

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ  
Instytut Mechaniki Stosowanej



PRACA DOKTORSKA

IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW I  
WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA MODELU  
MATEMATYCZNEGO WYBRANYCH  
NIELINIOWYCH UKŁADÓW  
MECHANICZNYCH

Robert Salamon

Promotor:

dr hab. inż. Grażyna Sypniewska-Kamińska

Promotor pomocniczy:

dr inż. Paweł Fritzkowski

POZNAŃ, 2024



## Podziękowania i dedykacja

Składam serdeczne podziękowania dr. hab. inż. Grażynie Sypniewskiej-Kamińskiej oraz dr. hab. inż. Henrykowi Kamińskiemu za wieloletnią współpracę i opiekę naukową.

Pracę tę dedykuję mojej żonie Agacie oraz synowi Adamowi.



# Spis treści

Streszczenie .....	7
Abstract .....	8
Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	9
1. Wstęp .....	13
1.1. Wprowadzenie .....	13
1.2. Przegląd literatury .....	16
1.3. Cel i zakres pracy .....	20
2. Wybrane modele oporu ośrodka .....	25
3. Zagadnienia identyfikacji .....	29
4. Model matematyczny ruchu wahadła fizycznego.....	31
4.1. Model ruchu wahadła w ruchu płaskim .....	31
4.2. Wahadło w ruchu przestrzennym z ruchomym punktem zawieszenia ...	37
4.2.1. Równania ruchu.....	37
4.2.2. Warunki początkowe .....	44
4.2.3. Równania ruchu w stanie ustalonym .....	47
5. Opis wykonanych eksperymentów .....	49
5.1. Stanowiska pomiarowe .....	49
5.2. Wielkości mierzone .....	56
5.3. Wstępne przetworzenie danych .....	59
6. Identyfikacja parametrów modeli siły oporu w ruchu płaskim wahadła ....	67
6.1. Wprowadzenie .....	67
6.2. Identyfikacja dla modelu z jednym parametrem .....	69
6.3. Identyfikacja dla modelu z dwoma parametrami .....	73
6.4. Identyfikacja dla modelu z trzema parametrami.....	78
7. Identyfikacja i ocena statystyczna jej wyników dla modelu siły oporu z trzema parametrami w ruchu płaskim wahadła .....	81
7.1. Wprowadzenie .....	81
7.2. Interpolacyjne i aproksymacyjne schematy różnicowe .....	82
7.3. Wyznaczanie prędkości kątowych i przyspieszeń kątowych wahadła .....	91

7.4. Identyfikacja współczynników trójparametrowego modelu siły oporu ośrodka poprzez minimalizację błędu spełnienia równań ruchu.....	92
8. Identyfikacja parametrów dla modelu siły oporu z trzema parametrami w ruchu przestrzennym z ruchomym punktem zawieszenia.....	97
8.1. Wprowadzenie .....	97
8.2. Sformułowanie zagadnienia optymalizacji .....	98
8.3. Wyniki identyfikacji na podstawie danych eksperymentalnych.....	99
8.4. Wyniki identyfikacji współczynników tłumienia na podstawie numerycznej symulacji eksperymentu.....	100
9. Zastosowanie wyników estymacji w metodzie wielu skal w dziedzinie czasu .	105
9.1. Aproksymacja nieliniowości .....	105
9.2. Zdefiniowanie pochodnych dla nowych zmiennych.....	105
9.3. Równanie pierwszego przybliżenia .....	108
9.4. Równanie drugiego przybliżenia .....	108
9.5. Równanie trzeciego przybliżenia .....	109
9.6. Równania modulacji .....	112
9.7. Przybliżone rozwiązanie analityczne.....	114
9.8. Ocena dokładności.....	114
10. Wnioski .....	119
Dodatek A.....	123
Dodatek B.....	127
Dodatek C.....	129
Bibliografia .....	133

## Streszczenie

### **Identyfikacja parametrów i weryfikacja doświadczalna modelu matematycznego wybranych nieliniowych układów mechanicznych**

W pracy rozważono dwa układy mechaniczne: ruch płaski pojedynczego wahadła fizycznego w stanie nieustalonym oraz ruch przestrzenny wahadła z ruchomym punktem zawieszenia w stanie ustalonym. Model oporu powietrza dla obu zagadnień obejmował trzy składowe siły tłumienia: liniowy (proporcjonalny do prędkości), kwadratowy (proporcjonalny do kwadratu prędkości) i zależny od przyspieszenia (proporcjonalny do przyspieszenia). Ruch rzeczywistych układów zarejestrowano podczas doświadczeń laboratoryjnych.

Głównym celem pracy jest identyfikacja współczynników tłumienia, gdy znany jest ruch układu w pewnych chwilach czasowych na podstawie eksperymentu, a także weryfikacja doświadczalna zastosowanych modeli oporu ośrodka. Współczynniki tłumienia są szacowane za pomocą kilku metod obliczeniowych. Zastosowano metodę bisekcji i jej rozszerzoną wersję, metodę gradientową, oraz metodę najmniejszych kwadratów. Jak wskazują wyniki, największą efektywnością odznacza się metoda gradientowa, zwłaszcza dla układów realizowanych w stanie nieustalonym oraz metoda najmniejszych kwadratów dla układów w stanie ustalonym.

Zgodnie z półempirycznym równaniem Morisona, człon kwadratowy i składnik uogólnionej siły tłumienia zależny od przyspieszenia reprezentują całkowitą siłę wywieraną na ciało, tj. siłę oporu i siłę bezwładności, z uwzględnieniem koncepcji masy dodanej. W modelu siły oporu składnik związany z masą dodaną wydaje się niezbędny do pomyślnego przybliżenia rzeczywistego ruchu wahadła.

W pracy zaprezentowano wyniki identyfikacji współczynników tłumienia dla obu rozważanych układów mechanicznych oraz przedstawiono oszacowanie tych parametrów z zastosowaniem metod statystycznych. Dodatkowo zagadnienie ruchu płaskiego wahadła rozwiązano analitycznie za pomocą metody wielu w dziedzinie czasu.

## Abstract

### **Identification of parameters and experimental verification of the mathematical model of selected nonlinear mechanical systems**

Two mechanical systems were considered in this dissertation: the planar motion of a single physical pendulum in the unsteady state and the spatial motion of a pendulum with a movable suspension point in the steady state. The air resistance model for both problems included three components of the dissipative force: linear (proportional to velocity), quadratic (velocity squared), and acceleration-dependent (proportional to acceleration). The motion of the real systems was recorded during laboratory experiments.

The main aim of this dissertation is to identify the damping coefficients based on the motion measurements at certain time instants from the experiment, and to experimentally verify the applied models of air resistance. Damping coefficients are estimated using several computational methods. The bisection method and its extended version, the gradient method, and the least squares method were used. Based on results obtained, the gradient method is the most effective, especially for unsteady-state systems, and the least squares method for steady-state systems.

According to the semi-empirical Morison equation, the quadratic term and acceleration dependent component represent the total force exerted on the body, i.e. the drag force and inertia force including the concept of mass added. In the model of resistive force, the term proportional to acceleration seems to be indispensable for the successful approximation of the real pendulum motion.

The dissertation presents the results of the identification of damping coefficients for both considered mechanical systems and the estimation of these parameters using statistical methods. Additionally, the problem of the motion of a plane pendulum was solved analytically using the method of multiple scales in time domain.



## Wykaz ważniejszych oznaczeń

### Operatory

$(\dot{\bullet}), \frac{d(\cdot)}{dt}$	– pochodna pierwszego rzędu względem czasu
$ \cdot $	– długość wektora
$\nabla g$	– gradient funkcji
$\overline{(\cdot)}$	– wartość średnia
$[\cdot]$	– funkcja sufit
$cov(\bullet)$	– wektor kowariancji
$F^{-1}(t(\cdot))$	– odwrotna dystrybuanta standaryzowanego rozkładu $t$ studenta
$O(\cdot)$	– symbol Landaua

### Symbole literowe

$\hat{A}$	– tensor drugiego rzędu
$\vec{a}$	– wektor przyspieszenia
$\vec{a}_t$	– składowa styczna przyspieszenia
$c_1$	– wymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do prędkości
$c_2$	– wymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do kwadratu prędkości
$c_a$	– wymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do przyspieszenia
$C_a$	– współczynnik siły oporu inercjalnego
$d$	– odległość pomiędzy markerami dla ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia
$d^{(i)}$	– kierunek w metodzie gradientowej w $i$ -tym kroku
$dr$	– infinitezymalny element wahadła
$d_{SA}$	– odległość od punktu zawieszenia do markera umieszczonego na wahadle i położonego bliżej osi obrotu dla ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia
$D_c^{(n)}$	– centralny schemat różnicowy dla pochodnej rzędu $n$
$e^{\text{avg}}$	– błąd średni
$e^{\text{rms}}$	– błąd średniokwadratowy
$e_{\text{tot}}$	– błąd całkowity
$E_{\text{dys}}$	– energia dyssypacji układu
$f_k(\beta)$	– funkcja celu przy optymalizacji współczynnika $\beta$
$\vec{F}_D$	– siła dyssypatywna
$\vec{F}_I$	– siła inercjalna
$g$	– przyspieszenie ziemskie

$\hat{I}_C$	– centralny tensor bezwładności
$I_O$	– moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu i przechodzącej przez punkt $O$
$L$	– długość elementu
$L_1, L_2$	– lewe strony równań ruchu przestrzennego wahadła z ruchomym punktem zawieszania w stanie ustalonym
$\mathcal{L}$	– funkcja Lagrange'a
$m$	– masa elementu
$M_0$	– amplituda wymuszenia harmonicznego
$N_k$	– liczba klatek nagrania
$q_i$	– współrzędne uogólnione
$Q_{q_i}$	– uogólniona siła przypisana współrzędnej uogólnionej $q_i$
$Q_{q_i}^{(1)}$	– uogólniona siła spowodowana oporem ośrodka
$Q_{q_i}^{(2)}$	– uogólniona siła związana z wymuszeniem
$\hat{Q}_{q_i}^{(1)}$	– uogólniona siła spowodowana oporem ośrodka w stanie ustalonym
$r$	– promień elementu
$\vec{r}$	– wektor wodzący
$r_{X,Y}$	– współczynnik korelacji Pearsona dla wektora $X$ i $Y$
$R$	– promień tarczy
$R_1, R_2$	– prawe strony równań ruchu przestrzennego wahadła z ruchomym punktem zawieszania w stanie ustalonym
$R_i(\alpha)$	– macierz obrotu układu współrzędnych o kąt $\alpha$
$s$	– liczba stopni swobody
$t$	– czas wymiarowy
$T$	– energia kinetyczna
$\mathcal{U}$	– funkcja Heaviside'a
$v$	– moduł prędkości
$\vec{v}$	– wektor prędkości
$V$	– energia potencjalna sił zachowawczych lub potencjał sił potencjalnych
$\hat{V}$	– objętość elementu
$\hat{v}$	– liczba stopni swobody rozkładu prawdopodobieństwa
$w_1, w_2$	– parametry kroku w optymalizacyjnej metodzie gradientowej
$w_1^{\{k,L\}}, w_2^{\{k,L\}}$	– współczynniki wagowe dla metody najmniejszych kwadratów
$\alpha$	– kątowa współrzędna uogólniona wahadła z ruchomym punktem zawieszania
$\alpha_u$	– kątowa współrzędna uogólniona wahadła z ruchomym punktem zawieszania w stanie ustalonym

- $\alpha_1$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do prędkości w modelu z dwoma współczynnikami tłumienia
- $\alpha_2$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do kwadratu prędkości w modelu z dwoma współczynnikami tłumienia
- $\beta$  – kątowa współrzędna uogólniona wahadła z ruchomym punktem zawieszenia
- $\beta_u$  – kątowa współrzędna uogólniona wahadła z ruchomym punktem zawieszenia w stanie ustalonym
- $\beta_1$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do prędkości w modelu z trzema współczynnikami tłumienia
- $\beta_2$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do kwadratu prędkości w modelu z trzema współczynnikami tłumienia
- $\beta_a$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia proporcjonalny do przyspieszenia w modelu z trzema współczynnikami tłumienia
- $\hat{\beta}_i$  – współczynniki tłumienia zależne od kształtu i wymiarów opływającego ciała
- $\gamma$  – pomocnicza współrzędna kątowa wahadła z ruchomym punktem zawieszenia
- $\delta$  – przedział ufności
- $\delta_D$  – dystrybucja Diraca
- $\Delta\beta$  – wartość kroku w optymalizacyjnej metodzie gradientowej
- $\sigma_0$  – odchylenie standardowe
- $\varepsilon$  – przyspieszenie kątowe
- $\mu$  – współczynnik lepkości dynamicznej
- $\mu_0$  – wartość oczekiwana
- $\rho$  – gęstość płynu
- $\varphi$  – kątowa współrzędna uogólniona wahadła fizycznego
- $\varphi^{\text{exp}}$  – wyniki doświadczalne ruchu wahadła
- $\varphi^{\text{num}}$  – wyniki numeryczne ruchu wahadła
- $\tau$  – czas bezwymiarowy
- $\omega$  – prędkość kątowa
- $\vec{\omega}_{gl}$  – absolutna prędkość kątowa
- $\vec{\omega}_\alpha$  – prędkość kątowa związana z obrotem elementu o kąt  $\alpha$
- $\hat{\omega}_i$  – wartość referencyjna przy zamianie wartości wymiarowych na bezwymiarowe
- $\Omega_0$  – częstość wymuszenia harmonicznego



# 1. Wstęp

## 1.1. Wprowadzenie

Rozwiązywanie problemów mechaniki w dzisiejszych czasach polega między innymi na tworzeniu modeli matematycznych. Te modele często są tak złożone, że nie da się ich rozwiązać analitycznie. Otrzymuje się zazwyczaj silnie nieliniowe układy równań różniczkowych, różniczkowo-całkowych lub całkowych, które stanowią wyzwanie dla badaczy. Choć wiedza na temat tych równań stale się rozwija, ich złożoność nadal stanowi barierę. Jednym z podstawowych narzędzi rozwiązywania tego typu równań są metody numeryczne. Dzięki nim możliwe jest rozwiązanie tych problemów w sposób efektywny. Niemniej jednak, metody te również mają swoje wady, takie jak brak stabilności lub długi czas obliczeń. Mimo to metody numeryczne stają się coraz bardziej wydajne i coraz częściej wykorzystywane w praktyce, otwierając nowe możliwości dla rozwoju nauki i technologii.

Często spotykanym problemem są tzw. zagadnienia odwrotne mechaniki. Pojęcie „odwrotne” odnosi się do sytuacji, w których matematyczny opis jest niekompletny, na przykład brakuje pełnych informacji na temat warunków brzegowych lub warunków początkowych, albo też nieznane są konkretne wartości pewnych parametrów. Zagadnienia odwrotne zaliczane są do kategorii problemów źle uwarunkowanych i niejednoznacznych, co oznacza, że skuteczne rozwiązanie jest możliwe jedynie wtedy, gdy dysponujemy dodatkowymi informacjami dotyczącymi przebiegu modelowanego procesu.

Dokładne dobranie modelu tłumienia oraz oszacowanie jego parametrów stanowi kluczowy aspekt w dziedzinie symulacji dynamicznej i analizy ruchu realnych układów mechanicznych. W tym zakresie pojawiają się liczne wyzwania związane z różnorodnością mechanizmów rozpraszania energii i ich złożonością. Dodatkową trudnością jest charakter przybliżony, typowy dla modeli tłumienia. Warto zaznaczyć, że tłumienie własne, czyli to naturalnie obecne w systemie lub jego otoczeniu, często można podzielić na trzy główne kategorie: tłumienie wewnętrzne, tłumienie strukturalne i tłumienie zewnętrzne. Tłumienie wewnętrzne odnosi się do procesów zachodzących wewnątrz materiału. Może ono obejmować różne formy absorpcji energii, na przykład w materiałach elastycznych poddanych deformacji. Tłumienie strukturalne, natomiast, występuje w miejscach złączy, podporach czy na sty-

kach między elementami konstrukcyjnymi. Przykładem może być tłumienie w łączeniu dwóch elementów metalowych, gdzie energia jest rozpraszana poprzez tarcie i mikro-ruchy w powierzchni styku. Tłumienie zewnętrzne to efekty oddziaływań między systemem mechanicznym a jego otoczeniem, na przykład przez interakcje płyn–struktura. Przykładem może być tłumienie generowane przez strumień powietrza przepływający wokół poruszającego się pojazdu. Zrozumienie tych różnic oraz umiejętność właściwego uwzględnienia ich w modelach symulacyjnych jest kluczowe dla skutecznej analizy dynamiki mechanicznej systemów [17].

Istnieje kilka podstawowych modeli opisujących różne formy rozpraszania energii mechanicznej, takie jak tłumienie lepkie i modele z histerezą, tarcie suche Coulomba oraz model oporu proporcjonalnego do kwadratu prędkości. Chociaż istnieją bardziej zaawansowane i szczegółowe fizycznie podejścia do rozpraszania energii, takie jak teoria lepkośćprężystości czy teoria termosprężystości dotycząca tłumienia wewnętrznego, często są one zbyt skomplikowane, aby praktycznie je stosować, szczególnie w dynamice dyskretnych układów mechanicznych. W praktyce obliczeniowej zazwyczaj korzysta się z prostszych modeli. Głównym celem tych modeli jest zbliżone oddanie ogólnego tłumienia w danym systemie oraz uchwycenie jego głównych efektów, takich jak zmniejszanie się amplitudy drgań czy osiągnięcie stanów ustalonych w układach nieautonomicznych. W tym kontekście podstawowe modele, zwłaszcza tłumienie wiskotyczne lub jego równie często stosowany odpowiednik, tłumienie proporcjonalne do kwadratu prędkości, mogą pełnić rolę zastępczych albo "wypadkowych" reprezentacji nie tylko tłumienia wewnętrznego, ale także tłumienia strukturalnego i zewnętrznego. Dodatkowo, ważne jest zrozumienie, że mimo prostoty tych modeli, mogą one być skuteczne w przewidywaniu zachowania dynamicznego systemów mechanicznych w wielu praktycznych zastosowaniach, co sprawia, że są one popularnym narzędziem w inżynierii i naukach przyrodniczych. Jednakże, w przypadku bardziej skomplikowanych struktur lub sytuacji wymagających wysokiej dokładności, może być konieczne zastosowanie zaawansowanych modeli, biorących pod uwagę bardziej subtelne efekty tłumienia i zachowania się materiałów [6, 10, 17, 66].

Takie podejście, które skupia się na ograniczonym zainteresowaniu rzeczywistymi źródłami i mechanizmami tłumienia, można uzasadnić głównie faktem, że w wielu rzeczywistych układach ilość energii rozproszonej jest bardzo niewielka. Dotyczy to szczególnie części ciężkich maszyn, konstrukcji wykonanych z konwencjonalnych materiałów, członów mechanizmów, elementów robotów przemysłowych i podobnych przypadków. Siły wynikające z tłumienia są często znikomo małe w porównaniu

z siłami bezwładności i sprężystości, dlatego mogą być pomijane. Niemniej jednak, wpływ sił rozpraszających może stać się istotny w przypadku konstrukcji o stosunkowo niewielkiej masie, które wykonują ruch w szerokim zakresie zmian położenia i prędkości. Przykłady takich konstrukcji to elastyczne, smukłe systemy, takie jak łańcuchy, przewody, liny oraz bardzo elastyczne belki [6, 51]. Z uwagi na naturę oscylacji i związane z nimi nieliniowości geometryczne, uzasadnione jest traktowanie wahadła jako archetypu takich smukłych układów.

Kluczowym elementem tej pracy jest zweryfikowanie w prostych eksperymentach modelu tłumienia uwzględniającego liniową i proporcjonalną do kwadratu zależność siły od prędkości oraz wpływ masy dodanej wyrażający się składnikiem proporcjonalnym do przyspieszenia. Obok weryfikacji eksperymenty, w których rejestruje się dwa rodzaje ruchu pręta, służą do oszacowania wartości nieznanymi współczynników modelu tłumienia. Wydaje się, że ciało sztywne przyspieszane w płynie bez tarcia zyskuje masę. Ruch pływaków, łodzi podwodnych, sterowców itp. jest spowalniany przez efekt "dodatkowej masy", który różni się od lepkiego oporu i wyporu. Okazuje się, że pęcherzyki powietrza w wodzie unosiłyby się 400 razy szybciej, gdyby jedyną siłą działającą na nie była siła wyporu. Okręty podwodne i sterowce zużywają więcej paliwa, niż można by się spodziewać, biorąc pod uwagę tylko efekty lepkości. Łodzie podwodne i sterowce wydają się mieć większą bezwładność, gdy są przyspieszane w płynie ze względu na tak zwany efekt dodatkowej masy. Dzieje się tak, ponieważ aby przyspieszyć ciało zanurzone w nieruchomym płynie należy również przyspieszyć część otaczającego go płynu. Z drugiej strony, gdy ciało porusza się ze stałą prędkością w idealnym (nieściśliwym, nielepkim i bezwirowym) płynie to nie jest wymagana taka dodatkowa siła. Efekt dodanej masy jest zupełnie inny niż lepki opór. Jest to niespowodowane tarciem lepkiem zjawisko, w wyniku którego powstaje siła, proporcjonalna do przyspieszenia ciała i mająca zwrot przeciwny do wektora przyspieszenia, zwiększając w ten sposób masę lub bezwładność ciała. Ta dodatkowa bezwładność nazywana jest jej masą dodaną lub wirtualną. Dodana masa zależy od kształtu ciała, kierunku przyspieszenia względem ciała oraz od gęstości otaczającego płynu. Na przykład dodatkowa masa zwiększająca bezwładność kuli przy jej ruchu przyspieszonym w nieruchomym płynie stanowi połowę masy wypartego przez nią płynu. W przeciwieństwie do momentu bezwładności ciała sztywnego, jego masa dodana nie zależy od rozkładu masy w ciele. W rzeczywistości jest niezależna od masy ciała, ale rośnie wraz z gęstością płynu. Opór działający na ciało to przeciwna siła tarcia zależna od prędkości ciała względem płynu: w przypadku wolnego ruchu

w warunkach przepływu laminarnego jest ona proporcjonalna do prędkości, ale przy dużych prędkościach może być proporcjonalna do kwadratu prędkości [47].

## 1.2. Przegląd literatury

Od wieków wahadła różnego typu (normalne/odwrócone, proste/fizyczne, pojedyncze/wielokrotne) stanowią stosunkowo prosty, ale interesujący obiekt badań [5, 43, 57, 62, 67, 73]. Odgrywają one istotną rolę zarówno w mechanice teoretycznej, jak i eksperymentalnej, służąc do badania i przejrzystej interpretacji wielu koncepcji teorii małych drgań, drgań nieliniowych oraz chaosu deterministycznego. Analiza ruchu wahadeł wieloczłonowych pozwala na głębsze zrozumienie zjawisk takich jak oscylacje sprzężone czy dynamika układów wieloczłonowych [8, 71, 89, 90, 92]. Wahadło stało się nie tylko standardowym modelem w fizyce, ale również źródłem problemów testowych i licznych studiów przypadków w wielu innych dziedzinach, takich jak automatyka, robotyka, technologia kosmiczna, a także metody i algorytmy obliczeniowe oraz sztuczna inteligencja.

W kontekście analizy i symulacji smukłych systemów, wahadła wielokrotne znalazły szerokie zastosowanie w badaniach dynamiki łańcuchów [51, 58, 84, 91, 95]. Są one również wykorzystywane jako podstawa do tworzenia dyskretnych modeli kontinuumów sprężystych [24, 25, 78], co pozwala na badanie złożonych interakcji w strukturach elastycznych i ich reakcji na zewnętrzne czynniki. Dzięki ich wszechstronności i możliwościom adaptacji do różnorodnych problemów, wahadła wielokrotne pozostają ważnym narzędziem w badaniach naukowych i inżynierskich.

W kontekście tłumienia drgań, pojedyncze wahadło może być także postrzegane jako bardzo prosty i wygodny obiekt do badań eksperymentalno-obliczeniowych. Nelson i Olsson [65] wykorzystali płaskie wahadło do pomiaru przyspieszenia ziemskiego oraz omówili kilka poprawek modelowych związanych z szeroką gamą cech fizycznych wahadła fizycznego, uwzględniając między innymi efekty aerodynamiczne. Mohazzabi i Shankar [60] analizowali wpływ oporu na kulkę zawieszoną na strunie. W swoim modelu uwzględnili rozwinięcie siły tłumienia w szereg Taylora oraz tłumienie związane z siłą Morisona, tj. proporcjonalną do przyspieszenia. Ladino i Rondon [48] zaproponowali metodę wyznaczania współczynnika tłumienia prostego wahadła z oscylującym punktem zawieszenia. W pracy przedstawiono metodę pomiaru współczynnika tłumienia prostego wahadła wykonującego małe drgania z wykorzystaniem zjawiska rezonansu. Metoda ta wymaga standardowego generatora sygnału funkcyjnego, prostego wahadła i głośnika. W pracy [64] autorzy po-



równują wyniki doświadczalne i analityczne dla pojedynczego wahadła napędzanego polem magnetycznym, tj. oddziaływaniem cewka–magnes. Przybliżone rozwiązanie analityczne amplitudy przemieszczeń mechanicznych wahadła otrzymano za pomocą metody równowagi harmonicznej. Wyniki zostały zweryfikowane również za pomocą symulacji numerycznych, a następnie porównano je z wynikami doświadczalnymi.

Wiele modeli matematycznych opisuje poszczególne mechanizmy rozpraszania energii mechanicznej. Można tu wymienić model tarcia suchego Amontona i Coulomba [12], model tłumienia wiskotycznego, wiele modeli tarcia zależnych od prędkości [31] oraz model hysteretyczny tłumienia. Efekty zarówno tarcia suchego (na podporze), jak i tłumienia lepkiego na amplitudę wahadła omawiali Zonetti i inni [102]. Warto zaznaczyć, że wspomniane badania skupiają się głównie na przypadku wahadła prostego oraz zazwyczaj na jednym z dwóch modeli tłumienia: klasycznym tłumieniu liniowym (proporcjonalnym do prędkości) lub kwadratowym (proporcjonalnym do kwadratu prędkości).

Algorytmy obliczeniowe interakcji płyn-struktura umożliwiają zaawansowany opis interakcji pomiędzy układami drganiowymi a płynem. Model matematyczny wykorzystany w [13] do badania m.in. drgań wspornika powodowanych przez wir zawiera równania Naviera-Stokesa, równania Naviera dla ośrodka sprężystego oraz warunki zgodności na granicy rozdziału. To podejście uwzględnia duże odkształcenia i przemieszczenia bryły, a także silne efekty dodatkowej masy, które związane jest z równaniem Morisona, gdzie uwzględnia się współczynnik tłumienia proporcjonalny do przyspieszenia.

Badania wykorzystujące analizę modalną sprawdzają się w wielu problemach inżynierskich. Pierwotnie analizę modalną stosowano jedynie do układów nietłumionych. Jednak obecnie powszechnie stosowane są modele tłumienia proporcjonalnego, które zakładają, że macierz tłumienia jest liniową kombinacją macierzy masy i sztywności [2]. Dzięki temu możliwe jest bardziej realistyczne uwzględnienie wpływu tłumienia na dynamikę systemu, co pozwala na lepsze dopasowanie modelu do rzeczywistych warunków działania.

Nieliniowości w modelach tłumienia dla układów o wielu stopniach swobody zazwyczaj są pomijane, co zostało podkreślone w [55]. Przyczyny tego zjawiska można upatrywać w trudnościach związanych z wyznaczeniem wartości parametrów modeli nieliniowych. W artykule [55] zaproponowano rozszerzenie metody odwrotnej wyznaczania współczynników, która pierwotnie stosowana była do układów liniowych, na wyznaczenie współczynników tłumienia stojących przy wyrażeniach nieliniowych.

Wiele modeli, zarówno w obliczeniowej dynamice cieczy, jak i w algorytmach obli-

zeniowych interakcji płyn–struktura, uwzględnia efekt dodanej masy. Przykładowo, w pracy [39] uwzględniono ten efekt w modelu drgań sztywnych i sprężystych śruby okrętowej. Natomiast w [52] pokazano, że dokładność obliczeń dotyczących drgań skrzydła samolotu może być istotnie poprawiona poprzez uwzględnienie macierzy mas dodanych.

Koncepcja masy dodanej znajduje zastosowanie w obliczeniach wspomagających projektowanie konstrukcji przeznaczonych do energetyki jądrowej. Na przykład w pracy [100] zbadano model z masą dodaną dla interakcji płyn–struktura regału do przechowywania wypalonego paliwa jądrowego. Takie regały umieszczane są w basenach wypełnionych wodą. W warunkach sejsmicznych, gdy konstrukcja wibruje, płyn przepływa między szczelinami, stąd może pojawić się efekt dodatkowej masy zwiększającej bezwładność konstrukcji. Autorzy zauważają, że składnik masy dodanej jest pomijany w badaniach, a może on być wielokrotnie większy od masy własnej, szczególnie w przypadku lekkich elementów o stosunkowo dużych rozmiarach liniowych. Autorzy [45] opracowali natomiast model, który opisuje różne właściwości masy dodanej płynu i tłumienia dla koncentrycznej cylindrycznej powłoki i rzeczywistych układów sześciokątnych rdzeni reaktora z ciekłym metalem.

Dynamika konstrukcji wspartych na kolumnach zanurzonych w wodzie, takich jak fundamenty mostów morskich [75, 99], platformy wiertnicze [59], morskie turbiny wiatrowe [97] itp., wymagają uwzględnienia interakcji płyn–struktura, która ma mniejsze znaczenie w przypadku konstrukcji na lądzie. Wiadomo, że wibracje zanurzonej kolumny poddanej trzęsieniom ziemi powodują ruch pobliskiej wody, wytwarzając dodatkową siłę hydrodynamiczną działającą na konstrukcję. Tę dodatkową siłę zwykle modeluje się jako połączenie hipotetycznej masy wody i przyspieszenia konstrukcji. W pracach [59, 75, 97] zaproponowano model, w których opływany słup konstrukcji ma przekrój kołowy. Badania przedstawione w [101] przedstawiają również model masy dodanej kolumny zanurzonej w wodzie, ale o dowolnym przekroju.

W dynamice układów o parametrach skupionych zazwyczaj pomija się skutki oddziaływań z otaczającym płynem. Jednakże istnieją wyjątki, jak w przypadku, gdy model skupiony uzyskuje się poprzez dyskretyzację obiektu ciągłego, jak opisano w [28]. Autorzy tego badania, zakładając ortogonalność i niezależność postaci drgań własnych, zaproponowali model drgań łopatkı turbiny o jednym stopniu swobody, uwzględniając w nim modalną masę dodaną. Przegląd metod oceny masy dodanej płynu dla turbin hydraulicznych przedstawiono w [18].

Składnik z masą dodaną może również być zastosowany w przypadku przepływu kawitacyjnego [7]. Dodane współczynniki masy zmniejszają się wraz ze wzrostem

pęcherzy kawitacyjnych, co powinno powodować wzrost naturalnych częstotliwości strukturalnych. W modelu pokazano także dodany operator tłumienia związany z szybkością zmiany gęstości przepływu. Stwierdzono, że dodane współczynniki tłumienia są dodatnie lub ujemne w zależności od szybkości zmiany gęstości płynu, co wskazuje na możliwość wystąpienia niestabilności pomiędzy elastycznymi strukturami i niestabilnymi przepływami kawitacyjnymi.

Rola, jaką odgrywa oddziaływanie płynów na poruszające się ruchem postępowym, obrotowym, czy wahadłowym elementy dyskretnych układów o kilku stopniach swobody jest coraz częściej dostrzegana i uwzględniana w modelach matematycznych. Pomimo to, nawet w przypadku tak zaawansowanych układów, tłumienie często jest przedstawiane w ramach modelu tłumienia wiskotycznego, co zostało omówione w pracach [1, 3, 83, 87]. W tych badaniach zastosowano metodę wieloskalową (MSM) w dziedzinie czasu.

W pracy [41] omówiono drgania oscylatora Duffinga z tłumieniem przedstawionym w modelu proporcjonalnym do  $n$ -tej potęgi prędkości. Jednak, omawiane tam wyniki nie uwzględniają przypadku dla  $n = 2$ . Model tłumienia zewnętrznego, wywołanego oporem powietrza, jako połączenie tłumienia wiskotycznego i proporcjonalnego do kwadratu prędkości, został pozytywnie zweryfikowany w [38] w badaniu drgań cienkiej płyty. Analizując drgania cienkiej belki, autorzy dochodzą do wniosku, że w tym przypadku wystarczający jest model proporcjonalny do prędkości. Chang [14] badał natomiast charakterystykę drgań swobodnych, drgań deterministycznych i drgań losowych poprzecznie izotropowych płyt prostokątnych magnetoelastycznych stykających się z płynem. W swojej analizie wprowadził matematyczne sformułowanie dotyczące wyznaczania masy dodanej dla stykających się z wodą płyt prostokątnych o jednakowej grubości.

Model masy dodanej może być zastosowany również w wielu innych zagadnieniach. Na przykład autorzy w pracy [37] rozważają dodatkową warstwę masy powietrza wokół drgającej membrany, a w [81] badacze sprawdzają wpływ masy dodanej na dynamikę wibrujących prętów. Innym problemem, w którym można zastosować składnik masy wirtualnej są amortyzatory [96], które stosowane są jako niezbędne łożyska w wielu maszynach wirujących w celu tłumienia drgań bocznych i zwiększenia stabilności układu.

W pracy [80] przeanalizowano trzy modele tłumienia, które przybliżają całkowity opór powietrza w płaskim ruchu wahadła fizycznego. Najprostszym z nich jest model tłumienia wiskotycznego. Drugi model to połączenie tłumienia wiskotycznego i kwadratowego, a trzeci uwzględnia także masę dodaną. Współczynniki dla wszystkich

modeli zostały wyznaczone przy użyciu różnych technik optymalizacyjnych, a dane zostały zebrane poprzez rejestrację ruchu za pomocą kamery o wysokiej częstotliwości.

Podsumowując przegląd literatury można stwierdzić, że model tłumienia i wartości jego współczynników odgrywają znaczącą rolę w poprawnym odwzorowaniu ruchu. Autorzy prac często ograniczają się wyłącznie do liniowego modelu tłumienia, tj. z współczynnikiem proporcjonalnym do prędkości, a ich wyniki otrzymane metodami analitycznymi lub numerycznymi bardzo rzadko są weryfikowane przez porównanie ich z wynikami doświadczalnymi. Model tłumienia z masą dodaną pojawia się w wielu pracach, w których obiekt znajduje się w cieczy. W przypadku obiektu w znajdującym się powietrzu – składnik ten nie jest brany pod uwagę. W przypadku układów poruszających się z dużą prędkością większe znaczenie odgrywa parametr proporcjonalny do kwadratu prędkości, co również w pracach jest często pomijane. Należy również podkreślić, że artykuły, w których zaprezentowano rozwiązania nieliniowych zagadnień trójwymiarowych z bardziej zaawansowanym niż wiskotyczny modelem tłumienia są w zdecydowanej mniejszości.

### **1.3. Cel i zakres pracy**

Tematyka niniejszej rozprawy dotyczy weryfikacji kilku zaproponowanych modeli matematycznych siły oporu powietrza występującej w ruchu układów mechanicznych połączonej z estymacją wartości współczynników tych modeli. Celem pracy jest opracowanie metod przeznaczonych do wyznaczania wartości współczynników modelu i walidacji tego modelu dla konkretnego układu mechanicznego w warunkach odpowiadających naturalnym warunkom jego pracy. Metody te należą do zagadnień odwrotnych dynamiki, których sformułowanie nie jest w pełni określone i wymaga w związku z tym dodatkowych informacji otrzymanych eksperymentalnie z zastosowaniem zaawansowanych narzędzi pomiarowych takich jak kamery szybkiego obrazowania i systemu do analizy ruchu na przykład BTS SMART. Metody będące przedmiotem pracy zostały przetestowane w odniesieniu do dwóch stosunkowo prostych układów mechanicznych. Pierwszy z tych układów to jednorodny, prostoliniowy pręt zawieszony w nieruchomym punkcie i wykonujący swobodne drgania wokół stabilnego położenia równowagi w płaszczyźnie pionowej. Drugim układem jest również pręt, ale zawieszony za pomocą przegubu na poziomej tarczy kołowej poruszającej się zadany ruchem. Pręt ma możliwość obrotu względem dwóch osi.

Równania ruchu dla obu układów zostały wyprowadzone z równań Lagrange'a II rodzaju.

Zgodnie z powyższym, jednym z najistotniejszych zadań wchodzących w zakres pracy jest zaprojektowanie i wykonanie stanowisk pomiarowych służących do realizacji ruchu układów mechanicznych oraz jego rejestracji. Zarejestrowane dane eksperymentalne zostały przetworzone z zastosowaniem autorskich algorytmów. Kolejny, choć przebiegający równoległe z wykonywaniem eksperymentów, etap pracy polegał na dokonaniu pewnych uproszczeń modelowych i wyprowadzeniu równań ruchu obu układów z uwzględnieniem weryfikowanych modeli siły oporu ośrodka. W kolejnym kroku należy, po pierwsze, wykonać identyfikację współczynników tłumienia poprzez metody optymalizacyjne, takie jak metoda gradientowa lub metoda najmniejszych kwadratów. Po drugie, ze względu na nieliniowość proponowanego modelu, niezwykle ważna jest weryfikacja modelu poprzez porównanie wyników uzyskanych numerycznie i doświadczalnie. Ostatnim zadaniem jest rozwiązanie analityczne lub półanalityczne równań ruchu bazujących na zweryfikowanych modelach tłumienia przy zastosowaniu metody wielu skal w dziedzinie czasu.

Na tle istniejącego stanu literatury do elementów nowych zawartych w pracy autor zalicza opracowanie metodyki estymacji parametrów trójparametrowego modelu siły oporu ośrodka, w którym porusza się układ mechaniczny. Metodyka ta w swojej części teoretycznej składa się z klasycznych i opisanych w literaturze modeli, metod i algorytmów, które w sposób autorski zostały połączone w jedno kompleksowe narzędzie służące jednemu określone celowi. Warty odnotowania elementami tego postępowania są:

- Wyprowadzone z formalizmu Lagrange'a równania ruchu obu układów z siłami uogólnionymi opisującymi oddziaływanie ośrodka i wyrażonymi przez analitycznie obliczone całki oraz warunki początkowe dla układu z więzami niestacjonarnymi, sformułowane na podstawie rachunku impulsów,
- Analiza porównawcza przydatności aproksymacyjnych i interpolacyjnych schematów różnicowych do przetwarzania danych pomiarowych,
- Statystyczna ocena wartości estymowanych parametrów przeprowadzona przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów do minimalizacji błędu spełnienia równań ruchu.

Oryginalnym elementem pracy jest także zaproponowanie uproszczonego modelu siły oporu ośrodka ze składnikami opisującymi dyssypację energii mechanicznej oraz składnikiem proporcjonalnym do przyspieszenia, przedstawiającym efekt masy

dodanej, do modelowania ruchu układów mechanicznych w powietrzu. Dodatkowo autor rozwiązał za pomocą metody wielu skal w dziedzinie czasu dwuwymiarowe zagadnienie ruchu wahadła fizycznego, które jest jednym z układów badanych eksperymentalnie, uwzględniając zarówno opór proporcjonalny do prędkości i jej kwadratu, jak i wpływ dodanej masy. Masa dodana, choć wpływa zauważalnie na ruch wahadła, nie powoduje żadnych komplikacji obliczeniowych. Natomiast zawierający wartość bezwzględną nieznaną funkcji składnik modelu proporcjonalny do kwadratu prędkości jest przyczyną trudności natury obliczeniowej w metodzie asymptotycznej.

Na podstawie powyższych, teza pracy brzmi następująco: Proponowane metody eksperymentalnego wyznaczania parametrów modelu siły oporu ośrodka dają podstawy do szerokiej analizy zachowania układu mechanicznego opartej o realistyczne dane.

Praca składa się z dziesięciu rozdziałów. W rozdziale drugim przedstawiono podstawowe modele oporu ośrodka, które są stosowane w dalszej części pracy. Wyprowadzono wzór określający siłę oporu ośrodka, w którym ta siła jest sumą trzech składników: proporcjonalnego do prędkości, proporcjonalnego do kwadratu prędkości oraz proporcjonalnego do przyspieszenia. Ostatni z nich opisuje pojawienie się efektu masy dodanej.

Rozdział trzeci zawiera krótki opis zagadnień odwrotnych, do grupy których zalicza się identyfikacja parametrów modelu siły oporu przedstawiona w dalszej części pracy. W rozdziale skupiono się na przedstawieniu problemów, które można napotkać w trakcie rozwiązywania tego typu problemów.

W rozdziale czwartym opisano podstawowe założenia modelowe oraz przedstawiono wyprowadzenie równań ruchu wahadła fizycznego w ruchu płaskim i w ruchu przestrzennym z ruchomym punktem zawieszenia. Zapisując energię kinetyczną i potencjalną układu oraz model tłumienia ośrodka, który został przedstawiony w rozdziale drugim, a następnie stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju, wyprowadzono równania ruchu dla obu układów. Części rozdziału poświęcone każdemu z układów zakończone są sformułowaniem zagadnień początkowych. Zagadnienia te zostały sformułowane także w postaci bezwymiarowej.

Rozdział piąty poświęcony jest opisowi stanowisk pomiarowych i wykonanych eksperymentów. Ruch płaski pojedynczego wahadła fizycznego rejestrowano przy pomocy szybkiej kamery Photron, a ruch przestrzenny pojedynczego wahadła fizycznego z ruchomym punktem zawieszenia rejestrowany był za pomocą systemu BTS SMART.

W kolejnym rozdziale przedstawiono wyniki identyfikacji parametrów modeli si-

ły oporu w ruchu płaskim wahadła. Zastosowano metodę bisekcji, metodę bisekcji uzupełnioną o ekstrapolację tendencji spadku oraz optymalizacyjną metodę gradientową. Identyfikację tę wykonano dla modelu z tłumieniem wiskotycznym, następnie z wiskotycznym i z proporcjonalnym do kwadratu prędkości oraz ostatecznie dla modelu uwzględniającego dodatkowo składnik związany efektem masy dodanej. Dla każdego przypadku obliczono normy zdefiniowane jako odległość pomiędzy rozwiązaniem numerycznym równań modelu i i wartościami zmierzonymi. Każdy z podrzdziałów kończy się przedstawieniem wyników identyfikacji w formie tabeli.

W rozdziale siódmym przedstawiono wyniki estymacji wartości współczynników modelu siły oporu z trzema składnikami (proporcjonalnym do prędkości, kwadratu prędkości oraz do przyspieszenia). Identyfikacja ta polega na takim doborze współczynników modelu siły oporu, aby minimalizowany metodą najmniejszych kwadratów błąd spełnienia równań ruchu był najmniejszy. Po zastosowaniu aproksymacyjnych schematów różnicowych (pozwalających wyznaczyć prędkość i przyspieszenie kątowe) dokonano oszacowania otrzymanych parametrów. Na końcu rozdziału umieszczono tabelę, w której przedstawiono wyniki identyfikacji.

Rozdział ósmy dotyczy identyfikacji parametrów tłumienia oraz ich analizy statystycznej dla modelu ruchu przestrzennego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. W rozważaniach skupiono się na modelu uwzględniającym trzy parametry – tak jak w zagadnieniu ruchu wahadła płaskiego.

W rozdziale dziewiątym otrzymano rozwiązanie zagadnienia początkowego dla ruchu wahadła płaskiego metodą wielu skal w dziedzinie czasu. Wyniki te stanowią kolejne porównanie dla rezultatów otrzymanych metodami numerycznymi i doświadczalnymi.

