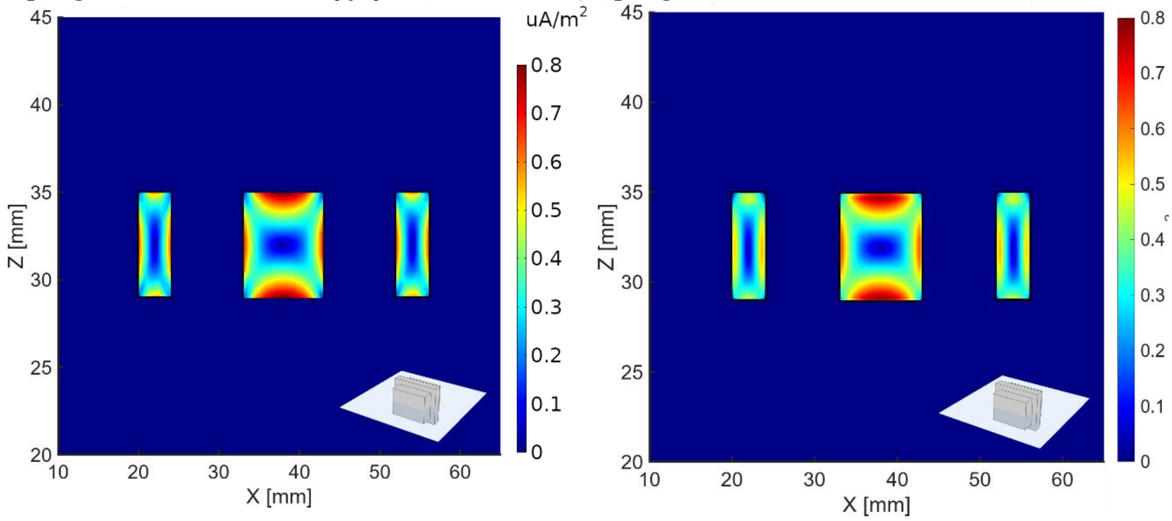
Rys. 5.31. *Rozkład XZ gęstości prądów wirowych otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.5ms*



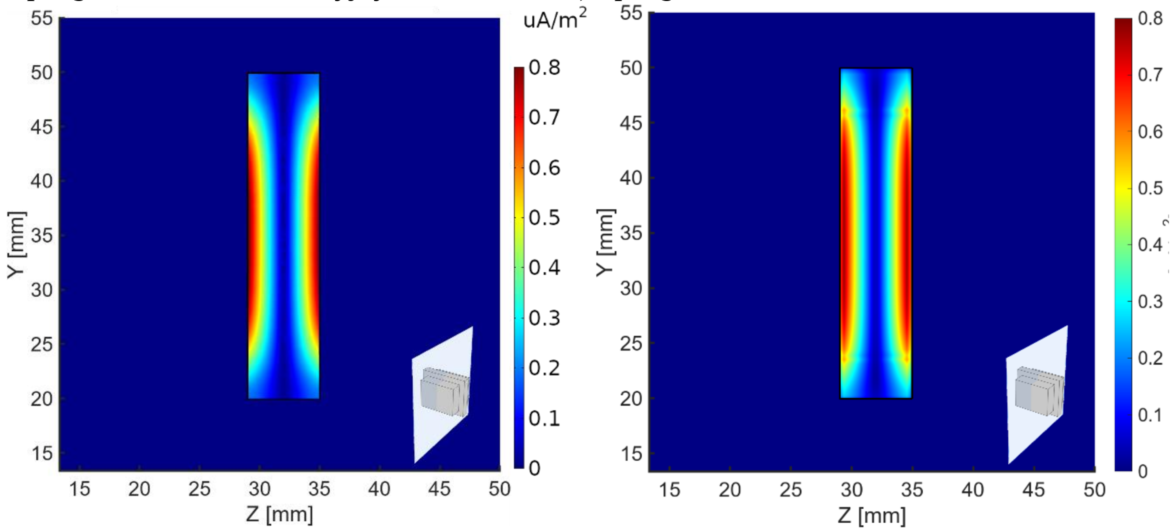
Rys. 5.32. *Rozkład ZY gęstości prądów wirowych otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.5ms*



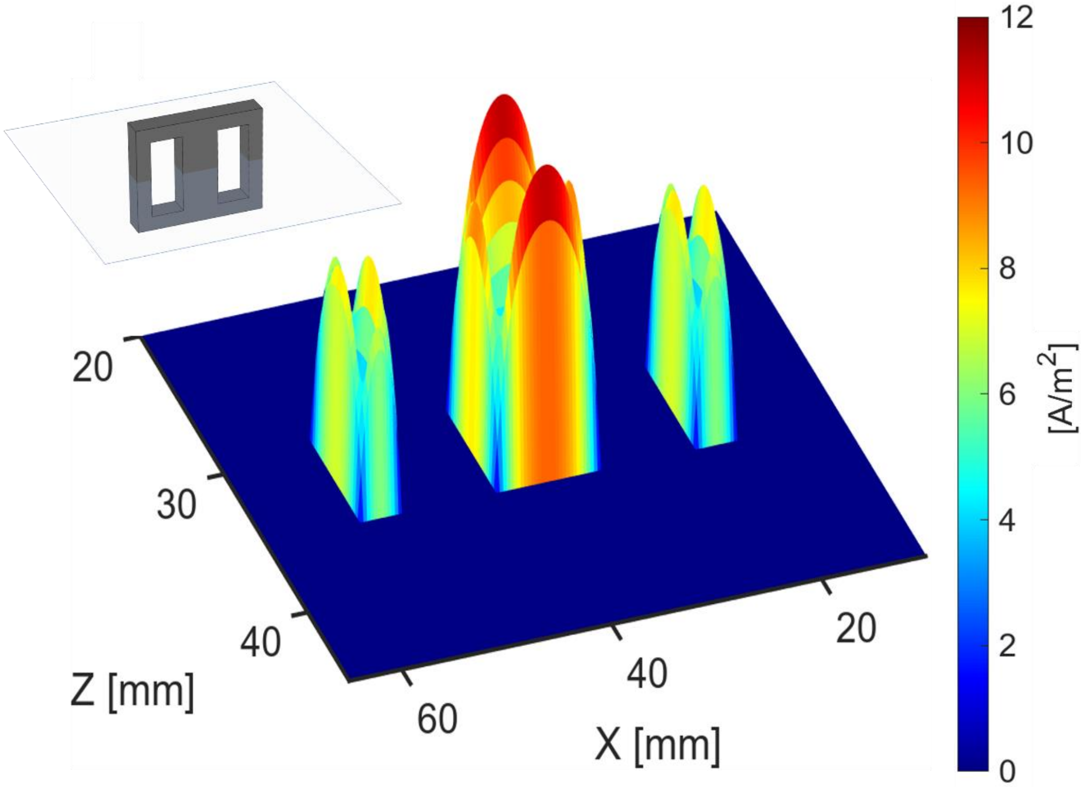
Rys. 5.33. *Rozkład XY gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0. 25ms*