Ostatni rozdział stanowi podsumowanie rozprawy. Wskazano też potencjalne kierunki dalszych prac opartych na dotychczasowych rezultatach.

Pracę kończy wykaz literatury oraz trzy dodatki. W dodatku A przedstawiono analityczne obliczenia momentów bezwładności pręta dla zagadnienia ruchu płaskiego i dla zagadnienia z ruchomym punktem zawieszenia. Dodatek B opisuje szczegółowo optymalizacyjną metodę gradientową stosowaną do identyfikacji parametrów w rozdziale szóstym. W dodatku C zamieszczono analityczne obliczenia dla całek z funkcji niewymiernych, które dotyczą modelu oporu ośrodka dla zagadnienia ruchu przestrzennego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia.





## 2. Wybrane modele oporu ośrodka

Fakt, że rzeczywiste ciała poruszają się zazwyczaj nie w próżni, lecz w otaczającym je płynie, ma wpływ na ich ruch. Natura oddziaływań pomiędzy płynem i poruszającym się w nim ciałem jest bardzo złożona, nawet gdy ciało traktuje się jako sztywne. W miarę dokładny opis oddziaływań dają równania Naviera-Stokesa. Ich implementacja pociąga za sobą dużą komplikację modelu matematycznego i wymaga stosowania zaawansowanych metod numerycznych w celu znalezienia rozwiązania konkretnego problemu. Z tego powodu w zagadnieniach inżynierskich nierzadko pomija się wpływ otaczającego ośrodka na ruch ciał, co może prowadzić do wniosków niezgodnych z doświadczeniem.

Alternatywą są uproszczone modele oddziaływań oparte na przesłankach wynikających z rozwiązań analitycznych równań Naviera-Stokesa słusznych w szczególnych warunkach oraz z doświadczenia. Przykładem takiego podejścia są modele oparte na wzorze Stokesa. Wzór Stokesa, słuszny dla opływów z niewielką liczbą Reynoldsa, określa siłę oporu działającą na kulę o promieniu  $r$  opadającą powoli w nieściślimym płynie o lepkości  $\mu$ . Siła ta wyraża się wzorem

$$\vec{F} = -6\pi r\mu\vec{v}, \quad (2.1)$$

gdzie  $\vec{v}$  jest prędkością kuli [20, 70, 98].

W przypadku ciał o kształtach innych niż kulisty i poruszających się z niewielką prędkością siła oddziaływania ośrodka może być przybliżona wzorem będącym uogólnieniem wzoru Stokesa, zgodnie z którym:

$$\vec{F} = -\mu\hat{A}\vec{v}, \quad (2.2)$$

gdzie  $\hat{A}$  jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu [20, 85]. Ze wzoru (2.2) wynika, że kierunek siły, z jaką ośrodek działa na ciało, w ogólnym przypadku nie pokrywa się z kierunkiem prędkości ciała.

Landau i Lifszyc [49], rozważając ruch pewnych ciał (kuli, tarczy, płaszczyzny) wykonujących postępowy ruch drgający w lepkim i nieściślimym płynie, wyznaczyli w sposób analityczny siłę oddziaływania płynu na te ciała. Charakterystyczne jest to, że siła ta w każdym z rozważanych przypadków zawiera składnik proporcjonalny do prędkości i składnik proporcjonalny do przyspieszenia, co można zapisać następująco:

$$\vec{F} = -\hat{\beta}_1\vec{v} - \hat{\beta}_2\vec{a}, \quad (2.3)$$

gdzie  $\hat{\beta}_1$  i  $\hat{\beta}_2$  są współczynnikami zależnymi od kształtu i wymiarów opływającego ciała oraz od właściwości fizycznych płynu, takich jak gęstość i lepkość. Składnik siły  $\vec{F}$  proporcjonalny do prędkości jest związany z dyssypacją energii mechanicznej ciała i z tego powodu nazywany jest siłą dyssypatywną. Drugi składnik, proporcjonalny do przyspieszenia, nie ma wpływu na proces rozpraszania energii mechanicznej. Ta część siły oporu ośrodka nazywana jest siłą inercjalną.

Model siły dyssypatywnej proporcjonalnej do prędkości ruchu ciała sprawdza się w przypadku opływu z małą prędkością mającego charakter laminarny. Gdy prędkość ruchu jest duża, to opływ staje się turbulentny, a liniowy model siły dyssypatywnej przestaje być adekwatny. W takich warunkach dużą zgodność z wynikami doświadczalnymi dają modele siły dyssypatywnej zawierające wyraz proporcjonalny do kwadratu prędkości i ewentualnie wyrazy proporcjonalne do wyższych potęg wartości wektora prędkości. Siłę dyssypatywną w takich modelach można zapisać następująco:

$$\vec{F}_D = - (c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \dots) \frac{\vec{v}}{v}, \quad (2.4)$$

gdzie  $v = |\vec{v}|$ ,  $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$  są dodatnimi współczynnikami niezależnymi od wartości  $v$  wektora prędkości.

Naturalnie zakładamy, że współczynnik  $c_0$  jest równy zero, ponieważ na zanurzone ciało nieruchome nie działa siła oporu. Modelując interakcje między ciałem a powietrzem, weźmiemy pod uwagę tylko dwa składniki rozwinięcia (2.4). Wobec tego siłę dyssypatywną  $\vec{F}_D$  działającą na układ można zapisać w postaci

$$\vec{F}_D = - (c_1 v + c_2 v^2) \frac{\vec{v}}{v}, \quad (2.5)$$

gdzie  $c_1$  oraz  $c_2$  są dodatnimi, wymiarowymi współczynnikami tłumienia odpowiadającymi dwóm rozważanym składowym siły dyssypatywnej: proporcjonalnej do prędkości –  $c_1$  i proporcjonalnej do kwadratu prędkości –  $c_2$ , a znak minus oznacza, że siła działa w kierunku przeciwnym do kierunku prędkości [50].

Model z tłumieniem wiskotycznym, tzn. uwzględniający tylko składnik siły dyssypatywnej proporcjonalnej do prędkości, jest najprostszymi i często jest stosowany w analizie drgań, gdyż nie prowadzi do nieliniowości i trudności obliczeniowych. Model ten jest często używany do przybliżenia bardziej złożonych rodzajów tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego [6, 10, 27]. Również w większości podręczników mechaniki klasycznej [33, 89, 90] omawiane są jedynie przypadki zawierające tłumienie wiskotyczne.

Oddziaływania między drgającymi ciałami a powietrzem obejmują, oprócz siły zależnej od prędkości i powodującej czysty efekt rozproszenia energii, również siłę

proporcjonalną do przyspieszenia [50, 72]. Ta ostatnia, zwana siłą inercjalną  $\vec{F}_I$ , jest związana z koncepcją masy dodanej stosowaną w hydromechanice [82]. Siła inercjalna może być przedstawiona w następującej postaci:

$$\vec{F}_I = -C_a \hat{V} \rho \vec{a}, \quad (2.6)$$

gdzie  $C_a$  oznacza współczynnik siły oporu inercjalnego,  $\rho$  jest gęstością płynu oraz  $\hat{V}$  to objętością ciała,  $\vec{a}$  jest natomiast przyspieszeniem,  $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ .

Zgodnie z równaniem Morisona składnik związany z elementarną siłą bezwładności można przedstawić jako [49]

$$\vec{F}_I = -c_a \vec{a}, \quad (2.7)$$

gdzie  $c_a = C_a \hat{V} \rho$  jest stałym i wymiarowym współczynnikiem tłumienia odpowiadającym składowej siły oporu proporcjonalnej do przyspieszenia. Ostatni składnik tłumienia często pojawia się w zagadnieniach hydrodynamiki i w analizie dynamicznej konstrukcji morskich, gdzie całkowita siła fali działająca na zanurzone ciało obejmuje zarówno siły oporu jak i siły bezwładności.

Ostatecznie biorąc pod uwagę (2.5) oraz (2.7), otrzymujemy następujący wzór na siłę oporu ośrodka:

$$\vec{F} = - \left( (c_1 v + c_2 v^2) \frac{\vec{v}}{v} + c_a \vec{a} \right) \quad (2.8)$$

uwzględniający trzy parametry tłumienia  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_a$ . Model zapisany w tej postaci będzie zastosowany do określenia sił oddziałujących na elementy układów mechanicznych rozważanych w dalszej części pracy.



### 3. Zagadnienia identyfikacji

Dla zagadnień mechaniki i innych problemów inżynierskich tworzy się modele matematyczne, które w uproszczony sposób opisują zjawiska występujące w rzeczywistości. Modele te z reguły mają charakter równań różniczkowych, całkowych lub różniczkowo-całkowych. Dodatkowym istotnym elementem przy tworzeniu modelu jest określenie kształtu i wymiarów rozpatrywanego obszaru zagadnienia oraz zdefiniowanie warunków brzegowych, które opisują to, co dzieje się w każdej chwili czasowej na brzegach obszaru, i warunków początkowych, które opisują początkowy stan modelowanego obiektu. Innym ważnym elementem modelu matematycznego jest określenie własności fizycznych materii wypełniającej obszar, a także sformułowanie wewnętrznych i zewnętrznych źródeł wpływających na proces rozważany w modelowanym problemie. W przypadku gdy wszystkie informacje dotyczące matematycznego modelu są znane, mamy do czynienia z zagadnieniem bezpośrednim (prostym). Taki problem jest zagadnieniem dobrze postawionym w sensie Hadamarda, tzn. jego rozwiązanie istnieje, jest jednoznaczne oraz stabilne [34].

Obok problemów prostych rozważa się zagadnienia odwrotne. Pod określeniem "odwrotne" rozumie się zadania, w których opis matematyczny jest niekompletny, np. nieznany jest obszar, w którym zachodzi badane zjawisko, brakuje pełnej informacji o warunkach brzegowych, warunkach początkowych lub też nieznane są wartości liczbowe pewnych parametrów opisujących na przykład właściwości fizyczne materii. Zadania odwrotne należą do tak zwanych źle postawionych problemów, co powoduje, że uzyskanie efektywnych rozwiązań jest możliwe pod warunkiem, iż dysponujemy dodatkowymi informacjami związanymi z przebiegiem modelowanego procesu, np. znamy rozwiązanie w pewnych punktach rozpatrywanego obszaru lub znamy rozwiązanie w pewnych chwilach czasowych. Często jednak takie problemy są nierozwiązywalne lub mogą mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Istnienie rozwiązania jest pierwszym warunkiem Hadamarda, aby problem był dobrze postawiony.

Drugim istotnym warunkiem jest jednoznaczność rozwiązania. Jeżeli posiadane dane nie gwarantują, że istnieje jedno rozwiązanie, to można ponownie wykonać eksperyment i uzyskać nowe dane, które można porównać z danymi poprzednimi. Innym sposobem jest otrzymanie dodatkowych danych rozszerzających informacje o procesie lub ograniczenie zakresu stosowalności rozwiązania.

Najbardziej delikatnym i najtrudniejszym do spełnienia i wykazania jest warunek stabilności. W wyniku eksperymentu uzyskuje się wyniki, które zostały zmierzone z pewną dokładnością. Dodatkowo często stosuje się operacje wygładzania danych. Wszystkie te czynności powodują, że początkowy błąd zaokrągleń podczas pomiarów zostaje silnie wzmocniony i rozwiązanie może znacząco odbiegać od rozwiązania dokładnego.

Zagadnienia odwrotne rozwiązuje się między innymi za pomocą metod optymalizacji, w których poszukuje się minimum lub maksimum pewnej funkcji celu. Dobór metody optymalizacji może rzutować na wyznaczone rozwiązanie w tym sensie, że nie ma gwarancji, że jest to rozwiązanie optymalne.

Problemy istnienia, jednoznaczności i stabilności rozwiązania uwidaczniają się jeszcze bardziej, gdy w zagadnieniu odwrotnym brakuje więcej niż jednej informacji. W przypadku poszukiwania adekwatnego modelu tłumienia dla układu mechanicznego może występować kilka współczynników, których wartości nie znamy. Przykładem może być siła oporu opisana równaniem (2.8), w której występują trzy nieznanne współczynniki:  $c_1$ ,  $c_2$  oraz  $c_a$ . Taki problem odwrotny powoduje, że rozwiązanie poszukiwane jest w przestrzeni trójwymiarowej. W szczególnych przypadkach, w których uwzględnia się więcej składników rozwinięcia w szereg potęgowy (2.4), można otrzymać zagadnienie  $n$ -wymiarowe. Takie problemy odwrotne należą do grupy zagadnień identyfikacji właściwości materiałów (zagadnienia współczynnikowe).

W literaturze, oprócz zagadnienia identyfikacji własności materiałowych, rozpatruje się również zagadnienia: określania kształtu obszaru, identyfikacji warunków brzegowych lub początkowych oraz identyfikacji źródeł, sił i wymuszeń kinematycznych [21].

# 4. Model matematyczny ruchu wahadła fizycznego

## 4.1. Model ruchu wahadła w ruchu płaskim

Symboliczny język matematyki jest podstawowym narzędziem do przedstawiania różnych zagadnień inżynierskich. Dąży się, aby każdy rozważany problem był jak najlepiej przybliżony za pomocą języka matematyki. Taki proces nazywa się modelowaniem matematycznym.

W zagadnieniach mechaniki niezbędnymi elementami w modelowaniu matematycznym są równania ruchu opisujące zachowanie układu w dowolnej chwili czasowej, równania przedstawiające siły działające na układ oraz warunki początkowe. Do wyprowadzenia równań ruchu układu mechanicznego<sup>1</sup> mogą posłużyć równania Lagrange'a drugiego rodzaju postaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (4.1)$$

gdzie  $\mathcal{L}$  jest funkcją Lagrange'a,  $q_i$  oznacza współrzędne uogólnione,  $\dot{q}_i$  są prędkościami uogólnionymi,  $Q_{q_i}$  oznacza uogólnioną siłę przypisaną współrzędnej uogólnionej  $q_i$ , której źródłem są siły niepotencjalne, a  $s$  jest liczbą stopni swobody układu. Funkcja Lagrange'a  $\mathcal{L}$  jest wyrażona w następujący sposób:

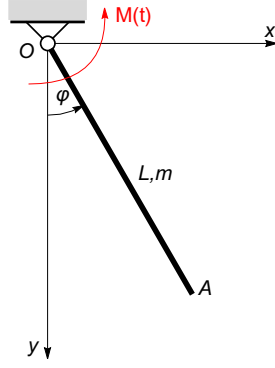
$$\mathcal{L} = T - V, \quad (4.2)$$

gdzie  $T$  jest energią kinetyczną układu względem nieruchomego układu odniesienia, a  $V$  oznacza energię potencjalną sił zachowawczych lub potencjał sił potencjalnych.

Rozważmy wahadło fizyczne przedstawione na Rys. 4.1. Składa się ono z pręta o długości  $L$  oraz masie  $m$ , zawieszono na przegubie walcowym oznaczonym przez  $O$  i będącym elementem nieruchomej podpory. Wahadło ma jeden stopień swobody, tj.:  $s = 1$ , a jego położenie można jednoznacznie opisać za pomocą kąta  $\varphi$  mierzonego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od pionowej osi  $y$ . Zatem układ ma jedną współrzędną uogólnioną  $q_1 = \varphi(t)$ , a prędkość uogólniona wyrażona jest przez  $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}(t)$ .

---

<sup>1</sup> Pod pojęciem układu mechanicznego rozumiemy w tej pracy układ złożony z brył sztywnych i punktów materialnych



Rysunek 4.1. Wahadło fizyczne

Energia kinetyczna wahadła fizycznego w ruchu obrotowym względem nieruchomego układu odniesienia  $Oxy$  jest następującej postaci:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2, \quad (4.3)$$

gdzie  $I_O$  jest momentem bezwładności pręta względem osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu i przechodzącej przez punkt  $O$ . Energia potencjalna sił grawitacji może być zapisana jako

$$V = -\frac{1}{2} mgL \cos \varphi, \quad (4.4)$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Podstawiając (4.3) oraz (4.4) do (4.2), otrzymamy

$$I_O \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} mgL \sin \varphi = Q_\varphi, \quad (4.5)$$

gdzie  $Q_\varphi$  jest siłą uogólnioną przypisaną współrzędnej  $\varphi$ . Składa się ona z dwóch składników

$$Q_{q_1} = Q_\varphi = Q_\varphi^{(1)} + Q_\varphi^{(2)}, \quad (4.6)$$

gdzie  $Q_\varphi^{(1)}$  jest siłą spowodowaną oporem ośrodka, a  $Q_\varphi^{(2)}$  jest siłą związaną z wymuszeniem.

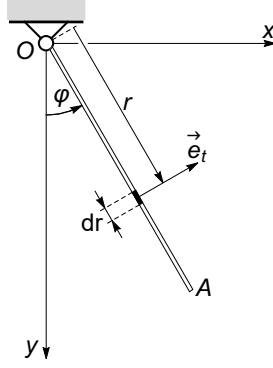
Wprowadźmy zmienną lokalną  $r$  mierzoną wzdłuż osi pręta od punktu zawieszenia wahadła  $O$ , jak pokazano na Rys. 4.2. Wektor wodzący  $\vec{r}$ , prędkość  $\vec{v}$  oraz przyspieszenie  $\vec{a}$  infinitezimalnego elementu  $dr$  wahadła można przedstawić w następujący sposób:

$$\vec{r} = r(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}), \quad (4.7)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\dot{\varphi}(\cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{i}), \quad (4.8)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \vec{i} + (r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \vec{j}, \quad (4.9)$$





Rysunek 4.2. Infinitesimalny element wahadła

gdzie  $\vec{i}$  oraz  $\vec{j}$  są wersorami globalnego układu współrzędnych  $Oxy$ .

Uogólniona siła spowodowana oporem powietrza działająca na nieskończenie małą część wahadła jest przedstawiona wzorem

$$dQ_\varphi^{(1)} = d\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi}. \quad (4.10)$$

Zgodnie z (2.8), elementarna siła oporu powietrza jest równa

$$d\vec{F} = - \left( (c_1 v + c_2 v^2) \frac{\vec{v}}{v} + c_a \vec{a}_t \right) dr, \quad (4.11)$$

gdzie  $dr$  jest długością infinitesimalnego elementu pręta, natomiast  $\vec{a}_t$  oznacza składową styczną przyspieszenia, która przyjmuje postać

$$\vec{a}_t = r\ddot{\varphi}(\cos\varphi\vec{j} - \sin\varphi\vec{i}). \quad (4.12)$$

Obliczając pochodną wektora wodzącego względem współrzędnej uogólnionej, otrzymamy

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = r(\cos\varphi\vec{j} - \sin\varphi\vec{i}). \quad (4.13)$$

Niech  $\vec{e}_t$  będzie wektorem jednostkowym prostopadłym do osi pręta zorientowanym zgodnie ze wzrostem kąta  $\varphi$ . Zarówno prędkość, jak i składowa styczna przyspieszenia punktów wahadła zmieniają się liniowo wzdłuż osi pręta i można je zapisać w następujący sposób:

$$\vec{v} = \omega r \vec{e}_t, \quad (4.14)$$

$$\vec{a}_t = \varepsilon r \vec{e}_t, \quad (4.15)$$

gdzie prędkość kątowa  $\omega$  i przyspieszenie kątowe  $\varepsilon$  są równe  $\omega = \dot{\varphi}$ ,  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ . Wartość wektora prędkości jest równa

$$v = |\omega|r = |\dot{\varphi}|r. \quad (4.16)$$

Podstawiając (4.8) i (4.12) do (4.11), otrzymamy

$$d\vec{F} = - \left( (c_1 + c_2 v) r \dot{\varphi} (\cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{i}) + c_a r \ddot{\varphi} (\cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{i}) \right) dr. \quad (4.17)$$

Wstawiając wyrażenia (4.13) i (4.17) do (4.10) dostaniemy wzór na elementarną uogólnioną siłę wywołaną przez siłę  $d\vec{F}$  w następującej postaci:

$$dQ_\varphi^{(1)} = - \left( (c_1 + c_2 |\dot{\varphi}| r) \dot{\varphi} r + c_a \ddot{\varphi} r \right) r dr. \quad (4.18)$$

W celu określenia całkowitej uogólnionej siły pochodzącej od siły oddziaływania z ośrodkiem, należy scałkować lokalną siłę  $dQ_\varphi^{(1)}$  na całej długości pręta. Wobec tego

$$Q_\varphi^{(1)} = - \int_0^L \left( (c_1 + c_2 |\dot{\varphi}| r) \dot{\varphi} r^2 + c_a \ddot{\varphi} r^2 \right) dr. \quad (4.19)$$

W ten sposób otrzymujemy następujący wzór na uogólnioną siłę przedstawiającą opór powietrza działający na wahadło:

$$Q_\varphi^{(1)} = - \left( c_1 \frac{L^3}{3} \dot{\varphi} + c_2 \frac{L^4}{4} |\dot{\varphi}| \varphi + c_a \frac{L^3}{3} \ddot{\varphi} \right). \quad (4.20)$$

W celu uogólnienia modelu matematycznego zakładamy, że na wahadło w płaszczyźnie ruchu działa para sił o zwrocie zgodnym z kierunkiem wzrostu współrzędnej  $\varphi$ . Wartość momentu tej pary zmienia się harmonicznym zgodnie z równaniem

$$M(t) = M_0 \cos(\Omega_0 t), \quad (4.21)$$

gdzie  $M_0$  jest amplitudą, a  $\Omega_0$  częstością wymuszenia harmonicznego. Siła uogólniona spowodowana działaniem pary sił jest zatem równa

$$Q_\varphi^{(2)} = M_0 \cos(\Omega_0 t). \quad (4.22)$$

Wstawiając (4.20) i (4.22) do równania (4.5) otrzymamy równanie ruchu wahadła fizycznego w następującej postaci:

$$\left( I_o + c_a \frac{L^3}{3} \right) \ddot{\varphi} + c_1 \frac{L^3}{3} \dot{\varphi} + c_2 \frac{L^4}{4} \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \frac{1}{2} mgL \sin \varphi = M_0 \cos(\Omega_0 t). \quad (4.23)$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu nieliniowe i niejednorodne o stałych współczynnikach. Równanie (4.23) należy uzupełnić warunkami początkowymi w postaci danej jako

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \quad (4.24)$$

gdzie  $\varphi_0$  jest początkowym wychyleniem wahadła,  $\omega_0$  jest jego początkową prędkością kątową.

Wprowadźmy jako nową zmienną czas bezwymiarowy

$$\tau = \hat{\omega}_i t, \quad (4.25)$$

gdzie indeks dolny  $i$  oznacza, że wartość referencyjna  $\hat{\omega}_i$  zostanie przedstawiona w kilku wariantach. Dzieliąc równanie (4.23) przez jednomian  $\frac{1}{2}mgL$  otrzymamy

$$\frac{6I_o + 2c_a L^3}{3mgL} \ddot{\varphi} + \frac{2c_1 L^2}{3mg} \dot{\varphi} + \frac{c_2 L^3}{2mg} \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \sin \varphi = \frac{2M_0}{mgL} \cos(\Omega_0 t). \quad (4.26)$$

Zgodnie z definicją (4.25) i regułą łańcuchową, mamy

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \hat{\omega}_i \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \hat{\omega}_i^2 \frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2}, \quad (4.27)$$

więc równanie ruchu wahadła dla czasu bezwymiarowego przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{6I_o + 2c_a L^3}{3mgL} \hat{\omega}_i^2 \frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{2c_1 L^2}{3mg} \hat{\omega}_i \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \frac{c_2 L^3}{2mg} \hat{\omega}_i^2 \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \left| \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right| + \sin \varphi \\ = \frac{2M_0}{mgL} \cos\left(\frac{\Omega_0 \tau}{\hat{\omega}_i}\right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Współczynnik referencyjny  $\hat{\omega}_1$  określimy korzystając z postulatu

$$\frac{6I_o + 2c_a L^3}{3mgL} \hat{\omega}_1^2 = 1, \quad (4.29)$$

z którego wynika, że

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\frac{3mgL}{6I_o + 2c_a L^3}}. \quad (4.30)$$

Wstawiając wyrażenie (4.30) do równania (4.28), otrzymano pierwszy wariant równania ruchu wahadła fizycznego w następującej postaci bezwymiarowej:

$$\ddot{\varphi} + \alpha_1 \dot{\varphi} + \alpha_2 \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \sin \varphi = f \cos(p_1 \tau), \quad (4.31)$$

gdzie  $\varphi = \varphi(\tau)$  oraz

$$\alpha_1 = \frac{2c_1 L^2}{3mg} \hat{\omega}_1, \quad \alpha_2 = \frac{c_2 L^3}{2mg} \hat{\omega}_1^2, \quad f = \frac{2M_0}{mgL}, \quad p_1 = \frac{\Omega_0}{\hat{\omega}_1} \quad (4.32)$$

są wielkościami bezwymiarowymi, a kropka nad symbolem oznacza różniczkowanie względem zmiennej  $\tau$ . Równanie (4.31) jest uzupełnione o warunki początkowe

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0}{\hat{\omega}_1}. \quad (4.33)$$

Równanie (4.31) oraz warunki początkowe (4.33) tworzą wspólnie bezwymiarowe zagadnienie początkowe dla ruchu wahadła fizycznego uwzględniające dwa bezwymiarowe współczynniki tłumienia  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , które odpowiadają sile oporu proporcjonalnej do prędkości i do kwadratu prędkości. Zagadnienie to ma postać

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \alpha_1 \dot{\varphi} + \alpha_2 \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \sin \varphi = f \cos(p_1 \tau), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0}{\hat{\omega}_1}. \end{cases} \quad (4.34)$$

Równanie (4.28) można również sprowadzić do postaci bezwymiarowej pozostawiając współczynnik oporu  $c_a$ . Niech teraz

$$\frac{2I_o}{mgL} \hat{\omega}_2^2 = 1. \quad (4.35)$$

Stąd dostaniemy, że

$$\hat{\omega}_2 = \sqrt{\frac{mgL}{2I_o}}. \quad (4.36)$$

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy drugi wariant zagadnienia początkowego bezwymiarowego ruchu wahadła fizycznego uwzględniający trzy współczynniki tłumienia. Zagadnienie to jest następujące:

$$\begin{cases} (1 + \beta_a) \ddot{\varphi} + \beta_1 \dot{\varphi} + \beta_2 \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \sin \varphi = f \cos(p_1 \tau), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0}{\hat{\omega}_2}, \end{cases} \quad (4.37)$$

gdzie

$$\beta_a = \frac{2c_a L^2}{3mg}, \quad \beta_1 = \frac{2c_1 L^2}{3mg} \hat{\omega}_2, \quad \beta_2 = \frac{c_2 L^3}{2mg} \hat{\omega}_2^2, \quad f = \frac{2F_0}{mgL}, \quad p_1 = \frac{\Omega_0}{\hat{\omega}}. \quad (4.38)$$

Bezwymiarowe współczynniki tłumienia  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$  odpowiadają trzem składnikom sił oporu: liniowemu (proporcjonalnemu do prędkości), kwadratowemu (proporcjonalnemu do kwadratu prędkości) oraz zależnemu od przyspieszenia (proporcjonalnemu do przyspieszenia).

Pomijając efekty związane z siłą inercjalną  $F_I$ , można przyjąć, że  $\beta_a = 0$ . Wtedy zagadnienie (4.37) przyjmuje postać

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \beta_1 \dot{\varphi} + \beta_2 \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \sin \varphi = f \cos(p_1 \tau), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0}{\hat{\omega}_2}. \end{cases} \quad (4.39)$$

Pomijając dodatkowo efekty odpowiadające sile oporu proporcjonalnej do kwadratu prędkości, można przyjąć, że  $\beta_2 = 0$ . Zagadnienie początkowe dla ruchu wahadła z oporem wiskotycznym przyjmuje najprostszą postać

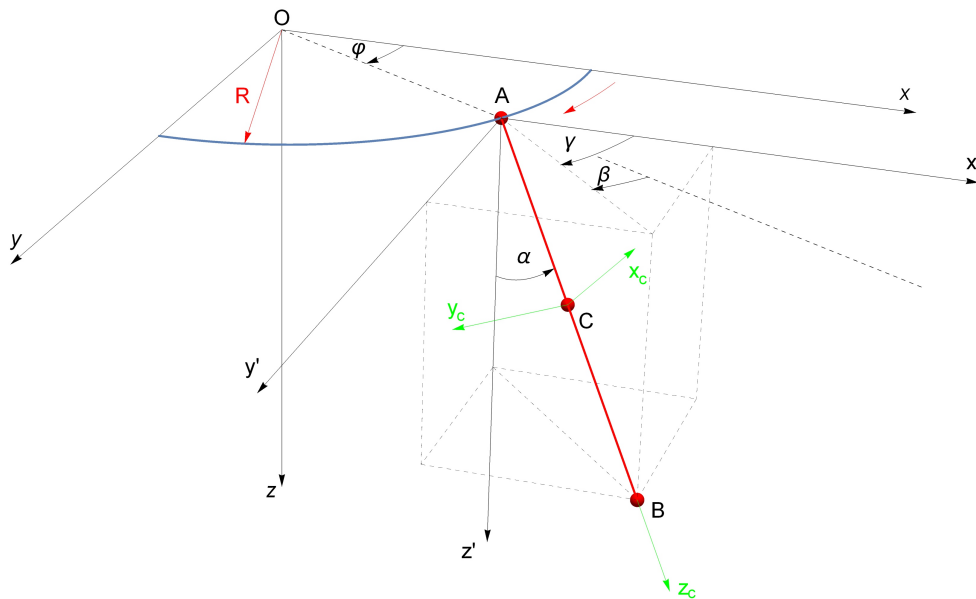
$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \beta_1 \dot{\varphi} + \sin \varphi = f \cos(p_1 \tau), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0}{\omega_2}. \end{cases} \quad (4.40)$$

Zagadnienia (4.39) oraz (4.40) wprowadzono w celu porównania ich z modelem (4.37) przy doświadczalnej weryfikacji zagadnienia identyfikacji współczynników opisujących opór ośrodka zgodnie z równaniem (2.8).

## 4.2. Wahadło w ruchu przestrzennym z ruchomym punktem zawieszenia

### 4.2.1. Równania ruchu

Przedmiotem niniejszego rozdziału jest wyprowadzenie równań ruchu z uwzględnieniem sił oporu ośrodka dla układu pokazanego na Rys. 4.3. Układ składa się z jednorodnego pręta o długości  $L$  i masie  $m$  zawieszonoego w punkcie  $A$ , który porusza się znanym ruchem po okręgu o promieniu  $R$  i środku w początku układu współrzędnych  $Oxyz$ .



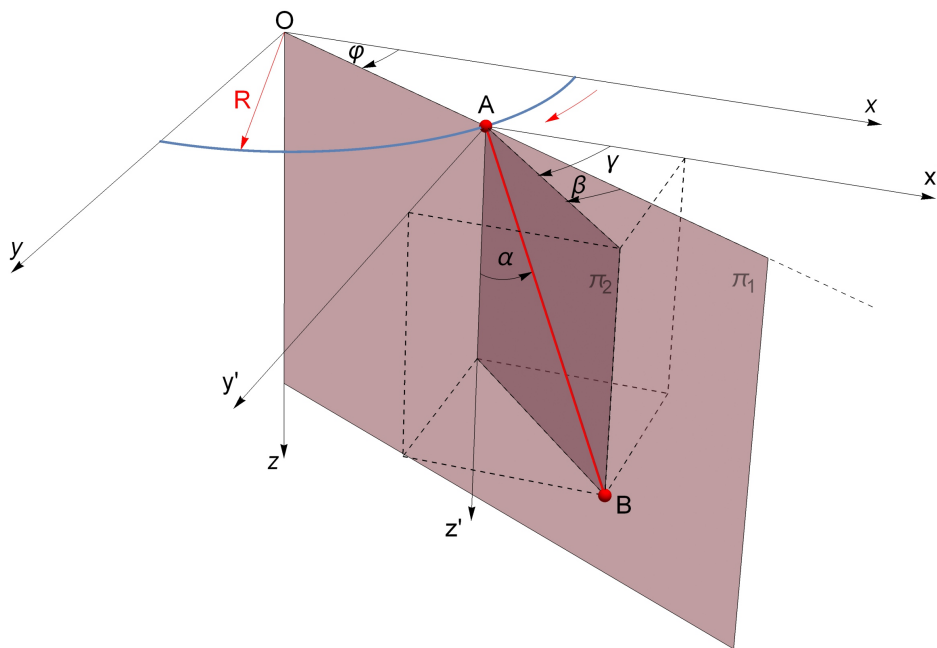
Rysunek 4.3. Wahadło z ruchomym punktem zawieszenia

Opisany ruch punktu  $A$  jest realizowany w taki sposób, że pręt został zamocowany za pomocą przegubu kulistego do punktu  $A$  tarczy kołowej obracającej się ze stałą prędkością  $\vec{\omega}$  wokół osi pokrywającej się z osią  $z$  układu współrzędnych  $Oxyz$ . Układ z nałożonymi więzami niestacjonarnymi ma dwa stopnie swobody  $s = 2$ , gdy pręt traktujemy jako element jednowymiarowy o nieistotnych wymiarach poprzecznych.

W celu zdefiniowania współrzędnych określających w sposób jednoznaczny położenie pręta wprowadzamy ruchomy układ współrzędnych  $Ox'y'z'$  o osiach równoległych do odpowiednich osi układu  $Oxyz$ . Rolę tych współrzędnych, przyjmowanych dalej jako współrzędne uogólnione, pełnią kąty skierowane  $\alpha$  i  $\beta$ . Kąt  $\alpha$  jest kątem między osią  $Az'$  układu  $Ax'y'z'$  i osią pręta. Kąt  $\beta$  zawarty jest między dwiema pionowymi płaszczyznami przecinającymi się wzdłuż osi  $Az'$ , z których pierwsza  $\Pi_1$  przechodzi przez prostą  $OA$ , a druga  $\Pi_2$  zawiera oś  $AB$  pręta.

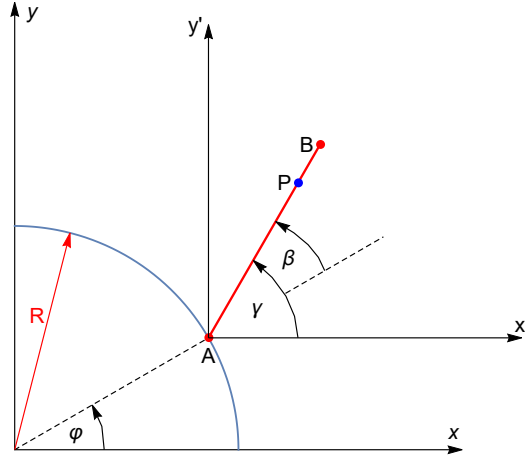
Na rysunku 4.4 zilustrowano ułożenie płaszczyzn  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  oraz pokazano kąt obrotu tarczy  $\varphi = \omega t$ , gdzie  $\omega$  jest współrzędną prędkości kątowej  $\vec{\omega}$ . Miara pomocniczego kąta  $\gamma$  spełnia związek

$$\beta = \gamma - \omega t. \quad (4.41)$$



Rysunek 4.4. Płaszczyzny  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  oraz zawarty między nimi kąt  $\beta$

Rysunek 4.5 przedstawia widok z dołu, czyli z kierunku osi  $Oz$ , układu przedstawionego na Rys. 4.3.



Rysunek 4.5. Widok z dołu (z kierunku osi  $Oz$ ) na tarczę i pręt

Do wyprowadzenia równań ruchu są pomocne współrzędne kartezjańskie (w układzie  $Oxyz$ ) punktu zawieszenia  $A$  oraz końca  $B$  wahadła. Współrzędne punktu  $A$  zależą jedynie od kąta  $\varphi$ , więc

$$\begin{cases} x_A(t) = R \cos(\omega t), \\ y_A(t) = R \sin(\omega t), \\ z_A(t) = 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

gdzie  $R$  jest promieniem tarczy, po obwodzie której porusza się punkt zawieszenia. Między współrzędnymi punktu  $B$  i współrzędnymi uogólnionymi zachodzą związki

$$\begin{cases} x_B(t) = R \cos(\omega t) + L \sin \alpha \cos(\omega t + \beta), \\ y_B(t) = R \sin(\omega t) + L \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), \\ z_B(t) = L \cos \alpha. \end{cases} \quad (4.43)$$

Oznaczmy przez  $C$  środek masy pręta. Jego położenie w układzie  $Oxyz$  określają współrzędne pozostające w następujących związkach ze współrzędnymi uogólnionymi:

$$\begin{cases} x_C(t) = R \cos(\omega t) + \frac{L}{2} \sin \alpha \cos(\omega t + \beta), \\ y_C(t) = R \sin(\omega t) + \frac{L}{2} \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), \\ z_C(t) = \frac{L}{2} \cos \alpha. \end{cases} \quad (4.44)$$

Kartezjańskie współrzędne prędkości punktu  $C$  otrzymamy poprzez obliczenie pochodnych współrzędnych tego punktu względem czasu

$$\begin{cases} v_{x_C}(t) = -\omega R \sin(\omega t) + \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) - \frac{L}{2}(\omega + \dot{\beta}) \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), \\ v_{y_C}(t) = \omega R \cos(\omega t) + \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) + \frac{L}{2}(\omega + \dot{\beta}) \sin \alpha \cos(\omega t + \beta), \\ v_{z_C}(t) = -\frac{L}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha, \end{cases} \quad (4.45)$$

gdzie  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  – prędkości uogólnione.

Zgodnie z twierdzeniem Koeniga, energia kinetyczna pręta względem nieruchomego układu odniesienia  $Oxyz$  jest określona następująco:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{gl} \cdot (\hat{I}_C \vec{\omega}_{gl}), \quad (4.46)$$

gdzie

$$\hat{I}_C = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

jest centralnym tensorem bezwładności pręta względem głównych osi bezwładności  $Cx_cy_cz_c$ ,  $I_0$  jest natomiast centralnym momentem bezwładności względem poprzecznej osi głównej pręta,  $I_z$  jest momentem bezwładności względem osi pręta, a wektor  $\vec{\omega}_{gl}$  jest absolutną prędkością kątową względem nieruchomego układu współrzędnych  $Oxyz$ , wyrażoną w tym samym układzie  $Cx_cy_cz_c$ , w jakim zdefiniowano tensor bezwładności (4.47). Wartość  $I_z$  jest o kilka rzędów wielkości mniejsza od  $I_0$ , stąd w dalszych rozważaniach zostanie pominięta, tzn.:

$$I_z = 0. \quad (4.48)$$

Osie centralnego głównego układu bezwładności pokazano na Rys. 4.3. Prędkość kątową  $\vec{\omega}_{gl}$  można przedstawić jako sumę dwóch prędkości kątowych

$$\vec{\omega}_{gl} = \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\gamma. \quad (4.49)$$

Prędkość kątową  $\vec{\omega}_\alpha$  związana jest z obrotem pręta o kąt  $\alpha$  wokół osi prostopadłej do płaszczyzny  $\Pi_2$ . Wektor  $\vec{\omega}_\gamma$  przedstawia prędkość kątową obrotu o kąt  $\gamma$  wokół osi  $Az'$ . Z uwagi na niezależność współrzędnych uogólnionych prędkości kątowe  $\vec{\omega}_\alpha$  i  $\vec{\omega}_\gamma$  są niezależne.

W układzie  $Oxyz$  (albo  $Ax'y'z'$ ) wektory  $\vec{\omega}_\alpha$  i  $\vec{\omega}_\gamma$  są określone następująco:

$$\vec{\omega}_\alpha = [-\dot{\alpha} \sin \gamma, \dot{\alpha} \cos \gamma, 0], \quad (4.50)$$

$$\vec{\omega}_\gamma = [0, 0, \dot{\gamma}]. \quad (4.51)$$

Wektor prędkości kątowej  $\vec{\omega}_{gl}$  w układzie  $Oxyz$ , zgodnie z (4.49), ma współrzędne

$$\vec{\omega}_{gl} = [-\dot{\alpha} \sin \gamma, \dot{\alpha} \cos \gamma, \dot{\gamma}] \quad (4.52)$$

W związku z koniecznością przedstawienia prędkości kątowej  $\vec{\omega}_{gl}$  w układzie głównych osi bezwładności pręta, przeprowadzono transformację jego współrzędnych



z układu  $Oxyz$  do układu  $Cx_cy_cz_c$ . Związki transformacyjne można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} -\dot{\gamma} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \cos \alpha \end{bmatrix} = R_2(\alpha) \cdot R_1(\gamma) \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \cos \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

gdzie  $R_1(\gamma)$  jest macierzą obrotu układu współrzędnych wokół osi  $Az'$  o kąt  $\gamma$ , a  $R_2(\alpha)$  jest macierzą obrotu układu współrzędnych wokół osi prostopadłej do płaszczyzny  $\Pi_2$  o kąt  $\alpha$ . Macierze te mają postać

$$R_1(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

$$R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Po podstawieniu (4.47) oraz (4.53) do (4.46), energia kinetyczna pręta przyjmuje postać

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}(I_0\dot{\alpha}^2 + I_0\dot{\gamma}^2 \sin^2 \alpha). \quad (4.56)$$

Stosując podstawienie  $\gamma = \beta + \omega t$ , dostaniemy

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\left(I_0\dot{\alpha}^2 + I_0(\dot{\beta} + \omega)^2 \sin^2 \alpha\right), \quad (4.57)$$

gdzie

$$v_C^2 = \frac{1}{8}\left(\omega^2(-L^2 \cos(2\alpha) + L^2 + 8LR \sin \alpha \cos \beta + 8R^2) + 2L\left(L\dot{\alpha}^2 + \sin \alpha \cdot \dot{\beta}(L \sin \alpha(\dot{\beta} + 2\omega) + 4R\omega \cos \beta) + 4R\omega\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta\right)\right). \quad (4.58)$$

Energia potencjalna sił ciężkości wahadła względem poziomego odniesienia na płaszczyźnie  $Oxy$  jest równa

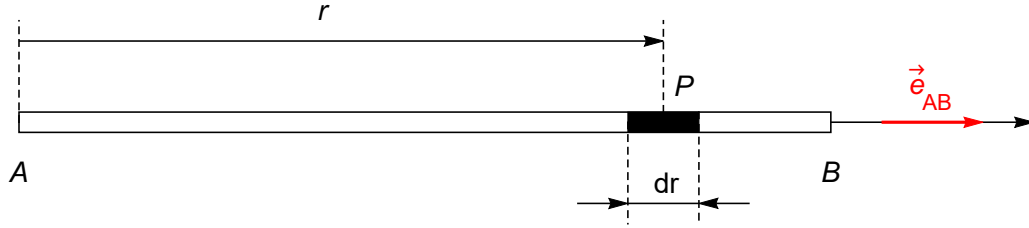
$$V = -\frac{1}{2}mgL \cos \alpha, \quad (4.59)$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie.

W celu wyznaczenia uogólnionej siły spowodowanej oporem ośrodka wprowadźmy lokalną współrzędną  $r$  mierzoną wzdłuż osi pręta od punktu zawieszenia  $A$ . Jak pokazano na Rys. 4.6 współrzędna ta wskazuje położenie dowolnego punktu

$P \in [A, B]$ . Położenie punktu  $P$  na tle całego układu pokazano na Rys. 4.5. Współrzędne w układzie  $Oxyz$  wektora wodzącego  $\vec{r}$  punktu  $P$  pręta można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{cases} r_x(r, t) = R \cos(\omega t) + r \sin \alpha \cos(\omega t + \beta), \\ r_y(r, t) = R \sin(\omega t) + r \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), \\ r_z(r, t) = r \cos \alpha. \end{cases} \quad (4.60)$$



Rysunek 4.6. Lokalna współrzędna  $r$  dowolnego punktu  $P$  pręta

Obliczając pochodną wektora  $r$  względem czasu po czasie wektora  $\vec{r}$ , otrzymamy kartezjańskie współrzędne prędkości  $\vec{v}(r, t)$  punktu  $P$  pręta oddalonego o  $r$  od punktu  $A$ . Mają one postać

$$\begin{cases} v_x(r, t) = -R\omega \sin(\omega t) + r(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) - (\omega + \dot{\beta}) \sin \alpha \sin(\omega t + \beta)), \\ v_y(r, t) = R\omega \cos(\omega t) + r(\dot{\alpha} \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) + (\omega + \dot{\beta}) \sin \alpha \cos(\omega t + \beta)), \\ v_z(r, t) = -r\dot{\alpha} \sin \alpha. \end{cases} \quad (4.61)$$

Współrzędne przyspieszenia  $\vec{a}(r, t)$  otrzymamy obliczając pochodną pierwszego rzędu prędkości  $\vec{v}(r, t)$  względem czasu

$$\begin{cases} a_x(r, t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) + r(-\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos(\omega t + \beta) - 2\dot{\alpha}(\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) \\ \quad - (\omega + \dot{\beta})^2 \sin \alpha \cos(\omega t + \beta) + \ddot{\alpha} \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) - \ddot{\beta} \sin \alpha \sin(\omega t + \beta)), \\ a_y(r, t) = -R\omega^2 \sin(\omega t) - r(\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) - 2\dot{\alpha}(\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) \\ \quad + (\omega + \dot{\beta})^2 \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) - \ddot{\alpha} \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) - \ddot{\beta} \sin \alpha \cos(\omega t + \beta)), \\ a_z(r, t) = -r(\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \ddot{\alpha} \sin \alpha). \end{cases} \quad (4.62)$$

Zgodnie z Rys. 4.6, wprowadźmy wersor wektora  $\vec{AB}$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = [\sin \alpha \cos(\omega t + \beta), \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), \cos \alpha]. \quad (4.63)$$

Składowa wektora prędkości  $\vec{v}(r, t)$  w kierunku prostopadłym do osi  $AB$  pręta określona jest następującym wzorem

$$\vec{v}^\perp(r, t) = \vec{v}(r, t) - (\vec{v}(r, t) \cdot \vec{e}_{AB}) \vec{e}_{AB}. \quad (4.64)$$

Współrzędne wektora  $\vec{v}^\perp(r, t)$  w układzie  $Oxyz$  są następujące:

$$\begin{cases} v_x^\perp(r, t) = -R\omega \sin(\omega t) - R\omega \sin^2 \alpha \sin \beta \cos(\omega t + \beta) + r\dot{\alpha} \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) \\ \quad - r(\omega + \dot{\beta}) \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), \\ v_y^\perp(r, t) = \frac{R\omega}{4} (3 \cos(\omega t) + \cos(\omega t + 2\beta)) + \frac{R\omega}{2} \cos(2\alpha) \sin \beta \sin(\omega t + \beta) \\ \quad + r\dot{\alpha} \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) + r(\omega + \dot{\beta}) \cos(\omega t + \beta) \sin \alpha, \\ v_z^\perp(r, t) = -\sin \alpha (R\omega \cos \alpha \sin \beta + r\dot{\alpha}). \end{cases} \quad (4.65)$$

Moduł  $|\vec{v}^\perp(r, t)|$  wektora prędkości  $\vec{v}^\perp(r, t)$  jest równy

$$\begin{aligned} |\vec{v}^\perp(r, t)| &= (\vec{v}^\perp(r, t) \cdot \vec{v}^\perp(r, t))^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \frac{1}{4} \omega^2 (2r^2 + 3R^2 + (R^2 - 2r^2) \cos(2\alpha)) + 2R \sin \alpha (4r \cos \beta + R \cos(2\beta) \sin \alpha) \right. \\ &\quad \left. + r (2R\dot{\alpha} \omega \cos \alpha \sin \beta + r\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta} \sin \alpha (2R\omega \cos \beta + r(2\omega + \dot{\beta}) \sin \alpha)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Niech  $\vec{a}^\perp(r, t)$  oznacza wektor przyspieszenia w kierunku prostopadłym do osi  $AB$  pręta. Współrzędne wektora  $\vec{a}^\perp(r, t)$  w układzie  $Oxyz$  są równe

$$\begin{cases} a_x^\perp(r, t) = -\omega^2 (R \cos(\omega t) + \cos(\omega t + \beta) \sin \alpha (r \cos^2 \alpha - R \cos \beta \sin \alpha)) \\ \quad - 2r\dot{\alpha}(\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) - r\ddot{\beta} \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) \\ \quad + r \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) (-\dot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha (2\omega + \dot{\beta}) + \ddot{\alpha}), \\ a_y^\perp(r, t) = \omega^2 (-R \sin(\omega t) + \sin \alpha (-r \cos^2 \alpha + R \cos \beta \sin \alpha) \sin(\omega t + \beta)) \\ \quad + 2r\dot{\alpha}(\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha \cos(\omega t + \beta) + r\ddot{\beta} \cos(\omega t + \beta) \sin \alpha \\ \quad + r \cos \alpha \sin(\omega t + \beta) (-\dot{\beta} (2\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha \sin \alpha + \ddot{\alpha}), \\ a_z^\perp(r, t) = \sin \alpha (\omega^2 \cos \alpha (R \cos \beta + r \sin \alpha) + r\dot{\beta} (2\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha \sin \alpha - r\ddot{\alpha}). \end{cases} \quad (4.67)$$

Siły uogólnione, których źródłem jest opór powietrza, działające na nieskończenie mały element pręta  $AB$  są zdefiniowane następująco:

$$dQ_\alpha^{(1)} = d\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha}, \quad (4.68)$$

$$dQ_\beta^{(1)} = d\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\beta}, \quad (4.69)$$

gdzie elementarna siła oporu ośrodka  $\vec{F}$  jest przedstawiona wzorem

$$d\vec{F} = - (c_1 \vec{v}^\perp(r, t) + c_2 |\vec{v}^\perp(r, t)| \vec{v}^\perp(r, t) + c_a \vec{a}^\perp(r, t)) dr. \quad (4.70)$$

Obliczając pochodną wektora wodzącego nieskońcześnie małego elementu pręta względem obu współrzędnych uogólnionych, otrzymamy

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = [r \cos \alpha \cos(\omega t + \beta), r \cos \alpha \sin(\omega t + \beta), -r \sin \alpha], \quad (4.71)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\beta} = [-r \sin \alpha \sin(\omega t + \beta), r \cos(\omega t + \beta) \sin \alpha, 0]. \quad (4.72)$$

Podstawiając (4.65)-(4.67) do (4.70), a następnie mnożąc skalarnie uzyskane wyrażenie przez (4.71) i (4.72) odpowiednio, dostaniemy

$$dQ_\alpha^{(1)} = -(c_1 + c_2|\vec{v}^\perp(r, t)|)(R\omega \cos \alpha \sin \beta + r\dot{\alpha})r + c_a r (\omega^2 \cos \alpha (R \cos \beta + r \sin \alpha) + r\omega\dot{\beta} \sin(2\alpha) + r\dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha - r\ddot{\alpha})dr, \quad (4.73)$$

$$dQ_\beta^{(1)} = -(c_1 + c_2|\vec{v}^\perp(r, t)|)(R\omega \cos \beta + r\omega \sin \alpha + r\dot{\beta} \sin \alpha)r \sin \alpha - c_a r \sin \alpha (R\omega^2 \sin \beta + 2r\dot{\alpha}(\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha + r\ddot{\beta} \sin \alpha)dr, \quad (4.74)$$

gdzie  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_a$  są współczynnikami tłumienia, a moduł  $|\vec{v}^\perp(r, t)|$  jest określony wzorem (4.66). W celu określenia całkowitych sił uogólnionych  $Q_\alpha^{(1)}$  i  $Q_\beta^{(1)}$  pochodzących od siły oddziaływania z ośrodkiem, należy scałkować lokalne siły  $dQ_\alpha^{(1)}$  oraz  $dQ_\beta^{(1)}$  na całej długości pręta  $AB$

$$Q_\alpha^{(1)} = \int_{AB} dQ_\alpha^{(1)}, \quad (4.75)$$

$$Q_\beta^{(1)} = \int_{AB} dQ_\beta^{(1)}. \quad (4.76)$$

Współrzędne uogólnione  $\alpha$ ,  $\beta$  i ich pochodne przy obliczaniu całek (4.75)-(4.76) należy traktować jako parametry.

Stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju (4.1), otrzymamy równania ruchu dla wahadła z ruchomym punktem zawieszenia postaci

$$\frac{1}{8} \left( -4m\omega^2 RL \cos \alpha \cos \beta + 4mgL \sin \alpha - (4I_0 + mL^2)\omega^2 \sin(2\alpha) - (4I_0 + mL^2)(\dot{\beta}(2\omega + \dot{\beta}) \sin(2\alpha) - 2\ddot{\alpha}) \right) = Q_\alpha^{(1)}, \quad (4.77)$$

$$\frac{1}{4} \sin \alpha \left( 2m\omega^2 RL \sin \beta + (4I_0 + mL^2)(2\dot{\alpha}(\omega + \dot{\beta}) \cos \alpha + \ddot{\beta} \sin \alpha) \right) = Q_\beta^{(1)}, \quad (4.78)$$

gdzie  $Q_\alpha^{(1)}$  i  $Q_\beta^{(1)}$  wyrażone odpowiednio są przez (4.75) i (4.76). Jest to układ dwóch równań różniczkowych nieliniowych drugiego rzędu.

#### 4.2.2. Warunki początkowe

Równania ruchu układu, wyprowadzone w rozdziale 4.2.1, obowiązują dla każdej chwili  $t > 0$ . Kinematyczne wymuszenie, jakiemu poddawany jest pręt, wymaga opisu przejścia tarczy, na której znajduje się punkt  $A$ , ze stanu spoczynku do ruchu obrotowego z prędkością kątową  $\omega$ . Wpływ tego procesu na ruch układu zostanie uwzględniony w warunkach początkowych zagadnienia.

Ruch tarczy od chwili startu do dowolnej chwili  $t > 0$  opisuje funkcja

$$\varphi(t) = \omega t \mathcal{U}(t), \quad (4.79)$$

gdzie  $\mathcal{U}(\cdot)$  jest funkcją Heaviside'a. Funkcja  $\varphi$  dla  $t = 0$  jest ciągła, ale nie jest gładka, gdyż

$$\dot{\varphi}(t) = \omega \mathcal{U}(t) + \omega t \delta_D(t), \quad (4.80)$$

gdzie  $\delta_D(\cdot)$  jest dystrybucją Diraca. Biorąc pod uwagę, że iloczyn dystrybucji Diraca i dowolnej funkcji  $\lambda \in C^\infty$  jest równy  $\lambda(0)\delta_D(t)$ , otrzymamy

$$\dot{\varphi}(t) = \omega \mathcal{U}(t). \quad (4.81)$$

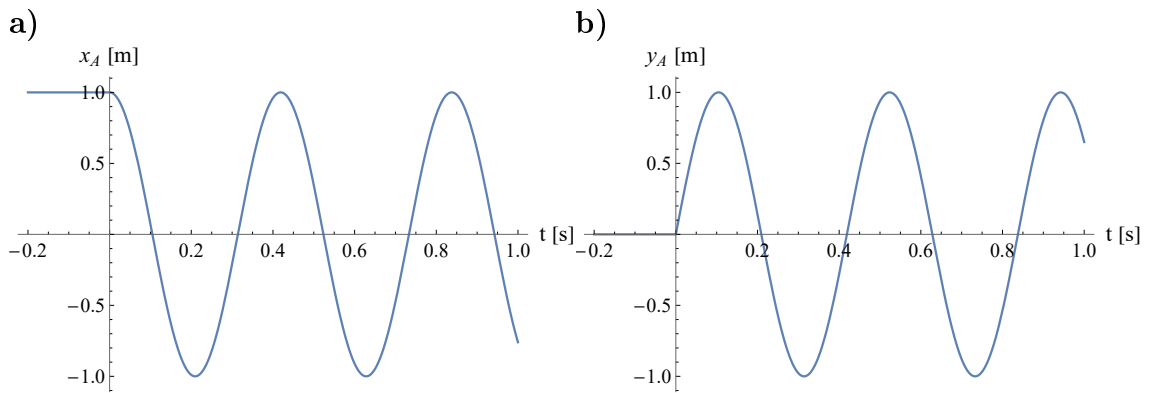
Współrzędne kartezjańskie punktu  $A$  w układzie  $Oxyz$ , które, uwzględniając wzór (4.81), można zapisać następująco:

$$\begin{cases} x_A = R \cos(\omega t \mathcal{U}(t)), \\ y_A = R \sin(\omega t \mathcal{U}(t)), \\ z_A = 0, \end{cases} \quad (4.82)$$

są ciągłe dla  $t = 0$ . Pochodne względem czasu współrzędnych  $x_A$  i  $y_A$  są równe

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -R \sin(\omega t \mathcal{U}(t)) [\omega \mathcal{U}(t) + \omega t \delta_D(t)] = -R\omega \sin(\omega t \mathcal{U}(t)) \mathcal{U}(t), \\ \dot{y}_A = R \cos(\omega t \mathcal{U}(t)) [\omega \mathcal{U}(t) + \omega t \delta_D(t)] = R\omega \cos(\omega t \mathcal{U}(t)) \mathcal{U}(t) \end{cases} \quad (4.83)$$

Pochodna  $\dot{y}_A$  dla  $t = 0$  jest nieciągła, co pokazano na Rys. 4.7b. Nieciągłość  $\dot{\varphi}$  oraz  $\dot{y}_A$  dla  $t = 0$  jest przyczyną tego, że prędkości uogólnione mogą być także nieciągłe dla  $t = 0$ . Z kolei ciągłość funkcji  $\varphi(t)$ ,  $x_A(t)$ ,  $y_A(t)$  dla  $t = 0$  zapewnia ciągłość współrzędnych uogólnionych w tej chwili.



Rysunek 4.7. Wykres **a)**  $x_A(t)$ , **b)**  $y_A(t)$  dla  $\omega = 10$  rad/s i  $R = 1$  m.

Rozważmy ruch układu w przedziale  $[0, \tau)$ , gdzie  $\tau \rightarrow 0$ . Równania ruchu można wyprowadzić z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}^{(1)}, \quad (4.84)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = Q_{\beta}^{(1)}, \quad (4.85)$$

gdzie  $t \in [0, \tau)$  i  $\mathcal{L}(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \varphi, \dot{\varphi})$ . Całkując każde z równań (4.84)–(4.85) w przedziale  $[0, \tau)$  napiszemy

$$\int_0^{\tau} d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) dt - \int_0^{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} dt = \int_0^{\tau} Q_{\alpha}^{(1)} dt, \quad (4.86)$$

$$\int_0^{\tau} d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) dt - \int_0^{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} dt = \int_0^{\tau} Q_{\beta}^{(1)} dt. \quad (4.87)$$

Stosując wzór Newtona-Leibniza, otrzymamy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} dt = \int_0^{\tau} Q_{\alpha}^{(1)} dt, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} dt = \int_0^{\tau} Q_{\beta}^{(1)} dt. \quad (4.89)$$

Funkcje  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}$ ,  $Q_{\alpha}^{(1)}$ ,  $Q_{\beta}^{(1)}$  z uwagi na nieciągłość niektórych z ich argumentów dla  $t = 0$  mogą być także nieciągłe, ale jest to nieciągłość pierwszego rodzaju, są więc ograniczone, co zapewnia istnienie całek. W celu sformułowania warunków początkowych dokonujemy przejścia granicznego  $\tau \rightarrow 0$  po obu stronach każdego z równań (4.88)–(4.89), otrzymując

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_{t=0^+} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_{t=0} = 0, \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \Big|_{t=0^+} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \Big|_{t=0} = 0, \quad (4.91)$$

gdzież

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} dt = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} dt = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} Q_{\alpha}^{(1)} dt = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} Q_{\beta}^{(1)} dt = 0. \quad (4.92)$$

Dla funkcji Lagrange'a, która została określona w rozdziale 4.2.1, równania (4.90) i (4.91) przyjmują postać

$$I_0 \dot{\alpha}(0^+) - I_0 \dot{\alpha}(0) - \frac{1}{4} m L^2 \dot{\alpha}(0) + \frac{m}{16} (8LR\omega \cos(\alpha(0)) \sin(\beta(0)) + 4L^2 \dot{\alpha}(0^+)) = 0 \quad (4.93)$$

$$I_0 \sin^2(\alpha(0)) \left( \omega + \dot{\beta}(0^+) \right) - I_0 \sin^2(\alpha(0)) \dot{\beta}(0) - \frac{1}{4} m L^2 \sin^2(\alpha(0)) \dot{\beta}(0) + \frac{m}{16} \left( 4L\omega \sin(\alpha(0)) (2R \cos(\beta(0)) + L \sin(\alpha(0))) + 4L^2 \sin^2(\alpha(0)) \dot{\beta}(0^+) \right) = 0 \quad (4.94)$$

Współrzędne  $\alpha$  i  $\beta$  są ciągłe, więc warunki początkowe dla współrzędnych uogólnionych mają postać

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0, \\ \beta(0) = \beta_0, \end{cases} \quad (4.95)$$

gdzie  $\alpha_0$  jest wartością kąta  $\alpha$  w chwili początkowej, a  $\beta_0$  – początkową wartością kąta  $\beta$ . Wielkości  $\dot{\alpha}(0)$  i  $\dot{\beta}(0)$ , które opisują stan kinematyczny wahadła w chwili startu są znane i oznaczmy je odpowiednio symbolami  $\omega_0^\alpha$  oraz  $\omega_0^\beta$ . Rozwiązując układ równań (4.93)–(4.94) ze względu na  $\dot{\alpha}(0^+)$  i  $\dot{\beta}(0^+)$ , otrzymamy postać warunków początkowych zagadnienia

$$\dot{\alpha}(0^+) = \omega_0^\alpha - \frac{2mLR\omega \cos \alpha_0 \sin \beta_0}{4I_0 + mL^2}, \quad (4.96)$$

$$\dot{\beta}(0^+) = \omega_0^\beta - \omega - \frac{2mLR\omega \cos \beta_0 \operatorname{cosec} \alpha_0}{4I_0 + mL^2}. \quad (4.97)$$

Funkcja kosekans, występująca w warunku (4.97) jest odwrotnością sinusa. W związku z tym dla  $\alpha_0 = 0$  rozważany układ jest osobliwy. Równania (4.77) i (4.78) oraz warunki początkowe (4.95)–(4.97) tworzą zagadnienie początkowe ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia.

### 4.2.3. Równania ruchu w stanie ustalonym

Wahadło z poruszającym się zadany ruchem punktem zawieszenia i poddane sile oporu powietrza może osiągnąć stan ustalony. W tym stanie praca niestacjonarnych więzów jest równa pracy sił oporu, więc energia mechaniczna pozostaje stała. Z równań (4.57)–(4.59) wynika, że energia mechaniczna wahadła równa  $T + V$  jest stała, gdy prędkości uogólnione  $\dot{\alpha} = 0$  i  $\dot{\beta} = 0$ . W konsekwencji współrzędne uogólnione  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$  osiągają w stanie ustalonym stałe wartości, które oznaczmy odpowiednio przez  $\alpha_u$  i  $\beta_u$ , gdzie  $\alpha_u, \beta_u \in \mathbb{R}$ . Równania ruchu (4.77) i (4.78) w stanie ustalonym przyjmują następującą postać:

$$\frac{1}{2} mgL \sin \alpha_u - \frac{1}{2} m \omega^2 RL \cos \alpha_u \cos \beta_u - \left( \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{8} mL^2 \right) \omega^2 \sin(2\alpha_u) = \hat{Q}_{\alpha_u}^{(1)} \quad (4.98)$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 RL \sin \alpha_u \sin \beta_u = \hat{Q}_{\beta_u}^{(1)}, \quad (4.99)$$

gdzie  $\hat{Q}_{\alpha_u}^{(1)}$  oraz  $\hat{Q}_{\beta_u}^{(1)}$  oznaczają całkowite siły uogólnione pochodzące od siły oddziaływania z ośrodkiem w stanie ustalonym. W Dodatku C przedstawiono analityczne wzory określające obie siły uogólnione dla stanu ustalonego.

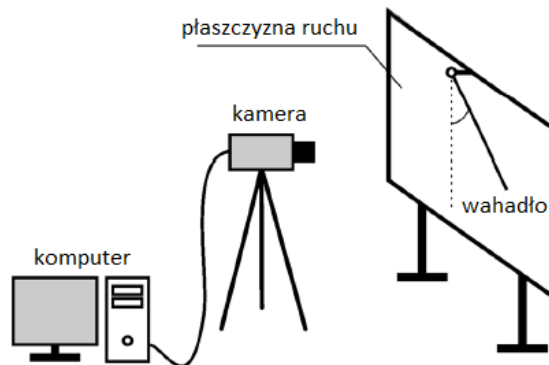


# 5. Opis wykonanych eksperymentów

## 5.1. Stanowiska pomiarowe

Rozdział ten jest poświęcony opisowi elementów składowych stanowisk pomiarowych do badania ruchu płaskiego oraz przestrzennego wahadła fizycznego, a także przebiegowi eksperymentów i procesom przetwarzania zarejestrowanych danych. W pierwszej części przedstawiono stanowiska w postaci schematów blokowych oraz krótko je scharakteryzowano, skupiając się na opisie elementów wykonawczych, przegubach, sposobie realizacji wymuszenia kinematycznego oraz sterowaniu (w przypadku ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia). Dodatkowo opisano, jak zrealizowano zawieszenie wahadła oraz w jaki sposób rejestrowano drgania. W dalszej części zaprezentowano, w jaki sposób uzyskano wyniki z eksperymentów oraz przedstawiono surowe wyniki doświadczalne. Ponadto omówiono sposób przetworzenia danych do obliczeń numerycznych.

W pierwszym doświadczeniu wahadło fizyczne zostało wychylone o pewną wartość początkową i wprowadzone w ruch bez prędkości początkowej. Ruch wahadła nie jest wymuszony i porusza się ono w ustalonej płaszczyźnie. Ruch płaski układu jest rejestrowany przez kamerę o wysokiej częstotliwości, połączoną z komputerem generującym pliki video (Rys. 5.1).



Rysunek 5.1. Schemat stanowiska pomiarowego przeznaczonego do rejestracji ruchu płaskiego wahadła fizycznego

Doświadczenia dla każdego z układów przeprowadzono z wahadłami o różnej długości:  $L \in \{100, 150, 200, 300\}$  mm. W każdym przypadku pręt ma średnicę  $d = 4$

mm i jest wykonany ze stopu aluminiumo-magnezowego (*AlMg3*). Gęstość materiału wynosi  $\rho = 2640 \text{ kg/m}^3$ .

Przy obliczaniu masy i momentu bezwładności układu względem punktu zawieszania wahadła uwzględniono stosunkowo złożoną geometrię łącznika wahadła. Szczegółowe obliczenia przedstawiono w Dodatku A. Parametry dla wszystkich wariantów długości wahadła podano w Tab. 5.1.

Tabela 5.1. Momenty bezwładności i masa wahadeł o różnej długości dla układu płaskiego

$L$ [mm]	$m \times 10^{-3}$ [kg]	$I_0 \times 10^{-6}$ [kg m <sup>2</sup> ]
100	5.115	33.215
150	6.773	81.862
200	8.432	163.2
300	11.75	457.13

Znając te parametry, początkową wartość wychylenia wahadła, jego położenie w danej chwili czasowej oraz równania ruchu możemy identyfikować współczynniki tłumienia dla układu mechanicznego poruszającego się ruchem płaskim.

Końce prętów są gwintowane w celu zamocowania tulei stożkowych za pomocą nakrętek łączących (Rys. 5.2).



Rysunek 5.2. Fotografia wahadła z dwoma stożkowymi tulejami i nakrętkami

Głównym przeznaczeniem tulei jest zaciśnięcie syntetycznego sznurka pełniącego rolę łącznika między prętem a punktem zaczepienia (Rys. 5.3). Nakrętki są ponadto wygodnym miejscem do umieszczania znaczników śledzenia (Rys. 5.4). Jak pokazano na zdjęciach, wahadło jest przymocowane do ramy za pomocą połączenia sznurkowego, będącego przegubem kulistym, między tuleją końcówki i tuleją przymocowaną do wspornika pomocniczego. W celu odpowiedniego doświetlenia nagrywanego przez kamerę znacznika użyto lamp halogenowych. Zarejestrowane obrazy zosta-



Rysunek 5.3. Fotografia dwóch stożkowych tulei połączonych sznurkiem

ły przetworzone w sposób opisany w następnych rozdziałach celem wygenerowania współrzędnych wybranych znaczników wahadła.



Rysunek 5.4. Wahadło z dwoma znacznikami na nakrętkach

Oczywiście, do wykonania wahadła można użyć innego materiału niż stop aluminium, ale dla przedmiotów wykonanych z stosunkowo lekkich materiałów opór powietrza odgrywa większą rolę i łatwiej dostrzec jego działanie. Największym problemem przy doświadczeniu było utrzymanie ruchu w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rejestracji kamery. W celu weryfikacji uzyskanych wyników, zamiast przegubu kulistego, zastosowano przegub walcowy. Wyniki końcowe uzyskane dla dwóch sposobów mocowania pręta nie różniły się istotnie.

W drugim doświadczeniu pręt został przymocowany do tarczy za pomocą przegubu kulistego (zostało zastosowane takie samo rozwiązanie konstrukcyjne jak w wyżej opisanym przypadku). Punkt zawieszenia wahadła porusza się po okręgu, przy czym ruch obrotowy tarczy, na której znajduje się przegub, realizuje silnik krokowy ste-

rowany za pomocą ARDUINO<sup>1</sup>. Warto dodać, że sterowanie silnikiem krokowym odbywa się za pomocą dodatkowej nakładki (CNC Shield<sup>2</sup>). Nakładka ta współpracuje z kolejnym sterownikiem – A4988<sup>3</sup>, który powoduje, że napisanie programu staje się dużo łatwiejsze oraz ogranicza liczbę elementów w układzie elektrycznym sterowania. Sterujący silnikiem program komputerowy reguluje prędkość obrotową tarczy, w taki sposób, aby tarcza osiągnęła ustaloną prędkość kątową w określonym czasie. Ustalony ruch tarczy skutkuje osiągnięciem po pewnym czasie ustalonej postaci ruchu wahadła, w której wartości współrzędnych uogólnionych  $\alpha$  i  $\beta$  stają się praktycznie stałe. Wydłużony czas rozbiegu układu z łagodnie rosnącą prędkością kątową tarczy zmniejsza czas trwania procesu przejściowego drgań wahadła.

Ruch układu mechanicznego jest rejestrowany przez system analizy ruchu BTS SMART o maksymalnej częstotliwości próbkowania 500 Hz i rozdzielczości  $2048 \times 2048$  pikseli. Dokładność identyfikacji położenia markerów przy zastosowaniu maksymalnej rozdzielczości i częstotliwości próbkowania wynosi poniżej 0.1 mm. BTS SMART to zespół sześciu kamer rejestrujący współrzędne pasywnych markerów odbijających promieniowanie podczerwone. W wyniku takiej rejestracji otrzymujemy współrzędne położenia markerów w kartezjańskim układzie współrzędnych wygenerowanym uprzednio przez system BTS SMART.

Cały układ mechaniczny zamontowany jest na ramie, która może drgać podczas eksperymentu. Aby nie brać pod uwagę pomiarów zakłóconych w sposób przypadkowy drganiami otoczenia, umieszczono na ramie dodatkowy marker kontrolny. W przypadku, gdy współrzędne markera ulegają zmianie, dana rejestracja ruchu nie jest brana pod uwagę.

Rysunek 5.5 przedstawia schemat blokowy stanowiska pomiarowego do rejestrowania ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. Czerwone punkty na schemacie to markery śledzone przez kamery systemu BTS SMART.

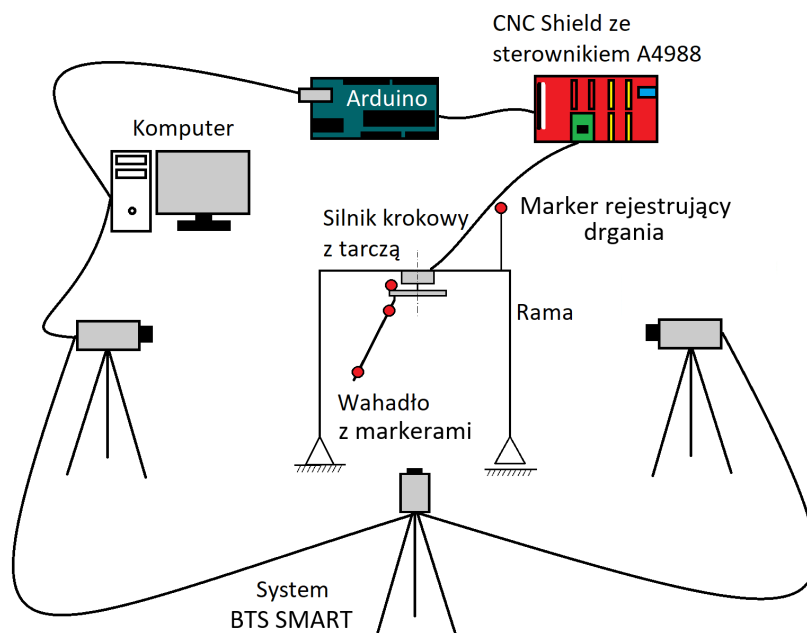
Metoda rejestracji ruchu przestrzennego jest inna niż w przypadku ruchu płaskiego. W związku z tym zmieniono konstrukcję wahadła, wprowadzając pasywne markery, które są niezbędnym elementem rejestracji ruchu 3D za pomocą systemu

---

<sup>1</sup> ARDUINO to platforma, która umożliwia tworzenie interaktywnych urządzeń elektronicznych poprzez programowanie mikrokontrolera i wykorzystanie różnych czujników i aktywatorów.

<sup>2</sup> CNC Shield to moduł rozszerzeń, który umożliwia sterowanie maszyną wieloosiową za pomocą platformy ARDUINO. Umożliwia podłączenie silników krokowych, sterowników silników krokowych i innych elementów niezbędnych do budowy i kontroli maszyny wieloosiowej.

<sup>3</sup> A4988 to sterownik silników krokowych, który oferuje zaawansowane funkcje sterowania silnikiem krokowym, takie jak ograniczenie prądu i zabezpieczenia termiczne. Obsługuje różne tryby mikrokrotnego kroku, co oznacza, że można osiągnąć precyzyjne i płynne ruchy silnika krokowego.



Rysunek 5.5. Schemat stanowiska pomiarowego do rejestracji ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia

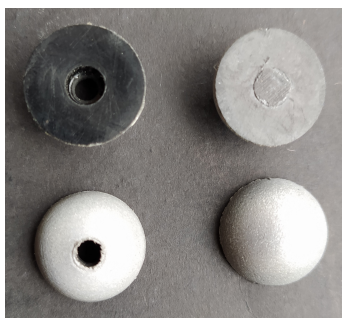
BTS SMART. Momenty bezwładności wahadła przestrzennego względem punktu zawieszenia przedstawiono w Tabeli 5.2. Szczegółowe obliczenia przedstawiono w Dodatku A.

Tabela 5.2. Momenty bezwładności i masa wahań o różnej długości dla układu z ruchomym punktem zawieszenia

$L$ [mm]	$m \times 10^{-3}$ [kg]	$I_0 \times 10^{-6}$ [kg m <sup>2</sup> ]
100	8.627	55.447
150	10.286	127.366
200	11.945	240.759
300	15.262	625.139

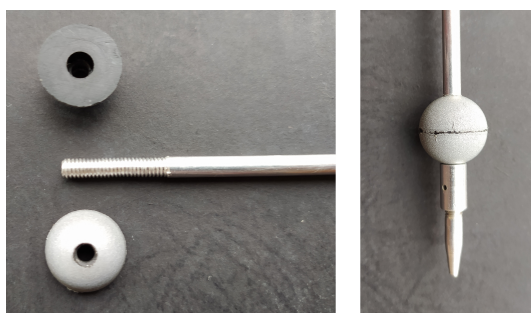
Zastosowane w doświadczeniu markery mają fabrycznie kształt półkuli, więc w celu umocowania ich na pręcie wykonano w markerach otwory, które następnie nagwintowano. Efekt realizacji tego procesu przedstawiono na Rys. 5.6. Po lewej stronie fotografii widoczne są markery z nagwintowanym otworem, natomiast po prawej – fabrycznie nowe.

Dodatkowym elementem poprawiającym jakość rejestracji położenia wahadła jest zwiększenie długości gwintu, aby na pręcie możliwe było umieszczenie dwóch



Rysunek 5.6. Fotografia markerów przed (prawa strona) i po (lewa strona) wierceniu i gwintowaniu otworów

markerów, które po złożeniu ze sobą tworzą kulę. Podczas rejestracji system BTS SMART traktuje złączone markery jako jeden, a zwiększenie powierzchni odbijającej promieniowanie sprzyja zwiększeniu dokładności lokalizacji. Na rysunku 5.7 przedstawiono fotografie markerów przed i po osadzeniu ich na pręcie.



Rysunek 5.7. Fotografie pręta i markerów przed (lewa strona) i po (prawa strona) połączeniu

W celu zachowania podobnej struktury wahadła, jak w doświadczeniu z ruchem płaskim, pozostawiono nakrętkę oraz tulejkę stożkową. Długość gwintu zwiększono w taki sposób, aby długość wahadła po dołączeniu markerów sferycznych nie uległa zmianie. Miało to wpływ jedynie na wartość momentu bezwładności.

Kolejnym elementem stanowiska pomiarowego niezbędnym do realizacji określonego ruchu punktu zawieszenia wahadła jest tarcza, która jest łącznikiem pomiędzy silnikiem krokowym, a przegubem wahadła (Rys. 5.8).

Centralny otwór został wyszlifowany, ponieważ wszelkie niedokładności jego wykonania zakłócały założony ruch punktu zawieszenia w płaszczyźnie poziomej. Pozostałe otwory o mniejszej średnicy służą jako punkty mocowania pręta na tarczy. Są one nagwintowane, a ich wymiar jest zgodny z wymiarem końcówki stożkowej.



Rysunek 5.8. Fotografia tarczy

Całość połączenia przedstawiono na Rys. 5.9. W górnej części fotografii można zauważyć zastosowany silnik krokowy, a poniżej jego połączenie z tarczą, na której zawieszono wahadło.



Rysunek 5.9. Fotografia przedstawiająca sposób zawieszenia pręta na tarczy

Na przeciwnym końcu pręta zamocowano drugi marker o identycznej budowie. Podczas pomiarów rejestrowano położenie czterech markerów: dwóch na pręcie, jednego na tarczy i jednego na ramie. Marker, który rejestrował drgania ramy, umieszczono na końcu pionowego pręta o długości 300 mm przymocowanego prostopadle do górnego poziomego boku ramy, tak jak pokazano na Rys. 5.5.

## 5.2. Wielkości mierzone

Ruch płaski wahadła rejestrowano za pomocą kamery o dużej szybkości Photron 1024 PCI. Maksymalna liczba klatek na sekundę wynosi 10 000 fps, a maksymalna rozdzielczość  $1024 \times 1024$  pikseli. Większość pomiarów przeprowadzono z częstotliwością 250 klatek na sekundę i rozdzielczością  $1024 \times 512$  pikseli, co pozwoliło na rejestrację ruchu trwającego około 12 s. Ruch wahadeł o większych długościach, tj. 200 i 300 mm, przy wychyleniu początkowym przekraczającym  $90^\circ$  musiał być rejestrowany w rozdzielczości  $1024 \times 1024$  pikseli, co skróciło czas nagrania do około 6 s. Sterowanie ustawieniami kamery oraz procesem akwizycji danych odbywało się za pomocą komputera ze specjalistycznym oprogramowaniem. Analizę ruchu, polegającą na identyfikacji i śledzeniu znacznika umieszczonego na końcu pręta oraz określeniu jego położenia na poszczególnych klatkach, przeprowadzono za pomocą aplikacji Photron Motion Tools. Kąt wychylenia wahadła wyznaczano na podstawie współrzędnych kartezjańskich znacznika i punktu obrotu.

Celem eksperymentów jest rejestracja ruchu wahadła w szerokim zakresie kąta wychylenia. Skupiono się na czterech początkowych konfiguracjach układu:

- pozycja osi wahadła w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ( $\varphi_0$  około  $60^\circ$ ),
- pozycja osi pręta prawie pozioma ( $\varphi_0$  około  $90^\circ$ ),
- pozycja osi w drugiej ćwiartce układu współrzędnych ( $\varphi_0$  około  $135^\circ$ ),
- pozycja osi prawie pionowa ( $\varphi_0$  około  $180^\circ$ ).

Ruch wahadła był inicjowany ręcznie, więc podane wyżej wartości kątów wychylenia początkowego są jedynie orientacyjne, a ich dokładne wartości obliczone na podstawie zmierzonych położenia znacznika na początku ruchu podano w Tab. 5.3. Tutaj i w dalszych etapach procesu przetwarzania danych wymienione wyżej konfiguracje początkowe są numerowane za pomocą zmiennej  $k$ .

Tabela 5.3. Wartość początkowa wychylenia  $\varphi_0$  w radianach i w stopniach

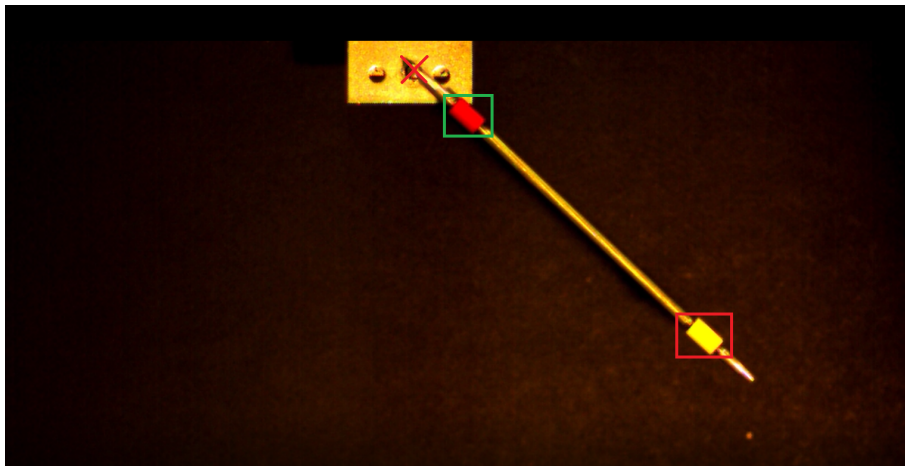
$k$	$L = 100$ mm		$L = 150$ mm		$L = 200$ mm		$L = 300$ mm	
	$\varphi_0$ [rad]	$\varphi_0$ [deg]	$\varphi_0$ [rad]	$\varphi_0$ [deg]	$\varphi_0$ [rad]	$\varphi_0$ [deg]	$\varphi_0$ [rad]	$\varphi_0$ [deg]
1	0.87438	50.1	1.00364	57.5	1.07763	61.7	1.10298	63.2
2	1.49241	85.5	1.54040	88.3	1.51515	86.8	1.48393	85.0
3	2.39901	137.5	2.34030	134.1	2.43620	139.6	2.32991	133.5
4	2.89977	166.2	2.93902	168.4	2.93776	168.3	2.85811	163.8

Po zapisaniu nagrań na komputerze należy wyodrębnić z nich wektory położenia,



czyli współrzędne kartezjańskie  $(x, y)$  charakterystycznego punktu wahadła. W tym celu zastosowano oprogramowanie Photron Motion Tools. Po wczytaniu otrzymanego nagrania do programu należy wykonać kalibrację. W wyniku przeprowadzonej kalibracji wymiar obrazu w pikselach przeliczany jest na wymiar rzeczywisty obiektu i wyniki pomiarów (położenie śledzonego punktu) określone są w wybranej realnej jednostce miary długości. Jako wzorzec do kalibracji służy pręt, którego długość jest znana.

Kolejny krok przetwarzania obrazu polega na zaznaczeniu charakterystycznych punktów. Są to dwie nakrętki oraz punkt zaczepienia wahadła. Na rysunku 5.10 przedstawiono jedną dowolnie wybraną klatkę nagrania, na której zaznaczono rejestrowane punkty.

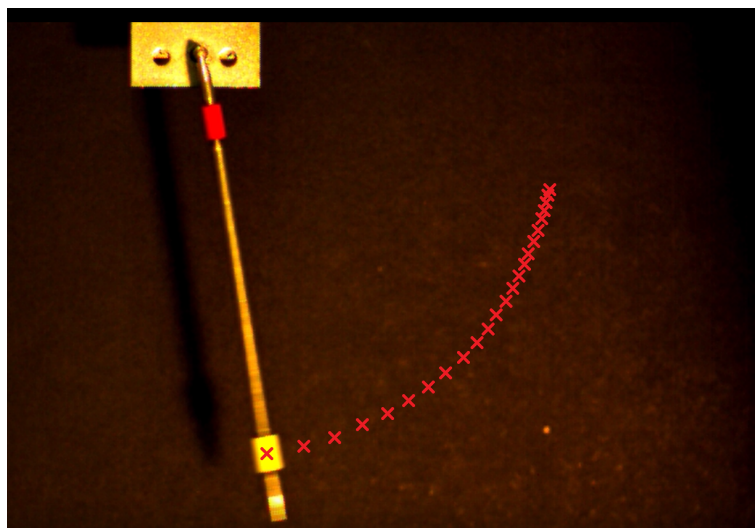


Rysunek 5.10. Charakterystyczne punkty na wybranej klatce nagrania

Za pomocą myszy komputerowej i techniki przeciągania należy zaznaczyć na obrazie prostokątny obszar, którego środek ma być śledzony. Na rysunku 5.10 przedstawiono dwa takie obszary oznaczone kolorem czerwonym i zielonym. Każdy obszar powinien objąć cały znacznik wraz z niewielkim fragmentem jego otoczenia. Pozwala to programowi jednoznacznie odróżnić wskazany obszar na każdej klatce filmu i śledzić ruch jego środka.

Program automatycznie zapisuje współrzędne środka zaznaczonego obszaru i czas liczony od początku rejestracji w sekundach dla każdej klatki nagrania. Rysunek 5.11 przedstawia położenie nakrętki na kolejnych rejestrowanych klatkach.

Należy zwrócić uwagę, że żółty znacznik jest stosunkowo duży i może się zdarzyć, że śledzenie będzie dotyczyć punktu na krawędzi nakrętki, a nie, jak to jest wymagane, w jej środku. W takiej sytuacji niezbędne jest ręczne skorygowanie lokalizacji



Rysunek 5.11. Położenie charakterystycznego punktu w kolejnych chwilach czasowych

znacznika od chwili, w której nastąpił błąd. Problem ten wynika z różnego położenia nakrętki, tzn. w pewnej chwili znacznik przyjmuje pozycję poziomą, w innej ukośną, a jeszcze w innej pionową. Dodatkowym czynnikiem powodującym pojawienie się tego problemu jest bliskie położenie wahadła oraz jego cienia. Punkt zawieszenia wahadła zarejestrowano tylko na jednej klatce filmu, gdyż jego pozycja jest stała. Jego współrzędne są potrzebne do wyznaczenia środka obrotu.