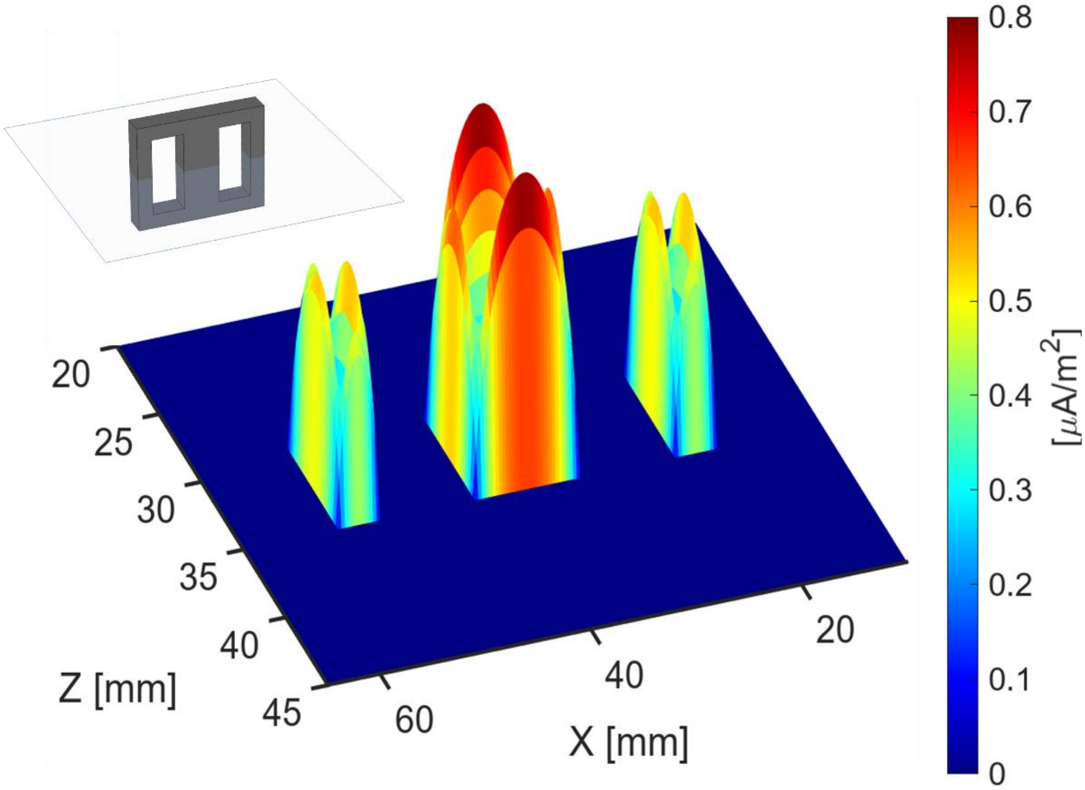
Rys. 5.34. *Rozkład XZ gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0. 25ms*



Rys. 5.35. *Rozkład ZY gęstości prądu przesunięcia dielektrycznego otrzymanego w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim dla t = 0.25ms*



Rys. 5.36. *Rozkład przestrzenny w osi XZ modułu gęstości prądów wirowych otrzymanego w oprogramowaniu autorskim dla t = 0.5ms*



Rys. 5.37. *Rozkład przestrzenny w osi XZ modułu gęstości prądów przesunięcia dielektrycznego otrzymanego w oprogramowaniu autorskim dla t = 0. 25ms*

Z zaprezentowanych wyników zauważyć można, że rozkład prądów indukowanych w rdzeniu odpowiada regule „śruby prawoskrętnej”. Prądy indukowane wypierane są z rdzenia i największą wartość osiągają w blisko ścian zewnętrznych. Ponadto zauważyć należy, że maksima prezentowanych przebiegów gęstości prądów są względem siebie przesunięte o 90 stopni elektrycznych.

5.5. Analiza wydajnościowa opracowanego oprogramowania

W niniejszym rozdziale przeprowadzona zostanie analiza pod kątem efektywności opracowanych algorytmów w stosunku do profesjonalnego oprogramowania COMSOL Multiphysics. Symulacje przeprowadzone zostały na komputerze stacjonarnym o parametrach przedstawionych w Tabeli 5.4.

Tabela 5.4. *Parametry techniczne stacji obliczeniowej*

CPU	Zegar CPU	Procesory logiczne	Pamięć RAM	Typ Dysku	Maksymalna prędkość odczytu dysku	Maksymalna prędkość zapisu dysku
AMD Ryzen 7 6900H	4.5 GHz	16	16 GB	SSD M.2	3,5 GB/s	3 GB/s

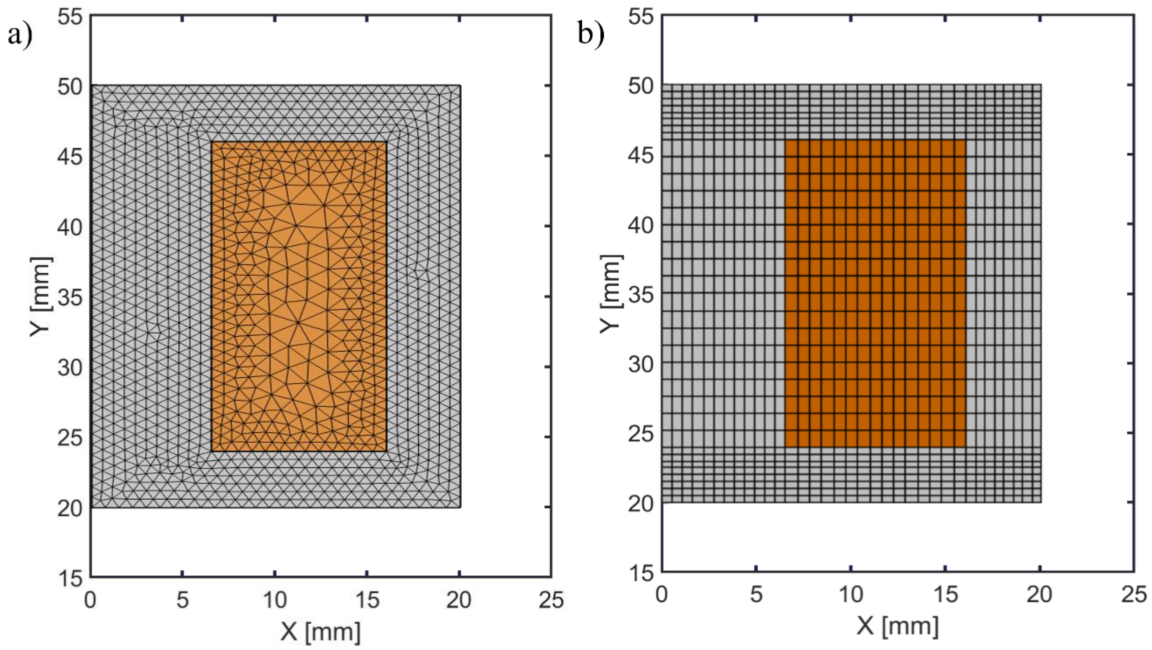
Autor rozprawy w czasie pracy nad omawianymi algorytmami szczególną uwagę przywiązywał do wydajności oprogramowania pod kątem wykorzystania przestrzeni pamięciowej. W tym celu w oprogramowaniu zaimplementowane zostały macierze typu „Sparse, tj. macierze, w których przechowywane są tylko wyrazy o niezerowych wartościach. Z uwagi, iż proponowane algorytmy wykorzystują głównie macierze pasmowe, o małym stopniu zagęszczenia, ilość zaoszczędzonej przestrzeni pamięciowej jest znacząca.

W niniejszym rozdziale przeprowadzone zostaną w sumie dwie analizy porównawcze: pierwsza dotycząca metody 2D HBFEM dla układów osiowosymetrycznych, oraz druga dotycząca metody 3D HBFEM dla układów bez symetrii osiowej.

5.5.1. Metoda 2D HBFEM

Głównym uproszczeniem zastosowanym w algorytmie do analizy układów 3D o symetrii osiowej jest założenie, że $grad\, V \approx 0$. W związku z tym, rozpływ pola elektromagnetycznego w badanym układzie wyznaczyć można stosując prosty 2D reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowy model siatkowy oraz uproszczone sformułowanie $\boldsymbol{A}$-V-$\boldsymbol{T}_0$ $(grad\,V \approx 0)$. Układy 2D w porównaniu do układów 3D charakteryzują się znacząco mniejszą sumaryczną liczbą rozwiązywanych równań, ze względu na drastyczną redukcje ilości analizowanych elementów krawędziowych oraz uproszczoną interpretacje elementów ściankowych (brak trzeciego wymiaru). W związku z powyższym sumaryczny czas obliczeń jest znacząco krótszy niż dla modeli 3D, co przedstawione zostanie w omawianym rozdziale.