Dużo łatwiejszym procesem jest określenie współrzędnych kartezjańskich markerów w przypadku ruchu rejestrowanego przez system analizy ruchu BTS SMART. System ten automatycznie generuje te współrzędne przez odczytywanie położenia markerów. Po uruchomieniu układu i osiągnięciu stanu ustalonego ruchu wahadła należało włączyć proces rejestracji ruchu przez system BTS, a następnie, po upływie określonego czasu, przerwać proces rejestracji. System umożliwia nagrywanie dłużej trwających fragmentów ruchu niż kamera zastosowana w wyżej opisanym eksperymencie. Ze względu na to, że badany układ porusza się ruchem ustalonym, postanowiono ustawić częstotliwość rejestracji na 250 Hz i kończyć nagrywanie po około 30 sekundach. Użytkownik otrzymuje po krótkiej chwili pliki tekstowe z danymi, w których zapisane są współrzędne położenia pasywnych markerów umieszczonych w wybranych punktach układu.

W przypadku wahadła z ruchomym punktem zawieszenia, wykonujący eksperyment ustala prędkość silnika krokowego, tj. wartość  $\omega$  (patrz wzory (4.77–4.78)). W Tab. 5.4 przedstawiono wartości tych prędkości dla poszczególnych długości wahadła.

Tabela 5.4. Prędkości silnika krokowego ( $\omega$ ) dla poszczególnych długości wahadła

$k$	$L = 100$ mm	$L = 150$ mm	$L = 200$ mm	$L = 300$ mm
	$\omega$ [obr/s]	$\omega$ [obr/s]	$\omega$ [obr/s]	$\omega$ [obr/s]
1	3.530	3.530	3.091	2.475
2	2.475	2.475	2.475	1.981
3	1.981	1.981	1.981	1.652
4	1.652	1.652	1.652	1.416

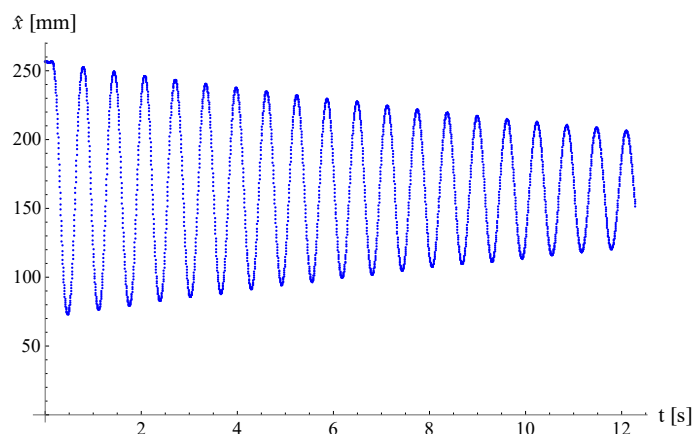
Wartości prędkości przedstawione w Tab. 5.4 wybierano na podstawie maksymalnych możliwości zastosowanego napędu, to znaczy dla długości 200 i 300 mm silnik krokowy nie był w stanie ruszyć z prędkością 3.530 obr/s. Spowodowane było to zbyt dużym obciążeniem silnika. W celu otrzymania największych odchyień od stanu równowagi i, co za tym idzie, znaczących współczynników tłumienia, postanowiono wybrać możliwie duże wartości prędkości silnika krokowego. Podobnie jak w przypadku wahadła w ruchu płaskim, uwzględniono cztery konfiguracje  $k$  rozważanego układu, tym razem związane z różnymi wartościami prędkości kątowej tarczy, na której znajduje się punkt zawieszenia wahadła.

### 5.3. Wstępne przetworzenie danych

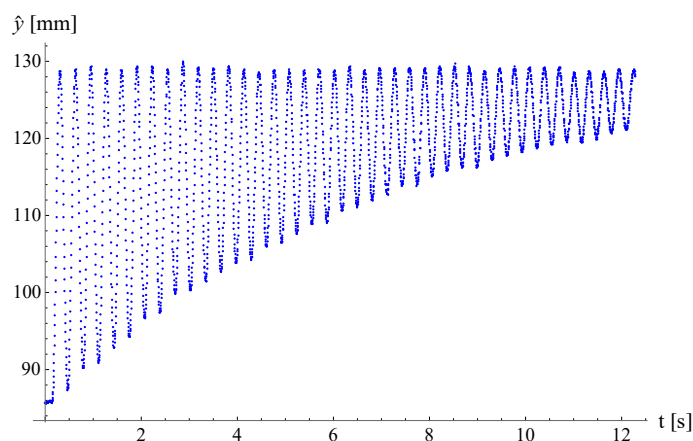
Niezbędnym elementem w realizacji podstawowego zadania wyznaczenia wartości współczynników tłumienia jest wstępne przetworzenie danych eksperymentalnych. W niniejszym rozdziale oraz w rozdziale 7.2 opisano, w jaki sposób, dysponując współrzędnymi położenia markerów, wyznacza się położenie kątowe wahadła oraz jego prędkość i przyspieszenie kątowe czyli wielkości, które występują w równaniach ruchu wahadła i które są niezbędne do identyfikacji modelu tłumienia.

Jednym z podstawowych zagadnień omawianych w tym rozdziale jest wyznaczanie wartości kątów określających położenie wahadła w dwuwymiarowym (dla wahadła płaskiego) oraz trójwymiarowym (dla wahadła przestrzennego) układzie współrzędnych. W doświadczeniu z wahadłem płaskim na podstawie obrazów zarejestrowanych kamerą wygenerowano dwa jednowymiarowe wektory  $\hat{x}(t_i)$  oraz  $\hat{y}(t_i)$  określające współrzędne położenia markera na kolejnych klatkach filmu. Na rysunkach 5.12 i 5.13 przedstawiono oba wektory jako dyskretne funkcje czasu dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$ .

Należy zwrócić uwagę, że wartości współrzędnych wektorów  $\hat{x}(t_i)$  i  $\hat{y}(t_i)$  są mie-



Rysunek 5.12. Wykres  $\hat{x}(t)$  w funkcji czasu dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$



Rysunek 5.13. Wykres  $\hat{y}(t)$  w funkcji czasu dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$

rzony w milimetrach i są przesunięte względem początku układu współrzędnych. Pierwszym etapem przygotowania danych do dalszej analizy jest translacja całego procesu do punktu  $(0, 0)$  i przeskalowanie do podstawowej jednostki długości układu SI za pomocą następujących wzorów:

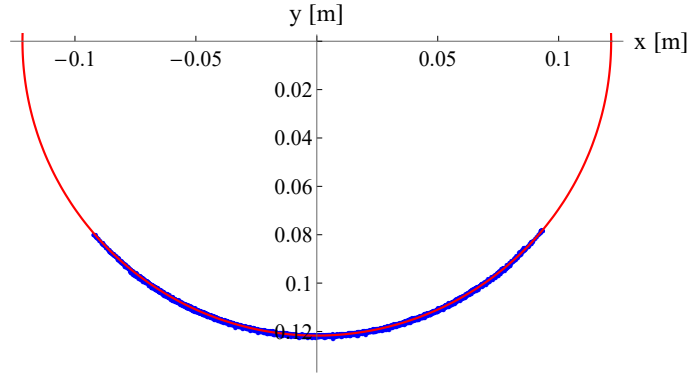
$$x = (\hat{x} - x_O)10^{-3}, \quad y = (\hat{y} - y_O)10^{-3}, \quad (5.1)$$

gdzie  $(x_O, y_O)$  oznacza współrzędne punktu zawieszenia wahadła. Na rysunku 5.14 przedstawiono zależność  $y(x)$  dla przeskalowanych wartości współrzędnych, zgodnie z wzorami (5.1), dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$  (kolor niebieski) oraz okrąg, po którym porusza się marker wahadła (kolor czerwony). Środek  $(x_O, y_O)$  oraz promień  $r_m$  okręgu najlepiej dopasowanego do obserwowanego

toru markera wyznaczono, minimalizując funkcję postaci

$$f(x_O, y_O, r_m) = \sum_{k=1}^{N_f} \left( \sqrt{(\hat{x}(k) - x_O)^2 + (\hat{y}(k) - y_O)^2} - r_m \right)^2, \quad (5.2)$$

gdzie  $N_f$  oznacza liczbę klatek filmu.



Rysunek 5.14. Współrzędne markera (kolor niebieski) i najlepiej dopasowany okrąg o środku w punkcie  $(x_O, y_O)$  (kolor czerwony) dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$

Oznaczmy przez  $\varphi$  wartość kąta skierowanego pomiędzy osią  $y$ , a osią pręta wahadła (patrz Rys. 4.1). Wartość tego kąta dla kątów mniejszych niż  $90^\circ$  może być obliczona przy zastosowaniu zależności

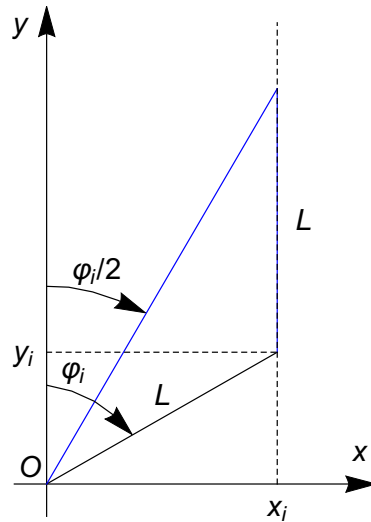
$$\varphi_i = \arctg \left( \frac{x_i}{y_i} \right) \quad (5.3)$$

dla  $y_i \neq 0$ , gdzie  $x_i$  oraz  $y_i$  są współrzędnymi charakterystycznego punktu markera w  $i$ -tej chwili czasowej. Należy jednak zwrócić uwagę, że funkcja  $\arctg$  przyjmuje wartości z przedziału  $[-\pi/2, \pi/2]$  i z uwagi na ten zakres miara kąta w większym przedziale nie jest wyznaczona jednoznacznie. W celu poprawnego określenia wartości kąta  $\varphi$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , zgodnie z Rys. 5.15, zastosowano zależność

$$\tg \left( \frac{\varphi_i}{2} \right) = \frac{x_i}{y_i + L}, \quad (5.4)$$

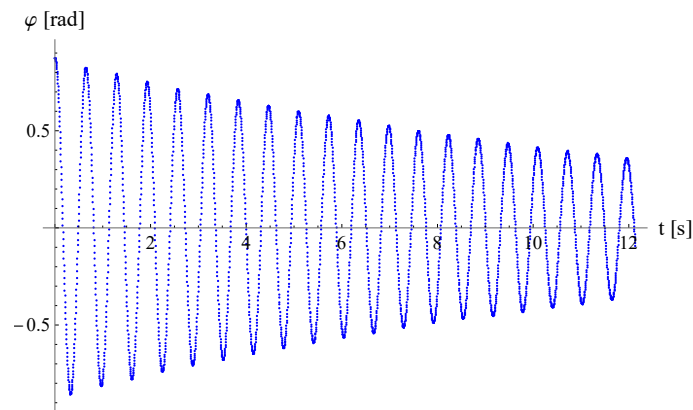
gdzie  $L = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ . Wobec tego, wartość kąta  $\varphi$  w dowolnej chwili czasowej obliczono ze wzoru

$$\varphi_i = \begin{cases} 2\arctg \left( \frac{x_i}{y_i + \sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \right) & \text{dla } y_i \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } y_i = 0 \text{ i } x_i > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dla } y_i = 0 \text{ i } x_i < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$



Rysunek 5.15. Interpretacja geometryczna zależności (5.5)

Na rysunku 5.16 przedstawiono wykres kąta  $\varphi$  wychylenia wahadła w zależności od czasu dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$  otrzymany z wzoru (5.5).



Rysunek 5.16. Wykres kąta wychylenia wahadła w zależności od czasu dla wahadła o długości 100 mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$

Dysponując danymi o wymiarach tarczy, po której porusza się punkt zawieszenia wahadła, długości wahadła  $j = \{100, 150, 200, 300\}$  mm i przypisanej do każdego wahadła prędkości obrotowej silnika krokowego  $\omega_{j,k}$ , gdzie  $k = \{1, 2, 3, 4\}$  (patrz Tab. 5.4), można opisać ruch przestrzenny układu mechanicznego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. Wiedząc, że silnik obraca się ze stałą prędkością  $\omega_{j,k}$  i odległość środka otworu, do którego zostało przymocowane wahadło, od środka tarczy<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Wartość  $R$  jest stała dla wszystkich długości wahadła  $j$ .

wynosi  $R$ , obliczono współrzędne punktu zawieszenia w dowolnej chwili czasowej  $t_i$  ze wzorów

$$\begin{cases} x_{j,k}^{(S)}(t_i) = R \cos(\varphi_0 + \omega_{j,k} t_i) \\ y_{j,k}^{(S)}(t_i) = R \sin(\varphi_0 + \omega_{j,k} t_i) \end{cases}, \quad (5.6)$$

gdzie  $\varphi_0$  [rad] oznacza początkową wartość położenia punktu mocowania wahadła względem początku układu współrzędnych, którą obliczamy następująco:

$$\varphi_0 = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y_{j,k}^{(S)}(0)}{R + x_{j,k}^{(S)}(0)} \right), & \text{dla } y_{j,k}^{(S)}(0) \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dla } y_{j,k}^{(S)}(0) = 0 \text{ i } x_{j,k}^{(S)}(0) > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dla } y_{j,k}^{(S)}(0) = 0 \text{ i } x_{j,k}^{(S)}(0) < 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

gdzie  $x_{j,k}^{(S)}(0)$  oraz  $y_{j,k}^{(S)}(0)$  są współrzędnymi początkowego położenia punktu zawieszenia wahadła odczytanymi z pomiarów dla wahadła o długości  $j$  i przypisanej mu prędkości silnika  $k$ . Rejestracja ruchu została włączona, gdy układ był w stanie ustalonym, więc wartość  $\varphi_0$  może być dowolna i zależy od momentu włączenia systemu BTS SMART.

Na wahadle umieszczono dwa markery, których położenia były rejestrowane za pomocą systemu BTS. Niech  $\mathbf{P}_A = [x_{j,k}^{(1)}, y_{j,k}^{(1)}, z_{j,k}^{(1)}]$  oznaczają współrzędne markera położonego na wahadle bliżej osi obrotu, a  $\mathbf{P}_B = [x_{j,k}^{(2)}, y_{j,k}^{(2)}, z_{j,k}^{(2)}]$  są współrzędnymi markera umieszczonego przy końcu wahadła wyznaczonymi z pomiarów.

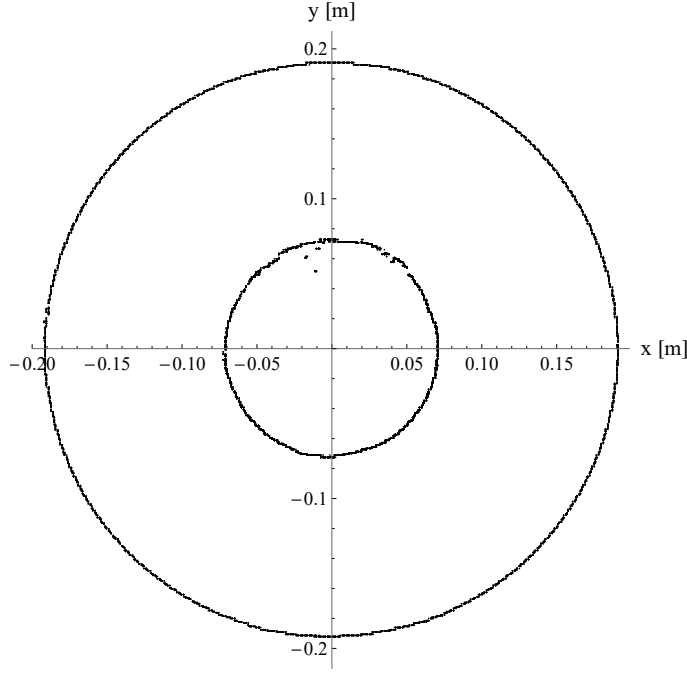
Na Rysunku 5.17 przedstawiono współrzędne markerów umieszczonych na wahadle o długości  $j = 150$  mm zawieszzonego na tarczy poruszającej się z prędkością  $k = 2$  ( $\omega = 2.475$  obr/s; patrz Tab. 5.4) w rzucie ortogonalnym z góry na płaszczyznę  $XY$ . Rzuty obu punktów leżą na okręgach o środkach na osi  $Z$  układu, co jest potwierdzeniem, że ruch wahadła jest ustalony. Fluktuacje rozmieszczenia punktów względem okręgu o mniejszym promieniu spowodowane są błędami rejestracji systemu BTS. W obszarze, w którym fluktuacje te występują, marker był przesłaniany względem części kamer przez ramę stanowiska, wobec czego wyniki podane przez system są obarczone większym błędem. Promienie obu okręgów  $r^{(1)}$  i  $r^{(2)}$  można obliczyć, stosując metodę najmniejszych kwadratów do minimalizacji funkcji postaci

$$f_p(r^{(p)}) = \left( \sum_{i=1}^N \left( \sqrt{\left(x_{j,k}^{(p)}(t_i)\right)^2 + \left(y_{j,k}^{(p)}(t_i)\right)^2} - r^{(p)} \right)^2 \right) \quad (5.8)$$

dla  $p = 1, 2$ , gdzie  $N$  jest liczbą klatek pomiaru.

Niech

$$\rho_{j,k}(t_i) = \sqrt{\left(x_{j,k}^{(2)}(t_i) - x_{j,k}^{(1)}(t_i)\right)^2 + \left(y_{j,k}^{(2)}(t_i) - y_{j,k}^{(1)}(t_i)\right)^2 + \left(z_{j,k}^{(2)}(t_i) - z_{j,k}^{(1)}(t_i)\right)^2}. \quad (5.9)$$



Rysunek 5.17. Współrzędne markerów umieszczonych na wahadle o długości 150 mm i prędkości silnika  $k = 2$  (widok z góry w rzucie ortogonalnym na płaszczyznę  $XY$ )

oznacza odległość pomiędzy markerami umiejscowionymi na wahadle na podstawie rejestracji w  $i$ -tej chwili czasowej. Odległość pomiędzy markerami w całym procesie rejestracji obliczono na podstawie wzoru

$$d_{j,k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{j,k}(t_i). \quad (5.10)$$

Wartość średnią współrzędnej uogólnionej  $\alpha$ , czyli kąta odchylenia wahadła od pionu wyznaczono na podstawie formuły

$$\alpha_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2 \arctg \left( \frac{\sqrt{\left(x_{j,k}^{(2)}(t_i) - x_{j,k}^{(1)}(t_i)\right)^2 + \left(y_{j,k}^{(2)}(t_i) - y_{j,k}^{(1)}(t_i)\right)^2}}{\rho_{j,k}(t_i) + z_{j,k}^{(2)}(t_i) - z_{j,k}^{(1)}(t_i)} \right). \quad (5.11)$$

Podczas ruchu tego układu nie zaobserwowano w żadnej konfiguracji, aby miara kąta  $\alpha_u$  przekroczyła wartość  $90^\circ$  w stanie ustalonym. Dlatego nie rozważano przypadków szczególnych wzoru (5.11) dla większych kątów.

Położenie środka układu mechanicznego  $\mathbf{R}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ , czyli punktu  $O$  (patrz Rys. 4.3) dla każdej długości wahadła  $j$  oraz prędkości silnika  $k$  przyjęto w początku układu współrzędnych. Odległość od punktu zawieszenia do markera umieszczonego na wahadle i położonego bliżej osi obrotu również w każdej konfiguracji jest stała,



a jej zmierzona suwmiarką wartość wynosi  $d_{SA}$ . Pomiarы wykonane w rzeczywistości mogą się różnić od pomiarów uzyskanych przez system BTS. Wobec tego każdy z podanych wcześniej parametrów powiększono o pewną poprawkę, tzn.

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \Delta\mathbf{X}, \quad (5.12)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{X}} = [x_0, y_0, z_0, \varphi_0, \omega, \alpha_m, \beta_m, d, d_{SA}, R] \quad (5.13)$$

jest wektorem uśrednionych parametrów, a

$$\Delta\mathbf{X} = [\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \varphi_0, \Delta \omega, \Delta \alpha_m, \Delta \beta_m, \Delta d, \Delta d_{SA}, \Delta R] \quad (5.14)$$

jest wektorem poprawek dla uśrednionych parametrów. Wartość drugiej współrzędnej uogólnionej układu  $\beta_m$  w stanie ustalonym nie jest znana. W obliczeniach na podstawie obserwacji przyjęto, że jej średnia wartość jest bliska zero.

Współrzędne położenia markera umieszczonego na wahadle leżącego bliżej osi obrotu  $\mathbf{M}_A$  i markera leżącego przy końcu wahadła  $\mathbf{M}_B$  można zapisać za pomocą następujących wyrażen:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{R}_0 + (R + \Delta R)\mathbf{w}_{OS} + (d_{SA} + \Delta d_{SA})\mathbf{w}_{SA}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{R}_0 + (R + \Delta R)\mathbf{w}_{OS} + (d + \Delta d)\mathbf{w}_{SA}, \quad (5.16)$$

gdzie

$$\mathbf{w}_{OS} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi_0 + (1 + \Delta\omega)\omega t) \\ \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi_0 + (1 + \Delta\omega)\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{w}_{OA} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_m + \Delta\beta_m + \varphi_0 + \Delta\varphi_0 + (1 + \Delta\omega)\omega t) \sin(\alpha_m + \Delta\alpha_m) \\ \sin(\beta_m + \Delta\beta_m + \varphi_0 + \Delta\varphi_0 + (1 + \Delta\omega)\omega t) \sin(\alpha_m + \Delta\alpha_m) \\ \cos(\alpha_m + \Delta\alpha_m) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Funkcja błędu dla jednej chwili przyjmuje postać

$$I(M) = (\mathbf{M}_A^{(T)} - \mathbf{P}_A) \cdot (\mathbf{M}_A^{(T)} - \mathbf{P}_A) + (\mathbf{M}_B^{(T)} - \mathbf{P}_B) \cdot (\mathbf{M}_B^{(T)} - \mathbf{P}_B), \quad (5.19)$$

gdzie  $\mathbf{M}_A^{(T)}$  i  $\mathbf{M}_B^{(T)}$  oznaczają rozwinięcia w szereg Taylora odpowiednio wyrażen  $\mathbf{M}_A$  i  $\mathbf{M}_B$  względem parametrów  $\Delta\mathbf{X}$  i pominięciu członów dwuliniowych oraz nieliniowych,  $\mathbf{P}_A = [x_{j,k}^{(1)}, y_{j,k}^{(1)}, z_{j,k}^{(1)}]$  oznacza współrzędne markera położonego na wahadle bliżej osi obrotu, a  $\mathbf{P}_B = [x_{j,k}^{(2)}, y_{j,k}^{(2)}, z_{j,k}^{(2)}]$  jest współrzędnymi markera umieszczonego przy końcu wahadła wyznaczonymi z pomiarów.

W celu zminimalizowania funkcji błędu  $I(M)$  należy tak dobrać parametry  $\Delta\mathbf{X}$ , aby spełniony był warunek konieczny istnienia ekstremum, tj.

$$\frac{\partial I(M)}{\partial \Delta X[i]} = 0, \quad (5.20)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, 10$ , gdzie  $\Delta X[i]$  oznacza  $i$ -tą składową wektora (5.14). Rozwiązaniem tego układu równań jest wektor poprawek  $\Delta\mathbf{X}$ . Ostateczne wyniki dla współrzędnych uogólnionych  $\alpha_u = \alpha_m + \Delta\alpha_m$  i  $\beta_u = \beta_m + \Delta\beta_m$  (w stanie ustalonym) przedstawiono w Tab. 5.5.

Tabela 5.5. Wartości  $\alpha_u$  i  $\beta_u$  dla wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. Wyniki otrzymane z wyników doświadczalnych

$k$	$L = 100$ mm				$L = 150$ mm			
	$\alpha_u$ [rad]	$\alpha_u$ [deg]	$\beta_u$ [rad]	$\beta_u$ [deg]	$\alpha_u$ [rad]	$\alpha_u$ [deg]	$\beta_u$ [rad]	$\beta_u$ [deg]
1	1.4360	82.28	-0.0154	-0.879	1.4601	83.66	-0.0079	-0.455
2	1.2837	73.55	-0.0098	-0.559	1.3355	76.52	-0.0407	-2.333
3	1.1096	63.58	-0.0069	-0.394	1.1956	68.51	-0.0218	-1.248
4	0.9012	51.63	-0.0224	-1.282	1.0313	59.09	-0.0518	-2.967
$k$	$L = 200$ mm				$L = 300$ mm			
	$\alpha_u$ [rad]	$\alpha_u$ [deg]	$\beta_u$ [rad]	$\beta_u$ [deg]	$\alpha_u$ [rad]	$\alpha_u$ [deg]	$\beta_u$ [rad]	$\beta_u$ [deg]
1	1.4509	83.13	-0.0599	-3.430	1.4285	81.85	-0.1222	-7.002
2	1.3776	78.93	-0.0662	-3.793	1.3458	77.11	-0.1135	-6.501
3	1.2666	72.57	-0.0422	-2.417	1.2404	71.07	-0.1011	-5.794
4	1.1226	64.32	-0.0838	-4.800	1.1170	64.00	-0.1180	-6.763

Przedstawione wartości kąta  $\alpha_u$  w stanie ustalonym wahadła z ruchomym punktem zawieszenia maleją wraz z obniżaniem wartości prędkości obrotowej silnika krokowego. Wartość kąta  $\beta_u$  rośnie natomiast wraz ze wzrostem długości wahadła, jednak trudno scharakteryzować jej zależność od prędkości kątowej tarczy.

# 6. Identyfikacja parametrów modeli siły oporu w ruchu płaskim wahadła

## 6.1. Wprowadzenie

W dwóch poprzednich rozdziałach szczegółowo omówiono przeprowadzony eksperyment dotyczący wahadła fizycznego oraz wyprowadzono równania ruchu, stanowiące matematyczną podstawę opisu zachowania badanego układu. W niniejszym rozdziale skoncentrujemy się na dalszej analizie zebranych danych, a w szczególności na identyfikacji współczynników występujących w modelach siły oporu za pomocą metod optymalizacji.

Zagadnienie optymalizacji definiujemy następująco. Niech

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K] \quad (6.1)$$

będzie wektorem  $K$  nieznanych parametrów modelu siły oporu występujących w równaniach różniczkowych opisujących ruch wahadła fizycznego oraz niech funkcja celu  $f_k(\boldsymbol{\beta})$  będzie normą w przestrzeni  $l_2$  w postaci średniej kwadratowej błędu zdefiniowanej następująco:

$$f_k(\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} (\varphi_{i,k}^{\text{num}}(\boldsymbol{\beta}) - \varphi_{i,k}^{\text{exp}})^2}, \quad (6.2)$$

gdzie  $N_k$  oznacza liczbę klatek nagrania w  $k$ -tej konfiguracji początkowej,  $\varphi_{i,k}^{\text{exp}}$  oznacza wartości kąta wychylenia wahadła  $\varphi$  zarejestrowane podczas eksperymentu w  $i$ -tej klatce nagrania dla  $k$ -tej konfiguracji początkowej, natomiast  $\varphi_{i,k}^{\text{num}}(\boldsymbol{\beta})$  jest wartością funkcji  $\varphi(t)$  (kąta wychylenia wahadła), w chwili odpowiadającej  $i$ -tej klatce nagrania dla  $k$ -tej konfiguracji początkowej otrzymaną w wyniku numerycznego rozwiązania zagadnienia początkowego (4.37), (4.39) lub (4.40), w którym przyjęto, że współczynniki tłumienia są odpowiednio wektorami postaci:  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1]$ ,  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2]$  lub  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_a]$ . Warunki początkowe dla poszczególnych konfiguracji określono w Tab. 5.3. Rozwiązanie numeryczne zagadnienia (4.37), (4.39) i (4.40) otrzymano stosując procedurę *NDSolve* programu Mathematica, która realizowała algorytm Adamsa-Bashfortha.

Obok funkcji (6.2), będącej miarą rozbieżności między rozwiązaniem numerycznym i danymi eksperymentalnymi obliczaną dla danej konfiguracji początkowej, wprowadzono miarę określającą tę rozbieżność łącznie dla wszystkich konfiguracji początkowych wahadła o danej długości, zgodnie z następującym wzorem:

$$e_{tot}^{rms}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 f_k(\boldsymbol{\beta}). \quad (6.3)$$

Dodatkowo, oprócz miar (6.2) i (6.3), obliczono współczynnik korelacji Pearsona. Współczynnik ten pozwala na statystyczną ocenę liniowej zależności między dwiema zmiennymi. Przyjmuje wartości od  $-1$  do  $1$ , gdzie  $-1$  oznacza doskonałą ujemną korelację,  $1$  doskonałą dodatnią korelację, a  $0$  brak korelacji. Analiza tego współczynnika pozwala zrozumieć, czy zmiany jednej zmiennej są skorelowane z równoczesnymi zmianami drugiej, co może wskazywać na istnienie pewnych wzorców czy związków pomiędzy badanymi zmiennymi. Współczynnik korelacji Pearsona dla rozwiązania numerycznego i danych eksperymentalnych dla  $k$ -tej konfiguracji początkowej położenia jest opisany następującym wzorem [22, 46]:

$$r_{\varphi^{num}, \varphi^{exp}}^k(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} \left( \varphi_{i,k}^{num}(\boldsymbol{\beta}) - \overline{\varphi_k^{num}(\boldsymbol{\beta})} \right) \left( \varphi_{i,k}^{exp} - \overline{\varphi_k^{exp}} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_k} \left( \varphi_{i,k}^{num}(\boldsymbol{\beta}) - \overline{\varphi_k^{num}(\boldsymbol{\beta})} \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_k} \left( \varphi_{i,k}^{exp} - \overline{\varphi_k^{exp}} \right)^2}}, \quad (6.4)$$

gdzie  $\overline{\varphi_k^{num}(\boldsymbol{\beta})}$  i  $\overline{\varphi_k^{exp}}$  oznaczają wartości średnie odpowiednio dla rozwiązania numerycznego i danych doświadczalnych.

Pierwszą zastosowaną metodą optymalizacyjną jest metoda bisekcji. Metoda bisekcji jest jedną z podstawowych i szeroko stosowanych metod poszukiwania przybliżonej wartości pierwiastka równania nieliniowego w ustalonym przedziale opartą na intuicyjnym podejściu interpolacyjnym [15, 23, 44, 74]. Metoda ta może znaleźć zastosowanie jako metoda optymalizacyjna. W tym rozdziale przedstawimy zastosowanie metody bisekcji do rozwiązania zagadnienia odwrotnego polegającego na wyznaczeniu optymalnej wartości współczynnika tłumienia dla zagadnienia (4.40) oraz optymalnych wartości współczynników  $\beta_1$  i  $\beta_2$  dla zagadnienia (4.39). Metoda bisekcji polega na iteracyjnym zawężaniu określonego z góry przedziału wartości współczynnika  $\beta_1$  (dla zagadnienia (4.40)) albo dwuwymiarowego obszaru wartości współczynników  $\beta_1$  i  $\beta_2$  (dla zagadnienia (4.39)). Zawężanie oparte jest na wnioskowaniu wynikającym z porównania rozwiązań numerycznych danego zagadnienia z wynikami otrzymanymi doświadczalnie.

Kolejną zastosowaną metodą jest optymalizacyjna metoda gradientowa [9, 32, 69]. Metoda ta jest kluczowym konceptem w dziedzinie optymalizacji matematycznej

nej, który znajduje zastosowanie w rozwiązywaniu szerokiego zakresu problemów. Bez względu na to, czy chodzi o dostosowywanie parametrów modeli maszynowych, minimalizację funkcji kosztu w analizie finansowej czy projektowanie systemów inżynierskich, metoda gradientowa stanowi wartę rozważenia narzędzie do znalezienia optymalnych rozwiązań.

W swojej istocie metoda gradientowa opiera się na wykorzystaniu pojęcia gradientu funkcji, czyli wektora wskazującego kierunek najszybszego wzrostu funkcji w danym punkcie. Podstawową cechą metody gradientowej jest poszukiwanie ekstremum funkcji celu poprzez iteracyjne dostosowywanie parametrów sterujących procesem przeszukiwania obszaru w taki sposób, aby przemieszczać się w kierunku, w którym wartości funkcji się zmniejszają bądź zwiększają, w zależności od charakteru ekstremum. Proces ten pozwala skutecznie zbliżyć się do optymalnego rozwiązania problemu. Opis optymalizacyjnej metody gradientowej przedstawiono w Dodatku B.

## 6.2. Identyfikacja dla modelu z jednym parametrem

W celu identyfikacji współczynnika tłumienia  $\beta_1$  w zagadnieniu (4.40) zastosowano metodę bisekcji oraz metodę gradientową. W zagadnieniu jednowymiarowym, to znaczy z jednym współczynnikiem tłumienia, wektor  $\beta$  ma tylko jeden element, czyli

$$\beta = [\beta_1]. \quad (6.5)$$

Niech  $\Omega = [\beta_L, \beta_R]$ , gdzie  $\beta_L < \beta_R$ , będzie przedziałem, w którym znajduje się poszukiwana wartość współczynnika tłumienia  $\beta_1$  optymalna z uwagi na funkcję celu (6.2) dla zagadnienia (4.40). Zasadne jest ograniczenie się do przedziału  $\Omega = [0, 1]$ , ponieważ współczynnik tłumienia powinien przyjmować stosunkowo małe wartości nieujemne. W pierwszym kroku przedział  $\Omega$  jest dzielony na pół, to znaczy, obliczamy punkt środkowy

$$\beta_M = \frac{\beta_L + \beta_R}{2}. \quad (6.6)$$

Otrzymano tym samym dwa przedziały  $\Omega_L = [\beta_L, \beta_M]$  oraz  $\Omega_R = [\beta_M, \beta_R]$ , w których znajdują się odpowiednio punkty środkowe  $\beta_1$  tych przedziałów postaci

$$\beta_{LM} = \frac{\beta_L + \beta_M}{2}, \quad \beta_{RM} = \frac{\beta_M + \beta_R}{2}. \quad (6.7)$$

Dla każdej z tych wartości współczynnika tłumienia rozwiązujemy zagadnienie początkowe (4.40) w sposób numeryczny. Po obliczeniu wartości funkcji celu (6.2) dla

$\beta_1 = \beta_{LM}$  i  $\beta_1 = \beta_{RM}$ , wybieramy ten podprzedział, w których wartość funkcji celu (6.2) jest mniejsza. Warto dodać, że poszukiwana funkcja celu jest unimodalna, co oznacza, że wartość funkcji celu nie może być równa w obu podprzedziałach.

W kolejnym kroku uzyskany przedział redefiniujemy jako  $\Omega$  przy jednoczesnym zastąpieniu lewego albo prawego końca tego przedziału wartością  $\beta_M$  wyznaczoną według wzoru (6.6). Proces jest powtarzany aż do uzyskania zadowalającego wyniku, przez który rozumiemy sytuację, gdy wartość funkcji (6.2) spadnie poniżej pewnej, ustalonej *a priori* wartości lub wartość bezwzględna różnicy między obliczonymi wartościami funkcji celu (6.2) w dwóch kolejnych iteracjach będzie wystarczająco mała, przy czym wartość progową dla tego warunku przyjmuje się arbitralnie.

W przypadku zagadnienia, w którym identyfikowany jest jeden współczynnik tłumienia występuje ekstremum, które jest określane w sposób jednoznaczny. Wartości współczynnika  $\beta_1$ , a także wartości funkcji celu (6.2) oraz współczynnika korelacji (6.4) otrzymane dla wahadeł o różnych długościach przedstawiono w tabeli 6.1.

Tabela 6.1. Wartości współczynnika  $\beta_1$  i odpowiadające mu wartości funkcji celu i współczynnika korelacji dla różnych długości wahadła i początkowych położenia katowych. Wyniki uzyskane metodą bisekcji.

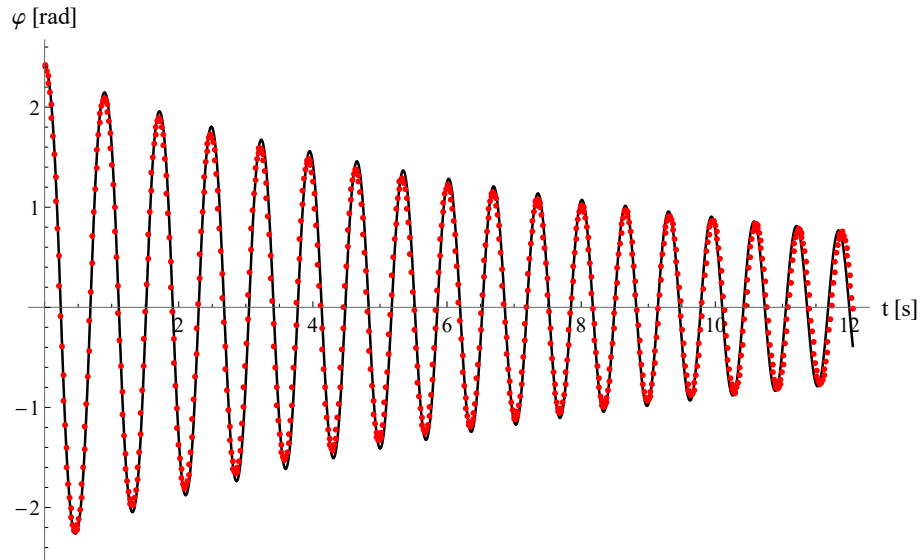
$k$	$L = 100$ mm			$L = 150$ mm		
	$\beta_1$	$f_k(\beta_1)$ [rad]	$r_\varphi^k(\beta_1)$	$\beta_1$	$f_k(\beta_1)$ [rad]	$r_\varphi^k(\beta_1)$
1	$3.099 \times 10^{-3}$	0.217	0.9415	$6.085 \times 10^{-3}$	0.152	0.9796
2	$1.016 \times 10^{-2}$	0.177	0.9783	$1.211 \times 10^{-2}$	0.096	0.9961
3	$1.604 \times 10^{-2}$	0.143	0.9923	$1.747 \times 10^{-2}$	0.136	0.9987
4	$1.789 \times 10^{-2}$	0.292	0.9907	$2.185 \times 10^{-2}$	0.270	0.9948
$e_{\text{tot}}^{\text{rms}}$	–	0.207		–	0.164	
$k$	$L = 200$ mm			$L = 300$ mm		
	$\beta_1$	$f_k(\beta_1)$ [rad]	$r_\varphi^k(\beta_1)$	$\beta_1$	$f_k(\beta_1)$ [rad]	$r_\varphi^k(\beta_1)$
1	$1.088 \times 10^{-2}$	0.093	0.9910	$1.263 \times 10^{-2}$	0.101	0.9672
2	$1.565 \times 10^{-2}$	0.055	0.9917	$1.741 \times 10^{-2}$	0.089	0.9827
3	$2.231 \times 10^{-2}$	0.037	0.9997	$2.794 \times 10^{-2}$	0.035	0.9961
4	$2.472 \times 10^{-2}$	0.130	0.9997	$2.983 \times 10^{-2}$	0.059	0.9992
$e_{\text{tot}}^{\text{rms}}$	–	0.079		–	0.071	

Warto zauważyć, że przy danej długości wahadła współczynnik  $\beta_1$  przyjmuje dla różnych konfiguracji początkowych różne wartości. Norma (6.2) z kolei przyjmuje dość duże wartości, zwłaszcza w przypadku wahadeł krótkich ( $L = 100$  mm i  $L = 150$  mm).

mm). Na przykład dla  $L = 100$  mm i  $k = 3$  średnia kwadratowa błędu (w przeliczeniu na miarę kąta w stopniach) wynosi  $f_k(\beta_1) \approx 8.1^\circ$ , co daje błąd względny 12% w stosunku do wartości skutecznej kąta  $\varphi_{\text{sk}}^k$  z danych doświadczalnych, wyliczonej według

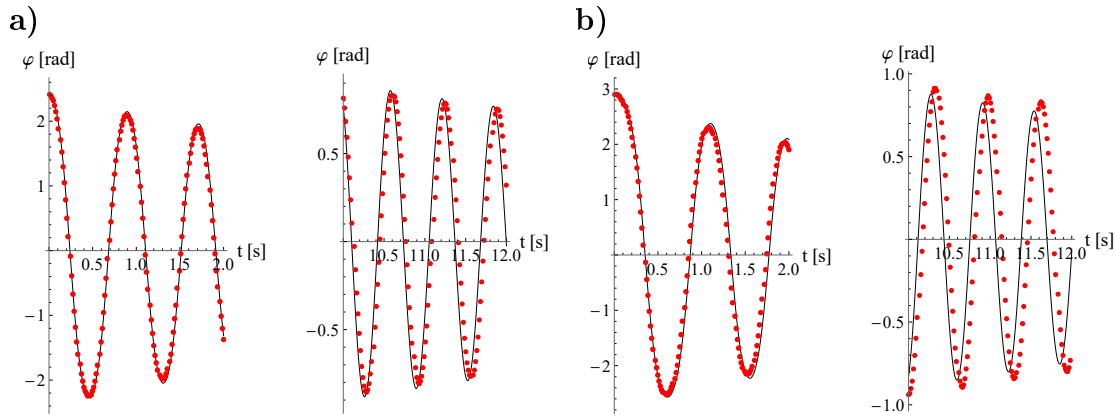
$$\varphi_{\text{sk}}^k = \frac{\sqrt{2}}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} |\varphi_{i,k}^{\text{exp}}|. \quad (6.8)$$

Rysunek 6.1 przedstawia porównanie eksperymentalnych i numerycznych przebiegów czasowych kąta wychylenia  $\varphi(t)$  wahadła o długości  $L = 100$  mm dla wybranej konfiguracji początkowej  $k = 3$ . To porównanie świadczy o dużym stopniu dopasowania rozwiązania numerycznego odpowiadającego optymalnej wartości współczynnika  $\beta_1$  do danych eksperymentalnych. Można zauważyć, że największe różnice między oboma przebiegami występują w pobliżu granicznych położenia wahadła (lewego i prawego), a różnica faz staje się coraz bardziej zauważalna wraz ze wzrostem czasu. W celu lepszego zobrazowania rozbieżności przejawiających się w postępującej z czasem różnicy faz, przedstawiono wykresy dla dwóch pierwszych i dwóch ostatnich sekund ruchu dla wahadła o długości 100 mm i konfiguracji początkowej  $k = 3$  (Rys. 6.2a) oraz dla wahadła o długości  $L = 100$  mm i  $k = 4$  (Rys. 6.2b).



Rysunek 6.1. Rozwiązanie numeryczne (kolor czarny) i wyniki doświadczalne (kolor czerwony) dla wahadła  $L = 100$  mm i  $k = 3$ . Wyniki uzyskane metodą bisekcji dla zagadnienia (4.40). Wyniki przekształcone do współrzędnych wymiarowych.

W metodzie gradientowej zastosowanej w przypadku jednowymiarowym to znaczy z jednym współczynnikiem tłumienia  $\beta_1$ , poszukujemy optymalnej wartości tego



Rysunek 6.2. Rozwiązanie numeryczne (kolor czarny) i wyniki doświadczalne (kolor czerwony) dla wahadła  $L = 100$  mm w dwóch pierwszych i ostatnich chwilach ruchu dla a)  $k = 3$  oraz b)  $k = 4$ . Wyniki uzyskane metodą bisekcji. Wyniki przekształcone do współrzędnych wymiarowych.

parametru, przemieszczając się wzdłuż linii prostej (na osi zmiennej  $\beta_1$ ) o odległość  $\Delta\beta_1^{(p)}$  w kierunku  $d^{(p)}$ , który przyjmuje wartości 1 lub  $-1$ , gdzie  $p$  oznacza numer iteracji. Minimalizujemy funkcję celu postaci (6.3), gdzie uwzględniono jednocześnie wszystkie badane konfiguracje  $k$  początkowe danego układu, a  $f_k(\beta_1)$  jest wyrażone wzorem (6.2).