W celu sprawdzenia efektywności opracowanego oprogramowania do analizy 3D układów z symetrią osiową, Autor pracy porównał czasy obliczeń oraz wymagane zasoby obliczeniowe dla proponowanego podejścia 2D HBFEM oraz dla obliczeń wykonanych dla tego samego modelu w profesjonalnym oprogramowaniu COMSOL Multiphysics. Wyniki analizy przedstawione zostały w Tabeli 5.5. W związku z tym, iż w oprogramowaniu COMSOL nie ma możliwości łatwej implementacji siatki prostokątnej, obliczenia prowadzone zostały z wykorzystaniem siatki trójkątnej. W związku z powyższym, Autor, przy sporządzaniu siatek dyskretyzacyjnych, zwrócił uwagę, aby całkowite liczby węzłów obu siatek, odpowiadające całkowitej liczbie rozwiązywanych równań, były do siebie maksymalnie zbliżone. Obie siatki przedstawione zostały na Rysunku 5.38. Obliczenia prowadzone były dla modelu omówionego w rozdziale 5.3.1, którego parametry przedstawione zostały w Tabeli 5.1.



Rys. 5.38. *Siatka dyskretyzacyjna przygotowana w a) oprogramowaniu komercyjnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim*

Tabela. 5.5. *Porównanie czasów symulacji oraz wykorzystywanych zasobów pomiędzy proponowanym podejście 2D HBFEM a podejściem czasowym typu „transient"*

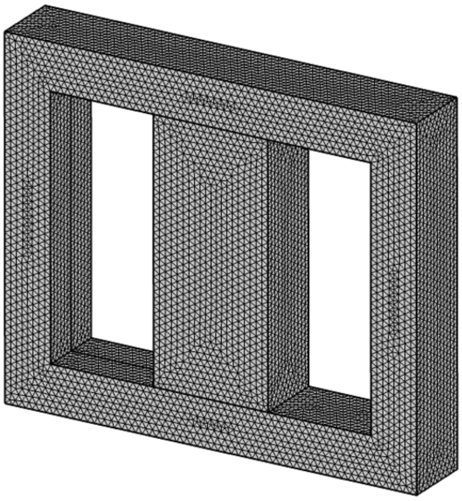
	2D HBFEM	COMSOL
Ustawienia symulacji		
Typ siatki	Prostokątna	Trójkątna
Liczba elementów siatki	1560	3282
Liczba węzłow siatki	1640	1679
Typ solvera	Bezpośredni	Bezpośredni
Solver	UMFPACK	MUMPS
Napięcie zasilania	10V	10V
Częstotliwość	150 kHz	150 kHz
Liczba analizowanych okresów	1	6
Ilość próbek czasowych analizowanych przebiegów	7200	43200
Liczba analizowanych harmonicznych	180	-
Wykorzystane zasoby obliczeniowe		
Obliczenia równoległe	Brak	Pełne obliczenia równoległe – wykorzystanie 10 z 16 procesorów logicznych
Ilość wykorzystanej pamięci podręcznej RAM	1.5 GB	2.1 GB
Ilość zajętej przestrzeni dyskowej	1 GB	4 GB
Dane końcowe		
Czas obliczeń	**13 min**	**10 min**

Analizując wyniki przedstawione w Tabeli 5.5. zauważyć można, że czas symulacji z wykorzystaniem proponowanego podejścia 2D HBFEM jest nieznacznie dłuższy (ok. 1.3 razy) niż w przypadku symulacji tego samego obiektu wykorzystawszy podejście czasowe typu „transient" w oprogramowaniu COMSOL. Jednocześnie należy zauważyć, że sumaryczna ilość wykorzystanych zasobów jest dużo większa dla symulacji liczonej w programie profesjonalnym. Nie bez znaczenia jest też funkcjonalność zrównoleglenia obliczeń wykorzystywana w COMSOL, której brakuje w przygotowanym przez Autora oprogramowaniu.

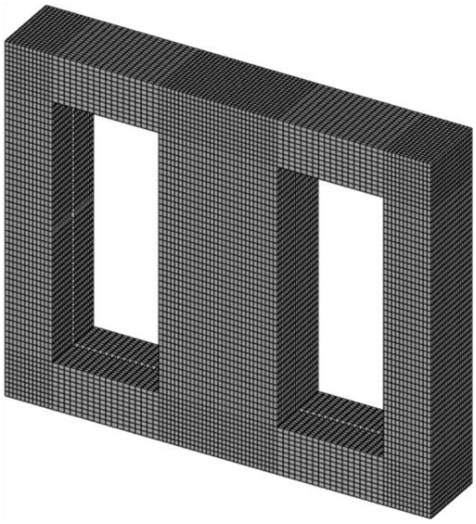
5.5.2. Metoda 3D HBFEM

Porównanie czasów symulacji oraz wykorzystanych zasobów sporządzone zostało także dla podejścia wykorzystującego algorytm 3D HBFEM. Podobnie jak w wcześniejszym przypadku, ze względu na brak możliwości łatwej implementacji siatki sześciościennej programie COMSOL, wykorzystana została siatka czworościenna. Niestety, z powodu ograniczonej wydajności stacji obliczeniowej, próba symulacji modelu, w programie COMSOL, którego sumaryczna liczba równań była zbliżona do liczby wykorzystanej w proponowanym podejściu 3D HBFEM zakończyła się niepowodzeniem. W związku z powyższym, Autor rozprawy przygotował siatki w taki sposób, aby sumaryczna liczba elementów była do siebie zbliżona. Na Rysunku 5.39 przedstawione zostały rzuty izometryczne siatek dyskretyzacyjnych rdzeni ferromagnetycznych dla obu metod.

a)



b)



Rys. 5.39. *Siatka dyskretyzacyjna przygotowana w a) oprogramowaniu profesjonalnym COMSOL, b) oprogramowaniu autorskim*

Poza tym, że siatka sześciościenna z Rys. 5.39b jest gęstsza niż siatka czworościenna z Rysunku 5.39a, przygotowana w programie COMSOL, to dodatkowo jest to siatka wyższego rzędu charakteryzująca się większą liczbą krawędzi i węzłów, przy tej samej liczbie elementów, i tym samym większą liczbą rozwiązywanych równań oraz dokładnością obliczeń.

Porównanie czasów obliczeń oraz wykorzystanych zasobów pomiędzy podejściem częstotliwościowo-czasowym 3D HBFEM oraz podejściem czasowym typu „transient" przedstawione zostało w Tabeli 5.6. Ze względu na uwzględnienie stanu nieustalonego w analizie typu „transient", symulacja w programie COMSOL przeprowadzona została dla łącznie 4 okresów. Dodatkowo, należy zwrócić uwagę, iż w oprogramowaniu COMSOL wykorzystany został solver bezpośredni typu MUMPS, natomiast w oprogramowaniu własnym – solver pośredni - iteracyjny. Z uwagi na jednoznaczne rozwiązanie układu równań i brak konieczności zapętlania obliczeń, solvery bezpośrednie charakteryzując się przeważnie krótszym czasem obliczeń. Autor rozprawy w oprogramowaniu własnym wykorzystał solver iteracyjny do rozwiązywania liniowych układów równań, ze względu na osobliwą macierz materiałową i tym samym niejednoznaczność rozwiązania układu. Usunięcie wspomnianej osobliwości macierzy jest możliwe poprzez zastosowanie odpowiednich przekształceń przedstawionych w pozycji [104]. Wskazane przekształcenia nie są jednak częścią niniejszej pracy i nie zostały zastosowane przez Autora w opracowanym oprogramowaniu autorskim.

Tabela. 5.6. *Porównanie czasów symulacji oraz wykorzystywanych zasobów pomiędzy proponowanym podejście 3D HBFEM a podejściem czasowym typu „transient”*

	2D HBFEM	**COMSOL**
Ustawienia symulacji		
Typ siatki	Sześciościenna	Czworościenna
Liczba elementów siatki	416 640	463 871
Liczba węzłów siatki	433 881	77 378
Typ solvera	Pośredni, iteracyjny	Bezpośredni
Solver	SOR	MUMPS
Napięcie zasilania	1.4V	1.4V
Częstotliwość	1 kHz	1 kHz
Liczba analizowanych okresów	1	4
Ilość próbek czasowych analizowanych przebiegów	240	960
Liczba analizowanych harmonicznych	12	-
Wykorzystane zasoby obliczeniowe		
Obliczenia równoległe	Częściowe, wykorzystanie 6 z 16 procesorów logicznych	Pełne, wykorzystanie 12 z 16 procesorów logicznych
Ilość wykorzystanej pamięci podręcznej RAM	7 GB	11.5 GB (tryb Out-Of Core)
Ilość zajętej przestrzeni dyskowej	4 GB	52 GB
Dane końcowe		
Czas obliczeń	**25h**	**90h**

Analizując wyniki przedstawione w Tabeli 5.6. dostrzec można drastyczną zmianę w stosunku do rezultatów zaprezentowanych w Tabeli 5.5. Zauważa się, że dla układów o dużym stopniu skomplikowania i o rozbudowanej macierzy materiałowej, w których występują pełne sprzężenia między-siatkowe, podejście 3D HBFEM okazuje się o wiele bardziej efektywne niż znane podejście czasowe typu „transient". Szczególną uwagę należy zwrócić także na ilość wykorzystywanej pamięci operacyjnej dla każdego z podejść. W przeciwieństwie do metody czasowej typu „transient", proponowana metoda 3D HBFEM charakteryzuje się niskim zapotrzebowanie na pamięć operacyjną, ze względu na duży współczynnik wykorzystania macierzy typu „Sparse" i brak konieczności przechowywania informacji o wielkościach fizycznych w formie czasowej. Dla podejścia czasowego w oprogramowaniu COMSOL, zauważyć można, iż oprogramowanie wykorzystuje tryb „Out-Of-Core", którego celem jest wykorzystanie przestrzeni pamięci dyskowej w momencie, gdy brakuje dostępnej szybkiej pamięci RAM.

Przedstawione wyżej wyniki wykazują, że metoda 3D HBFEM może być z powodzeniem wykorzystywana do symulacji dużych modeli nawet na stosunkowo słabych jednostkach obliczeniowych.

5.6.Podsumowanie

W niniejszym rozdziale Autor pracy w sposób szczegółowy omówił oraz zaprezentował poszczególne etapy badań, jakie następowały po sobie w czasie trwania jego pracy badawczej. W celu weryfikacji poprawności przyjętych założeń oraz wybranych metod sporządzony został w pierwszej kolejności dwuwymiarowy model osiowosymetryczny dławik. Właściwości geometryczne układów osiowosymetrycznych umożliwiają znacznie ograniczyć zarówno wymagane zasoby obliczeniowe jak i całkowity czas obliczeń. Oba elementy były kluczowe w celu szybkiej analizy oraz przeprowadzenia pierwszych badań. Zastosowanie omówionego w wcześniejszym rozdziale podejścia HBFEM czyli podejścia wykorzystujące metodę elementów skończonych do analizy obszarów z polem elektromagnetycznym oraz metodę bilansu harmonicznych do analizy odkształceń występujących w układach nieliniowych. Sporządzony 2D układ dławika elektromagnetycznego zasilony został początkowo z sinusoidalnego źródła napięciowego o częstotliwości f=1kHz, a następnie z prostokątnego źródła napięciowego o częstotliwości f=150kHz. Dla obu przypadków przedstawiono przebiegu prądu dławika oraz strumienia skojarzonego z uzwojeniem. Dodatkowo przygotowane zostały rozkłady gęstości strumienia magnetycznego oraz prądów wirowych i dielektrycznych w rdzeniu. Interesujące wnioski wyciągnąć można na podstawie badania układu zasilanego przebiegiem prostokątnym. Ze względu na bardzo szerokie spektrum wyższych harmonicznych tego przebiegu, wykorzystanie go w metodzie HBFEM skutkuje gwałtownym wzrostem wymaganych zasobów obliczeniowych. Analiza takiego przebiegu w domenie czasu również wiąże się z koniecznością wykorzystania dużych zasobów pamięciowych ze względu na bardzo dużą liczbę próbek czasowych jakie należy wykorzystać do odwzorowania przebiegu. Jednakże, porównując obie metody, dostrzec można dużą przewagę metody HBFEM ze względu na pominięcie etapu ustalania się przebiegu czasowego. Pozwala to zredukować istotnie całkowity czas analizy z kilku okresów do jednego.

W drugim etapie badań zaprezentowany został opracowany model 3D układu dławika. W podejściu wykorzystującym metodę 3D HBFEM zastosowano reluktancyjno-konduktancyjno-pojemnościowy model siatkowy w obszarze rdzenia ferrytowego wraz z sformułowaniem $\boldsymbol{A}$-V oraz reluktancyjny model siatkowy i sformułowanie $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{T}_0$ w obszarze uzwojeń cienkozwojnych. W przeciwieństwie do wcześniej opracowanego modelu 2D, model 3D charakteryzuje się osobliwą macierzą sztywności, co uniemożliwia zastosowanie bezpośrednich metod numerycznych jak MUMPS czy też UMFPACK bez przeprowadzenia skomplikowanych przekształceń. W związku z tym do obliczeń wykorzystana została iteracyjna metoda rozwiązywania liniowych układów równań – metoda sukcesywnej nadrelaksacji SOR. Razem z zastosowaną metodą punktu ustalonego FPM, wykorzystywaną do rozwiązywania nieliniowego układu równań, tworzą algorytm zawierający dwie pętle iteracyjne – jedną rozwiązująca przejściowy układ równań oraz drugą uwzględniającą nieliniowość obwodu magnetycznego. Przekłada się to znacząco na ilość wymaganych zasobów obliczeniowych oraz czas konwergencji. W związku z powyższym w pracy zaprezentowano tylko jeden przypadek, w którym 3D układ dławika zasilony został z sinusoidalnego źródła napięciowego o częstotliwości 1kHz. Podobnie jak dla podejścia 2D HBFEM, w rozdziale zaprezentowane zostały przebiegi czasowe prądu dławika oraz strumienia skojarzonego z cewką jak i również rozkłady gęstości strumienia magnetycznego oraz prądów wirowych i dielektrycznych w rdzeniu.

Wszystkie opracowane modele obliczeniowe typu HBFEM zostały skorelowane z ich odpowiednikami wykonanymi w komercyjnym oprogramowaniu COMSOL Multiphysics wykorzystującym analizę w domenie czasu typu „transient". Wyniki porównania potwierdzają słuszność przyjętych w pracy założeń i wybranych metod numerycznych. Dodatkowo przeprowadzona została także analiza efektywności dla obu omówionych algorytmów HBFEM, która wykazała duży uzysk czasowy w szczególności dla układów 3D, w których występują pełne sprzężenia między-siatkowe oraz duże i złożone układy równań macierzowych. Przeprowadzone porównanie wykazało, iż stosując zaproponowaną metodę 3D HBFEM, uzyskuje się wyniki zgodne z wynikami otrzymanymi w oprogramowaniu profesjonalnym, przy kilkukrotnie krótszym czasie obliczeń oraz dużo niższej ilości wykorzystywanej pamięci systemowej.

Podsumowując, w rozdziale wykazano, że metoda HBFEM umożliwia skuteczną i efektywną analizę obszarów z polem elektromagnetycznym uwzględniając w obliczeniach zarówno zjawisko nasycenia rdzenia jak i indukowanie się prądów wirowych i dielektrycznych, co czyni ją skuteczną alternatywą dla szeroko stosowanej obecnie analizy w domenie czasu typu „transient”, w zakresie analizy przebiegów okresowych.