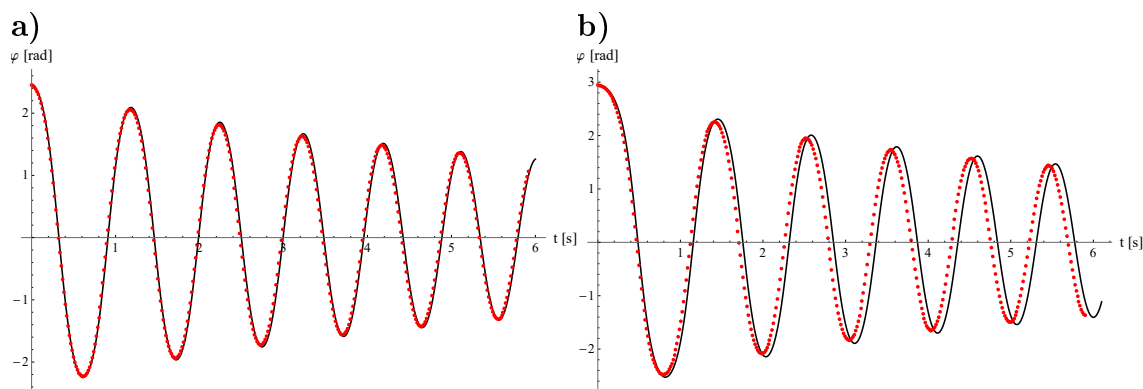
Wyniki optymalizacji przeprowadzonej zgodnie z algorytmem opisanym w Dodatku B, w której otrzymano optymalne wartości współczynnika  $\beta_1$  przedstawiono w Tab. 6.4. Oprócz optymalnych wartości współczynnika  $\beta_1$ , zamieszczono tam średnią kwadratową błędów dla poszczególnych konfiguracji początkowych, która została zdefiniowana przez wzór (6.2) oraz współczynnik korelacji Pearsona opisany wzorem (6.4).

Jeżeli rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego przedstawione w Tab. 6.2 potraktujemy odrębnie dla poszczególnych konfiguracji  $k$ , to rozwiązania nie są optymalne, tzn. metoda bisekcji prowadzi do mniejszych funkcji celu (6.2). Zwłaszcza czwarta konfiguracja początkowa generuje znacznie większe wartości miary (6.2) niż pozostałe. Na rysunku 6.3 przedstawiono porównanie rozwiązania numerycznego z wynikami eksperymentalnymi dla wahadła o długości 200 mm i konfiguracji początkowej  $k = 3$  i  $k = 4$ . Z tego porównania wynika, że zaobserwowane znaczące różnice wartości funkcji celu (6.2) dla konfiguracji początkowej  $k = 4$  manifestują się głównie postępującą z czasem rozbieżnością fazy przebiegu eksperymentalnego i rozwiązania numerycznego wyznaczonego dla wartości współczynnika  $\beta_1$  optymalnej w sensie funkcji (6.3).



Tabela 6.2. Wartości współczynnika  $\beta_1$  i odpowiadające mu wartości funkcji celu (6.2) i współczynniki korelacji Pearsona dla różnych długości wahadła i początkowych położeń kątowych. Wyniki uzyskane metodą gradientową.

$k$	$L = 100 \text{ mm}$	$L = 150 \text{ mm}$	$L = 200 \text{ mm}$	$L = 300 \text{ mm}$
	$[f_k(\beta_1) \text{ [rad]}; r_\varphi^k(\beta_1)]$			
1	[0.390 ; 0.5478]	[0.376 ; 0.7090]	[0.270 ; 0.8675]	[0.262 ; 0.8818]
2	[0.618 ; 0.5766]	[0.456 ; 0.8023]	[0.276 ; 0.9246]	[0.276 ; 0.9231]
3	[0.265 ; 0.9650]	[0.150 ; 0.9903]	[0.286 ; 0.9770]	[0.336 ; 0.9661]
4	[0.483 ; 0.9136]	[1.017 ; 0.7717]	[0.797 ; 0.8619]	[0.718 ; 0.8846]
$\beta_1$	$1.684 \cdot 10^{-2}$	$1.719 \cdot 10^{-2}$	$1.987 \cdot 10^{-2}$	$2.324 \cdot 10^{-2}$
$e_{\text{tot}}^{\text{rms}}$	0.439	0.500	0.407	0.398



Rysunek 6.3. Rozwiązanie numeryczne (kolor czarny) i wyniki doświadczalne (kolor czerwony) dla wahadła o długości  $L = 200 \text{ mm}$ : **a)**  $k = 3$ , **b)**  $k = 4$ . Wyniki uzyskane metodą gradientową dla zagadnienia (4.40). Wyniki przekształcone do współrzędnych wymiarowych.

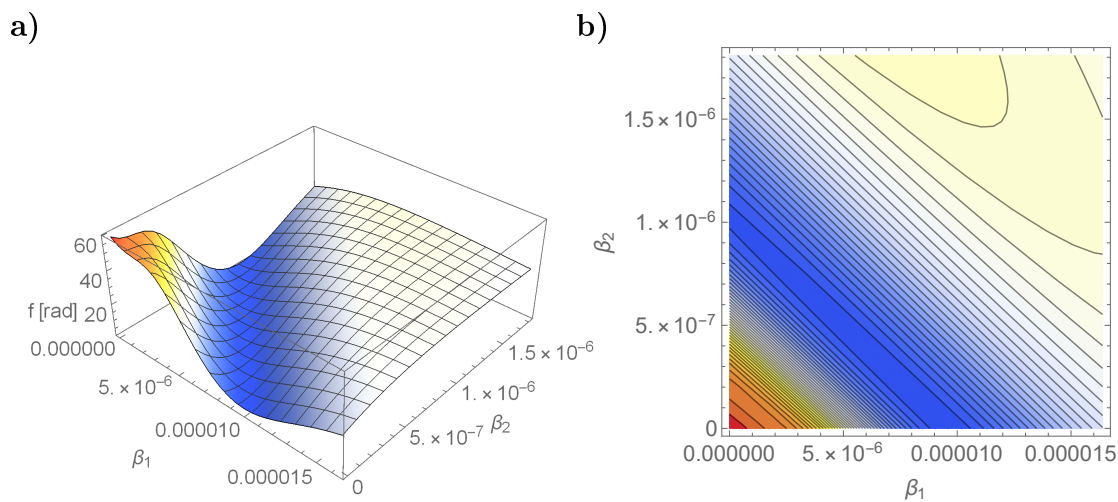
Główną zaletą tego podejścia jest znalezienie jednej (efektywnej) wartości współczynnika tłumienia  $\beta_1$  dla różnych konfiguracji początkowych wahadła o ustalonej długości. Taki sposób postępowania będzie kontynuowany w dalszych rozważaniach.

### 6.3. Identyfikacja dla modelu z dwoma parametrami

W zagadnieniu (4.39), w którym poszukiwane są dwa współczynniki tłumienia, więc wektor zmiennych przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2], \quad (6.9)$$

zastosowano w pierwszej kolejności metodę bisekcji. Optymalizacja przeprowadzona metodą bisekcji w dwuwymiarowym obszarze  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  i polegająca na poszukiwaniu minimum funkcji (6.2) dla wektora  $\beta$  dawała dla każdej konfiguracji początkowej i dla każdej długości wahadła rozwiązania z zerową wartością współczynnika  $\beta_1$ . Wartości funkcji (6.2) dla tych rozwiązań były znacznie większe (różnica dwóch rzędów) niż wartości przytoczone w tabeli 6.1. Jednocześnie przy porównaniu przebiegów czasowych otrzymanych eksperymentalnie i wyznaczonych numerycznie zaobserwowano znaczącą i postępującą z czasem niezgodność wartości amplitudy. W poszukiwaniu przyczyn nieskutecznego w tym przypadku zastosowania metody bisekcji, zbadano zmienność funkcji celu  $f_k(\beta_1, \beta_2)$  dla wszystkich wahadeł i dla poszczególnych konfiguracji początkowych.

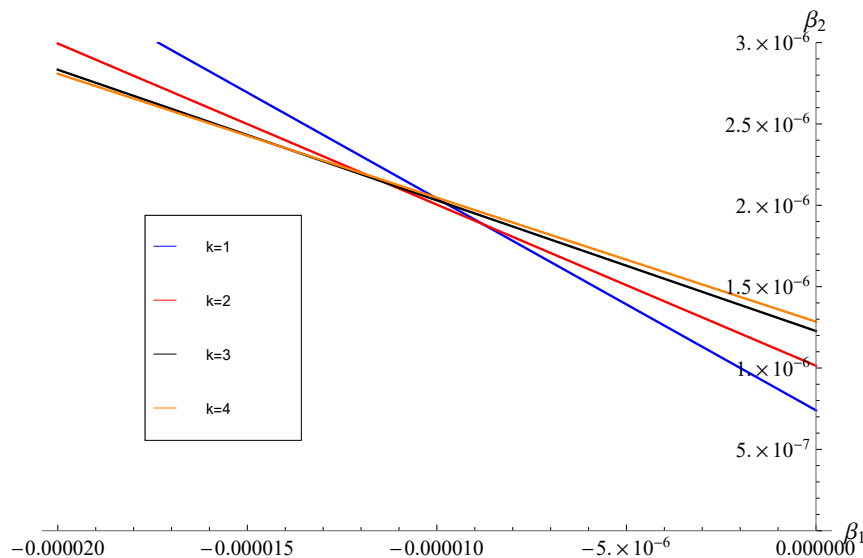


Rysunek 6.4. Graficzne przedstawienie funkcji celu (6.2): **a)** wykres powierzchniowy, **b)** wykres konturowy. Wyniki otrzymane dla  $L = 100$  mm i  $k = 2$

We wszystkich badanych przypadkach ciągła reprezentacja dyskretyzowanej powierzchni  $f_k(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(j)})$  wykonana z zastosowaniem algorytmów środowiska graficznego programu Mathematica wykazuje podłużną „dolinę”, w której, jak można przypuszczać, istnieje nieskończenie wiele minimum. Stąd pojawiła się niejednoznaczność przy wyznaczeniu optymalnych wartości współczynników tłumienia, gdyż warunkiem stosowalności metod optymalizacyjnych takich jak metoda bisekcji i metoda gradientowa jest unimodalność funkcji celu w rozważanym obszarze zmiennych decyzyjnych. Na rysunku 6.4 przedstawiono wykres powierzchniowy i konturowy funkcji celu dla wahadła o długości 100 mm i  $k = 2$ .

Można zaobserwować, że dla każdego z wahadeł kierunek „doliny” zmienia się wraz z kątem  $\varphi_0$  wychylenia początkowego. Z tego powodu dla każdej funkcji celu

$f_k(\beta_1, \beta_2)$  odpowiadającej  $k$ -tej konfiguracji początkowej wyznaczono prostą o równaniu  $\beta_2 = A_k\beta_1 + B_k$ , której kierunek określa „dno doliny”, a więc miejsce, na którym leży minimum funkcji celu (6.2). Proste te dla wahadła o długości  $L = 100$  mm przedstawiono na Rys. 6.5. Można zauważyć, że miejsca przecięcia prostych leżą w niewielkim obszarze na płaszczyźnie  $\beta_1, \beta_2$ . Obserwacja ta stała się podstawą do wyprowadzenia wniosku, że można znaleźć wspólną dla wszystkich przebadanych konfiguracji początkowych danego wahadła parę optymalnych wartości obu współczynników tłumienia. Spośród sześciu punktów przecięcia prostych jako rozwiązanie optymalne wybrano ten, dla którego funkcja celu (6.2) przyjmuje najmniejszą wartość. Po wyznaczeniu wartości współczynników  $A_k$  i  $B_k$  okazało się, że miejsca przecięcia poszczególnych prostych leżą po ujemnej stronie osi układu odpowiadającej współczynnikowi  $\beta_1$ . Wyniki otrzymane opisaną wyżej metodą przedstawiono w Tab. 6.3, która zawiera wartości funkcji celu dla poszczególnych konfiguracji początkowych  $k$  położenia wahadła. Dane odnoszące się do wahadła o długości  $L = 100$  mm pokazują, że największe różnice pomiędzy rozwiązaniami numerycznymi a wynikami doświadczalnymi otrzymano dla  $k = 2$ , a najmniejsze dla  $k = 4$ . Na rysunku 6.6 przedstawiono porównanie rozwiązania numerycznego z wynikami eksperymentalnymi dla obu skrajnych przypadków, z którego wynika, że brak zgodności obu przebiegów przejawia się postępującym z czasem niedopasowaniem ich amplitud.



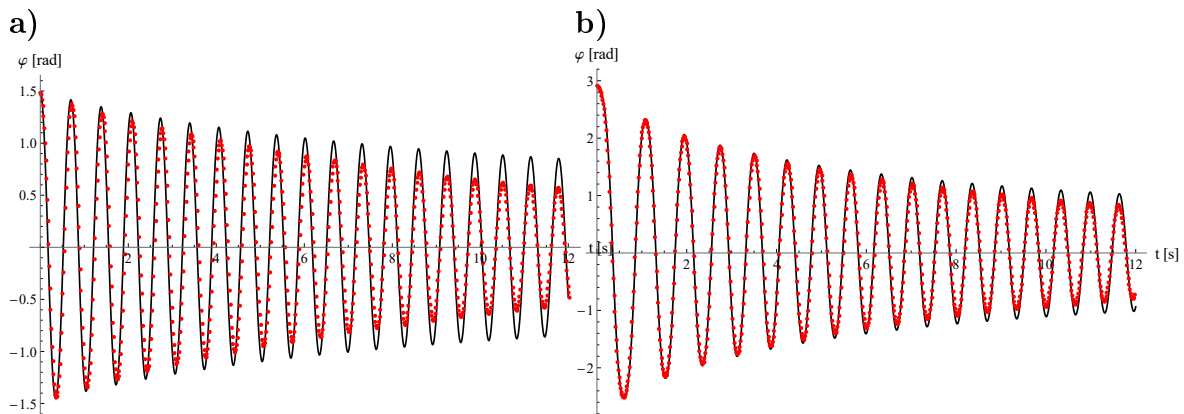
Rysunek 6.5. Przecięcia prostych  $\beta_2 = A_k\beta_1 + B_k$  dla wahadła o długości 100 mm dla  $k = 1$  (kolor niebieski),  $k = 2$  (kolor czerwony),  $k = 3$  (kolor czarny),  $k = 4$  (kolor żółty)

Współczynnik  $\beta_1$  w każdym przypadku przyjmuje ujemną wartość, więc nie ma

on fizycznej interpretacji i wskazuje, że model tłumienia z dwoma współczynnikami tłumienia jest niewłaściwy. Fakt ten wynika z konieczności ekstrapolacji obszaru  $\Omega$  do obszaru  $\hat{\Omega} = [-1, 1] \times [0, 1]$ , w którym znajduje się wartość optymalna.

Tabela 6.3. Wartości współczynników tłumienia oraz funkcji celu (6.2). Wyniki uzyskane metodą bisekcji uzupełnioną o ekstrapolację tendencji spadku do obszaru  $\hat{\Omega}$ .

$L$ [mm]:	100	150	200	300
$\beta_1$	$-7.149 \cdot 10^{-3}$	$-6.265 \cdot 10^{-3}$	$-4.764 \cdot 10^{-3}$	$-8.754 \cdot 10^{-3}$
$\beta_2$	$1.795 \cdot 10^{-2}$	$2.245 \cdot 10^{-2}$	$1.994 \cdot 10^{-2}$	$2.436 \cdot 10^{-2}$
$k = 1$	0.241	0.241	0.108	0.133
$k = 2$ $f_k$	0.243	0.401	0.103	0.172
$k = 3$ [rad]	0.189	0.879	0.108	0.217
$k = 4$	0.228	0.789	0.067	0.260



Rysunek 6.6. Rozwiązanie numeryczne (kolor czarny) i wyniki doświadczalne (kolor czerwony) dla wahadła o długości  $L = 100$  mm: **a)**  $k = 2$ , **b)**  $k = 4$ . Wyniki uzyskane metodą bisekcji uzupełnioną o ekstrapolację tendencji spadku do obszaru  $\hat{\Omega}$  dla zagadnienia (4.39).

Wyniki przekształcone do współrzędnych wymiarowych.

Zaletą wyżej opisanej metody jest możliwość otrzymania wspólnej wartości współczynników tłumienia dla wahadła o ustalonej długości. Wadą jest jednak duża wrażliwość współczynnika kierunkowego prostej wyznaczającej „dno doliny” na błędy pomiarowe. Zaobserwowano, że gdy dane pomiarowe pochodzące z rejestracji ruchu dla  $k$ -tej konfiguracji są zbyt mocno zaburzone, to odpowiadająca im prosta może przeciąć się z innymi prostymi daleko poza oczekiwanym obszarem. Tak się stało w przypadku wahadła o długości  $L = 150$  mm, dla którego jeden punkt przecięcia znajdował się w znacznej odległości od pozostałych ekstremów. Stąd w tabeli 6.3 dla  $L = 150$  mm wartości funkcji celu są większe niż dla pozostałych wahadeł.

Dlatego podjęto próbę znalezienia współczynników  $\beta_1$  oraz  $\beta_2$  w zagadnieniu początkowym (4.39) metodą gradientową. Algorytm stosowania tej metody jest identyczny jak w przypadku jednowymiarowym, jednakże ruch w kierunku minimum ma miejsce na płaszczyźnie. Wyniki optymalizacji, przeprowadzonej zgodnie z algorytmem opisanym w Dodatku B, przedstawiono w Tab. 6.4. Oprócz optymalnych wartości współczynników  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , przedstawiono tam średnią kwadratową błędów dla poszczególnych konfiguracji początkowych, która została zdefiniowana przez wzór (6.2) oraz współczynnik korelacji Pearsona zdefiniowany wzorem (6.4).

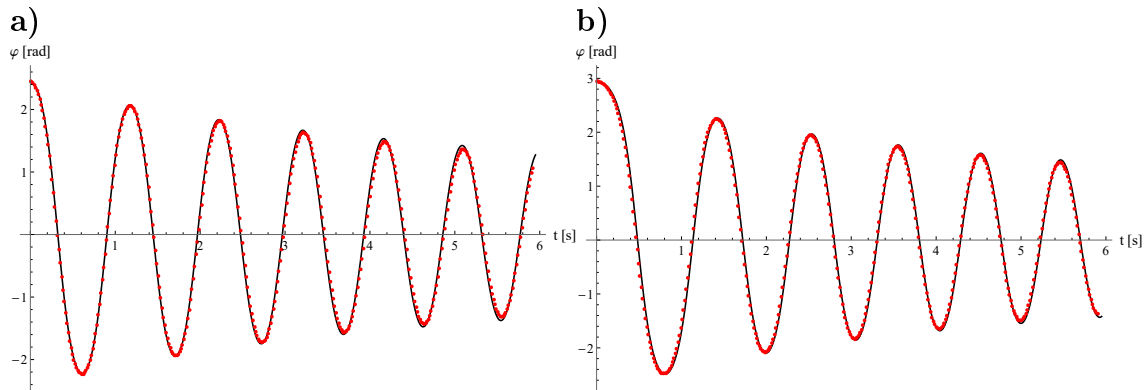
Tabela 6.4. Wartości współczynników  $\beta_1$  oraz  $\beta_2$  i odpowiadające im wartości funkcji celu i współczynników korelacji Pearsona dla różnych długości wahadła i początkowych położeń kątowych. Wyniki uzyskane metodą gradientową.

$k$	$L = 100$ mm	$L = 150$ mm	$L = 200$ mm	$L = 300$ mm
	$[f_k(\beta_1, \beta_2)$ [rad] ; $r_\varphi^k(\beta_1, \beta_2)$ ]			
1	[0.230 ; 0.9210]	[0.166 ; 0.9702]	[0.108 ; 0.9874]	[0.116 ; 0.9868]
2	[0.238 ; 0.9596]	[0.148 ; 0.9875]	[0.087 ; 0.9957]	[0.123 ; 0.9892]
3	[0.183 ; 0.9865]	[0.117 ; 0.9949]	[0.079 ; 0.9982]	[0.064 ; 0.9991]
4	[0.146 ; 0.9936]	[0.216 ; 0.9895]	[0.092 ; 0.9983]	[0.035 ; 0.9998]
$\beta_1$	$-8.760 \cdot 10^{-3}$	$-8.165 \cdot 10^{-3}$	$-2.416 \cdot 10^{-3}$	$-6.423 \cdot 10^{-3}$
$\beta_2$	$1.897 \cdot 10^{-2}$	$1.976 \cdot 10^{-2}$	$1.803 \cdot 10^{-2}$	$2.452 \cdot 10^{-2}$
$e_{\text{tot}}^{\text{rms}}$	0.199	0.162	0.091	0.084

Przedstawione w Tab. 6.4 wartości funkcji celu  $f_k$  oraz współczynniki korelacji Pearsona pokazują, że model (4.39) osiąga zbieżność z wynikami eksperymentalnymi w większym stopniu niż model (4.40). Jednakże metoda gradientowa zastosowana do znalezienia minimum funkcji (6.2) dla zagadnienia (4.39) również daje wyniki z ujemnymi wartościami współczynnika  $\beta_1$ . Ujemna wartość współczynnika  $\beta_1$  nie ma uzasadnienia fizycznego, co wskazuje, że model sił oporu z dwoma współczynnikami jest niewłaściwy.

Porównując eksperymentalne przebiegi czasowe dla poszczególnych konfiguracji początkowych wahadeł z wynikami otrzymanymi przez numeryczne rozwiązanie zagadnienia (4.39) z optymalnymi współczynnikami modelu, w tym z ujemnym współczynnikiem  $\beta_1$ , zauważono, że problem niedopasowania wartości ekstremalnych wychyleń wahadła praktycznie nie występuje. Jako przykład zaprezentowano na Rys. 6.7 porównanie przebiegów otrzymanych w sposób numeryczny i doświadczalny dla wahadła o długości 200 mm i konfiguracji początkowych  $k = 3$  i  $k = 4$ . To spostrzeżenie wskazuje, że wyznaczone metodą bisekcji rozwiązania (z  $\beta_1 = 0$ ) nie są

rozwiązaniami optymalnymi, a zerowa wartość współczynnika  $\beta_1$  jest konsekwencją przyjęcia obszaru  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Zauważono także, że efekt niezgodności przebiegów wyrażający się przesunięciem fazy jest wyraźnie mniejszy niż w przypadku z jednym współczynnikiem.



Rysunek 6.7. Rozwiązanie numeryczne (kolor czarny) i wyniki doświadczalne (kolor czerwony) dla wahadła o długości  $L = 200$  mm: **a)**  $k = 3$ , **b)**  $k = 4$ . Wyniki uzyskane metodą gradientową dla zagadnienia (4.39). Wyniki przekształcone do współrzędnych wymiarowych.

Rozwiązania z ujemnymi wartościami współczynnika  $\beta_1$  prowadzą do modelu z pozornym ujemnym tłumieniem, nie mającym uzasadnienia w ruchu analizowanego układu. Z tego powodu postanowiono rozszerzyć model o tłumienie proporcjonalne do przyspieszenia związane z koncepcją masy dodanej, zachowując składnik proporcjonalny do kwadratu prędkości ze względu na jego pozytywny wpływ na poprawę zgodności fazy przebiegów eksperymentalnych i numerycznych.

## 6.4. Identyfikacja dla modelu z trzema parametrami

Przedstawione w poprzednich rozdziałach wyniki optymalizacji wskazują, że model liniowy tłumienia (4.40) oraz model dwuwymiarowy (4.39) są nieadekwatne do opisu wpływu oporu ośrodka na drgania wahadła w szerokim zakresie zmienności kąta wychylenia. Jedną z koncepcji modyfikacji modelu polegała na dodaniu następnego składnika siły oporu zgodnie z rozwinięciem w szereg potęgowy (2.4). Jednak, ze względu na analizę wyników dla modeli (4.39) i (4.40), w których największe błędy pojawiały się przy nawrocie wahadła, postanowiono dodać współczynnik tłumienia proporcjonalny do przyspieszenia stycznego i związany z koncepcją masy dodanej (składnik bezwładnościowy). Zagadnienie opisane jest przez (4.37).

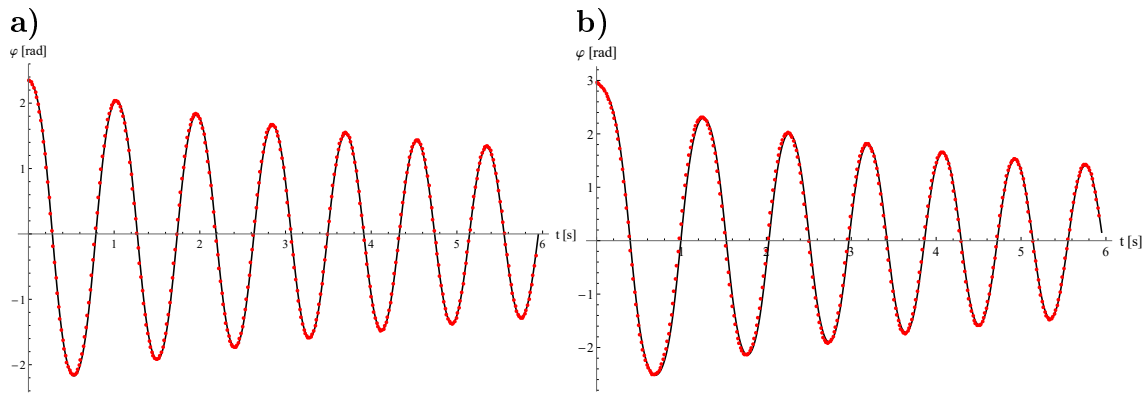
W przypadku trójwymiarowego zagadnienia optymalizacji, to znaczy z trzema współczynnikami tłumienia  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  oraz  $\beta_a$  algorytm metody gradientowej jest identyczny jak w przypadku jednowymiarowym i dwuwymiarowym. Poszukiwanie minimum funkcji celu (6.3) odbywa się jednak w trójwymiarowej przestrzeni. Ponownie uwzględniono w funkcji celu jednocześnie wszystkie badane konfiguracje początkowe  $k$  układu.

Wyniki optymalizacji przeprowadzonej zgodnie z algorytmem opisanym w Dodatku B, w której otrzymano optymalne wartości współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  oraz  $\beta_a$ , przedstawiono w Tab. 6.5. Oprócz optymalnych wartości współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  oraz  $\beta_a$ , przedstawiono średnią kwadratową błędu dla poszczególnych konfiguracji początkowych oraz, analogicznie jak w poprzednich przypadkach, obliczono współczynnik korelacji Pearsona (6.4).

Tabela 6.5. Wartości współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  oraz  $\beta_a$  i odpowiadające im wartości funkcji celu i współczynników korelacji Pearsona dla różnych długości wahadła i początkowych położzeń kątowych. Wyniki uzyskane metodą gradientową.

	$L = 100$ mm	$L = 150$ mm	$L = 200$ mm	$L = 300$ mm
$k$	$[f_k(\beta_1, \beta_2, \beta_a)$ [rad] ; $r_\varphi^k(\beta_1, \beta_2, \beta_a)$ ]			
1	[0.055 ; 0.9964]	[0.071 ; 0.9983]	[0.104 ; 0.9989]	[0.090 ; 0.9984]
2	[0.061 ; 0.9938]	[0.161 ; 0.9996]	[0.095 ; 0.9998]	[0.148 ; 0.9978]
3	[0.387 ; 0.9978]	[0.357 ; 0.9991]	[0.156 ; 0.9987]	[0.123 ; 0.9991]
4	[0.161 ; 0.9949]	[0.293 ; 0.9970]	[0.172 ; 0.9991]	[0.225 ; 0.9997]
$\beta_1$	$6.530 \cdot 10^{-3}$	$5.454 \cdot 10^{-3}$	$7.647 \cdot 10^{-3}$	$7.619 \cdot 10^{-3}$
$\beta_2$	$1.019 \cdot 10^{-2}$	$1.171 \cdot 10^{-2}$	$1.275 \cdot 10^{-2}$	$1.755 \cdot 10^{-2}$
$\beta_a$	$3.416 \cdot 10^{-2}$	$2.660 \cdot 10^{-2}$	$1.897 \cdot 10^{-2}$	$2.389 \cdot 10^{-2}$
$e_{\text{tot}}^{\text{rms}}$	0.161	0.22	0.132	0.146

Uzyskane wartości funkcji celu świadczą o tym, że model (4.37) nie prowadzi do sprzecznych wyników i stanowi najlepsze z przebadanych dopasowanie dla zagadnienia odwrotnego polegającego na identyfikacji modelu siły oporu w ruchu wahadła fizycznego. Największe wartości błędu można obserwować dla wahadła o długości 150 mm i konfiguracji początkowych  $k = 3$  i  $k = 4$ . Na rysunku 6.8 przedstawiono porównanie rozwiązania numerycznego z wynikami eksperymentalnymi dla tych przypadków. Pomimo większej, w porównaniu z pozostałymi eksperymentami, wartości funkcji celu (6.3) przebiegi czasowe kąta wychylenia  $\varphi(t)$ , których źródłem są pomiary i wyniki symulacji numerycznych, nie różnią się znacząco ani pod względem wartości amplitud ani zgodności fazy.



Rysunek 6.8. Rozwiązanie numeryczne (kolor czarny) i wyniki doświadczalne (kolor czerwony) dla wahadła o długości  $L = 150$  mm: **a)**  $k = 3$ , **b)**  $k = 4$ . Wyniki uzyskane metodą gradientową dla zagadnienia (4.37). Wyniki przekształcone do współrzędnych wymiarowych.

Wartości współczynników korelacji Pearsona jednoznacznie świadczą o tym, że model (4.37) w najlepszym stopniu przybliża zagadnienie ruchu wahadła fizycznego w ośrodku stawiającym opór. Pomijając w dyskusji model tłumienia z dwoma składnikami, który okazał się niepoprawny z fizycznego punktu widzenia, można stwierdzić, że omawiane wcześniej zagadnienie jednowymiarowe jest niekompletne, gdyż współczynnik korelacji Pearsona osiąga wartość poniżej 0.9, co jednoznacznie wskazuje na brak liniowej zależności między rozwiązaniem numerycznym, a wynikami doświadczalnymi. Co prawda dla metody bisekcji w modelu (4.40) uzyskano wyniki współczynników korelacji Pearsona zbliżone do modelu (4.37), ale należy pamiętać, że optymalizację przeprowadzono osobno dla każdej konfiguracji początkowej. W przypadku metody gradientowej uzyskano współczynniki tłumienia dla każdej długości wahadła z uwzględnieniem wszystkich konfiguracji początkowych.



# 7. Identyfikacja i ocena statystyczna jej wyników dla modelu siły oporu z trzema parametrami w ruchu płaskim wahadła

## 7.1. Wprowadzenie

W rozdziale szóstym przedstawiono wyniki identyfikacji parametrów trzech modeli siły oporu ośrodka w ruchu płaskim wahadła, polegającej na zastosowaniu kilku metod optymalizacyjnych do wyznaczenia minimalnej wartości funkcji celu zdefiniowanej jako średnia kwadratowa błędu między wynikami eksperymentalnymi i rozwiązaniami numerycznymi odpowiednich zagadnień początkowych, w których przyjmuje się wartości współczynników modelu z bieżącej iteracji. Wyniki pomiarów, stanowiące punkt odniesienia, do którego zmierza proces optymalizacyjny, nie są jednak dokładne, a błąd, którymi są obarczone, jest ignorowany w tak sformułowanym zagadnieniu.

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną wyniki identyfikacji trójparametrowego modelu siły oporu ośrodka w ruchu płaskim wahadła polegającej na zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów do minimalizacji błędu spełnienia równań różniczkowych modelu matematycznego zagadnienia ruchu. Takie sformułowanie problemu optymalizacyjnego daje podstawy do przeprowadzenia statystycznej oceny uzyskanych wyników.

W tym podejściu do zagadnienia identyfikacji niezbędna jest znajomość położeń kątowych, prędkości kątowych oraz przyspieszeń kątowych pręta. W obu eksperymentach na podstawie zmierzonych współrzędnych charakterystycznych punktów wylicza się wartości kątów określających położenie pręta w kolejnych chwilach ruchu. Prędkości kątowe i przyspieszenia kątowe nie podlegają bezpośredniemu pomiarowi, lecz wyznaczone są w sposób numeryczny za pomocą schematów różnicowych. Schematy różnicowe są szeroko stosowane w analizie numerycznej do przybliżania wartości pochodnych funkcji. W tym rozdziale przedstawione zostaną dwie metody generowania schematów różnicowych: interpolacja za pomocą metody współczynników nieoznaczonych oraz aproksymacja za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Oba podejścia mają na celu estymację wartości pochodnych w określonych

punktach, jednak bazują na odmiennych koncepcjach, co prowadzi do różnych rezultatów końcowych.

Interpolacja metodą współczynników nieoznaczonych to technika obliczeniowa, która polega na konstruowaniu nowych danych punktowych na podstawie znanych wartości. W przypadku schematów różnicowych, interpolacja polega na estymacji wartości pochodnej w konkretnym punkcie, wykorzystując wartości funkcji w kilku sąsiadujących punktach. Metoda ta opiera się na wyznaczeniu wielomianu, który przechodzi przez punkty sąsiadujące [11, 15, 16, 29, 86].

Z drugiej strony, aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów to technika obliczeniowa polegająca na znalezieniu funkcji<sup>1</sup>, która najlepiej odpowiada zestawowi danych wartości funkcji. W przypadku schematów różnicowych, aproksymacja ta polega na znalezieniu funkcji aproksymującej, która minimalizuje pewną funkcję, którą często przyjmuje się jako sumę kwadratów różnic między wartościami funkcji znanymi, na przykład z pomiaru, a wartościami funkcji aproksymującej. Wynikiem tej metody jest schemat różnicowy, który jest najlepszym przybliżeniem pochodnej na podstawie dostępnych danych [11, 35, 76, 86, 93].

Zastosowanie schematów różnicowych w niniejszej pracy ma na celu określenie przybliżonych wartości prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego za pomocą wartości przybliżonych za pomocą wzorów interpolujących albo aproksymujących pochodne pierwszego i drugiego rzędu, gdy znane są wartości funkcji w wybranych punktach jej dziedziny. Współrzędne punktów wyznaczonych w eksperymencie nie są wyznaczone dokładnie, wobec tego należy stosować schematy o dużej dokładności, gdyż szczególnie wartość przyspieszenia kątowego (jako pochodna drugiego rzędu) jest bardzo wrażliwa na błędy pomiarów.

W niniejszym rozdziale porównamy obie metody pod względem dokładności w kontekście zastosowania do wyznaczenia prędkości i przyspieszeń kątowych pręta. Przedstawimy przykłady schematów różnicowych uzyskanych za pomocą interpolacji metodą współczynników nieoznaczonych oraz aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów, a następnie porównamy ich wyniki dla wybranej funkcji.

## 7.2. Interpolacyjne i aproksymacyjne schematy różnicowe

Niech funkcja  $f$  jednej zmiennej  $t$  (czasu) reprezentuje dowolną z funkcji  $\varphi(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  określonych w rozdziałach 4.1 i 4.2. W celu zobrazowania metody ge-

---

<sup>1</sup> Dokładniej zadanie polega na znalezieniu parametrów definiujących jednoznacznie funkcję o zadanej postaci ogólnej, na przykład wielomianu, funkcji wykładniczej itp.

nerowania schematów różnicowych za pomocą interpolacji metodą współczynników nieoznaczonych wyprowadzono centralny schemat różnicowy dla pochodnej drugiego rzędu dla trzech węzłów  $t_i$ ,  $t_{i+1}$  oraz  $t_{i-1}$ . Wzór Taylora<sup>2</sup> w otoczeniu punktu  $t_i$  przyjmuje postać

$$f(t) = f(t_i) + \frac{(t-t_i)}{1!} \dot{f}(t_i) + \frac{(t-t_i)^2}{2!} \ddot{f}(t_i) + \dots + \frac{(t-t_i)^j}{j!} f^{(j)}(t_i) + \dots + \frac{(t-t_i)^p}{p!} f^{(p)}(t_i) + R_p(t, t_i), \quad (7.1)$$

gdzie  $f^{(j)}$  oznacza pochodną  $j$ -tego rzędu względem  $t$  dla  $j = 1, 2, \dots, p$ , natomiast reszta  $R_p(t, t_i)$  spełnia warunek

$$\lim_{t \rightarrow t_i} R_p(t, t_i) = 0. \quad (7.2)$$

Ograniczając się do kilku początkowych wyrazów sumy po prawej stronie równania (7.1), otrzymamy

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + \frac{\dot{f}(t_i)}{1!} h + \frac{\ddot{f}(t_i)}{2!} h^2 + O(h^3), \quad (7.3)$$

$$f(t_{i-1}) = f(t_i) - \frac{\dot{f}(t_i)}{1!} h + \frac{\ddot{f}(t_i)}{2!} h^2 + O(h^3), \quad (7.4)$$

gdzie  $O(\cdot)$  jest symbolem Landaua<sup>3</sup>, a  $h = t_{i+1} - t_i$  jest stałym krokiem czasowym dla  $i = 1, 2, \dots$ . Schemat różnicowy centralny  $D_c^2(t_i)$  drugiego rzędu postulujemy w postaci

$$D_c^{(2)}(t_i) = a_1 f(t_i) + a_2 f(t_{i+1}) + a_3 f(t_{i-1}), \quad (7.5)$$

gdzie  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  są nieznanymi współczynnikami. Podstawiając równania (7.3)-(7.4), w których pominięto wyrazy rzędu  $O(h^3)$ , do wzoru (7.5), otrzymamy

$$D_c^{(2)}(t_i) = f(t_i)(a_1 + a_2 + a_3) + \dot{f}(t_i)(a_2 h - a_3 h) + \ddot{f}(t_i) \left( \frac{a_2 h^2}{2} + \frac{a_3 h^2}{2} \right). \quad (7.6)$$

W celu wyznaczenia współczynników schematu różnicowego drugiego rzędu należy współczynnik przy  $\ddot{f}(t_i)$  przyrównać do jedności, natomiast pozostałe współczynniki po prawej stronie wzoru (7.6) do zera. Wobec tego, dostaniemy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_2 h - a_3 h = 0, \\ \frac{a_2 h^2}{2} + \frac{a_3 h^2}{2} = 1. \end{cases} \quad (7.7)$$

<sup>2</sup> Zakładamy, że funkcja  $f$  o wartościach rzeczywistych ma ciągłą pochodną  $f^{(p)}$  w przedziale  $[t, t + t_i]$  dla  $t_i > 0$  (lub  $[t - t_i, t]$  dla  $t_i < 0$ ) oraz skończoną pochodną  $f^{(p+1)}$  wewnątrz tego przedziału.

<sup>3</sup> Symbol  $O(\cdot)$  oznacza tzw. asymptotyczne zachowanie się wzrostu funkcji wraz ze wzrostem jej argumentu. Mówimy, że funkcja  $f$  jest rzędu  $g$ , jeżeli istnieją takie liczby  $N_0 > 0$  oraz  $c > 0$ , że dla każdego  $n \geq N_0$  mamy  $f(n) \leq c g(n)$ , co zapisujemy następująco:  $f(n) \in O(g(n))$ .

Rozwiązaniem układu równań (7.7) są współczynniki  $a_1 = -\frac{2}{h^2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{h^2}$  oraz  $a_3 = \frac{1}{h^2}$ , co prowadzi do wzoru

$$\ddot{f}(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1}))}{h^2} + O(h^3). \quad (7.8)$$

Gdy w równaniu (7.6) przyrównamy współczynnik stojący przy pochodnej  $\dot{f}(t_i)$  do jedności, a pozostałe do zera, to otrzymamy trzypunktowy schemat różnicowy pierwszego rzędu.

W celu wyprowadzenia centralnego schematu różnicowego  $D_c^{(n)}(t_i)$  rzędu  $n$  dla liczby węzłów  $2N + 1$  można zastosować analogiczną procedurę jak w przypadku wyżej opisanym. Niech

$$D_c^{(n)}(t_i) = \sum_{k=0}^{2N} a_{(k-N)} f(t_i + (k-N)h), \quad (7.9)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę węzłów leżących po jednej stronie punktu  $t_i$ . Zgodnie ze wzorem Taylora (7.1), wartość funkcji  $f(t_i + (k-N)h)$  przybliżamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} f(t_i + (k-N)h) &= f(t_i) + \frac{\dot{f}(t_i)}{1!}(k-N)h + \frac{\ddot{f}(t_i)}{2!}((k-N)h)^2 \\ &+ \dots + \frac{\ddot{f}(t_i)}{j!}((k-N)h)^j + \dots + \frac{f^{(2N)}(t_i)}{(2N)!}((k-N)h)^{2N} + O(h^{2N+2}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

dla  $k = 0, 1, 2, \dots, 2N$ , a następnie pomijając wyrazy rzędu  $O(h^{2N+2})$  oraz wstawiając przybliżenie (7.10) do równania (7.9) i porządkując względem wszystkich pochodnych, dostajemy układ równań, który zapisujemy w postaci równania macierzowego

$$\hat{F}\hat{a} = \hat{b}, \quad (7.11)$$

gdzie  $\hat{a} = [a_{-N}, a_{1-N}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_{N-1}, a_N]$  jest wektorem kolumnowym nieznanych współczynników,  $\hat{F}$  jest macierzą kwadratową postaci

$$\hat{F} = [\hat{f}_{jk}] = \left[ \frac{(k-N)^j}{j!} h^j \right]_{jk}, \quad (7.12)$$

gdzie  $j = 0, 1, 2, \dots, 2N$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2N$ , a  $\hat{b}$  jest wektorem kolumnowym składającym się z samych zer i jednej jedynki. Miejsce wystąpienia jedynki jest uzależnione od rzędu pochodnej, którą należy wyznaczyć. Przykładowo, przy przybliżaniu pochodnej pierwszego rzędu należy przyjąć wektor postaci  $\hat{b} = [0, 1, 0, \dots, 0]$ . Dla  $\hat{b} = [1, 0, 0, \dots, 0]$  otrzymamy rozwiązanie równe danym wejściowym, co oznacza, że

interpolacyjna procedura nie zmienia wartości wejściowych, nie daje więc efektu wygładzania danych z pomiaru. W tabelach 7.1 i 7.2 przedstawiono wartości współczynników uzyskanych interpolacyjną metodą współczynników nieoznaczonych (po rozwiązaniu układu równań (7.11)) dla odpowiednio pochodnej pierwszego i drugiego rzędu. Można zauważyć, że własnością schematów centralnych uzyskanych metodą interpolacyjną jest antysymetria współczynników schematu różnicowego.

Tabela 7.1. Wartości współczynników dla pochodnej pierwszego rzędu schematu centralnego (7.9). Współczynniki zostały pomnożone przez  $h$ .

$N$	$t_{i-4}$	$t_{i-3}$	$t_{i-2}$	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$	$t_{i+2}$	$t_{i+3}$	$t_{i+4}$
1				$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
2			$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
3		$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$	
4	$\frac{1}{280}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$

Tabela 7.2. Wartości współczynników dla pochodnej drugiego rzędu schematu centralnego (7.9). Współczynniki zostały pomnożone przez  $h^2$ .

$N$	$t_{i-4}$	$t_{i-3}$	$t_{i-2}$	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$	$t_{i+2}$	$t_{i+3}$	$t_{i+4}$
1				1	-2	1			
2			$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
3		$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$	
4	$-\frac{1}{560}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$

W przypadku początkowych i końcowych chwil czasowych można wprowadzić tzw. ekstrapolowane punkty pozorne wykraczające poza rozpatrywany obszar. Dla próbkowania z częstotliwością 100 Hz, krok czasowy wynosi  $h = 10^{-2}$  s, a  $h^2 = 10^{-4}$  s<sup>2</sup>. Schematy niesymetryczne są o jeden rząd wielkości mniej dokładne niż schematy centralne. Dlatego, aby uzyskać taką samą dokładność schematu niesymetrycznego jak w 5-punktowym schemacie centralnym, należałoby zastosować 500 węzłów [40, 44, 54, 77].