Rozdział 6
Podsumowanie i wnioski końcowe

Celem niniejszej rozprawy było opracowanie nowych, szybkobieżnych procedur i algorytmów, które umożliwiłyby analizę częstotliwościowo-czasową układów z trójwymiarowym polem elektromagnetycznym z uwzględnieniem wpływu prądów wirowych, przesunięcia dielektrycznego, a także nasycenia rdzenia na wypadkowy rozkład pola w przetwornikach wyższych częstotliwości.

Powyższy cel pracy został osiągnięty poprzez wykorzystanie wielostopniowego ujęcia Metody Elementów Skończonych oraz kombinacyjnej metody bilansu harmonicznych HB oraz punktu ustalonego FP do stworzenia zestawu procedur i algorytmów służacych analizie częstotliwościowo-czasowej układów z polem elektromagnetycznym HBFEM (z ang. *Harmonic Balance Finite Element Method).* Autor w swoich badaniach wykorzystał znane sformułowanie wykorzystujące do opisu rozkładu pola magnetycznego wektorowy potencjał magnetyczny $\boldsymbol{A}$ oraz do opisu rozpływu prądów indukowanych - skalarny potencjał elektryczny V. Napięciowe wymuszenie układu opisane zostało poprzez wprowadzenie do otrzymanego układu równań wektorowego potencjału elektrycznego $\boldsymbol{T}_0$. **Dokładność obliczeń zaproponowanego podejścia została pozytywnie zweryfikowana poprzez analizę porównawczą z oprogramowaniem profesjonalnym COMSOL Multiphysics wykorzystującym analizę w domenie czasu typu „transient”.** Testy przeprowadzone zostały dla dwóch typów algorytmów. Pierwszy dotyczył analizy 3D obiektów o symetrii osiowej, których geometrię uprościć można do prostego układu 2D, oraz drugi, który dotyczył analizy 3D obiektów niewykazujących symetrii osiowej. Porównaniu podlegały przebiegi czasowe prądu dławika oraz strumienia magnetycznego skojarzonego z dławikiem, a także rozkłady gęstościowe indukcji oraz indukowanych prądów wirowych i przesunięcia dielektrycznego. **Dla obu proponowanych podejść tj.: metod 2D HBFEM oraz 3D HBFEM, wykazana została poprawność przyjętych założeń oraz skuteczność wprowadzonych algorytmów, zapewniających szybką analizę przy zachowaniu wysokiej dokładności obliczeń.**

Ponadto, Autor pracy wykazał prawdziwość postawionej, na wstępie rozprawy, tezy. **W pracy udowodniono, że istnieje możliwość analizy układów z polem elektromagnetycznym uwzględniwszy wpływ indukowanych prądów wirowych**

i przesunięcia dielektrycznego, a także nasycenia rdzenia, poprzez wykorzystanie sprzężonej analizy częstotliwościowo-czasowej i tym samym przypieczenia procesu obliczeń. Autor rozprawy przeprowadził analizę efektywności proponowanych podejść 2D HBFEM oraz 3D HBFEM. Punkt odniesienia do analizy stanowiło podejście czasowe typu „transient” zaimplementowane w profesjonalnym oprogramowaniu COMSOL Multiphysics. Ze względu na brak możliwości wykonania siatki sześciościennej w programie COMSOL wykorzystana została siatka czworościenna. W celu zrównania liczby analizowanych równań dla wszystkich metod, siatki dobrane zostały tak, aby sumaryczna liczba węzłów była do siebie zbliżona. **Badania wykazały wyższość proponowanej metody 3D HBFEM nad popularną metodą czasową typu „transient” w zakresie analizy układów, w których występują okresowe przebiegi odkształcone.** Wykazano, że dla układów 3D, charakteryzujących się złożoną strukturą równań oraz osobliwą macierzą współczynników, zastosowanie analizy częstotliwościowo-czasowej oraz obliczeń dotyczących poszczególnych wyższych harmonicznych zamiast wybranych punktów czasowych, przełożyło się na znaczące skrócenie sumarycznego czasu obliczeń oraz zmniejszenie zajmowanej przestrzeni pamięciowej.

Autor rozprawy przewiduje, iż przedstawione w niniejszej pracy badania przyczynią się do dalszego rozwoju metod i algorytmów, wykorzystujących analizę częstotliwościowo-czasową, co finalnie może przyczynić się do ich implementacji w oprogramowaniu profesjonalnych takich jak Comsol Multiphysics, CST Studio Suite czy też ANSYS Maxwell. Zastosowanie zaproponowanej metody w programach komercyjnych przyśpieszyłoby znacząco proces projektowania małych przetworników pracujących z wyższymi częstotliwościami, a także umożliwiłoby prowadzenie symulacji na mniejszych jednostkach obliczeniowych.

Literatura

[1] Mmelesi, O.K.; Masunga, N.; Kuvarega, A.; Nkambule, T.Ti.; Mamba, B.B.; Kefeni, K.K. Cobalt Ferrite Nanoparticles and Nanocomposites: Photocatalytic, Antimicrobial Activity and Toxicity in Water Treatment. *Mater. Sci. Semicond. Process.* **2021**, *123*, 105523, doi:10.1016/j.mssp.2020.105523.

[2] Masunga, N.; Mmelesi, O.K.; Kefeni, K.K.; Mamba, B.B. Recent Advances in Copper Ferrite Nanoparticles and Nanocomposites Synthesis, Magnetic Properties and Application in Water Treatment: Review. *J. Environ. Chem. Eng.* **2019**, *7*, 103179, doi:10.1016/j.jece.2019.103179.

[3] Baig, M.M.; Zulfiqar, S.; Yousuf, M.A.; Touqeer, M.; Ullah, S.; Agboola, PhilipsO.; Warsi, M.F.; Shakir, I. Structural and Photocatalytic Properties of New Rare Earth La3+ Substituted MnFe2O4 Ferrite Nanoparticles. *Ceram. Int.* **2020**, *46*, 23208–23217, doi:10.1016/j.ceramint.2020.06.103.

[4] Kacki, M.; Rylko, M.S.; Hayes, J.G.; Sullivan, C.R. Measurement Methods for High-Frequency Characterizations of Permeability, Permittivity, and Core Loss of Mn-Zn Ferrite Cores. *IEEE Trans. Power Electron.* **2022**, *37*, 15152–15162, doi:10.1109/TPEL.2022.3189671.

[5] Kacki, M.; Rylko, M.S.; Hayes, J.G.; Sullivan, C.R. A Practical Method to Define High Frequency Electrical Properties of MnZn Ferrites. In Proceedings of the 2020 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC); IEEE: New Orleans, LA, USA, March 2020; pp. 216–222.

[6] Zhu, J.; Tseng, K.J. Reducing Dielectric Losses in MnZn Ferrites by Adding<Tex>$hboxTiO_2$</Tex>And<Tex>$hboxMoO_3$</Tex> *IEEE Trans. Magn.* **2004**, *40*, 3339–3345, doi:10.1109/TMAG.2004.833296.

[7] Verma, V.; Kotnala, R.K.; Pandey, V.; Kothari, P.C.; Radhapiyari, L.; Matheru, B.S. The Effect on Dielectric Losses in Lithium Ferrite by Cerium Substitution. *J. Alloys Compd.* **2008**, *466*, 404–407, doi:10.1016/j.jallcom.2007.11.056.

[8] Mujasam Batoo, K. Study of Dielectric and Impedance Properties of Mn Ferrites. *Phys. B Condens. Matter* **2011**, *406*, 382–387, doi:10.1016/j.physb.2010.10.075.

[9] Courant, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **1943**, *49*, 1–23.

[10] Zienkiewicz, O.C. Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of *Stress Analysis* , Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **2001**, *52*, 287–342, doi:10.1002/nme.339.

[11] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*; 6. ed., reprint., transferred to digital print.; Elsevier: Amsterdam Heidelberg, 2010; ISBN 978-0-7506-6320-5.

[12] Williamson, F. Richard Courant and the Finite Element Method: A Further Look. *Hist. Math.* **1980**, *7*, 369–378, doi:10.1016/0315-0860(80)90001-4.

[13] Clemens, M.; Kähne, B.; Schöps, S. A Darwin Time Domain Scheme for the Simulation of Transient Quasistatic Electromagnetic Fields Including Resistive, Capacitive and Inductive Effects 2020.

[14] Pourkeivannour, S.; Van Zwieten, J.S.B.; Iwai, K.; Curti, M. A Light Darwin Implementation of Maxwell’s Equations to Quantify Resistive, Inductive, and Capacitive Couplings in Windings. *AIP Adv.* **2024**, *14*, 035350, doi:10.1063/5.0199294.

[15] Biro, O.; Preis, K. An Efficient Time Domain Method for Nonlinear Periodic Eddy Current Problems. *IEEE Trans. Magn.* **2006**, *42*, 695–698, doi:10.1109/TMAG.2006.871666.

[16] Ausserhofer, S.; Biro, O.; Preis, K. An Efficient Harmonic Balance Method for Nonlinear Eddy-Current Problems. *IEEE Trans. Magn.* **2007**, *43*, 1229–1232, doi:10.1109/TMAG.2006.890961.

[17] Koczka, G.; Biro, O.; Preis, K. Optimal Convergence of the Fixed-Point Method for Nonlinear Eddy Current Problems. *IEEE Trans. Magn.* **2009**, *45*, 948–951, doi:10.1109/TMAG.2009.2012477.

[18] Ausserhofer, S.; Biro, O.; Preis, K. Frequency and Time Domain Analysis of Nonlinear Periodic Electromagnetic Problems. In Proceedings of the 2007 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications; IEEE: Torino, Italy, September 2007; pp. 229–232.

[19] Sanjari Nia, M.S.; Shamsi, P.; Ferdowsi, M. Investigation of Various Transformer Topologies for HF Isolation Applications. *IEEE Trans. Plasma Sci.* **2020**, *48*, 512–521, doi:10.1109/TPS.2020.2967412.

[20] Liu, C.; Qi, L.; Cui, X.; Wei, X. Experimental Extraction of Parasitic Capacitances for High-Frequency Transformers. *IEEE Trans. Power Electron.* **2017**, *32*, 4157–4167, doi:10.1109/TPEL.2016.2597498.

[21] Qin, J.; Yu, Z.; Sun, K.; Wei, P.; Lan, Z. Analysis and Simulation of Parasitic Parameters for PCB Planar Transformer. In Proceedings of the 2012 International Conference on Control Engineering and Communication Technology; IEEE: Shenyang, Liaoning, China, December 2012; pp. 241–244.

[22] Frljic, S.; Trkulja, B. Two-Step Method for the Calculation of Eddy Current Losses in an Open-Core Transformer. *IEEE Trans. Magn.* **2021**, *57*, 1–8, doi:10.1109/TMAG.2020.3044876.

[23] Liu, Z.; Zhu, J.; Zhu, L. Accurate Calculation of Eddy Current Loss in Litz-Wired High-Frequency Transformer Windings. *IEEE Trans. Magn.* **2018**, *54*, 1–5, doi:10.1109/TMAG.2018.2854894.

[24] Deng, L.; Sun, Q.; Jiang, F.; Wang, S.; Jiang, S.; Xiao, H.X.; Peng, T. Modeling and Analysis of Parasitic Capacitance of Secondary Winding in High-Frequency High-Voltage Transformer Using Finite-Element Method. *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **2018**, *28*, 1–5, doi:10.1109/TASC.2018.2794476.

[25] Hai Yan Lu; Jian Guo Zhu; Hui, S.Y.R. Experimental Determination of Stray Capacitances in High Frequency Transformers. *IEEE Trans. Power Electron.* **2003**, *18*, 1105–1112, doi:10.1109/TPEL.2003.816186.

[26] Blechschmidt, E. Dielektrische Eigenschaften von Manganferriten. *Phys Zeitschr* **1938**, *3*, 212–216.

[27] Ludowicz, W.; Wojciechowski, R.M. Analysis of the Distributions of Displacement and Eddy Currents in the Ferrite Core of an Electromagnetic Transducer Using the 2D Approach of the Edge Element Method and the Harmonic Balance Method. *Energies* **2021**, *14*, 3980, doi:10.3390/en14133980.

[28] Demenko, A. *Obwodowe Modele Układów z Polem Elektromagnetycznym*; Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej: Poznań, 2004;

[29] Bolkowski, S. *Komputerowe Metody Analizy Pola Elektromagnetycznego*; Wydawnictwo Naukowo-Techniczne: Warszawa, 1993;

[30] Bossavit, A. *Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements*; Academic Press, 1998; ISBN 978-0-08-052966-0.

[31] Bianchi, N. *Electrical Machine Analysis Using Finite Elements*; Power electronics and applications series; CRC Press, 2011; ISBN 13: 978-1-4200-5787-4.

[32] Stoev, B.; Todorov, G.; Rizov, P.; Pagiatakis, G.; Dritsas, L. Finite Element Analysis of Rotating Electrical Machines — An Educational Approach. In Proceedings of the 2017 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON); IEEE: Athens, Greece, April 2017; pp. 262–269.

[33] Gratkowski, S.; Todaka, T.; Enokizono, M.; Sikora, R. Asymptotic Boundary Conditions for the Finite Element Modeling of Axisymmetric Electrical Field Problems. *IEEE Trans. Magn.* **2000**, *36*, 717–721, doi:10.1109/20.877549.

[34] Wojciechowski, R.M.; Jędryczka, C. A Description of the Sources of Magnetic Field Using Edge Values of the Current Vector Potential. *Arch. Electr. Eng.* **2018**, *67*, 3074–3077, doi:10.24425/118988.

[35] Demenko, A.; Sykulski, J.; Wojciechowski, R. Network Representation of Conducting Regions in 3-D Finite-Element Description of Electrical Machines. *IEEE Trans. Magn.* **2008**, *44*, 714–717, doi:10.1109/TMAG.2007.916391.

[36] Kladas, A.G.; Tegopoulos, J.A. A New Scalar Potential Formulation for 3-D Magnetostatics Necessitating No Source Field Calculation. *IEEE Trans. Magn.* **1992**, *28*, 1103–1106, doi:10.1109/20.123875.

[37] Zeng, Z.; Liu, X.; Deng, Y.; Udpa, L.; Knopp, J.S.; Steffes, G. Reduced Magnetic Vector Potential and Electric Scalar Potential Formulation for Eddy Current Modeling (Postprint). *Przegląd Elektrotechniczny* **2007**, 35–37.

[38] Biro, O.; Preis, K. Finite Element Analysis of 3-D Eddy Currents. *IEEE Trans. Magn.* **1990**, *26*, 418–423, doi:10.1109/20.106343.

[39] Bíró, O.; Preis, K.; Ticar, I. A FEM Method for Eddy Current Analysis in Laminated Media. *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* **2005**, *24*, 241–248, doi:10.1108/03321640510571264.

[40] Steentjes, S.; Boehmer, S.; Hameyer, K. Permanent Magnet Eddy-Current Losses in 2-D FEM Simulations of Electrical Machines. *IEEE Trans. Magn.* **2015**, *51*, 1–4, doi:10.1109/TMAG.2014.2362551.

[41] Preis, K.; Biro, O.; Ticar, I. FEM Analysis of Eddy Current Losses in Nonlinear Laminated Iron Cores. *IEEE Trans. Magn.* **2005**, *41*, 1412–1415, doi:10.1109/TMAG.2005.844341.

[42] Demenko, A. Eddy Current Computation in 3-Dimensional Models for Electrical Machine Applications. In Proceedings of the 2006 12th International Power Electronics and Motion Control Conference; IEEE: Portoroz, August 2006; pp. 1931–1936.

[43] Wojciechowski, R.; Demenko, A.; Sykulski, J.K. Calculation of Inducted Currents Using Edge Elements and T–T0 Formulation. *IET Sci. Meas. Technol.* **2008**, *2*, 434–439, doi:10.1049/iet-smt:20080068.