Jak wspomniano wcześniej, schematy różnicowe otrzymane metodą współczynników nieoznaczonych zachowują w niezmięnionej postaci wartości funkcji  $f$  (pochodną zerowego rzędu). Dlatego w celu wygładzenia danych bezpośrednio mierzonych

należy dodatkowo zastosować procedurę wygładzania, na przykład metodę uśredniania bieżącego [61, 94] postaci

$$\hat{f}(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{i+n-1} f(t_j), \quad (7.13)$$

gdzie  $\hat{f}(t_i)$  jest elementem uśrednionego ciągu,  $f(t_j)$  elementem pierwotnego ciągu zmierzonych wartości, a  $n$  jest liczbą elementów uśrednianych.

W przypadku aproksymacyjnych schematów różnicowych otrzymuje się jednocześnie funkcje, które najlepiej, w sensie najmniejszych kwadratów, estymują wyniki pomiarów (funkcja  $f$ ), prędkości kątowne (pochodna pierwszego rzędu funkcji  $f$ ) i przyspieszenia kątowne (pochodna drugiego rzędu funkcji  $f$ ). Wyniki eksperymentalne obarczone są błędami pomiarów, więc wektor przyspieszenia może być szczególnie wrażliwy na małe zakłócenia. Wobec tego należy stosować dokładne wielopunktowe schematy różnicowe. Rozważmy jednorodną siatkę, tj. sekwencję równomiernie rozmieszczonych punktów czasowych (chwil pomiaru). Centralne aproksymacyjne schematy różnicowe są oparte na  $2n + 1$  węzłach tworzących następujący ciąg arytmetyczny:

$$t_{i-n}, t_{i-n+1}, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n-1}, t_{i+n}, \quad (7.14)$$

o różnicy  $h = t_{i+j} - t_{i+j-1}$  (dla  $j = -n, -n+1, \dots, n$ ). Załóżmy, że znane są wartości funkcji  $f$  w wszystkich węzłach (7.14) i oznaczmy te wartości następująco:

$$f_{i-n} = f(t_{i-n}), \dots, f_{i-1} = f(t_{i-1}), f_i = f(t_i), \dots, f_{i+n} = f(t_{i+n}). \quad (7.15)$$

Celem jest znalezienie funkcji klasy  $C^2$  aproksymującej funkcję  $f$  metodą najmniejszych kwadratów [35].

Wzór Taylora (7.1) można równoważnie zapisać w następującej postaci:

$$f(t) = f(t_i)\Phi_0(t, t_i) + \dot{f}(t_i)\Phi_1(t, t_i) + \ddot{f}(t_i)\Phi_2(t, t_i) + O(h^3), \quad (7.16)$$

gdzie

$$\Phi_0(t, t_i) = 1, \quad \Phi_1(t, t_i) = \frac{(t - t_i)}{1!}, \quad \Phi_2(t, t_i) = \frac{(t - t_i)^2}{2!} \quad (7.17)$$

są funkcjami bazowymi. W metodzie najmniejszych kwadratów zakłada się, że funkcję  $f$  w przedziale  $[t_{i-n}, t_{i+n}]$  przybliżamy funkcją  $f_n$ , zależną od pewnej liczby nieznanymi parametrów. W rozważanym przypadku przyjmujemy trzy nieznanne parametry  $p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}$ , a funkcję  $f_n$  postulujemy jako wielomian postaci

$$f_n(t, t_i) = \sum_{j=0}^2 p_j^{(i)} \Phi_j(t, t_i), \quad (7.18)$$

przy czym funkcje bazowe  $\Phi_j(t, t_i)$  są określone względem punktu pomiarowego  $t_i$  będącego środkiem przedziału  $[t_{i-n}, t_{i+n}]$ . Wprowadźmy funkcję błędu jako różnicę pomiędzy wartościami funkcji  $f$ , a wartościami wielomianu aproksymacyjnego  $f_n$

$$R(f(t)) = f(t) - \sum_{j=0}^2 p_j^{(i)} \Phi_j(t, t_i). \quad (7.19)$$

Dąży się do zminimalizowania funkcji

$$I = \sum_{l=i-n}^{l=i+n} [R(f(t_l))]^2 = \sum_{l=i-n}^{l=i+n} \left( f(t_l) - \sum_{j=0}^2 p_j^{(i)} \Phi_j(t_l, t_i) \right)^2. \quad (7.20)$$

W tym celu musimy tak dobrać parametry  $p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}$ , aby spełniony był warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji  $I(p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)})$ , tj.

$$\frac{\partial I}{\partial p_k^{(i)}} = 0, \quad (7.21)$$

dla  $k = 0, 1, 2$ . Różniczkując wyrażenie (7.20) względem zmiennej  $p_k^{(i)}$ , otrzymamy

$$-2 \sum_{l=i-n}^{l=i+n} \left( f(t_l) - \sum_{j=0}^2 p_j^{(i)} \Phi_j(t_l, t_i) \right) \Phi_k(t_l, t_i) = 0, \quad (7.22)$$

dla  $k = 0, 1, 2$ . Po elementarnych przekształceniach otrzymamy układ trzech równań postaci

$$\sum_{j=0}^2 p_j^{(i)} \sum_{l=i-n}^{l=i+n} \Phi_k(t_l, t_i) \Phi_j(t_l, t_i) = \sum_{l=i-n}^{l=i+n} f(t_l) \Phi_k(t_l, t_i), \quad (7.23)$$

dla  $k = 0, 1, 2$ . Rozwiązaniem tego układu są poszukiwane parametry  $p_0^{(i)}, p_1^{(i)}$ , i  $p_2^{(i)}$ . Rozwiązania układu równań (7.23) można przedstawić jako kombinację liniową postaci

$$p_j^{(i)} = \sum_{l=-n}^n \hat{p}_j^{(l)} f(t_i + hl), \quad (7.24)$$

dla  $j = 0, 1, 2$ , gdzie symbolem  $p_j^{(i)}$  oznaczono współczynniki centralnego schematu aproksymującego pochodną  $j$ -tego rzędu. Współczynniki te w każdym przedziale  $[t_{i-n}, t_{i+n}]$  są takie same.

W tabelach 7.4 i 7.5 przedstawiono wartości współczynników  $\hat{p}_1^{(i)}$  oraz  $\hat{p}_2^{(i)}$  pomnożonych przez odpowiednio  $h$  i  $h^2$  i uzyskanych aproksymacyjną metodą najmniejszych kwadratów dla pochodnych pierwszego i drugiego rzędu. Dodatkowo, z układu równań (7.23) można otrzymać współczynniki  $\hat{p}_0^{(i)}$  wyglądające dane wejściowe. Ich wartości przedstawiono w Tab. 7.3.

Tabela 7.3. Wartości współczynników  $\hat{p}_0^{(i)}$  uzyskanych metodą aproksymacji

$n$	$t_{i-4}$	$t_{i-3}$	$t_{i-2}$	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$	$t_{i+2}$	$t_{i+3}$	$t_{i+4}$
1				0	1	0			
2			$-\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{12}{35}$	$-\frac{3}{35}$		
3		$-\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{21}$	
4	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{13}{77}$	$\frac{18}{77}$	$\frac{59}{231}$	$\frac{18}{77}$	$\frac{13}{77}$	$\frac{2}{33}$	$-\frac{1}{11}$

Tabela 7.4. Wartości współczynników  $\hat{p}_1^{(i)}$  pomnożonych przez  $h$  uzyskanych metodą aproksymacji dla pochodnej pierwszego rzędu

$n$	$t_{i-4}$	$t_{i-3}$	$t_{i-2}$	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$	$t_{i+2}$	$t_{i+3}$	$t_{i+4}$
1				$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
2			$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$		
3		$-\frac{3}{28}$	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{28}$	0	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	
4	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{60}$	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$

Tabela 7.5. Wartości współczynników  $\hat{p}_2^{(i)}$  pomnożonych przez  $h^2$  uzyskanych metodą aproksymacji dla pochodnej drugiego rzędu

$n$	$t_{i-4}$	$t_{i-3}$	$t_{i-2}$	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$	$t_{i+2}$	$t_{i+3}$	$t_{i+4}$
1				1	-2	1			
2			$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$		
3		$\frac{5}{42}$	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{14}$	0	$\frac{5}{42}$	
4	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{66}$	$-\frac{4}{231}$	$-\frac{17}{462}$	$-\frac{10}{231}$	$-\frac{17}{462}$	$-\frac{4}{231}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{2}{33}$



Tabela 7.6. Błędy względne dla schematów różnicowych wygenerowanych metodami interpolacji oraz aproksymacji

$n$	$r_I^0$	$r_A^0$	$r_I^1$	$r_A^1$	$r_I^2$	$r_A^2$
5	0.00149	0.00068	0.17411	0.01367	53.49973	1.02947
10	0.00149	0.00049	0.20353	0.00554	58.7789	0.18962
20	0.00149	0.00035	0.22103	0.00461	60.36986	0.03741

W celu porównania dokładności obliczania pochodnej pierwszego i drugiego rzędu za pomocą schematów różnicowych wyprowadzonych metodą interpolacyjną oraz aproksymacyjną wygenerowano zaburzone wartości funkcji  $f(t) = \sin t$  w 1000 punktach rozmieszczonych równomiernie z krokiem  $h = 0.01$  w przedziale  $[0, 10]$ . Zaburzenia funkcji uzyskano za pomocą próby losowej o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą wartości funkcji  $f(t_i)$ , gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, 1000$  oraz odchyleniu standardowym  $\sigma = 0.001$ . Wartość odchylenia standardowego  $\sigma$  jest zbliżona do dokładności urządzeń pomiarowych zastosowanych do wykonania doświadczeń opisanych w poprzednich rozdziałach. Pochodne obliczono przy zastosowaniu schematów różnicowych dla  $n = \{5, 10, 20\}$ .

W tabeli 7.6 zestawiono wartości błędu względnego dla wygładzonej funkcji (tylko w przypadku schematów aproksymacyjnych) oraz dla pochodnej pierwszego i drugiego rzędu przy zastosowaniu schematów różnicowych wygenerowanych metodami interpolacji oraz aproksymacji dla ustalonej liczby węzłów. Błędy względne dla podejścia interpolacyjnego  $r_I$  oraz aproksymacyjnego  $r_A$  obliczane są za pomocą normy  $l^2$ , zgodnie z poniższymi wzorami

$$r_I^{(k)} = \frac{\|e_I^{(k)}\|_{l^2}}{\|f^{(k)}(t_i)\|_{l^2}}, \quad r_A^{(k)} = \frac{\|e_A^{(k)}\|_{l^2}}{\|f^{(k)}(t_i)\|_{l^2}}, \quad (7.25)$$

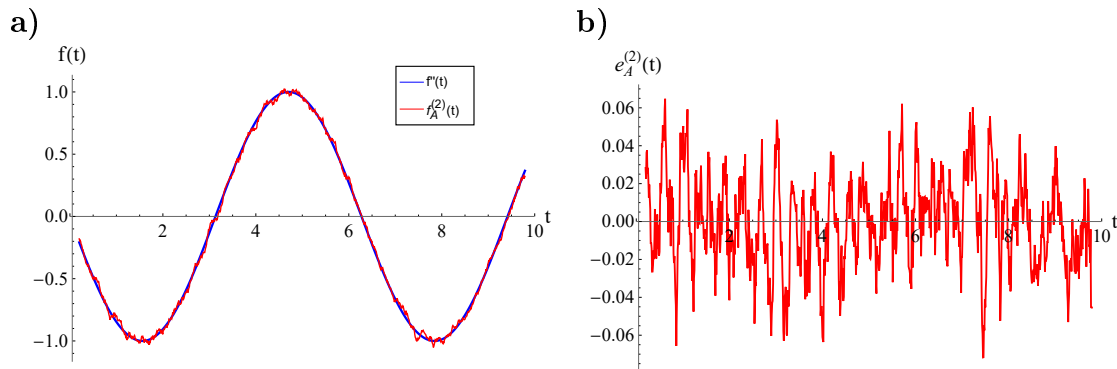
gdzie  $k = 0, 1, 2$  oznacza rząd pochodnej, a

$$e_I^{(k)}(t_i) = f_I^{(k)}(t_i) - f^{(k)}(t_i), \quad e_A^{(k)}(t_i) = f_A^{(k)}(t_i) - f^{(k)}(t_i), \quad (7.26)$$

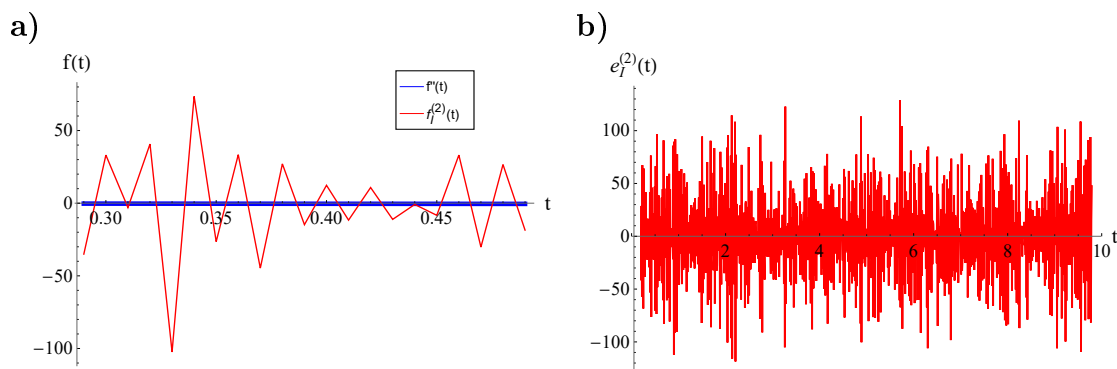
gdzie  $f_I^{(k)}$  i  $f_A^{(k)}$  oznaczają przybliżone wartości pochodnej rzędu  $k$  uzyskane odpowiednio metodami interpolacji i aproksymacji.

Na rysunkach 7.1a oraz 7.2a przedstawiono przybliżenie pochodnych drugiego rzędu dla zaburzonej funkcji  $f(t) = \sin t$  otrzymanych odpowiednio metodą aproksymacyjnych i interpolacyjnych schematów różnicowych. Rysunki 7.1b oraz 7.2b ilustrują różnice pomiędzy wartościami pochodnej drugiego rzędu dokładną, a przybliżoną uzyskaną metodą aproksymacyjną dla  $n = 20$ . Ze względu na dużą różnicę wartości pomiędzy funkcjami w metodzie interpolacyjnej przedstawiono losowy

przedział czasowy  $t \in [0.3; 0.5]$ . Wykres pochodnej drugiego rzędu  $f''(t) = -\sin t$  przyjmuje wartości z przedziału  $[-1, 1]$ , co znacząco odbiega od uzyskanych wyników metodą interpolacyjną, gdzie rezultaty osiągają nawet wartości stukrotnie większe niż oczekiwane (patrz Rys. 7.2b).



Rysunek 7.1. Wykres: **a)** pochodnej drugiego rzędu i jej przybliżenie metodą aproksymacyjną dla  $n = 20$ , **b)** różnicy pomiędzy wartościami pochodnej drugiego rzędu dokładną, a wartościami przybliżonymi uzyskanymi metodą aproksymacyjną dla  $n = 20$



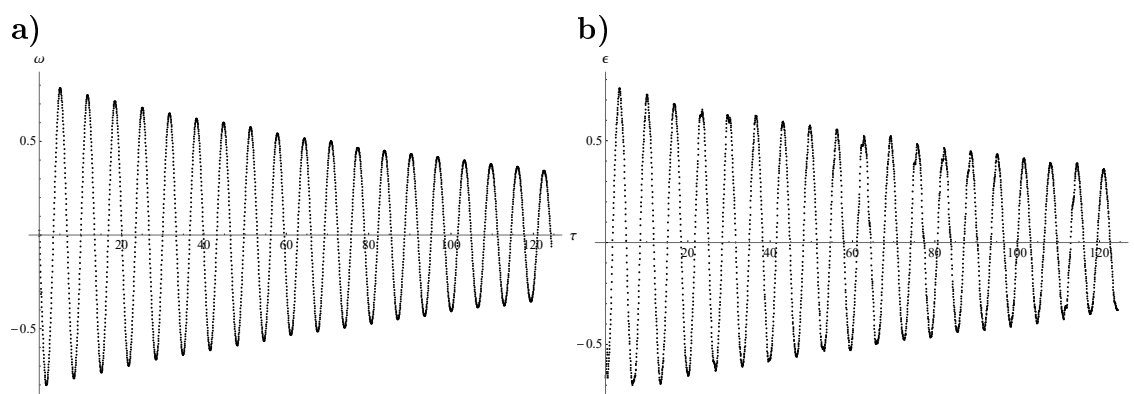
Rysunek 7.2. Wykres: **a)** pochodnej drugiego rzędu i jej przybliżenie metodą interpolacyjną dla  $n = 20$ , **b)** różnicy pomiędzy wartościami pochodnej drugiego rzędu dokładną, a wartościami przybliżonymi uzyskanymi metodą interpolacyjną dla  $n = 20$

W dalszej części pracy, ze względu na zdecydowaną przewagę schematów różnicowych wygenerowanych metodą aproksymacyjną nad schematami otrzymanymi drogą interpolacyjną, ograniczono się do zastosowania metody aproksymacyjnej.

### 7.3. Wyznaczanie prędkości kątowych i przyspieszeń kątowych wahadła

W celu oszacowania współczynników tłumienia, tj. wyznaczenia zakresu wartości, w których znajdują się optymalne wartości  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$ , postanowiono przeprowadzić identyfikację oraz estymację nieznanymi współczynników za pomocą metod analizy statystycznej, przyjmując jako kryterium spełnienie różniczkowych równań ruchu. Przedział, w którym mogą znajdować się współczynniki tłumienia wyznaczono jedynie dla wyników uzyskanych metodą gradientową, uwzględniając jednocześnie wszystkie możliwe konfiguracje początkowe  $k$  dla zagadnienia początkowego (4.37).

W pierwszym kroku należy obliczyć wektory prędkości i przyspieszeń kątowych. Oznaczmy przez  $\varphi_i^j$  wektor danych pomiarowych, gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , oznacza  $i$ -tą chwilę czasową pomiaru, a  $j = \{100, 150, 200, 300\}$  mm, jest długością wahadła. Poprzez obliczenie wartości pochodnych wektora  $\varphi_i^j$  względem bezwymiarowego czasu  $\tau$ , z zastosowaniem aproksymacyjnych centralnych schematów różnicowych (jakie wyprowadzono w rozdziale 7.2), otrzymano poszukiwane wektory  $\omega_i^j$  oraz  $\varepsilon_i^j$ . W celu dokładnego obliczenia pochodnych zastosowano schematy 17, 19, 21 i 31-punktowe dla odpowiednio wahadeł o długości 100, 150, 200 i 300 mm. Zróżnicowanie długości przedziału schematów aproksymacyjnych wynika z przeprowadzonej analizy błędów pomiędzy przybliżeniem numerycznym a wynikami doświadczalnymi. Dla wahadeł o większej długości konieczne było stosowanie szerszych schematów ze względu na mniej precyzyjne pomiary w eksperymencie. Wahadło o długości 300 mm było rejestrowane za pomocą szybkiej kamery z większej odległości niż wahadła krótsze. Zatem przyjęto  $n = \{8, 9, 10, 15\}$  we wzorze (7.14).



Rysunek 7.3. Wykres a) prędkości kątowej, b) przyspieszenia kątowego w zależności od bezwymiarowego czasu dla wahadła o długości 100 mm przy początkowym wychyleniu  $60^\circ$

Na rysunku 7.3 przedstawiono wykresy prędkości i przyspieszeń kątowych dla wahadła o długości  $L = 100$  mm i początkowym wychyleniu  $60^\circ$  wyznaczonych za pomocą centralnych aproksymacyjnych schematów różnicowych. Wykresy 7.3a oraz 7.3b przedstawiają odpowiednio pochodną pierwszego i drugiego rzędu obliczoną z danych pomiarowych zilustrowanych na Rys. 5.16. Ze względu na zastosowanie centralnych schematów różnicowych należało usunąć  $n$  pierwszych i  $n$  ostatnich chwil czasowych, co jest w szczególności widoczne na Rys. 7.3b, gdzie przesunięto początek fazy rejestracji.

#### 7.4. Identyfikacja współczynników trójparametrowego modelu siły oporu ośrodka poprzez minimalizację błędu spełnienia równań ruchu

W rozdziale 6 pracy zaprezentowano wyniki identyfikacji parametrów dla różnych modeli sił oporu. Ze względu na największą zbieżność modelu (4.37), tj. z trzema współczynnikami tłumienia, tylko to zagadnienie poddano kolejnej analizie za pomocą metody minimalizacji błędu spełnienia równań, przy pomocy której otrzymano oszacowanie badanych parametrów. Metoda ta pozwala na dokładniejsze dopasowanie modelu do danych empirycznych oraz zrozumienie, w jaki sposób poszczególne parametry wpływają na jego działanie.

Sformułujmy na podstawie równania (4.37) równania dyskretne postaci

$$(1 + \beta_a) \epsilon_i^j + \beta_1 \omega_i^j + \beta_2 |\omega_i^j| \omega_i^j + \sin(\varphi_i^j) = 0, \quad (7.27)$$

gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , oznacza  $i$ -tą chwilę czasową pomiaru, a  $j = \{100, 150, 200, 300\}$  mm, jest długością wahadła. W równaniu (7.27) uwzględniono trzy bezwymiarowe współczynniki tłumienia  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$ , a pochodne pierwszego i drugiego rzędu zastąpiono odpowiadającymi im wektorami prędkości i przyspieszenia kątowego. Oznaczmy przez

$$\mathbf{R}_i^j = -(\beta_1 \omega_i^j + \beta_2 |\omega_i^j| \omega_i^j + \beta_a \epsilon_i^j) \quad (7.28)$$

wartość siły oporu powietrza działającej na wahadło w  $i$ -tej chwili. Oznaczając symbolem

$$\mathbf{L}_i^j = \epsilon_i^j + \sin(\varphi_i^j) \quad (7.29)$$

wartość pozostałych składników równania (7.27) w  $i$ -tej chwili, równanie (7.27) zapiszemy następująco

$$\mathbf{L}_i^j = \mathbf{R}_i^j. \quad (7.30)$$

Metoda minimalizacji błędu spełnienia równań oparta jest na metodzie najmniejszych kwadratów, w której dąży się do minimalizacji funkcji następującej postaci:

$$I(\beta_1, \beta_2, \beta_a) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{L}_i^j - \mathbf{R}_i^j)^2. \quad (7.31)$$

W tym celu należy tak dobrać parametry  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$ , aby spełniony był warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału  $I(\beta_1, \beta_2, \beta_a)$ , tj.

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_p} = 0, \quad (7.32)$$

gdzie  $p = 1, 2, a$ . Różniczkując wyrażenie (7.31) względem zmiennych  $\beta_p$ , otrzymano następujący układ trzech równań liniowych postaci

$$\begin{cases} \beta_1 \boldsymbol{\omega}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j + \beta_2 |\boldsymbol{\omega}_i^j| \boldsymbol{\omega}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j + \beta_a \boldsymbol{\varepsilon}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j = -\mathbf{L}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j \\ \beta_1 \boldsymbol{\omega}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j |\boldsymbol{\omega}_i^j| + \beta_2 |\boldsymbol{\omega}_i^j| \boldsymbol{\omega}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j |\boldsymbol{\omega}_i^j| + \beta_a \boldsymbol{\varepsilon}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j |\boldsymbol{\omega}_i^j| = -\mathbf{L}_i^j \cdot \boldsymbol{\omega}_i^j |\boldsymbol{\omega}_i^j| \\ \beta_1 \boldsymbol{\omega}_i^j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i^j + \beta_2 |\boldsymbol{\omega}_i^j| \boldsymbol{\omega}_i^j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i^j + \beta_a \boldsymbol{\varepsilon}_i^j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i^j = -\mathbf{L}_i^j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i^j \end{cases}, \quad (7.33)$$

którego rozwiązaniem są poszukiwane współczynniki tłumienia  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  oraz  $\beta_a$  dla dowolnej długości wahadła  $j$ . Obliczone wartości współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$  przedstawiono w Tab. 7.7.

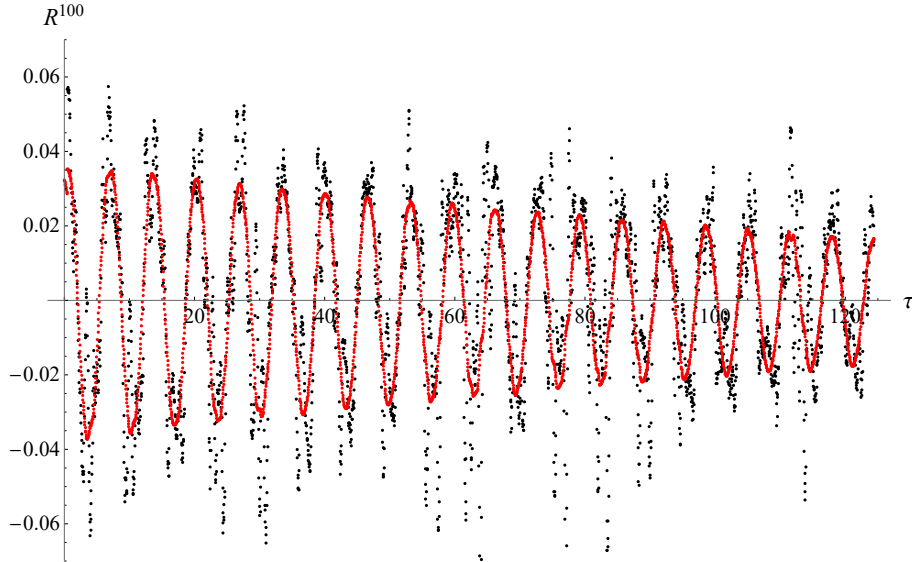
Tabela 7.7. Wartości współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$  otrzymane metodą minimalizacji błędu spełnienia równań.

$L$ [mm]	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_a$
100	$6.090 \cdot 10^{-3}$	$1.113 \cdot 10^{-2}$	$3.520 \cdot 10^{-2}$
150	$6.110 \cdot 10^{-3}$	$1.113 \cdot 10^{-2}$	$2.725 \cdot 10^{-2}$
200	$8.302 \cdot 10^{-3}$	$1.196 \cdot 10^{-2}$	$2.021 \cdot 10^{-2}$
300	$8.329 \cdot 10^{-3}$	$1.629 \cdot 10^{-2}$	$2.411 \cdot 10^{-2}$

Na rysunku 7.4 przedstawiono porównanie wartości wektora  $\mathbf{R}_i^j$  obliczonych z wzoru (7.28) (kolor czerwony) oraz wartości wektora  $\mathbf{L}_i^j$  z wzoru (7.29) (kolor czarny). Należy zwrócić uwagę, że oba wykresy mają malejącą amplitudę oraz wykazują zgodność fazy. Niedokładności wynikają z obliczenia pochodnej rzędu drugiego, która generuje największe błędy (tak jak pokazano w Rozdziale 7.2 dla funkcji  $\sin t$ ).

W tabeli 7.8 przedstawiono wartości normy w przestrzeni  $l^2$  każdego ze składników wzoru (7.28) obliczonej według następującej formuły:

$$\|v\|_{l^2} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}, \quad (7.34)$$



Rysunek 7.4. Wykres wektora  $\mathbf{R}_i^j$  obliczonego z wzoru (7.28) (kolor czerwony) oraz  $\mathbf{R}_i^j$  z wzoru (7.29) (kolor czarny) dla  $k = 1$ .

dla wahadła o każdej długości. Wartości współczynników przyjęto na podstawie wyników otrzymanych metodą minimalizacji błędu spełnienia równań, tj. zamieszczonych w Tab. 7.7.

Tabela 7.8. Wartości norm poszczególnych składników sił oporu powietrza

$L$ [mm]	$\ \beta_1 \boldsymbol{\omega}_i^j\ $	$\ \beta_2 \boldsymbol{\omega}_i^j  \boldsymbol{\omega}_i^j \ $	$\ \beta_a \boldsymbol{\epsilon}_i^j\ $
100	$3.862 \cdot 10^{-5}$	$7.518 \cdot 10^{-5}$	$1.900 \cdot 10^{-4}$
150	$4.377 \cdot 10^{-5}$	$8.744 \cdot 10^{-5}$	$1.682 \cdot 10^{-4}$
200	$6.951 \cdot 10^{-5}$	$1.079 \cdot 10^{-4}$	$1.458 \cdot 10^{-4}$
300	$7.035 \cdot 10^{-5}$	$1.483 \cdot 10^{-4}$	$1.754 \cdot 10^{-4}$

Można zauważyć, że najmniejsze wartości normy otrzymano dla składnika proporcjonalnego do prędkości. Wobec tego oszacowany przedział dla wartości współczynnika  $\beta_1$  będzie najszerszy. W celu oszacowania przedziałów dla współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$  wyznaczono wartości błędów z następującego wzoru [19]:

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{R}_i^j(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{L}_i^j)^2}{n - \hat{v}}} \text{cov}(\boldsymbol{\beta}) F^{-1}(t(\mu_0, \sigma_0, \hat{v}), \delta), \quad (7.35)$$

dla  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_a]$  i  $\Delta \boldsymbol{\beta} = [\Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_a]$ , gdzie wartości wektora  $\mathbf{R}_i^j(\boldsymbol{\beta})$  są wyrażone przez wzór (7.28) z parametrami przedstawionymi w Tab. 7.7, wartości wektora  $\mathbf{L}_i^j$  są wyznaczone zgodnie z wzorem (7.29),  $\text{cov}(\boldsymbol{\beta})$  jest wektorem kowariancji powstałym z układu równań (7.33), natomiast  $F^{-1}(t(\mu, \sigma, \hat{v}), \delta)$  oznacza odwrotną dys-

trybuantę standaryzowanego rozkładu t Studenta<sup>4</sup> o wartości oczekiwanej  $\mu_0 = 0$ , odchyleniu standardowym  $\sigma_0 = 1$ , liczbie stopni swobody  $\hat{v} = 3$  (ze względu na liczbę estymowanych parametrów) i przedziale ufności  $\delta = 0.95$ . Wektor kowariancji  $cov(\boldsymbol{\beta})$  jest przekątną macierzy odwrotnej do macierzy charakterystycznej układu równań (7.33). Wartość elementów tego wektora zależą od długości wahadła, współczynników  $\boldsymbol{\beta}$  oraz od zastosowanego schematu aproksymacyjnego.

Wartości wektora  $\Delta\boldsymbol{\beta}$  dla poszczególnych długości wahadła przedstawiono w Tab. 7.9. Na podstawie wartości współczynników  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$  otrzymanych za pomocą metody minimalizacji błędu spełnienia równań ruchu oraz odpowiadających im oszacowań  $\Delta\beta_1$ ,  $\Delta\beta_2$  i  $\Delta\beta_a$  uzyskano minimalne i maksymalne wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia, które zaprezentowano w Tab. 7.10.

Tabela 7.9. Wartości oszacowań  $\Delta\beta_1$ ,  $\Delta\beta_2$  i  $\Delta\beta_a$  otrzymane za pomocą wzoru (7.35)

$L$ [mm]	$\Delta\beta_1$	$\Delta\beta_2$	$\Delta\beta_a$
100	$4.236 \cdot 10^{-3}$	$3.931 \cdot 10^{-3}$	$1.744 \cdot 10^{-3}$
150	$4.498 \cdot 10^{-3}$	$4.050 \cdot 10^{-3}$	$1.811 \cdot 10^{-3}$
200	$3.671 \cdot 10^{-3}$	$3.199 \cdot 10^{-3}$	$1.486 \cdot 10^{-3}$
300	$2.765 \cdot 10^{-3}$	$2.459 \cdot 10^{-3}$	$1.105 \cdot 10^{-3}$

Należy zwrócić uwagę, że największe oszacowania występują dla współczynnika  $\beta_1$ . Związane jest to z tym, że wartość normy składnika siły oporu proporcjonalnego do prędkości osiąga najmniejszą wartość, więc wpływ błędów pomiarowych, błędów aproksymacji i uproszczeń modelowych jest w przypadku tego współczynnika najbardziej znaczący.

Należy dodać, że przedziały ufności dla współczynnika  $\beta_1$  są szerokie, to znaczy błąd względny oszacowań wynosi między 20%, a 40%. Przedziały dla współczynników  $\beta_2$  i  $\beta_a$  są natomiast zdecydowanie mniejsze i ich błąd względny w przybliżeniu wynosi do 5%. Błędy te wynikają z różniczkowania numerycznego, które generuje znaczący błąd, zwłaszcza przy obliczaniu pochodnej drugiego rzędu. Dodatkowym aspektem generującym tak duży przedział jest wzięcie pod uwagę wszystkich konfiguracji początkowych  $k$  w jednym badaniu statystycznym. Niemniej jednak, wartości wszystkich współczynników trójparametrowego modelu siły oporu powietrza wyznaczone metodą gradientową należą do odpowiednich przedziałów wyspecyfikowanych

<sup>4</sup> Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe w standaryzowanym rozkładzie t Studenta przyjmują zawsze wartości odpowiednio 0 i 1.

Tabela 7.10. Minimalne i maksymalne wartości współczynników tłumienia  $\beta_1$   $\beta_2$  oraz  $\beta_a$ .

	$L = 100$ mm		$L = 150$ mm	
	$\beta^{min}$	$\beta^{max}$	$\beta^{min}$	$\beta^{max}$
$\beta_1$	$1.930 \cdot 10^{-3}$	$1.040 \cdot 10^{-2}$	$1.612 \cdot 10^{-3}$	$1.061 \cdot 10^{-2}$
$\beta_2$	$7.207 \cdot 10^{-3}$	$1.507 \cdot 10^{-3}$	$7.278 \cdot 10^{-3}$	$1.538 \cdot 10^{-2}$
$\beta_a$	$3.335 \cdot 10^{-2}$	$3.694 \cdot 10^{-2}$	$2.543 \cdot 10^{-2}$	$2.906 \cdot 10^{-2}$
	$L = 200$ mm		$L = 300$ mm	
	$\beta^{min}$	$\beta^{max}$	$\beta^{min}$	$\beta^{max}$
$\beta_1$	$4.631 \cdot 10^{-3}$	$1.197 \cdot 10^{-2}$	$5.564 \cdot 10^{-3}$	$1.109 \cdot 10^{-2}$
$\beta_2$	$8.760 \cdot 10^{-3}$	$1.516 \cdot 10^{-2}$	$1.383 \cdot 10^{-2}$	$1.875 \cdot 10^{-2}$
$\beta_a$	$1.872 \cdot 10^{-2}$	$2.170 \cdot 10^{-2}$	$2.300 \cdot 10^{-2}$	$2.521 \cdot 10^{-2}$

w Tab. 7.10 i wyznaczonych metodą minimalizacji błędu spełnienia różniczkowych równań ruchu wahadła.



# 8. Identyfikacja parametrów dla modelu siły oporu z trzema parametrami w ruchu przestrzennym z ruchomym punktem zawieszenia

## 8.1. Wprowadzenie

W rozdziale czwartym wyprowadzono równania ruchu, które stanowią matematyczną podstawę opisu zachowania wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. Przedstawiono zarówno równania dla ruchu nieustalonego, jak i ustalonego. W ruchu ustalonym wahadła współrzędne uogólnione  $\alpha$  i  $\beta$  pozostają stałe w czasie, a równania ruchu (4.77)–(4.78) upraszczają się do równań algebraicznych (4.98)–(4.99). W rozdziale piątym omówiono przeprowadzony eksperyment, w którym rejestrowano ruch ustalony wahadła, wyznaczając wartości kątów  $\alpha_u$  i  $\beta_u$  w zależności od długości wahadła oraz od parametrów wymuszenia kinematycznego (patrz Tab. 5.5).

Biorąc pod uwagę spostrzeżenia wynikające z weryfikacji rozpatrywanych trzech modeli siły oporu w doświadczeniach z wahadłem w ruchu płaskim, w niniejszym rozdziale skupimy się na identyfikacji współczynników tylko dla trójparametrowego modelu siły oporu. Identyfikacja została przeprowadzona na podstawie pomiarów współrzędnych uogólnionych i parametrów wymuszenia kinematycznego dla stanu ustalonego. Jako metodę optymalizacji zastosowano metodę najmniejszych kwadratów.

Ze względu na dużą czułość zagadnienia identyfikacji na błędy pomiarowe, których z uwagi na pewne ograniczenia nie można było wyeliminować, uzyskane wyniki okazały się niewiarygodne. Z tego powodu przeprowadzono numeryczną symulację eksperymentu. Przyjmując wartości współczynników trójparametrowego modelu z doświadczeń wykonanych dla wahadła w ruchu płaskim, rozwiązano zagadnienie ruchu wahadła (4.77)–(4.78) z warunkami początkowymi (4.96)–(4.97). Na skutek dyssypacji energii ruch układu po pewnym czasie osiąga stan ustalony. Zaburzone w sposób losowy wartości współrzędnych punktów odpowiadających lokalizacji markerów na przecie zostały przyjęte jako dane w procesie identyfikacji współczynników

modelu siły oporu powietrza. Przeprowadzenie takiej symulacji pozwoliło przetestować proponowaną metodę.

## 8.2. Sformułowanie zagadnienia optymalizacji

W celu identyfikacji współczynników tłumienia  $c_1$ ,  $c_2$  oraz  $c_a$  dla równań ruchu (4.98)–(4.99) w stanie ustalonym w ruchu przestrzennym wahadła z ruchomym punktem zawieszenia zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Metodę tę zaprezentowano już w rozdziale 7.4. Zaproponowana we wcześniejszych rozdziałach metoda gradientowa nie może zostać zastosowana, ponieważ równania ruchu w stanie ustalonym nie zawierają pochodnych. Również metoda bisekcji nie znajduje dla tego układu zastosowania ze względu na brak unimodalności rozwiązania przy zagadnieniu, w którym identyfikowane są trzy parametry.

Oznaczmy przez  $L_1$  i  $R_1$  oraz przez  $L_2$  i  $R_2$  odpowiednio lewą i prawą stronę równań (4.98) i (4.99), tzn.

$$L_1^{\{k,L\}} = \frac{1}{2}mgL \sin \alpha_u - \frac{1}{2}m\omega^2 RL \cos \alpha_u \cos \beta_u - \left( \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{8}mL^2 \right) \omega^2 \sin(2\alpha_u), \quad (8.1)$$

$$L_2^{\{k,L\}} = \frac{1}{2}m\omega^2 RL \sin \alpha_u \sin \beta_u, \quad (8.2)$$

$$R_1^{\{k,L\}} = \hat{Q}_{\alpha_u}^{(1)} = \frac{1}{6}c_a L^2 \omega^2 \cos \alpha_u (3R \cos \beta_u + 2L \sin \alpha_u) - \frac{1}{2}c_1 L^2 \omega R \cos \alpha_u \sin \beta_u + w_{\alpha_u} c_2, \quad (8.3)$$

$$R_2^{\{k,L\}} = \hat{Q}_{\beta_u}^{(1)} = -\frac{1}{2}c_a L^2 \omega^2 R \sin \alpha_u \sin \beta_u - \frac{1}{6}c_1 L^2 \sin \alpha_u (3\omega R \cos \beta_u + 2L\omega \sin \beta_u) + w_{\beta_u} c_2, \quad (8.4)$$

gdzie  $w_\alpha$  i  $w_\beta$  oznaczają wartości całek występujących odpowiednio w równaniach (C.9) i (C.10) (patrz Dodatek C – ze względu na rozbudowaną formę wzorów postanowiono ich nie prezentować w pracy), natomiast  $k = \{1, 2, 3, 4\}$  oznacza przypisaną do długości wahadła prędkość kątową  $\omega$  silnika krokowego. Należy zwrócić uwagę, że wszystkie wielkości występujące w równaniach (8.1)–(8.2) są znane. Identyfikację parametrów tłumienia przeprowadzono dla czterech długości wahadła  $L = \{100, 150, 200, 300\}$  mm. Wartość masy  $m$  i momentu bezwładności  $I_0$  w zależności od długości wahadła  $L$  przedstawiono w Tab. 5.2 (wyznaczone na podstawie obliczeń opisanych w Dodatku A), wartości prędkości kątowej  $\omega$  tarczy zaprezentowano w Tab. 5.4, a wartości współrzędnych uogólnionych  $\alpha$  i  $\beta$  przedstawiono w Tab.

5.5. Przyspieszenie ziemskie jest równe  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , a promień tarczy, po której porusza się punkt zawieszenia, jest równy  $R = 37 \text{ mm}$ . W związku z powyższym wartości wyrażeń  $L_1^{\{k,L\}}$  i  $L_2^{\{k,L\}}$  dla każdej pary  $(k, L)$  przyjmują stałą wartość.

Identyfikację parametrów  $c_1, c_2$  oraz  $c_a$  przeprowadzono dla każdej długości wahadła  $L$  uwzględniając wyniki uzyskane dla czterech prędkości kątowych  $k$ . Ze względu na znaczącą różnicę wartości wyrażeń  $L_1^{\{k,L\}}$  i  $L_2^{\{k,L\}}$  wprowadzono do funkcji celu współczynniki wagowe  $w_1^{\{k,L\}}$  i  $w_2^{\{k,L\}}$ , które określone są następująco:

$$w_1^{\{k,L\}} = \frac{\max_{k,L}\{|L_1^{\{k,L\}}|, |L_2^{\{k,L\}}|\}}{|L_1^{\{k,L\}}|}, \quad (8.5)$$

$$w_2^{\{k,L\}} = \frac{\max_{k,L}\{|L_1^{\{k,L\}}|, |L_2^{\{k,L\}}|\}}{|L_2^{\{k,L\}}|}. \quad (8.6)$$

Funkcję celu dla wahadła o długości  $L$  zdefiniowano następująco:

$$f_L = \sum_{k=1}^4 \left[ w_1^{\{k,L\}} \left( L_1^{\{k,L\}} - R_1^{\{k,L\}} \right)^2 + w_2^{\{k,L\}} \left( L_2^{\{k,L\}} - R_2^{\{k,L\}} \right)^2 \right]. \quad (8.7)$$

W metodzie najmniejszych kwadratów dąży się do minimalizacji funkcji (8.7). W tym celu należy dobrać tak parametry  $c_1, c_2$  i  $c_a$ , aby spełniony był warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji  $f_L$ , tj.

$$\frac{\partial f_L}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial f_L}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial f_L}{\partial c_a} = 0. \quad (8.8)$$

Równania (8.8) tworzą układ trzech równań algebraicznych z trzema niewiadomymi. Jego rozwiązaniem są poszukiwane parametry trójparametrowego modelu siły oporu.

### 8.3. Wyniki identyfikacji na podstawie danych eksperymentalnych

Wyniki optymalizacji przeprowadzonej zgodnie z algorytmem opisanym w rozdziale 8.2, w której otrzymano wartości współczynników  $c_1, c_2$  oraz  $c_a$ , przedstawiono w Tab. 8.1. Oprócz wartości współczynników tłumienia, przedstawiono wartość funkcji celu  $f_L$  na podstawie każdej długości wahadła  $L$ .