[44] Wojciechowski, R.M.; Jedryczka, C. The Analysis of Stray Losses in Tape Wound Concentrated Windings of the Permanent Magnet Synchronous Motor. *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* **2015**, *34*, 766–777, doi:10.1108/COMPEL-10-2014-0287.

[45] Demenko, A.; Nowak, L. The 3D Coupled Field-Circuit Simulation of Transients in Converters with Conducting Solid Parts. *IEEE Trans. Magn.* **2000**, *36*, 1412–1416, doi:10.1109/20.877703.

[46] Biro, O.; Preis, K.; Renhart, W.; Richter, K.R.; Vrisk, G. Performance of Different Vector Potential Formulations in Solving Multiply Connected 3-D Eddy Current Problems. *IEEE Trans. Magn.* **1990**, *26*, 438–441, doi:10.1109/20.106347.

[47] Rapetti, F.; Rousseaux, G. Implications of Galilean Electromagnetism in Numerical Modeling. *Appl. Comput. Electromagn. Soc. J. ACES* **2022**, *26*, 784–791.

[48] Haus, H.A.; Melcher, J.R.; Zahn, M.; Silva, M.L. *Electromagnetic Fields And Energy*; Prentice Hall, 1989;

[49] Ye, H.; Clemens, M.; Seifert, J. Electroquasistatic Field Simulation for the Layout Improvement of Outdoor Insulators Using Microvaristor Material. *IEEE Trans. Magn.* **2013**, *49*, 1709–1712, doi:10.1109/TMAG.2013.2243423.

[50] Reitzinger, S.; Schreiber, U.; Van Rienen, U. Electro-Quasistatic Calculation of Electric Field Strength on High-Voltage Insulators with an Algebraic Multigrid Algorithm. *IEEE Trans. Magn.* **2003**, *39*, 2129–2132, doi:10.1109/TMAG.2003.810555.

[51] Weida, D.; Steinmetz, T.; Clemens, M. Electro-Quasistatic High Voltage Field Simulations of Large Scale Insulator Structures Including 2-D Models for Nonlinear Field-Grading Material Layers. *IEEE Trans. Magn.* **2009**, *45*, 980–983, doi:10.1109/TMAG.2009.2012492.

[52] Ozakin, M.B.; Aksoy, S. Application of Magneto-Quasi-Static Approximation in the Finite Difference Time Domain Method. *IEEE Trans. Magn.* **2016**, *52*, 1–9, doi:10.1109/TMAG.2016.2535415.

[53] Kruger, S.E. The Three Quasistatic Limits of the Maxwell Equations. *ArXiv Class. Phys.* **2019**.

[54] Gedney, S.D. *Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics*; Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics; Morgan & Claypool, 2011; ISBN 978-1-60845-522-5.

[55] Hildebrand, F.B. Finite-Difference Equations and Simulations.; NJ Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1968.

[56] Cooke, S.J.; Botton, M.; Antonsen, T.M.; Levush, B. A Leapfrog Formulation of the 3-D ADI-FDTD Algorithm. *Int. J. Numer. Model. Electron. Netw. Devices Fields* **2009**, *22*, 187–200, doi:10.1002/jnm.707.

[57] Kong, Y.-D.; Zhang, C.-B.; Chu, Q.-X. An Optimized One-Step Leapfrog HIE-FDTD Method With the Artificial Anisotropy Parameters. *IEEE Trans. Antennas Propag.* **2020**, *68*, 1198–1203, doi:10.1109/TAP.2019.2940565.

[58] Wang, J.; Zhou, B.; Gao, C.; Shi, L.; Chen, B. Leapfrog Formulation of the 3-D LOD-FDTD Algorithm. *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.* **2014**, *24*, 137–139, doi:10.1109/LMWC.2013.2293664.

[59] Weiland, T. A Discretization Method for the Solution of Maxwell’s Equations for Six-Component Fields. *Arch. Für Elektron. Uebertragungstechnik* **1977**, *31*, 116–120.

[60] Clemens, M.; Weiland, T. Discrete Electromagnetism with the Finite Integration Technique. *Prog. Electromagn. Res.* **2001**, *32*, 65–87, doi:10.2528/PIER00080103.

[61] Weiland, T. On the Unique Numerical Solution of Maxwellian Eigenvalue Problems in Three Dimensions. *Part. Accel.* **1985**, *17*, 227–242.

[62] David Müzel, S.; Bonhin, E.P.; Guimarães, N.M.; Guidi, E.S. Application of the Finite Element Method in the Analysis of Composite Materials: A Review. *Polymers* **2020**, *12*, 818, doi:10.3390/polym12040818.

[63] Legrain, G.; Moës, N.; Verron, E. Stress Analysis around Crack Tips in Finite Strain Problems Using the eXtended Finite Element Method. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **2005**, *63*, 290–314, doi:10.1002/nme.1291.

[64] Whitcomb, J.D.; Raju, I.S.; Goree, J.G. Reliability of the Finite Element Method for Calculating Free Edge Stresses in Composite Laminates. *Comput. Struct.* **1982**, *15*, 23–37, doi:10.1016/0045-7949(82)90030-X.

[65] Schuhmann, R.; Weiland, T. A Stable Interpolation Technique for FDTD on Non-Orthogonal Grids. *Int. J. Numer. Model. Electron. Netw. Devices Fields* **1998**, *11*, 299–306, doi:10.1002/(SICI)1099-1204(199811/12)11:6<299::AID-JNM314>3.0.CO;2-A.

[66] Van Rienen, U.; Weiland, T. Triangular Discretization Method for the Evaluation of RF-Fields in Cylindrically Symmetric Cavities. *IEEE Trans. Magn.* **1985**, *21*, 2317–2320, doi:10.1109/TMAG.1985.1064183.

[67] Liang, X.; Ali, M.Z.; Zhang, H. Induction Motors Fault Diagnosis Using Finite Element Method: A Review. *IEEE Trans. Ind. Appl.* **2020**, *56*, 1205–1217, doi:10.1109/TIA.2019.2958908.

[68] Liu, S.; Liu, Y.; Li, H.; Lin, F. Diagnosis of Transformer Winding Faults Based on FEM Simulation and On-Site Experiments. *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* **2016**, *23*, 3752–3760, doi:10.1109/TDEI.2016.006008.

[69] Zhao, Y.; Wen, T.; Li, Y.; Ni, H.; Zhang, Q.; Chen, W. A FEM-Based Simulation of Electromagnetic Forces on Transformer Windings under Short-Circuit. In Proceedings of the 2018 IEEE International Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC); IEEE: Jackson, WY, USA, June 2018; pp. 425–429.

[70] Walker, J.C.; Ratcliffe, M.B.; Zhang, P.; Wallace, A.W.; Fata, B.; Hsu, E.W.; Saloner, D.; Guccione, J.M. MRI-Based Finite-Element Analysis of Left Ventricular Aneurysm. *Am. J. Physiol.-Heart Circ. Physiol.* **2005**, *289*, H692–H700, doi:10.1152/ajpheart.01226.2004.

[71] Zhengfeng Bai; Yang Zhao; Wenlai Ma; Hao Tian Modal Analysis for Small Satellite System with Finite Element Method. In Proceedings of the 2008 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics; IEEE: Shenzhen, China, December 2008; pp. 1–5.

[72] Oh, C.; Escuti, M.J. Time-Domain Analysis of Periodic Anisotropic Media at Oblique Incidence: An Efficient FDTD Implementation. *Opt. Express* **2006**, *14*, 11870, doi:10.1364/OE.14.011870.

[73] Biro, O.; Preis, K. On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite-Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents. *IEEE Trans. Magn.* **1989**, *25*, 3145–3159, doi:10.1109/20.34388.

[74] Kameari, A. Three Dimensional Eddy Current Calculation Using Edge Elements for Magnetic Vector Potential. In *Applied Electromagnetics in Materials*; Elsevier, 1989; pp. 225–236 ISBN 978-0-08-037191-7.