Należy zwrócić uwagę, że podane w Tab. 8.1 wartości funkcji celu są zbliżone do zera, co może świadczyć o poprawnym przebiegu procedury optymalizacji. Współczynnik  $c_a$  dla wahadła o każdej długości przyjmuje wartości ujemne, co jest nieuzasadnione z fizycznego punktu widzenia i świadczy o tym, że pomiary obciążone były zbyt dużym błędem, którego nie udało się wyeliminować, powtarzając

Tabela 8.1. Wartości współczynników  $c_1$ ,  $c_2$  oraz  $c_a$  i odpowiadające im wartości funkcji celu (8.7). Wyniki uzyskane metodą najmniejszych kwadratów dla danych doświadczalnych.

	$L = 100 \text{ mm}$	$L = 150 \text{ mm}$	$L = 200 \text{ mm}$	$L = 300 \text{ mm}$
$c_1 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \right]$	$-1.261 \cdot 10^{-3}$	$2.526 \cdot 10^{-3}$	$3.896 \cdot 10^{-4}$	$3.455 \cdot 10^{-5}$
$c_2 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$	$1.280 \cdot 10^{-3}$	$-5.769 \cdot 10^{-4}$	$1.000 \cdot 10^{-3}$	$9.243 \cdot 10^{-4}$
$c_a \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$	$-5.966 \cdot 10^{-2}$	$-3.217 \cdot 10^{-2}$	$-4.402 \cdot 10^{-2}$	$-3.808 \cdot 10^{-2}$
$f_L$	$5.394 \cdot 10^{-8}$	$4.559 \cdot 10^{-8}$	$1.517 \cdot 10^{-7}$	$1.792 \cdot 10^{-7}$

eksperyment. W sytuacji, gdy jeden z identyfikowanych współczynników modelu nie spełnia oczekiwanych warunków, wartości pozostałych współczynników należy także uznać za niewiarygodne.

W celu weryfikacji otrzymanych wyników, postanowiono poddać optymalizacji te same dane pomiarowe i tę samą funkcję celu przy użyciu funkcji *FindMinimum* programu *Mathematica*, ale z warunkami, że wszystkie identyfikowane parametry są dodatnie. Wartości parametru  $c_a$  w każdym badanym przypadku były bliskie zero, a wartość funkcji celu była o trzy rzędy wielkości większa niż w wynikach przedstawionych w Tab. 8.1.

#### 8.4. Wyniki identyfikacji współczynników tłumienia na podstawie numerycznej symulacji eksperymentu

Wyniki identyfikacji na podstawie danych doświadczalnych przyniosły wiele wątpliwości co do metody optymalizacji lub poprawności danych uzyskanych z pomiaru. W związku z tym postanowiono rozwiązać zagadnienie początkowe wahadła z ruchomym punktem zawieszenia, a następnie wygenerować numerycznie współrzędne punktów markerów – tych samych jakie uzyskano w eksperymencie.

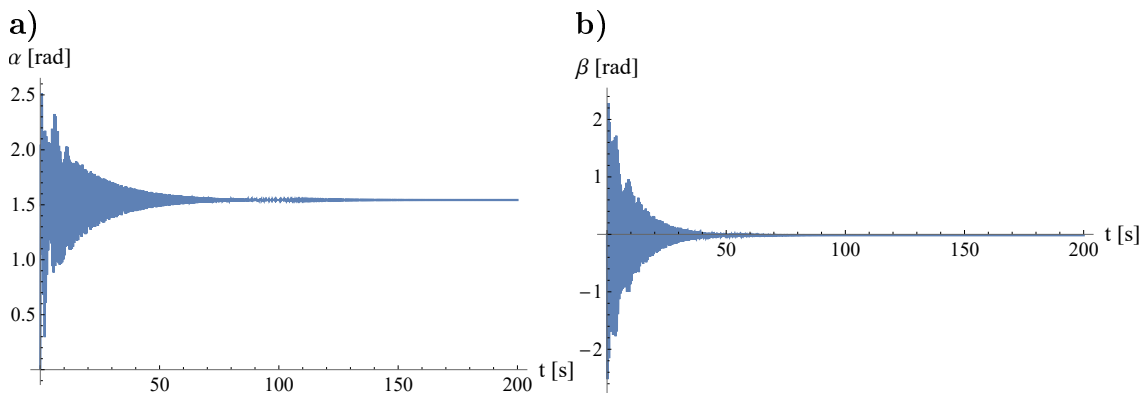
Zagadnienie ruchu wahadła z ruchomym punktem zawieszenia w stanie nieustalonym jest zbudowane z równań ruchu (4.77)–(4.78) oraz z warunków początkowych (4.95)–(4.97). W zagadnieniu początkowych prostym (zwanym również jako zagadnieniem bezpośrednim) celem jest znalezienie rozwiązania równania różniczkowego, czyli współrzędnych uogólnionych  $\alpha$  i  $\beta$  w czasie, gdy znane są wszystkie warunki początkowe oraz parametry równania. W równaniach ruchu w stanie nieustalonym nieznane są jedynie współczynniki tłumienia  $c_1$ ,  $c_2$  oraz  $c_a$ . W związku z tym postanowiono przyjąć te parametry na podstawie wyników uzyskanych dla optymalizacji gradientowej wahadła w ruchu płaskim (patrz Tab. 6.5). Bezwymiarowe

współczynniki  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_a$  przeliczono za pomocą formuł (4.38) na odpowiadające im współczynniki wymiarowe i ich wartości zaprezentowano w Tab. 8.2.

Tabela 8.2. Zastosowane wartości współczynników  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_a$  do rozwiązania układu równań różniczkowych (4.77)–(4.78) z warunkami początkowymi (4.95)–(4.97).

	$L = 100 \text{ mm}$	$L = 150 \text{ mm}$	$L = 200 \text{ mm}$	$L = 300 \text{ mm}$
$c_1 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \right]$	$9.489 \cdot 10^{-3}$	$4.760 \cdot 10^{-3}$	$4.817 \cdot 10^{-3}$	$3.172 \cdot 10^{-3}$
$c_2 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$	$2.260 \cdot 10^{-2}$	$1.118 \cdot 10^{-2}$	$7.674 \cdot 10^{-3}$	$5.418 \cdot 10^{-3}$
$c_a \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$	$4.337 \cdot 10^{-1}$	$1.789 \cdot 10^{-1}$	$8.336 \cdot 10^{-2}$	$5.961 \cdot 10^{-2}$

Warunki początkowe dla równań ruchu w stanie nieustalonym przyjęto zero, tzn. wahadło w chwili początkowej znajdowało się w spoczynku. Jediną niezbędną modyfikacją w warunkach początkowych było zastąpienie prędkości w chwili  $t = 0$  impulsem (patrz Rozdział 4.2.2) ze względu na osobliwość przy rozwiązywaniu zagadnienia w tej chwili. Zagadnienie początkowe rozwiązano numerycznie za pomocą funkcji *NDSolve* programu *Mathematica*, która realizowała algorytm Adamsa-Bashfortha. Przykładowe rozwiązanie dla  $L = 100 \text{ mm}$ ,  $\omega = 3.53 \text{ obr/s}$  i współczynników tłumienia zaprezentowanych w Tab. 8.2 przedstawiono na Rys. 8.1.



Rysunek 8.1. Rozwiązanie numeryczne układu przestrzennego z ruchomym punktem zawieszenia dla wahadła o długości  $L = 100 \text{ mm}$  i  $k = 1$ : **a)** współrzędna uogólniona  $\alpha(t)$ , **b)** współrzędna uogólniona  $\beta(t)$ . Rozwiązanie uzyskane w przedziale  $t \in [0, 200] \text{ s}$ .

Wykresy  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$  przedstawione na Rys. 8.1 charakteryzują się uzyskaniem stanu ustalonego. Ich wartości w chwili  $t = 200 \text{ s}$  dla różnych prędkości obrotowej punktu zawieszenia  $k$  zaprezentowano w Tab. 8.3.

Porównując wyniki z wynikami uzyskanymi z pomiarów (patrz Tab. 5.5) można zauważyć spadek kąta  $\alpha$  i wzrost kąta  $\beta$  wraz ze zmniejszaniem prędkości kątowej

Tabela 8.3. Wartości  $\alpha$  i  $\beta$  dla wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. Wyniki otrzymane z wyników numerycznych

$k$	$L = 100$ mm				$L = 150$ mm			
	$\alpha$ [rad]	$\alpha$ [deg]	$\beta$ [rad]	$\beta$ [deg]	$\alpha$ [rad]	$\alpha$ [deg]	$\beta$ [rad]	$\beta$ [deg]
1	1.5539	89.03	-0.0289	-1.657	1.5450	88.52	-0.0479	-2.747
2	1.5363	88.02	-0.0303	-1.737	1.5181	86.98	-0.0497	-2.850
3	1.5169	86.91	-0.0315	-1.803	1.4884	85.277	-0.0511	-2.930
4	1.4932	85.55	-0.0326	-1.867	1.4520	83.195	-0.0524	-3.003
$k$	$L = 200$ mm				$L = 300$ mm			
	$\alpha$ [rad]	$\alpha$ [deg]	$\beta$ [rad]	$\beta$ [deg]	$\alpha$ [rad]	$\alpha$ [deg]	$\beta$ [rad]	$\beta$ [deg]
1	1.5248	87.364	-0.0845	-4.839	1.5081	86.41	-0.1329	-7.613
2	1.4989	85.881	-0.0869	-4.981	1.4728	84.39	-0.1360	-7.792
3	1.4584	83.560	-0.0898	-5.145	1.4295	81.91	-0.1386	-7.940
4	1.4088	80.716	-0.0922	-5.283	1.3782	78.96	-0.1403	-8.041

tarczy  $\omega$ . Dla wyników otrzymanych z doświadczenia nie znaleziono żadnej tendencji w zachowaniu się współrzędnej uogólnionej  $\beta$ . Wartości kąta  $\beta$  są do siebie zbliżone w obu badanych przypadkach, natomiast dla kąta  $\alpha$  otrzymano mniejszą różnicę dla wyników uzyskanych numerycznie niż w przypadku eksperymentalnym w zależności od prędkości  $\omega$ . Może być to spowodowane nieprawidłowym doбором współczynników tłumienia, które przyjęto z wyników uzyskanych dla wahadła w ruchu płaskim. Współczynniki te dla wahadła z ruchomym punktem zawieszenia mogą w rzeczywistości przyjmować inne wartości.

W dalszym kroku współrzędne położenia markerów  $A$  i  $B$  wygenerowano w zaburzony sposób losowy. Niech

$$\mathbf{P}_A(t) = \{x_A(t), y_A(t), z_A(t)\}, \quad \mathbf{P}_B(t) = \{x_B(t), y_B(t), z_B(t)\} \quad (8.9)$$

będą współrzędnymi odpowiednio markera  $A$  i  $B$  otrzymanymi z rozwiązania numerycznego zagadnienia początkowego w stanie nieustalonym dla wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. W celu otrzymania współrzędnych dyskretnych o częstotliwości zgodnej z systemem BTS, przyjęto

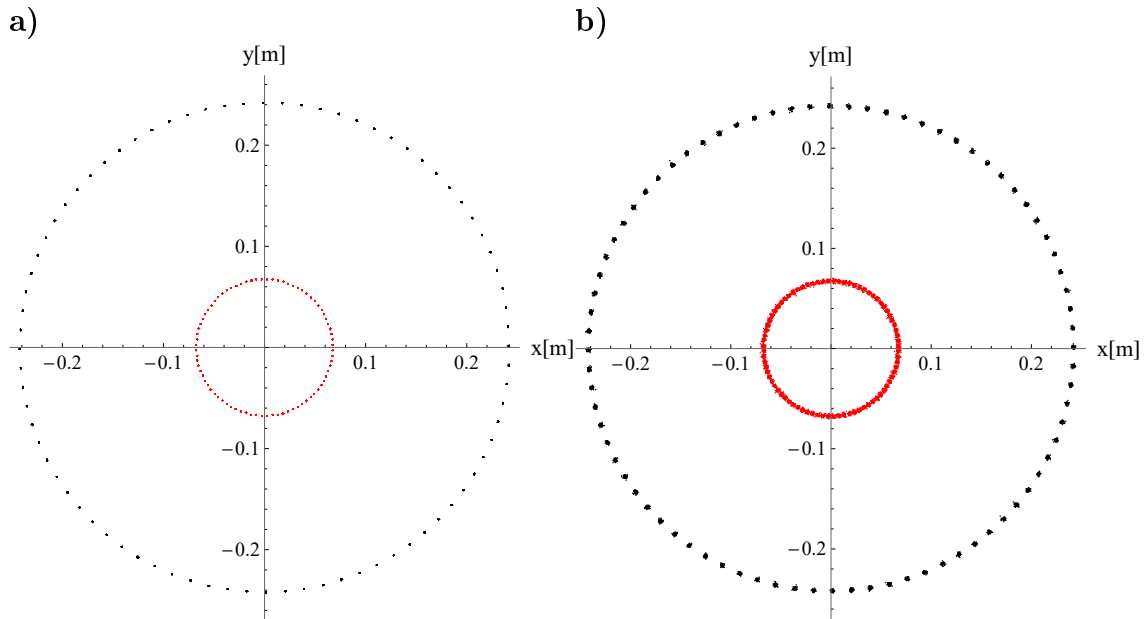
$$\mathbf{t} = \{0.004(i - 1)\} \quad (8.10)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, N$ , gdzie  $N = 50000$  oznacza końcową klatkę dla rozwiązania numerycznego odpowiadającą  $t = 200$  s. Współrzędne markerów  $A$  i  $B$  będące wektorem

losowym o rozkładzie normalnym można zapisać w następujący sposób:

$$\hat{\mathbf{P}}_A(\mathbf{t}) \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_0), \quad \hat{\mathbf{P}}_B(\mathbf{t}) \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_0), \quad (8.11)$$

gdzie  $\mu_A$  i  $\mu_B$  są wektorami wartości oczekiwanych i wynoszą odpowiednio  $\mathbf{P}_A(\mathbf{t})$  oraz  $\mathbf{P}_B(\mathbf{t})$ , a  $\sigma_0$  jest odchyleniem standardowym. Następnie zaburzone losowe wektory markerów  $A$  i  $B$  skrócono do stanu ustalonego, czyli do ostatnich 50 sekund rozwiązania numerycznego (patrz Rys. 8.1), tzn.  $i = 37501, 37502, \dots, N$  dla wzoru (8.10). Na rysunku 8.2 porównano położenia współrzędnych markerów  $\mathbf{P}_A(\mathbf{t})$  i  $\mathbf{P}_B(\mathbf{t})$  otrzymanych z rozwiązania numerycznego zagadnienia początkowego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia z losowymi współrzędnymi markerów  $\hat{\mathbf{P}}_A(\mathbf{t})$  i  $\hat{\mathbf{P}}_B(\mathbf{t})$  (dla ostatnich 50 sekund rozwiązania numerycznego) dla wahadła o długości  $L = 200$  mm i  $k = 1$ . Wartość odchylenia standardowego przyjęto na podstawie dokładności pomiaru przez system BTS ( $\sigma_0 = 0.001$ ).



Rysunek 8.2. Położenie markera  $A$  (bliżej osi obrotu) i markera  $B$  (dalej od osi obrotu) dla wahadła o długości  $L = 200$  mm i  $k = 1$ : **a)** dla rozwiązania numerycznego, **b)** zaburzonego losowego rozwiązania numerycznego. Rozwiązanie uzyskane w przedziale  $t \in [150, 200]$  s.

Należy zwrócić uwagę, że punkty  $A$  i  $B$  na Rys. 8.2a układają się na okręgu w równych odstępach czasowych. Przyjęcie takich danych do identyfikacji parametrów tłumienia spowoduje, że rozwiązanie zagadnienia odwrotnego może być bardzo bliskie do przyjętych współczynników tłumienia przy rozwiązywaniu numerycznym zagadnienia początkowego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. W celu przy-

bliznienia procesu z doświadczenia przyjęto do analizy odwrotnej losowe (zaburzone) dane z rozwiązania numerycznego.

Do wyznaczenia współczynników tłumienia  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_a$  zastosowano metodę najmniejszych kwadratów z funkcją celu opisaną wzorem (8.7). Wyniki identyfikacji przedstawiono w Tab. 8.4.

Tabela 8.4. Wartości współczynników  $c_1$ ,  $c_2$  oraz  $c_a$  i odpowiadające im wartości funkcji celu. Wyniki uzyskane metodą najmniejszych kwadratów dla zaburzonych w sposób losowy danych z rozwiązania numerycznego

	$L = 100 \text{ mm}$	$L = 150 \text{ mm}$	$L = 200 \text{ mm}$	$L = 300 \text{ mm}$
$c_1 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \right]$	$2.120 \cdot 10^{-2}$	$7.097 \cdot 10^{-3}$	$5.235 \cdot 10^{-3}$	$2.570 \cdot 10^{-3}$
$c_2 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$	$7.373 \cdot 10^{-2}$	$2.579 \cdot 10^{-2}$	$1.210 \cdot 10^{-2}$	$4.197 \cdot 10^{-3}$
$c_a \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$	$7.848 \cdot 10^{-1}$	$2.400 \cdot 10^{-1}$	$7.582 \cdot 10^{-2}$	$7.175 \cdot 10^{-2}$
$f_L$	$9.419 \cdot 10^{-10}$	$1.429 \cdot 10^{-9}$	$1.668 \cdot 10^{-9}$	$4.100 \cdot 10^{-9}$

Wyniki przedstawione w Tab. 8.4 świadczą o tym, że proces identyfikacji jest bardzo czuły na zaburzenia. Porównując wyniki identyfikacji z współczynnikami założonymi w procesie rozwiązywania zagadnienia początkowego można zauważyć, że w niektórych przypadkach błąd względny wynosi powyżej 100% (patrz  $c_2$  dla  $L = 100 \text{ mm}$ ). Dla wahadła o większych długościach błąd względny jest zbliżony do 20%. Może to świadczyć, że zaburzenia pomiaru na małej odległości powodują większą niedokładność rozwiązania. Pozycjonowanie markerów przez system BTS jest na poziomie dokładności do 1 mm. Wliczając dodatkowo: stosunkowo dużą prędkość ruchu układu, małe odległości pomiędzy markerami, minimalne drgania ramy do której zawieszony był układ, stosunkowo małe pomieszczenie, w którym przeprowadzone było doświadczenie i wysokie umiejscowienie kamer względem badanego układu (kamery nie zawsze rejestrowały marker w wyniku przesłonięcia przez ramę układu, przez co niektóre współrzędne należało interpolować) układ mógł być narażony na jeszcze większe różnice dokładności w rejestracji. Być może identyfikacja współczynników tłumienia w stanie ustalonym nie jest również najlepszym wyborem. Przeprowadzając procedurę wyznaczania parametrów na podstawie danych pochodzących z rejestracji ruchu nieustalonego mamy więcej danych tworzących przestrzeń, którą można przeszukiwać na przykład metodami gradientowymi. Niemniej, wyniki uzyskane dla danych otrzymanych poprzez numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia świadczą o poprawności zastosowanej metody optymalizacyjnej.



## 9. Zastosowanie wyników estymacji w metodzie wielu skal w dziedzinie czasu

### 9.1. Aproksymacja nieliniowości

W tym rozdziale przedstawiono zastosowanie jednej z metod asymptotycznych do rozwiązywania równań różniczkowych nieliniowych. Idea metody wielu skal zostanie tutaj opisana w związku z jej zastosowaniem do przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego ruchu wahadła fizycznego, którego równanie zostało wyprowadzone w rozdziale 4.1. Przykłady zastosowań metody wielu skal można znaleźć w [4, 26, 79, 80, 87, 88].

Metoda wielu skal wymaga przybliżenia wszystkich nieliniowości o charakterze trygonometrycznym postacią wielomianową. Najczęściej wykorzystuje się do tego celu rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. W rozważanym równaniu występuje funkcja sinus, więc przyjmując, zgodnie z rozwinięciem w szereg Taylora wokół punktu  $\varphi = 0$ , że

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \quad (9.1)$$

otrzymamy następującą przybliżoną postać równania (4.34)

$$\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + c\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \varphi(\tau) - \frac{\varphi^3(\tau)}{6} = f \cos(p_1\tau). \quad (9.2)$$

Z pewnych względów celowe jest przedstawienie funkcji cosinus w postaci wykładniczej. Stosując wzór Eulera dla cosinusa [53], tzn.

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad (9.3)$$

otrzymamy

$$\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \alpha_1\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \alpha_2\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \left| \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right| + \varphi(\tau) - \frac{\varphi^3(\tau)}{6} = f \left( \frac{e^{ip_1\tau} + e^{-ip_1\tau}}{2} \right). \quad (9.4)$$

### 9.2. Zdefiniowanie pochodnych dla nowych zmiennych

W metodzie wielu skal ewolucję układu dynamicznego w czasie opisuje się za pomocą kilku zmiennych o charakterze czasowym  $\tau_i = \varepsilon^i\tau$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , gdzie  $\varepsilon$  jest

małym parametrem  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Automatycznie wszystkie funkcje zależne od czasu stają się funkcjami nowych zmiennych czasowych, a pochodne względem pierwotnego czasu  $\tau$  są zastępowane następującymi operatorami różniczkowania cząstkowego [68] (na mocy reguły łańcuchowej)

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_0} \frac{\partial\tau_0}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} \frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} \frac{\partial\tau_2}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_3} \frac{\partial\tau_3}{\partial\tau} + \dots = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} \varepsilon + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} \varepsilon^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_3} \varepsilon^3 + \dots \quad (9.5)$$

oraz

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_0} \right) + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} \varepsilon \right) + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} \varepsilon^2 \right) + \dots \quad (9.6)$$

Poszczególne składniki wyrażenia (9.6) mają postać

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_0} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_0} \varepsilon + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_0} \varepsilon^2 + \dots \quad (9.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} \varepsilon \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_1} \varepsilon + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1^2} \varepsilon^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_1} \varepsilon^3 + \dots \quad (9.8)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} \varepsilon^2 \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_2} \varepsilon^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_2} \varepsilon^3 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2^2} \varepsilon^4 + \dots \quad (9.9)$$

Wstawiając zależności (9.7)–(9.9) równania do (9.6) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_0} \varepsilon + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_0} \varepsilon^2 + \dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_1} \varepsilon + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1^2} \varepsilon^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_1} \varepsilon^3 + \dots \\ & + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_2} \varepsilon^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_2} \varepsilon^3 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2^2} \varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (9.10)$$

Grupując składniki występujące po lewej stronie równania względem  $\varepsilon^i$ , gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots$  dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_0} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_0} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_2} \right) \\ & + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_3\partial\tau_0} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0\partial\tau_3} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (9.11)$$

co po uwzględnieniu twierdzenia Schwarz'a o pochodnych mieszanych klasy funkcji  $C^2$  daje

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1\partial\tau_0} + \varepsilon^2 \left( 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_0} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_1^2} \right) + \varepsilon^3 \left( 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_3\partial\tau_0} + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_2\partial\tau_1} \right) + \dots \quad (9.12)$$

W ogólności wzory (9.5) oraz (9.12) można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{d}{d\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial\tau_i} \quad (9.13)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial \tau_i} \right), \quad (9.14)$$

gdzie  $n$  jest liczbą zmiennych  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ , nazywaną dalej także liczbą skal w dziedzinie czasu. Rozwiązanie problemu początkowego jest poszukiwane w postaci szeregu potęgowego małego parametru

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \phi_k(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (9.15)$$

Przyjmując liczbę skal w dziedzinie czasu równą  $n = 3$  otrzymamy z (9.15) następujące przybliżenie dla funkcji  $\varphi$ :

$$\varphi \approx \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3, \quad (9.16)$$

dla pochodnej (korzystając z (9.5) oraz (9.16))

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} (\varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} (\varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2) \\ &= \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_1} + \varepsilon^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau_1} \end{aligned} \quad (9.17)$$

oraz dla pochodnej drugiego rzędu (stosując (9.12) oraz (9.16))

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} = \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} (\varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2) + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} (\varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2) \\ &= \varepsilon \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_0^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_1 \partial \tau_0}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Zakładając, że nieliniowości w równaniu ruchu są tak zwanego słabego typu, parametry  $\alpha_1, \alpha_2$  i  $f$  przedstawimy następująco:

$$\alpha_1 = \varepsilon^2 \cdot \hat{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \varepsilon \cdot \hat{\alpha}_2, \quad f = \varepsilon^3 \cdot \hat{f}. \quad (9.19)$$

Wstawiając (9.16)–(9.19) do (9.4) oraz ucinając wyrazy większe niż  $\varepsilon^3$  otrzymamy

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau_0^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_2 \partial \tau_0} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1^2} \\ &+ \varepsilon^3 \hat{\alpha}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon^3 \hat{\alpha}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} \right| + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 - \frac{1}{6} \varepsilon^3 \phi_1^3 = \varepsilon^3 \cdot \hat{f} \left( \frac{e^{ip_1 \tau_0} + e^{-ip_1 \tau_0}}{2} \right), \end{aligned} \quad (9.20)$$

gdzie  $\phi_1 = \phi_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2)$ ,  $\phi_2 = \phi_2(\tau_0, \tau_1, \tau_2)$  and  $\phi_3 = \phi_3(\tau_0, \tau_1, \tau_2)$  oraz  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  i  $\hat{f}$  są wielkościami rzędu pierwszego.

### 9.3. Równanie pierwszego przybliżenia

Uporządkowanie równań ruchu zgodnie z rzędem małego parametru prowadzi do równań kolejnych przybliżeń. Równanie pierwszego przybliżenia to równanie dla parametru równego  $\varepsilon$ . Zauważmy, że jeżeli w równaniu (9.20) pozostawimy jedynie elementy stojące przy  $\varepsilon$  otrzymamy równanie postaci:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_0^2} + \phi_1 = 0. \quad (9.21)$$

Równanie (9.21) jest jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. W celu rozwiązania tego równania podstawimy  $\phi_1 = e^{r \cdot \tau_0} \Rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} = r \cdot e^{r \cdot \tau_0} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_0^2} = r^2 \cdot e^{r \cdot \tau_0}$ . Po podstawieniu pochodnych do równania (9.21) mamy

$$r^2 \cdot e^{r \cdot \tau_0} + e^{r \cdot \tau_0} = 0. \quad (9.22)$$

Równanie (9.21) jest rozwiązywalne, gdy spełnione jest równanie kwadratowe postaci

$$r^2 + 1 = 0, \quad (9.23)$$

które ma dwa pierwiastki urojone:  $r_1 = i$  oraz  $r_2 = -i$ . Otrzymaliśmy zatem dwie różne postaci postulowanego rozwiązania

$$\phi_1^{\{1\}} = e^{i\tau_0}, \quad \phi_1^{\{2\}} = e^{-i\tau_0}, \quad (9.24)$$

które tworzą układ liniowo niezależny, więc rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (9.21) można przedstawić jako kombinację liniową

$$\phi_1(\tau_0, \tau_1) = B(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{B}(\tau_1)e^{-i\tau_0}, \quad (9.25)$$

gdzie  $B$  i  $\bar{B}$  są nieznanymi funkcjami zespolonymi sprzężonymi. W rozwiązaniu (9.25) mamy do czynienia z funkcją dwóch zmiennych, więc w kombinacji liniowej występują funkcje  $B$  i  $\bar{B}$  tylko zmiennej  $\tau_1$  [30].

### 9.4. Równanie drugiego przybliżenia

Równania przybliżenia drugiego rzędu zawierające wyrazy stojące przy  $\varepsilon^2$  mają postać

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_0^2} + \phi_2 = -2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1 \partial \tau_0}. \quad (9.26)$$

Wśród składników równania (9.26) znajduje się pochodna rozwiązania przybliżenia pierwszego rzędu. Obliczając pochodną  $\phi_1$ , otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} = i \frac{\partial B}{\partial \tau_1} e^{i\tau_0} - i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_1} e^{-i\tau_0}. \quad (9.27)$$

Po podstawieniu pochodnej do równania (9.26) mamy

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_0^2} + \phi_2 = -2i \frac{\partial B}{\partial \tau_1} e^{i\tau_0} + 2i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_1} e^{-i\tau_0} \quad (9.28)$$

Warto zauważyć, że w równaniu (9.28) występują człony sekularne powodujące, że rozwiązanie dąży do nieskończoności względem czasu, co jest niezgodne z wynikami eksperymentalnymi. Te człony są następujące:

$$-2i \frac{\partial B}{\partial \tau_1} e^{i\tau_0}, \quad 2i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_1} e^{-i\tau_0}. \quad (9.29)$$

Człony sekularne eliminuje się przez przyrównanie do zera współczynników przy  $e^{i\tau_0}$  i  $e^{-i\tau_0}$ , co daje następujące równania:

$$\begin{cases} -2i \frac{\partial B}{\partial \tau_1} = 0, \\ 2i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_1} = 0. \end{cases} \quad (9.30)$$

Równania (9.30), zwane warunkami rozwiązywalności, dają możliwość obliczenia nieznanymi funkcji  $B$  i  $\bar{B}$ . Z równań (9.30) wynika, że

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial \tau_1} = 0, \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_1} = 0. \end{cases} \quad (9.31)$$

Równanie (9.28) bez członów sekularnych

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_0^2} + \phi_2 = 0 \quad (9.32)$$

jest jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Należy zauważyć, że rozwiązanie  $\phi_2$  jest identyczne z rozwiązaniem  $\phi_1$ . Otrzymujemy zatem rozwiązanie równania drugiego przybliżenia w postaci

$$\phi_2(\tau_0, \tau_1, \tau_2) = 0. \quad (9.33)$$

## 9.5. Równanie trzeciego przybliżenia

Współczynniki stojące przy  $\varepsilon^3$  tworzą równania przybliżenia trzeciego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau_0^2} + \phi_3 = & \frac{1}{6} \phi_1^3 - 2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau_1 \partial \tau_0} - 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_2 \partial \tau_0} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1^2} - \hat{\alpha}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} - \hat{\alpha}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} \right| \\ & + \hat{f} \left( \frac{e^{ip_1 \tau_0} + e^{-ip_1 \tau_0}}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Obliczając pochodną  $\phi_1$ , otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_2 \partial \tau_0} = i \frac{\partial B}{\partial \tau_2} e^{i\tau_0} - i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_2} e^{-i\tau_0}, \quad (9.35)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau_1^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} e^{i\tau_0} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \tau_1^2} e^{-i\tau_0}, \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} = i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}. \quad (9.37)$$

Podstawiając pochodne (9.35-9.37) do równania (9.34) i biorąc  $\phi_2 = 0$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau_0^2} + \phi_3 &= \frac{1}{6} (B e^{i\tau_0} + \bar{B} e^{-i\tau_0})^3 - 2 \left( i \frac{\partial B}{\partial \tau_2} e^{i\tau_0} - i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_2} e^{-i\tau_0} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} e^{i\tau_0} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \tau_1^2} e^{-i\tau_0} \right) - \hat{\alpha}_1 (i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}) \\ &\quad - \hat{\alpha}_2 (i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}) |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}| + \hat{f} \left( \frac{e^{ip_1\tau_0} + e^{-ip_1\tau_0}}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Grupując składniki równania (9.38) względem  $e^{i\tau_0}$  i  $e^{-i\tau_0}$ , powyższe równanie przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau_0^2} + \phi_3 &= e^{i\tau_0} \left( \frac{1}{2} B^2 \bar{B} - 2i \frac{\partial B}{\partial \tau_2} - \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} - \hat{\alpha}_1 i B - \hat{\alpha}_2 i B |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}| \right) \\ &\quad + e^{-i\tau_0} \left( \frac{1}{2} \bar{B} B^2 + 2i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_2} - \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \tau_1^2} + \hat{\alpha}_1 i \bar{B} + \hat{\alpha}_2 i \bar{B} |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}| \right) + \frac{1}{6} B^3 e^{3i\tau_0} \\ &\quad + \frac{1}{6} \bar{B}^3 e^{-3i\tau_0} + \hat{f} \left( \frac{e^{ip_1\tau_0} + e^{-ip_1\tau_0}}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.39)$$

Kolejne warunki rozwiązywalności są następujące:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} B^2 \bar{B} - 2i \frac{\partial B}{\partial \tau_2} - \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} - \hat{\alpha}_1 i B - \hat{\alpha}_2 i B |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}| = 0, \\ \frac{1}{2} \bar{B} B^2 + 2i \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_2} - \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \tau_1^2} + \hat{\alpha}_1 i \bar{B} + \hat{\alpha}_2 i \bar{B} |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}| = 0. \end{cases} \quad (9.40)$$

Łącząc (9.31) z (9.40) otrzymujemy wszystkie warunki rozwiązywalności

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial \tau_1} = 0, \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_1} = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial \tau_2} = -\frac{1}{4} i B^2 \bar{B} - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1 B - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_2 B |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}|, \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau_2} = \frac{1}{4} i \bar{B} B^2 - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1 \bar{B} - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_2 \bar{B} |i B e^{i\tau_0} - i \bar{B} e^{-i\tau_0}|. \end{cases} \quad (9.41)$$

Równanie (9.39) bez członów sekularnych przybiera postać

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau_0^2} + \phi_3 = \frac{1}{6} B^3 e^{3i\tau_0} + \frac{1}{6} \bar{B}^3 e^{-3i\tau_0} + \frac{1}{2} \hat{f} e^{ip_1\tau_0} + \frac{1}{2} \hat{f} e^{-ip_1\tau_0}. \quad (9.42)$$

Równanie jednorodne to

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau_0^2} + \phi_3 = 0, \quad (9.43)$$

z rozwiązaniem ogólnym (9.25). Szczególne rozwiązanie równania (9.42) ma postać

$$\phi_3^{\{p\}} = A_1(\tau_1, \tau_2)e^{3i\tau_0} + A_2(\tau_1, \tau_2)e^{-3i\tau_0} + A_3(\tau_1, \tau_2)e^{ip_1\tau_0} + A_4(\tau_1, \tau_2)e^{-ip_1\tau_0} \quad (9.44)$$

Wobec tego, mamy

$$\frac{\partial \phi_3^{\{p\}}}{\partial \tau_0} = 3iA_1(\tau_1, \tau_2)e^{3i\tau_0} - 3iA_2(\tau_1, \tau_2)e^{-3i\tau_0} + ip_1A_3(\tau_1, \tau_2)e^{ip_1\tau_0} - ip_1A_4(\tau_1, \tau_2)e^{-ip_1\tau_0} \quad (9.45)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_3^{\{p\}}}{\partial \tau_0^2} = -9A_1(\tau_1, \tau_2)e^{3i\tau_0} - 9A_2(\tau_1, \tau_2)e^{-3i\tau_0} - p_1^2A_3(\tau_1, \tau_2)e^{ip_1\tau_0} - p_1^2A_4(\tau_1, \tau_2)e^{-ip_1\tau_0}. \quad (9.46)$$

Aby  $\phi_3^{\{p\}}$  było rozwiązaniem równania różniczkowego, musimy znaleźć wartości dla  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  i  $A_4$  takie, że

$$\begin{aligned} -9A_1e^{3i\tau_0} - 9A_2e^{-3i\tau_0} - p_1^2A_3e^{ip_1\tau_0} - p_1^2A_4e^{-ip_1\tau_0} + A_1e^{3i\tau_0} + A_2e^{-3i\tau_0} + A_3e^{ip_1\tau_0} \\ + A_4e^{-ip_1\tau_0} = \frac{1}{6}B^3e^{3i\tau_0} + \frac{1}{6}\overline{B}^3e^{-3i\tau_0} + \frac{1}{2}\hat{f}e^{ip_1\tau_0} + \frac{1}{2}\hat{f}e^{-ip_1\tau_0}, \end{aligned} \quad (9.47)$$

gdzie  $A_1 = A_1(\tau_1, \tau_2)$ ,  $A_2 = A_2(\tau_1, \tau_2)$ ,  $A_3 = A_3(\tau_1, \tau_2)$  i  $A_4 = A_4(\tau_1, \tau_2)$ . Przyrównując wyrazy podobne, mamy

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{1}{48}B^3, \\ A_2 = -\frac{1}{48}\overline{B}^3, \\ A_3 = \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}, \\ A_4 = \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}. \end{cases} \quad (9.48)$$

Rozwiązanie ogólne jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_3(\tau_0, \tau_1, \tau_2) = B(\tau_1, \tau_2)e^{i\tau_0} + \overline{B}(\tau_1, \tau_2)e^{-i\tau_0} - \frac{1}{48}B^3e^{3i\tau_0} - \frac{1}{48}\overline{B}^3e^{-3i\tau_0} \\ + \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}e^{ip_1\tau_0} + \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}e^{-ip_1\tau_0}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Warto zauważyć, że ogólne rozwiązanie równania jednorodnego jest identyczne jak rozwiązanie dla  $\phi_1$ . Otrzymujemy zatem rozwiązanie równania przybliżenia trzeciego rzędu w następującej postaci:

$$\phi_3(\tau_0, \tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{48}B^3e^{3i\tau_0} - \frac{1}{48}\overline{B}^3e^{-3i\tau_0} + \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}e^{ip_1\tau_0} + \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}e^{-ip_1\tau_0}. \quad (9.50)$$

Powyższy wynik powinien być poprawką do rozwiązania równania aproksymacyjnego pierwszego rzędu.

## 9.6. Równania modulacji

W rozwiązaniach występuje nieznana funkcja  $B(\tau_1, \tau_2)$  i jej sprzężenie zespolone  $\overline{B}(\tau_1, \tau_2)$  (9.25) i (9.50). Warunki rozwiązywalności (9.41) są ograniczeniami nieznanymi funkcji  $B(\tau_1, \tau_2)$  i  $\overline{B}(\tau_1, \tau_2)$ . Warunki rozwiązywalności (9.41) można uważać za zbiór czterech równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu względem funkcji  $B_1(\tau_1, \tau_2)$  i jej sprzężeń zespolonych. W warunkach (9.31) można zauważyć, że nieznane funkcje nie zależą od zmiennej  $\tau_1$ . Nieznane funkcje przedstawiamy w postaci wykładniczej

$$\begin{cases} B(\tau_2) = \frac{1}{2}b(\tau_2)e^{i\psi(\tau_2)}, \\ \overline{B}(\tau_2) = \frac{1}{2}b(\tau_2)e^{-i\psi(\tau_2)}, \end{cases} \quad (9.51)$$

gdzie funkcje  $b(\tau_2)$  i  $\psi(\tau_2)$  są wartościami rzeczywistymi i oznaczają odpowiednio amplitudę i fazę oscylacji. Obliczając pochodne

$$\begin{cases} \frac{dB}{d\tau_2} = \frac{1}{2}\frac{db}{d\tau_2}e^{i\psi} + \frac{1}{2}ib\frac{d\psi}{d\tau_2}e^{i\psi}, \\ \frac{d\overline{B}}{d\tau_2} = \frac{1}{2}\frac{db}{d\tau_2}e^{-i\psi} - \frac{1}{2}ib\frac{d\psi}{d\tau_2}e^{-i\psi}, \end{cases} \quad (9.52)$$

gdzie  $b = b(\tau_2)$  i  $\psi = \psi(\tau_2)$ . Wstawiając zależności (9.51) i (9.52) do równań różniczkowych (9.41), otrzymamy

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{db}{d\tau_2}e^{i\psi} + \frac{1}{2}ib\frac{d\psi}{d\tau_2}e^{i\psi} = -\frac{1}{32}ib^3e^{i\psi} - \frac{1}{4}\hat{\alpha}_1be^{i\psi} - \frac{1}{4}\hat{\alpha}_2be^{i\psi} \left| \frac{1}{2}ibe^{i\psi}e^{i\tau_0} - \frac{1}{2}ibe^{-i\psi}e^{-i\tau_0} \right|, \\ \frac{1}{2}\frac{db}{d\tau_2}e^{-i\psi} - \frac{1}{2}ib\frac{d\psi}{d\tau_2}e^{-i\psi} = \frac{1}{32}ib^3e^{-i\psi} - \frac{1}{4}\hat{\alpha}_1be^{-i\psi} - \frac{1}{4}\hat{\alpha}_2be^{-i\psi} \left| \frac{1}{2}ibe^{i\psi}e^{i\tau_0} - \frac{1}{2}ibe^{-i\psi}e^{-i\tau_0} \right|, \end{cases} \quad (9.53)$$

które są równe

$$\begin{cases} e^{i\psi} \left( \frac{db}{d\tau_2} + ib\frac{d\psi}{d\tau_2} + \frac{1}{16}ib^3 + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1b + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_2b^2 |\sin(\psi + \tau_0)| \right) = 0, \\ e^{-i\psi} \left( \frac{db}{d\tau_2} - ib\frac{d\psi}{d\tau_2} - \frac{1}{16}ib^3 + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1b + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_2b^2 |\sin(\psi + \tau_0)| \right) = 0. \end{cases} \quad (9.54)$$

Powyzsze równania są spełnione, gdy wyrażenia w nawiasach są równe zero

$$\begin{cases} \frac{db}{d\tau_2} + ib\frac{d\psi}{d\tau_2} + \frac{1}{16}ib^3 + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1b + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_2b^2 |\sin(\psi + \tau_0)| = 0, \\ \frac{db}{d\tau_2} - ib\frac{d\psi}{d\tau_2} - \frac{1}{16}ib^3 + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1b + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_2b^2 |\sin(\psi + \tau_0)| = 0. \end{cases} \quad (9.55)$$

Dodając oba równania otrzymujemy

$$\frac{db}{d\tau_2} = -\frac{1}{2}\hat{\alpha}_1b - \frac{1}{2}\hat{\alpha}_2b^2 |\sin(\psi + \tau_0)| \quad (9.56)$$

i odejmując

$$\frac{d\psi}{d\tau_2} = -\frac{1}{16}b^2. \quad (9.57)$$



Celem jest wyprowadzenie równań modulacji w odniesieniu do oryginalnych zmiennych. Korzystając z powyższych rozwiązań tworzymy operator różniczkowy będący odpowiednikiem pochodnej pierwszego rzędu po bezwymiarowym czasie  $\tau$ . Mamy

$$\begin{cases} \dot{b}(\tau) = \frac{db(\tau_1)}{d\tau}, \\ \dot{\psi}(\tau) = \frac{d\psi(\tau_1)}{d\tau}. \end{cases} \quad (9.58)$$

Z (9.5), otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{b}(\tau) = \frac{\partial b}{\partial \tau_0} + \frac{\partial b}{\partial \tau_1} \varepsilon + \frac{\partial b}{\partial \tau_2} \varepsilon^2 + \frac{\partial b}{\partial \tau_3} \varepsilon^3 + \dots, \\ \dot{\psi}(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} \varepsilon + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_2} \varepsilon^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_3} \varepsilon^3 + \dots \end{cases} \quad (9.59)$$

Funkcje  $b$  i  $\psi$  są funkcjami zmiennej  $\tau_2$ , zatem

$$\begin{cases} \dot{b}(\tau) = \frac{db}{d\tau_2} \varepsilon^2, \\ \dot{\psi}(\tau) = \frac{d\psi}{d\tau_2} \varepsilon^2. \end{cases} \quad (9.60)$$

Biorąc pod uwagę równania (9.56) i (9.57), otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{b}(\tau) = -\frac{1}{2} \hat{\alpha}_1 \varepsilon^2 b - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_2 \varepsilon^2 b^2 |\sin(\psi + \tau_0)|, \\ \dot{\psi}(\tau) = -\frac{1}{16} \varepsilon^2 b^2. \end{cases} \quad (9.61)$$

Wracając do oryginalnych oznaczeń

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon^2}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon}, \quad f = \frac{\hat{f}}{\varepsilon^3}, \quad \tau_0 = \tau, \quad \tau_1 = \varepsilon \tau, \quad \tau_2 = \varepsilon^2 \tau, \quad b(\tau) = \frac{a(\tau)}{\varepsilon}, \quad (9.62)$$

otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{a}(\tau) = -\frac{1}{2} \alpha_1 a(\tau) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2(\tau) |\sin(\psi(\tau) + \tau)|, \\ \dot{\psi}(\tau) = -\frac{1}{16} a^2(\tau). \end{cases} \quad (9.63)$$

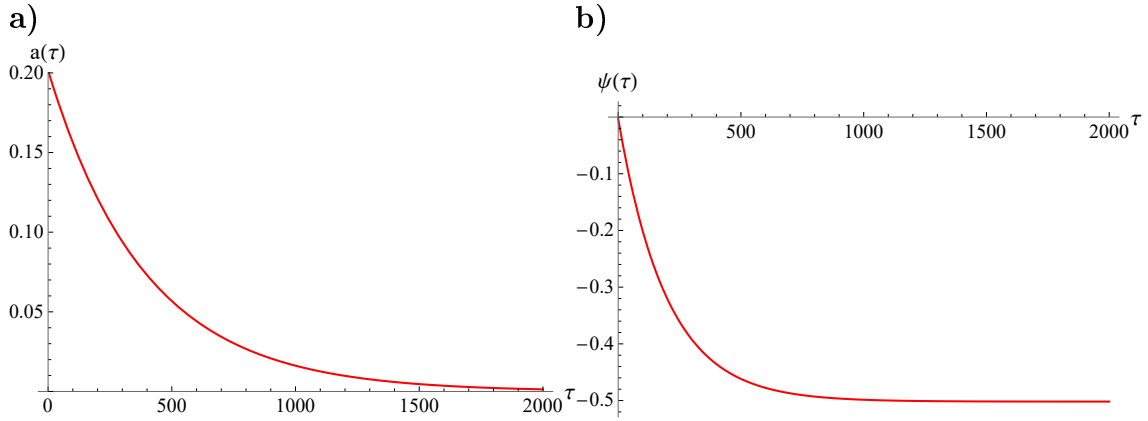
Równania modulacji (9.63) są uzupełnione warunkami początkowymi

$$a(0) = a_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad (9.64)$$

gdzie znane wartości  $a_0$  i  $\psi_0$  są związane odpowiednio z wartościami początkowymi  $\varphi_0$  i  $\omega_0$ . Numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego (9.63)–(9.64) dla

$$a_0 = 0.2, \quad \psi_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0.005, \quad \alpha_2 = 0.001, \quad f = 0.002, \quad p_1 = 1.52, \quad \tau_k = 2000, \quad (9.65)$$

gdzie  $\tau_k$  oznacza czas końcowy, ma postać pokazaną na Rys. 9.1.