[75] Demenko, A.; Sykulski, J.K.; Wojciechowski, R. Calculation of Inducted Currents Using Edge Elements and $T - T_0$ Formulation. *IET Sci. Meas. Technol.* **2008**, *2*, 434–439, doi:10.1049/iet-smt:20080068.

[76] Wojciechowski, R.M.; Jędryczka, C. A Comparative Analysis between Classical and Modified Approach of Description of the Electrical Machine Windings by Means of T0 Method. *Open Phys.* **2017**, *15*, 918–923, doi:10.1515/phys-2017-0111.

[77] Kanayama, H.; Tagami, D.; Imoto, K.; Sugimoto, S. Finite Element Computation of Magnetic Field Problems with the Displacement Current. *J. Comput. Appl. Math.* **2003**, *159*, 77–84, doi:10.1016/S0377-0427(03)00560-0.

[78] Meunier, G.; Luong, H.T.; Marechal, Y. Computation of Coupled Problem of 3D Eddy Current and Electrical Circuit by Using T/Sub 0/-T-φ Formulation. *IEEE Trans. Magn.* **1998**, *34*, 3074–3077, doi:10.1109/20.717719.

[79] Demenko, A.; Sykulski, J.K. Network Equivalents of Nodal and Edge Elements in Electromagnetics. *IEEE Trans. Magn.* **2002**, *38*, 1305–1308, doi:10.1109/20.996333.

[80] Wojciechowski, Rafał Marek Numeryczna analiza prądów indukowanych w jednospójnych i wielospójnych obszarach przewodzących. PhD Thesis, Politechnika Poznańska: Poznań, Polska, 2010.

[81] Nowak, L. *Field models of electromechanical transducers in transient states*; Publishing house of the Poznań University of Technology: Poznan, 1999;

[82] Demenko, A.; Sykulski, J. Magneto-electric Network Models in Electromagnetism. *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* **2006**, *25*, 581–588, doi:10.1108/03321640610666736.

[83] Jędryczka, C.; Wojciechowski, R.M. A Description of the Sources of Magnetic Field Using Edge Values of the Current Vector Potential. *Arch. Electr. Eng. 2018 Vol 67 No 1* **2018**.

[84] Dommel, H.W.; Yan, A.; Wei, S. Harmonics from Transformer Saturation. *IEEE Trans. Power Deliv.* **1986**, *1*, 209–215, doi:10.1109/TPWRD.1986.4307952.

[85] Brauer, J. Saturation Harmonics and Current Waveforms of Single-Phase Induction Motors. *IEEE Trans. Power Appar. Syst.* **1974**, *PAS-93*, 40–44, doi:10.1109/TPAS.1974.293913.

[86] Ruderman, A. About Voltage Total Harmonic Distortion for Single- and Three-Phase Multilevel Inverters. *IEEE Trans. Ind. Electron.* **2015**, *62*, 1548–1551, doi:10.1109/TIE.2014.2341557.

[87] Fortes, R.R.A.; Buzo, R.F.; De Oliveira, L.C.O. Harmonic Distortion Assessment in Power Distribution Networks Considering DC Component Injection from PV Inverters. *Electr. Power Syst. Res.* **2020**, *188*, 106521, doi:10.1016/j.epsr.2020.106521.

[88] Cerdeira, A.; Estrada, M.; Quintero, R.; Flandre, D.; Ortiz-Conde, A.; García Sánchez, F.J. New Method for Determination of Harmonic Distortion in SOI FD Transistors. *Solid-State Electron.* **2002**, *46*, 103–108, doi:10.1016/S0038-1101(01)00258-1.

[89] Arranz-Gimon, A.; Zorita-Lamadrid, A.; Morinigo-Sotelo, D.; Duque-Perez, O. A Review of Total Harmonic Distortion Factors for the Measurement of Harmonic and Interharmonic Pollution in Modern Power Systems. *Energies* **2021**, *14*, 6467, doi:10.3390/en14206467.

[90] Artale, G.; Caravello, G.; Cataliotti, A.; Cosentino, V.; Cara, D.D.; Guaiana, S.; Panzavecchia, N.; Tine, G. Measurement of Simplified Single- and Three-Phase Parameters for Harmonic Emission Assessment Based on IEEE 1459-2010. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **2021**, *70*, 1–10, doi:10.1109/TIM.2020.3037949.

[91] Li, Z.; Han, W.; Xin, Z.; Liu, Q.; Chen, J.; Loh, P.C. A Review of Magnetic Core Materials, Core Loss Modeling and Measurements in High-Power High-Frequency Transformers. *CPSS Trans. Power Electron. Appl.* **2022**, *7*, 359–373, doi:10.24295/CPSSTPEA.2022.00033.

[92] Sai Ram, B.; Paul, A.K.; Kulkarni, S.V. Soft Magnetic Materials and Their Applications in Transformers. *J. Magn. Magn. Mater.* **2021**, *537*, 168210, doi:10.1016/j.jmmm.2021.168210.

[93] Dobák, S.; Beatrice, C.; Tsakaloudi, V.; Fiorillo, F. Magnetic Losses in Soft Ferrites. *Magnetochemistry* **2022**, *8*, 60, doi:10.3390/magnetochemistry8060060.

[94] Pan, J.; Vu, K.; Hu, Y. An Efficient Compensation Algorithm for Current Transformer Saturation Effects. *IEEE Trans. Power Deliv.* **2004**, *19*, 1623–1628, doi:10.1109/TPWRD.2004.835273.

[95] Shi, D.Y.; Buse, J.; Wu, Q.H.; Guo, C.X. Current Transformer Saturation Compensation Based on a Partial Nonlinear Model. *Electr. Power Syst. Res.* **2013**, *97*, 34–40, doi:10.1016/j.epsr.2012.11.019.

[96] Fritsch, M.; Wolter, M. Saturation of High-Frequency Current Transformers: Challenges and Solutions. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **2023**, *72*, 1–10, doi:10.1109/TIM.2023.3302370.

[97] Laurano, C.; Toscani, S.; Zanoni, M. A Simple Method for Compensating Harmonic Distortion in Current Transformers: Experimental Validation. *Sensors* **2021**, *21*, 2907, doi:10.3390/s21092907.

[98] Biro, O.; Koczka, G.; Preis, K. Fast Time-Domain Finite Element Analysis of 3-D Nonlinear Time-Periodic Eddy Current Problems With ${\rm T},\Phi-\Phi$ Formulation. *IEEE Trans. Magn.* **2011**, *47*, 1170–1173, doi:10.1109/TMAG.2010.2086440.

[99] Jin-Fa Lee; Lee, R.; Cangellaris, A. Time-Domain Finite-Element Methods. *IEEE Trans. Antennas Propag.* **1997**, *45*, 430–442, doi:10.1109/8.558658.

[100] Junwei, L.; Zhao, X.; Yamada, S. *Hamonic Balance Finite Element Method: Applications in Nonlinear Electromagnetics and Power Systems*; John Wiley & Sons, 2016; ISBN 978-1-118-97578-7.

[101] Zhao, X. Harmonic-Balanced Finite Element Method and Its Application. In *Modeling and Application of Electromagnetic and Thermal Field in Electrical Engineering*; Cheng, Z., Takahashi, N., Forghani, B., Eds.; Springer Singapore: Singapore, 2020; pp. 175–210 ISBN 9789811501722.

[102] Koczka, G.; Auberhofer, S.; Biro, O.; Preis, K. Optimal Convergence of the Fixed-Point Method for Nonlinear Eddy Current Problems. *IEEE Trans. Magn.* **2009**, *45*, 948–951, doi:10.1109/TMAG.2009.2012477.

[103] Koczka, G.; Bíró, O. Fixed-point Method for Solving Non Linear Periodic Eddy Current Problems with T, Φ-Φ Formulation. *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* **2010**, *29*, 1444–1452, doi:10.1108/03321641011078517.

[104] Taha, H. *Implementation of Darwin’s Model by the Finite Element Method in Order to Model Electrical Machines at Intermediate Frequencies*; Electromagnetism.; Université de Lille, 2021;