Rysunek 9.1. Przykładowe numeryczne rozwiązanie równań modulacji dla **a)** amplitudy  $a(\tau)$ , **b)** fazy  $\psi(\tau)$

## 9.7. Przybliżone rozwiązanie analityczne

Rozwiązania równań modulacji są rozwiązaniami numerycznymi. Stąd też funkcje  $B(\tau_2)$  i  $\bar{B}(\tau_2)$  przyjmują postać rozwiązania numerycznego. Podstawiając wyrażenia (9.25, 9.33, 9.50) dla  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$  do przybliżenia rozwiązania (9.16), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi \approx \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 = & B(\tau_2)e^{i\tau} + \bar{B}(\tau_2)e^{-i\tau} - \frac{1}{48}B^3(\tau_2)e^{3i\tau} - \frac{1}{48}\bar{B}^3(\tau_2)e^{-3i\tau} \\ & + \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}e^{ip_1\tau_0} + \frac{1}{2(1-p_1^2)}\hat{f}e^{-ip_1\tau_0}. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Korzystając z równań (9.51), (9.62) i wzoru Eulera, mamy

$$\varphi(\tau) = a(\tau) \cos(\tau + \psi(\tau)) - \frac{1}{192}a^3(\tau) \cos(3(\tau + \psi(\tau))) + \frac{1}{1-p_1^2}f \cos(p_1\tau), \quad (9.67)$$

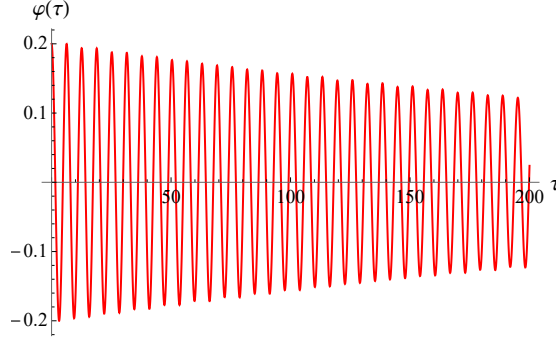
gdzie  $a(\tau)$  i  $\psi(\tau)$  reprezentują krzywe pokazane na Rys. 9.1. Ostateczne rozwiązanie (9.65) pokazano na Rys. 9.2.

Należy zauważyć, że rozwiązanie przedstawione na Rys. 9.2 charakteryzuje się malejącą w czasie amplitudą drgań, co spowodowane jest rozpraszaniem energii mechanicznej w układzie.

## 9.8. Ocena dokładności

Błąd rozwiązania przybliżonego  $\varphi(\tau)$  szacuje się za pomocą następującej miary:

$$\delta = \frac{1}{\tau_e - \tau_s} \int_0^{\tau_k} |G(\varphi_a(\tau))| d\tau, \quad (9.68)$$



Rysunek 9.2. Przykładowe rozwiązanie zagadnienia (4.34) metodą wielu skal w dziedzinie czasu

gdzie  $G$  oznacza operator różniczkowy równania (4.34), a  $\varphi_a(\tau)$  jest przybliżonym rozwiązaniem rozważanego zagadnienia początkowego otrzymanego metodą wielu skal w dziedzinie czasu,  $\tau_s$ ,  $\tau_e$  to wybrane momenty z przedziału symulacji, gdzie  $\tau_e > \tau_s$ .

Pochodne funkcji  $\varphi(\tau)$  obliczono z wyrażenia (9.67) i są równe

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\tau) = & \dot{a}(\tau) \cos(\tau + \psi(\tau)) - a(\tau) \sin(\tau + \psi(\tau))(1 + \dot{\psi}(\tau)) \\ & - \frac{1}{64} a^2(\tau) \cos(3(\tau + \psi(\tau))) \dot{a}(\tau) + \frac{1}{64} a^3(\tau) \sin(3(\tau + \psi(\tau)))(1 + \dot{\psi}(\tau)) \\ & - \frac{fp_1}{1 - p_1^2} \sin(p_1\tau) \end{aligned} \quad (9.69)$$

oraz

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(\tau) = & \ddot{a}(\tau) \cos(\tau + \psi(\tau)) - 2\dot{a}(\tau) \sin(\tau + \psi(\tau))(1 + \dot{\psi}(\tau)) \\ & - a(\tau) \cos(\tau + \psi(\tau))(1 + \dot{\psi}(\tau))^2 - a(\tau) \sin(\tau + \psi(\tau))\ddot{\psi}(\tau) \\ & - \frac{1}{32} a(\tau) \cos(3(\tau + \psi(\tau))) \dot{a}^2(\tau) + \frac{3}{32} a^2(\tau) \sin(3(\tau + \psi(\tau)))(1 + \dot{\psi}(\tau)) \\ & - \frac{1}{64} a^2(\tau) \cos(3(\tau + \psi(\tau))) \ddot{a}(\tau) + \frac{3}{64} a^3(\tau) \cos(3(\tau + \psi(\tau)))(1 + \dot{\psi}(\tau))^2 \\ & + \frac{1}{64} a^3(\tau) \sin(3(\tau + \psi(\tau))) \ddot{\psi}(\tau) - \frac{fp_1^2}{1 - p_1^2} \cos(p_1\tau). \end{aligned} \quad (9.70)$$

Amplitudę  $a(\tau)$  i fazę drgań  $\psi(\tau)$  otrzymamy z numerycznych rozwiązań równań modulacji. Różniczkując pierwsze i drugie równanie (9.63) otrzymamy odpowiednio pochodną drugiego rzędu dla amplitudy postaci

$$\begin{aligned} \ddot{a}(\tau) = & -\frac{1}{2} \alpha_1 \dot{a}(\tau) - \alpha_2 a(\tau) |\sin(\psi(\tau) + \tau)| \dot{a}(\tau) \\ & - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2(\tau) |\sin(\psi(\tau) + \tau)|' \cos(\psi(\tau) + \tau)(1 + \dot{\psi}(\tau)) \end{aligned} \quad (9.71)$$

oraz pochodną drugiego rzędu dla fazy drgań

$$\ddot{\psi}(\tau) = -\frac{1}{8}a(\tau)\dot{a}(\tau) \quad (9.72)$$

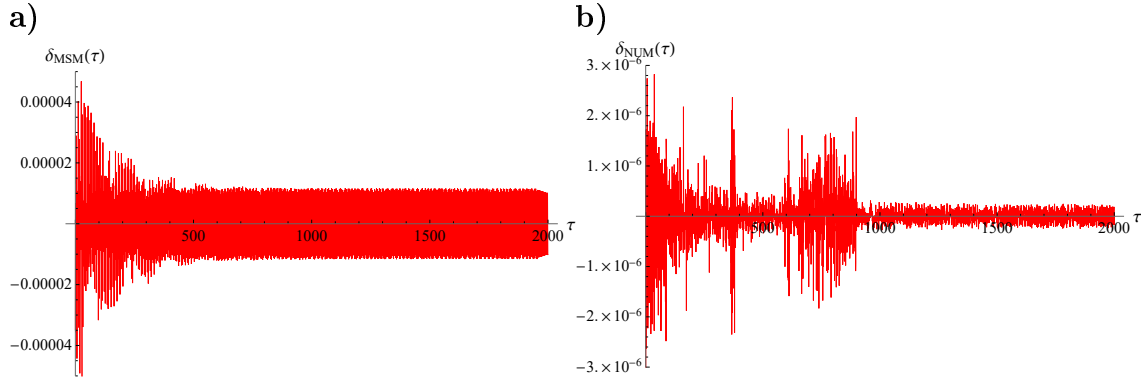
Pochodna wartości bezwzględnej w wyrażeniu (9.71) ma następującą postać:

$$|\sin(\psi(\tau) + \tau)|' = \sum_{k=1}^{[N]} \left[ \cos(\tau + \psi(\tau))\mathcal{U}((\tau - 2k\pi + 2\pi)(2k\pi - \pi - \tau)) - \cos(\tau + \psi(\tau))\mathcal{U}((\tau - 2k\pi + \pi)(2k\pi - \tau)) \right], \quad (9.73)$$

gdzie  $\mathcal{U}(\cdot)$  oznacza funkcję skoku Heaviside'a,  $[\cdot]$  oznacza funkcję sufitu, a  $N = \frac{\tau_k}{2\pi}$ . Łącząc równania (9.63), (9.67), (9.69)–(9.73) i podstawiając do równania (9.68) otrzymano wartości błędów dla rozwiązań uzyskanych w przybliżony sposób analityczny (rozwiązanie MSM) i numeryczny. Wartości błędów dla różnych przedziałów  $[\tau_s, \tau_e]$  zestawiono w Tab. 9.1.

Tabela 9.1. Porównanie błędów dla metody wielu skal w dziedzinie czasu i rozwiązania numerycznego

Przedział $[\tau_s, \tau_e]$	rozwiązanie MSM	rozwiązanie numeryczne
$[0, 200]$	$\delta = 1.20137 \cdot 10^{-6}$	$\delta = 6.29813 \cdot 10^{-7}$
$[1800, 2000]$	$\delta = 7.38892 \cdot 10^{-7}$	$\delta = 9.81676 \cdot 10^{-8}$
$[0, 2000]$	$\delta = 7.94076 \cdot 10^{-6}$	$\delta = 3.1405 \cdot 10^{-7}$



Rysunek 9.3. Błędy rozwiązania uzyskanego **a)** metodą wielu skal w dziedzinie czasu, **b)** numerycznie

Warto zauważyć, że błąd obcięcia wynikający z aproksymacji (9.1) i zastosowania trzech skal w dziedzinie czasu dodatkowo zmniejsza dokładność rozwiązań uzyskanych za pomocą metody wielu skal w dziedzinie czasu. Natomiast rozwiązanie numeryczne jest niezależne od tego przybliżenia, stąd mniejsze wartości błędów.

Wykresy błędu rozwiązania przybliżonego uzyskanego za pomocą metody wielu skal w dziedzinie czasu i błędu rozwiązania obliczonego numerycznie przedstawiono na Rys. 9.3.



## 10. Wnioski

Praca dotyczy modelowania matematycznego siły oporu występującej podczas ruchu elementów układów mechanicznych w środowisku płynnym oraz identyfikacji wartości nieznanymi parametrów modelu. Zagadnienia estymacji parametrów należą do klasy zagadnień odwrotnych, dla których matematyczny opis danego procesu, w tym przypadku ruchu dyskretnego układu mechanicznego, jest niekompletny. Wartości parametrów, niezbędne do jednoznacznego sformułowania modelu matematycznego, wyznaczone są na podstawie zmierzonej eksperymentalnie odpowiedzi układu, przy zastosowaniu metod optymalizacyjnych. Tematyka rozprawy wpisuje się w zakres badań podstawowych w dziedzinie inżynierii mechanicznej.

Eksperymentalnie badano ruch dwóch układów: jednorodnego, prostoliniowego pręta zawieszono w nieruchomym punkcie i wykonującego drgania wokół dolnego położenia równowagi w płaszczyźnie pionowej oraz takiego samego pręta zawieszono za pomocą przegubu na tarczy obracającej się znanym ruchem wokół pionowej osi. Pręt, którego archetypem jest w tym przypadku fizyczne wahadło przestrzenne, na skutek tłumienia osiąga stan ruchu ustalonego, który rejestrowano. Oddziaływanie pręta, traktowanego jako ciało sztywne, z otaczającym płynem w obu wariantach opisano uproszczonym trójparametrowym modelem zawierającym składnik proporcjonalny do prędkości, składnik proporcjonalny do kwadratu prędkości oraz składnik proporcjonalny do przyspieszenia. Dwa pierwsze elementy tego modelu mają charakter dyssypatywny, a ostatni opisuje tak zwany efekt masy dodanej. Równania ruchu obu układów wyprowadzono, stosując formalizm Lagrange'a, a siły oddziaływania z płynem wprowadzono jako siły uogólnione. Nieznane współczynniki trójskładnikowego modelu siły oporu wyznaczano metodami optymalizacyjnymi. Definiowane funkcje celu miały charakter odległości między zmierzonymi wielkościami opisującymi zachowanie układu a ich odpowiednikami otrzymanymi w wyniku rozwiązania numerycznego równań ruchu, w których wartości identyfikowanych współczynników przyjmowane były zgodnie z algorytmem metody optymalizacyjnej.

Na podstawie przeprowadzonych badań i otrzymanych wyników można sformułować następujące wnioski:

- Zaproponowany sposób postępowania, oparty na stosunkowo łatwym do przeprowadzenia eksperymencie, umożliwia skuteczne wyznaczenie wartości nieznanymi parametrów modelu siły oporu ośrodka.

- Przetestowany doświadczalnie trójparametrowy model siły oporu z dwoma składnikami opisującymi efekty dyssypacji energii oraz ze składnikiem opisującym efekt masy dodanej w porównaniu z modelami zredukowanymi do jednego czy dwóch składników daje najmniejsze wartości funkcji celu w procesie optymalizacji.
- Rozwiązania równań ruchu otrzymane na bazie modelu trójparametrowego w porównaniu z rozwiązaniami opartymi na modelach zredukowanych opisują ruch układu w sposób najbardziej dokładny, z uwzględnieniem dopasowania częstości i amplitudy drgań oraz zgodności ich fazy.
- Model trójparametrowy siły oporu oraz przedstawiona metodyka estymacji, przy niewielkiej modyfikacji zaprojektowanych stanowisk pomiarowych, mogą być stosowane do badania innych układów mechanicznych.
- Poprzednie wnioski wskazują na szeroki potencjał aplikacyjny modelu trójparametrowego w zagadnieniach dynamiki układów dyskretnych.
- Uzasadnione w rozważanym zagadnieniu założenie o sztywności prętów prowadzi do dyskretnego modelu matematycznego ruchu ze zwyczajnymi równaniami różniczkowymi.
- Sformułowanie warunków początkowych, uzupełniających równania ruchu wahadła przestrzennego, które jest poddane działaniu więzów niestacjonarnych, wymaga przeprowadzenia rozważań na gruncie rachunku impulsów.
- Aproksymacyjne schematy różnicowe w porównaniu z klasycznymi schematami interpolacyjnymi zapewniają znacząco większą dokładność przybliżenia wartości pochodnych na podstawie zmierzonych wartości funkcji. Przy zastosowaniu tych samych funkcji bazowych schematy aproksymacyjne są o kilka rzędów dokładniejsze.
- Metoda gradientowa oraz metoda najmniejszych kwadratów są efektywnymi narzędziami do rozwiązywania zagadnień estymacji parametrów modelu siły oporu ośrodka w trójwymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Ich zastosowanie, w przeciwieństwie do intuicyjnej metody bisekcji o znacznie prostszym algorytmie, nie ogranicza się do poszukiwania ekstremum funkcji unimodalnych, co jest silnym ograniczeniem, które w tym przypadku nie jest spełnione.
- Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do minimalizacji błędu spełnienia równań ruchu umożliwiło statystyczną ocenę wartości estymowanych parametrów.
- Analiza przeprowadzona na podstawie numerycznej symulacji eksperymentu dla wahadła z poruszającym się zadany ruchem punktem zawieszenia pokazała, że



estymacja parametrów modelu oparta na wynikach zaburzonych losowo, nawet w stosunkowo niewielkim stopniu, jest mało wiarygodna, co jest potwierdzeniem dużej czułości metod odwrotnych na błędy pomiarowe.

- Stan ustalony ruchu nie jest dobrym wyborem do przeprowadzenia estymacji parametrów modelu siły oporu. Realizując procedurę wyznaczania parametrów na podstawie danych pochodzących z rejestracji ruchu nieustalonego, otrzymuje się znacznie więcej danych, co umożliwia zastosowanie gradientowych metod optymalizacyjnych.
- Przeprowadzenie estymacji na podstawie danych z ruchu ustalonego eliminuje możliwość wnioskowania na podstawie cech rozwiązania numerycznego, takich jak zgodność amplitud, faz czy częstości drgań.
- Trójparametrowy model siły oporu ze składnikiem proporcjonalnym do kwadratu prędkości pozwala wyznaczać rozwiązania zagadnień ruchu nie tylko metodami numerycznymi, ale także przybliżone rozwiązania analityczne metodami asymptotycznymi, na przykład metodą wielu skal w dziedzinie czasu.

Do możliwych kierunków dalszych prac należy identyfikacja parametrów ruchu przestrzennego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia w stanie nieustalonym. Takie podejście umożliwiłoby szerszą weryfikację modelu matematycznego oraz oszacowanie otrzymanych współczynników tłumienia.

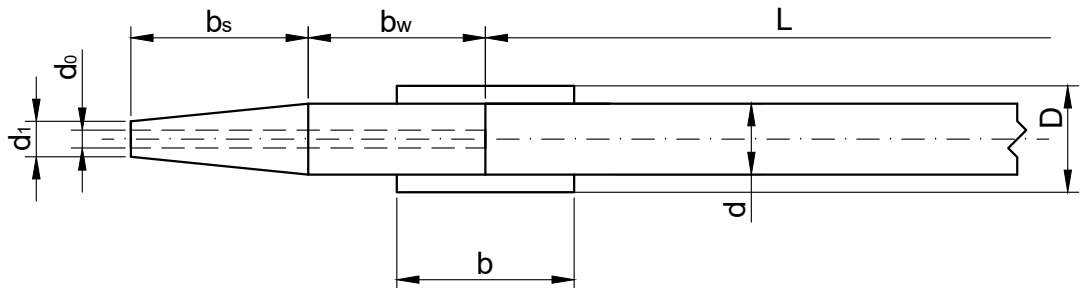
Celowe wydaje się również rozwiązanie zagadnienia ruchu wahadła przestrzennego z ruchomym punktem zawieszenia za pomocą metody wielu skal w dziedzinie czasu, gdyż zdecydowana większość opisanych w literaturze rozwiązań dotyczy układów w ruchu płaskim.



## Dodatek A

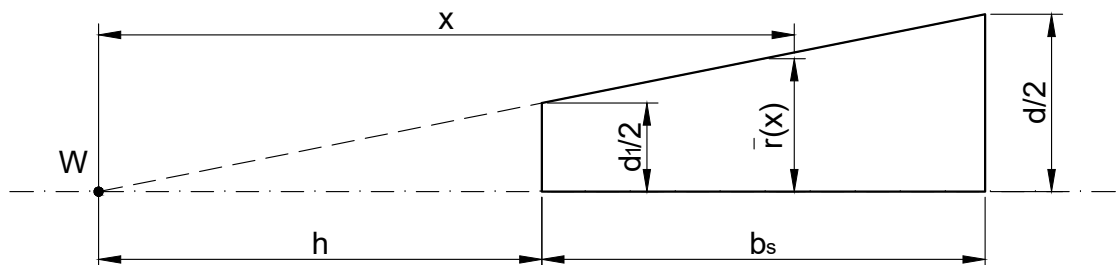
Rozważmy wahadło przedstawione na Rys. 10.1. Wahadło składa się z trzech różnych elementów:

- pręta o długości  $L$  i średnicy  $d$ ,
- tulejki o długości  $b$ , średnicy wewnętrznej  $d$  i średnicy zewnętrznej  $D$ ,
- końcówki składającej się z części walcowej o długości  $b_w$  i średnicy  $d$  i części stożkowej o długości  $b_s$  o średnicy większej podstawy  $d$  i średnicy mniejszej podstawy  $d_1$ ; przez całą końcówkę przechodzi otwór o średnicy  $d_0$ .



Rysunek 10.1. Rysunek składowych części wahadła dla ruchu płaskiego

Momenty bezwładności podstawowych brył geometrycznych można wyszukać w literaturze [36, 42, 50, 56, 63]. Część stożkową końcówki można potraktować jako ścięty stożek (Rys. 10.2).



Rysunek 10.2. Część stożkowa końcówki z wymiarami

Z podobieństwa trójkątów wynika, że

$$h = \frac{b_s d_1}{d - d_1}. \quad (\text{A.1})$$

Objętość stożka ściętego jest równa

$$V_s = \frac{1}{3}\pi \frac{d^2}{4}(b_s + h) - \frac{1}{3}\pi \frac{d_1^2}{4}h = \frac{1}{12}\pi b_s (d^2 + d_1 d + d_1^2). \quad (\text{A.2})$$

Oznaczmy przez  $\bar{r}(x)$  funkcję określającą promień przekroju stożka w odległości  $x$  od punktu  $W$ , który może być przedstawiony w następującej postaci

$$\bar{r}(x) = \frac{(d - d_1)x}{2b_s}. \quad (\text{A.3})$$

Moment statyczny stożka ściętego względem punktu  $W$  jest równy

$$M_s = \int_h^{b_s+h} x \pi \bar{r}^2(x) \rho dx = \frac{b_s^2 (d^3 + d_1 d^2 + d_1^2 d + d_1^3) \pi \rho}{16(d - d_1)}. \quad (\text{A.4})$$

Odległość środka masy stożka ściętego  $r_{c_1}$  od punktu  $W$  wynosi

$$r_{c_1} = \frac{M_s}{\rho V_s} = \frac{3b_s (d^3 + d_1 d^2 + d_1^2 d + d_1^3)}{4(d^3 - d_1^3)}. \quad (\text{A.5})$$

Wobec tego odległość środka masy stożka ściętego od większej podstawy jest równa

$$r_{c_2} = b_s + h - r_{c_1}. \quad (\text{A.6})$$

Moment bezwładności stożka ściętego względem osi prostopadłej do osi stożka przechodzącej przez punkt  $W$  wynosi

$$\begin{aligned} I_{sW} &= \int_h^{b_s+h} \left( \pi \bar{r}^2(x) \rho \left( \frac{\bar{r}^2(x)}{4} + x^2 \right) \right) dx \\ &= \frac{\pi \rho b_s (16b_s^2 + (d - d_1)^2) (d^4 + d_1 d^3 + d_1^2 d^2 + d_1^3 d + d_1^4)}{320(d - d_1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Centralny moment bezwładności stożka ściętego względem osi prostopadłej do osi stożka przechodzącej przez środek masy jest równy

$$\begin{aligned} I_{sm} &= I_{sW} - \rho V_s r_{c_1}^2 \\ &= \frac{\pi \rho b_s}{320} \left( d^4 + d_1 d^3 + d_1^2 d^2 + d_1^3 d + d_1^4 + \frac{b_s^2 (d^4 + 4d_1 d^3 + 10d_1^2 d^2 + 4d_1^3 d + d_1^4)}{d^2 + d_1 d + d_1^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

W Tabeli 10.1 przedstawiono masy i momenty bezwładności poszczególnych elementów wahadła względem środka masy wahadła, gdzie

$$m_2^{\{a\}} = \frac{\pi D^2}{4} b \rho, \quad m_2^{\{b\}} = \frac{\pi d^2}{4} b \rho \quad (\text{A.9})$$

są odpowiednio masą pełnej tulejki i masą otworu tej tulejki, a

$$m_3^{\{a\}} = \frac{\pi d^2}{4} b_w \rho, \quad m_3^{\{b\}} = \frac{\pi d_0^2}{4} b_w \rho \quad (\text{A.10})$$

są odpowiednio masą pełnej części walcowej końcówki i masą otworu tej części walcowej końcówki oraz

$$m_4^{\{a\}} = \frac{\pi d_0^2}{4} b_s \rho \quad (\text{A.11})$$

jest masą otworu części stożkowej końcówki. Dodatkowo zachodzą następujące związki:

$$m_2 = m_2^{\{a\}} - m_2^{\{b\}}, \quad m_3 = m_3^{\{a\}} - m_3^{\{b\}}. \quad (\text{A.12})$$

Tabela 10.1. Momenty bezwładności poszczególnych części wahadła względem środka masy

$k$	Część	Masa $m_k$	Moment bezwładności $I_k$
1	Pręt	$\frac{\pi d^2}{4} L \rho$	$\left(\frac{L^2}{12} + \frac{d^2}{16}\right) m_1$
2	Tulejka	$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4} b \rho$	$\left(\frac{b^2}{12} + \frac{D^2}{16}\right) m_2^{\{a\}} - \left(\frac{b^2}{12} + \frac{d^2}{16}\right) m_2^{\{b\}} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_2$
3	Część walcowa kończówki	$\frac{\pi(d^2-d_0^2)}{4} b_w \rho$	$\left(\frac{b_w^2}{12} + \frac{d^2}{16}\right) m_3^{\{a\}} - \left(\frac{b_w^2}{12} + \frac{d_0^2}{16}\right) m_3^{\{b\}} + \left(\frac{L}{2} + \frac{b_w}{2}\right)^2 m_3$
4	Część stożkowa kończówki	$V_s \rho - \frac{\pi d_0^2}{4} b_s \rho$	$I_{s_m} - \left(\frac{b_s^2}{12} + \frac{d_0^2}{16}\right) m_4^{\{a\}} + \left(\frac{L}{2} + b_w + r_{c_2}\right)^2 m_4$

Ze względu na całkowitą symetrię wahadła, moment bezwładności wahadła względem środka masy jest równy

$$I_C = I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4, \quad (\text{A.13})$$

a całkowita masa wahadła wynosi

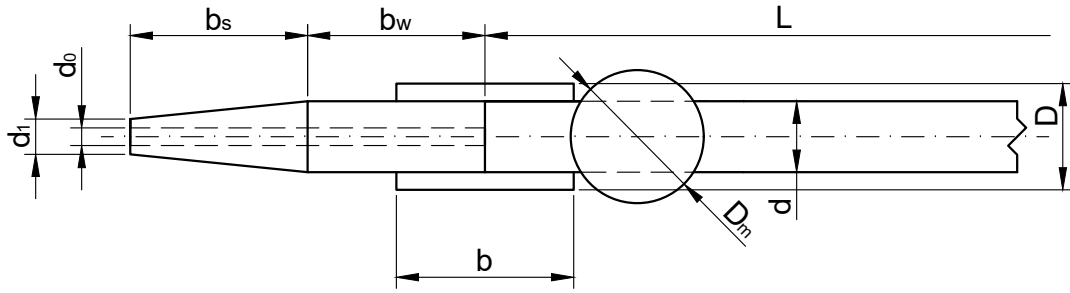
$$m = m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4. \quad (\text{A.14})$$

Moment bezwładności względem punktu zawieszenia wahadła wynosi

$$I_O = I_C + \left(\frac{L}{2} + b_w + b_s\right)^2 m. \quad (\text{A.15})$$

Rozważmy wahadło przedstawione na Rys. 10.2. Wahadło składa się oprócz komponentów przedstawionych w poprzednim wariacie również z plastikowych markerów o gęstości  $\rho_m$  w kształcie kuli o średnicy  $D_m$ . Masa i moment bezwładności markera względem środka masy wahadła są równe

$$m_5 = \frac{1}{6} \pi \rho_m D_m^3, \quad I_5 = \left(\frac{D_m^2}{10} + \left(\frac{L}{2} - \frac{b_w}{2} - \frac{D_m}{2}\right)^2\right) m_5. \quad (\text{A.16})$$



Rysunek 10.3. Rysunek składowych części wahadła dla ruchu przestrzennego

W obliczeniach należy również uwzględnić otwór markera, który przyjęto jako walec o długości  $D_m$  i średnicy podstawy  $d$ . Wobec tego, otrzymano

$$m_6 = \frac{\pi d^2}{4} D_m \rho_m, \quad I_6 = \left( \left( \frac{D_m^2}{12} + \frac{d^2}{16} \right) + \left( \frac{L}{2} - \frac{b_w}{2} - \frac{D_m}{2} \right)^2 \right) m_6. \quad (\text{A.17})$$

Moment bezwładności wahadła względem środka masy jest równy

$$I_C = I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4 + 2I_5 - 2I_6, \quad (\text{A.18})$$

a całkowita masa wahadła wynosi

$$m = m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_5 - 2m_6. \quad (\text{A.19})$$

Moment bezwładności względem punktu zawieszenia wahadła również obliczono ze wzoru (A.15).

## Dodatek B

Rozważmy zagadnienie początkowe, w którym równania różniczkowe są niekompletne, tzn. nieznanne są wartości liczbowe pewnych parametrów. Niech

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K] \quad (\text{B.1})$$

będzie wektorem  $K$  nieznanych parametrów występujących w równaniach różniczkowych oraz niech  $f(\boldsymbol{\beta})$  będzie funkcją celu postaci

$$f(\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i^{num}(\boldsymbol{\beta}) - u_i^{exp})^2}, \quad (\text{B.2})$$

gdzie  $u_i^{exp}$  są wynikami otrzymanymi w wyniku eksperymentu,  $u_i^{num}$  oznacza rozwiązanie numeryczne zagadnienia początkowego dla ustalonych parametrów  $\boldsymbol{\beta}$  w  $i$ -tej klatce nagrania, gdzie  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Na początku procedury metody gradientowej należy ustalić początkową wartość parametrów

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = [\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \dots, \beta_K^{(0)}], \quad (\text{B.3})$$

gdzie indeks górny oznacza numer iteracji. Należy także wybrać początkowy kierunek wyszukiwania w przestrzeni  $K$ -wymiarowej

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)} = [\Delta\beta_1^{(0)}, \Delta\beta_2^{(0)}, \dots, \Delta\beta_K^{(0)}] \quad (\text{B.4})$$

oraz zdefiniować początkowy kierunek poszukiwania  $\mathbf{d}^{(0)}$ . Po określeniu tych trzech wielkości inicjujących iteracyjny proces optymalizacji, wyliczana jest wartość  $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ , zgodnie z wzorem

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)} \Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)}. \quad (\text{B.5})$$

Dla każdej z wartości parametru  $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$  i  $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$  rozwiązywane są rozważane zagadnienia początkowe, a następnie obliczane są wartości  $f(\boldsymbol{\beta}^{(0)})$  i  $f(\boldsymbol{\beta}^{(1)})$  funkcji celu (B.2). Dla punktu (parametru  $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ ) obliczana jest wartość pochodnej funkcji celu, co informuje nas o nachyleniu stycznej w tym punkcie, w następujący sposób:

$$\nabla f^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{f(\boldsymbol{\beta}^{(1)}) - f(\boldsymbol{\beta}^{(0)})}{\beta_1} \\ \frac{f(\boldsymbol{\beta}^{(1)}) - f(\boldsymbol{\beta}^{(0)})}{\beta_2} \\ \dots \\ \frac{f(\boldsymbol{\beta}^{(1)}) - f(\boldsymbol{\beta}^{(0)})}{\beta_K} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Nowy kierunek poszukiwań określany jest na podstawie przybliżonej wartości gradientu za pomocą wzoru

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\frac{\nabla f^{(1)}}{\left|\nabla f^{(1)}\right|} \quad (\text{B.7})$$

Na podstawie wartości gradientu (B.6), kroku (B.4) i kierunku (B.7), dokonano aktualizacji przyrostu parametrów w celu zbliżenia się do ekstremum funkcji. Długość kolejnego kroku ustala się zgodnie z formułą

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(1)} = w_1\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)} \left(1 + w_2\mathbf{d}^{(0)}\mathbf{d}^{(1)}\right), \quad (\text{B.8})$$

gdzie  $w_1$  i  $w_2$  są parametrami z przedziału  $(0, 1)$ . Ich rolą jest przyspieszenie procesu iteracji, gdy kolejne kroki najwyraźniej dążą do minimum lub zmniejszają rozmiar kroku po zmianie kierunku. W dalszych etapach iteracji  $p$  równanie (B.8) przyjmuje postać

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(p+1)} = w_1\Delta\boldsymbol{\beta}^{(p)} \left(1 + w_2\mathbf{d}^{(p)}\mathbf{d}^{(p+1)}\right). \quad (\text{B.9})$$

Proces poszukiwania wartości minimalnej parametru  $\boldsymbol{\beta}$  zostaje zatrzymany, jeśli zostanie osiągnięty zadowalający poziom funkcji celu spełniającej rolę miary odległości między wartościami  $u$  wyznaczonymi numerycznie w wyniku rozwiązania zagadnienia początkowego i danymi eksperymentalnymi. Przewidziano także drugą możliwość zakończenia tego procesu, gdy różnica między wartościami funkcji celu w dwóch kolejnych iteracjach jest wystarczająco mała, to znaczy mniejsza od zadanej a priori wartości.



## Dodatek C

Przedstawione w rozdziale 4.2 całki (4.75)–(4.76), dla ustalonych  $\alpha_u$  i  $\beta_u$ , przyjmują następującą postać:

$$\hat{Q}_{\alpha_u}^{(1)} = \int_0^L c_a r \omega^2 \cos \alpha_u (R \cos \beta_u + r \sin \alpha_u) dr - \int_0^L c_1 r \omega R \cos \alpha_u \sin \beta_u dr - D_1 \int_0^L r \sqrt{Ar^2 + Br + C} dr, \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{Q}_{\beta_u}^{(1)} = - \int_0^L c_a r \omega^2 R \sin \alpha_u \sin \beta_u dr - \int_0^L c_1 r \sin \alpha_u (\omega R \cos \beta_u + r \omega \sin \beta_u) dr - \int_0^L (D_2 r^2 + D_3 r) \sqrt{Ar^2 + Br + C} dr, \quad (\text{C.2})$$

gdzie

$$A = 2\omega^2 - 2\omega^2 \cos(2\alpha_u), \quad (\text{C.3})$$

$$B = 8\omega^2 R \cos \beta_u \sin \alpha_u, \quad (\text{C.4})$$

$$C = \omega^2 R^2 (3 + \cos(2\alpha_u) + 2 \cos(2\beta_u) \sin^2 \alpha_u), \quad (\text{C.5})$$

$$D_1 = \frac{1}{2} c_2 \omega R \cos \alpha_u \sin \beta_u, \quad (\text{C.6})$$

$$D_2 = \frac{1}{2} c_2 \omega \sin^2 \alpha_u, \quad (\text{C.7})$$

$$D_3 = \frac{1}{2} c_2 \omega R \cos \beta_u \sin \alpha_u \quad (\text{C.8})$$

są stałymi. Całki, które zawierają w funkcji podcałkowej współczynniki  $c_1$  oraz  $c_a$  są elementarne i są równe, odpowiednio

$$\hat{Q}_{\alpha_u}^{(1)} = \frac{1}{6} c_a L^2 \omega^2 \cos \alpha_u (3R \cos \beta_u + 2L \sin \alpha_u) - \frac{1}{2} c_1 L^2 \omega R \cos \alpha_u \sin \beta_u - D_1 \int_0^L r \sqrt{Ar^2 + Br + C} dr, \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{Q}_{\beta_u}^{(1)} = -\frac{1}{2} c_a L^2 \omega^2 R \sin \alpha_u \sin \beta_u - \frac{1}{6} c_1 L^2 \sin \alpha_u (3\omega R \cos \beta_u + 2L\omega \sin \beta_u) - \int_0^L (D_2 r^2 + D_3 r) \sqrt{Ar^2 + Br + C} dr. \quad (\text{C.10})$$

Występujące pod pierwiastkiem wyrażenie  $Ar^2 + Br + C$  jest zawsze nieujemne, ponieważ przedstawia ono długość wektora prędkości  $\vec{v}^\perp(r, t)$  (patrz wzór (4.66)).

Współczynniki  $A$  i  $C$  są także nieujemne – na mocy odpowiednio wzoru (C.3) i (C.5). Należy dodać, że kąt  $\alpha_u$  nie osiągnie w żadnym przypadku wartości równej zero, stąd  $A$  i  $C$  są dodatnie. Wyróżnik trójmianu kwadratowego jest równy

$$\Delta = B^2 - 4AC = -16R^2\omega^4 \sin^2(2\alpha_u) \sin^2\beta_u. \quad (\text{C.11})$$

Ze względu na parzyste potęgi, mamy  $\Delta < 0$ .

Całki z funkcji niewymiernych obliczono za pomocą metody współczynników nieoznaczonych Lagrange'a według wzoru

$$\int \frac{W_n(r)}{\sqrt{Ar^2 + Br + C}} dr = Q_{n-1}(r)\sqrt{Ar^2 + Br + C} + a_0 \int \frac{1}{\sqrt{Ar^2 + Br + C}} dr, \quad (\text{C.12})$$

gdzie  $W_n(r)$  jest danym wielomianem stopnia  $n$ ,  $Q_{n-1}$  jest wielomianem stopnia  $n-1$  o nieznanymi współczynnikami, a  $a_0$  jest szukaną liczbą rzeczywistą.

Nieoznaczone całki z funkcji niewymiernych w równaniach (C.9)–(C.10) przyjmują postać

$$I_1 = \int \frac{Ar^3 + Br^2 + Cr}{\sqrt{Ar^2 + Br + C}} dr, \quad I_2 = \int \frac{A_4r^4 + A_3r^3 + A_2r^2 + A_1r}{\sqrt{Ar^2 + Br + C}} dr, \quad (\text{C.13})$$

gdzie  $A_4 = AD_2$ ,  $A_3 = BD_2 + AD_3$ ,  $A_2 = CD_2 + BD_3$ ,  $A_1 = CD_3$ . Stosując metodę współczynników nieoznaczonych Lagrange'a, otrzymamy

$$I_1 = (a_1r^2 + a_2r + a_3)\sqrt{Ar^2 + Br + C} + a_0I_3, \quad (\text{C.14})$$

gdzie

$$I_3 = \int \frac{dr}{\sqrt{Ar^2 + Br + C}}, \quad (\text{C.15})$$

a  $a_0, a_1, a_2, a_3$  są nieznanymi współczynnikami. Różniczkując obie strony równania (C.14) oraz mnożąc przez pierwiastek z mianownika, mamy

$$Ar^3 + Br^2 + Cr = (2a_1r + a_2)(Ar^3 + Br^2 + Cr) + (a_1r^2 + a_2r + a_3)\left(Ar + \frac{B}{2}\right) + a_0. \quad (\text{C.16})$$

Przyrównując elementy stojące przy  $r^i$ , gdzie  $i = 0, 1, 2, 3$ , otrzymano układ równań liniowych postaci

$$\begin{cases} 3Aa_1 = A, \\ \frac{5}{2}Ba_1 + 2Aa_2 = B, \\ 2Ca_1 + \frac{3}{2}Ba_2 + Aa_3 = C, \\ a_0 + Ca_2 + \frac{1}{2}Ba_3 = 0, \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

którego rozwiązaniem są następujące współczynniki:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}, \\ a_2 = \frac{B}{12A}, \\ a_3 = \frac{C}{3A} - \frac{B^2}{8A^2}, \\ a_0 = \frac{B^3}{16A^2} - \frac{BC}{4A}. \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Całkę nieoznaczoną  $I_3$  obliczono za pomocą pierwszego podstawienia Eulera ( $A > 0$ ) postaci

$$\sqrt{Ar^2 + Br + C} = t - \sqrt{Ar} \quad (\text{C.19})$$

Podnosząc równanie (C.19) obustronnie do kwadratu, mamy

$$r = \frac{t^2 - C}{2\sqrt{At} + B}, \quad (\text{C.20})$$

a po zróżniczkowaniu

$$dr = \frac{\sqrt{At^2 + Bt + \sqrt{AC}}}{2\sqrt{At} + B}. \quad (\text{C.21})$$

Podstawiając (C.19)-(C.21) do nieoznaczonej całki (C.15), otrzymano

$$I_3 = \int \frac{2}{2\sqrt{At} + B} dt = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left| 2\sqrt{At} + B \right| + c. \quad (\text{C.22})$$

Ostatecznie, wracając do zmiennej  $r$  – na mocy (C.19), uzyskano

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left| 2\sqrt{A}\sqrt{Ar^2 + Br + C} + 2Ar + B \right| + c. \quad (\text{C.23})$$

Całka  $I_1$  ostatecznie przyjmuje postać

$$\begin{aligned} I_1 = & \left( \frac{1}{3}r^2 + \frac{B}{12A}r + \frac{C}{3A} - \frac{B^2}{8A^2} \right) \sqrt{Ar^2 + Br + C} + \\ & \left( \frac{B^3}{16A^2\sqrt{A}} - \frac{BC}{4A\sqrt{A}} \right) \ln \left| 2\sqrt{A}\sqrt{Ar^2 + Br + C} + 2Ar + B \right| + c. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Do obliczenia całki  $I_2$  również zastosowano metodę współczynników nieoznaczonych Lagrange'a, tzn. całkę  $I_2$  zapisano w następującej postaci:

$$I_2 = (b_1r^3 + b_2r^2 + b_3r + b_4) \sqrt{Ar^2 + Br + C} + b_0I_3, \quad (\text{C.25})$$

gdzie  $I_3$  jest wyrażona wzorem (C.15), a  $b_i$ , gdzie  $i = 0, 1, \dots, 4$ , są nieznanymi współczynnikami rzeczywistymi. Postępując analogicznie jak w przypadku obliczania całki  $I_1$ , otrzymano następujące współczynniki:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{A_4}{4A}, \\ b_2 = \frac{8A \cdot A_3 - 7A_4B}{24A^2}, \\ b_3 = \frac{48A^2A_2 - 40A \cdot A_3B + 35A_4B^2 - 36A \cdot A_4C}{96A^3}, \\ b_4 = \frac{192A^3A_1 - 105A_4B^3 - 16A^2(9A_2B + 8A_3C) + 20AB(6A_3B + 11A_4C)}{192A^4}, \\ b_0 = \frac{35A_4B^4 - 64A^3(A_1B + A_2C) - 40AB^2(A_3B + 3A_4C) + 48A^2(A_2B^2 + C(2A_3B + A_4C))}{128A^4}. \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

Całki oznaczone obliczono, stosując twierdzenie Newtona-Leibniza.

# Bibliografia

- [1] Abundis-Fong H.F., Enríquez-Zárata J., Cabrera-Amado A., Silva-Navarro G., *Optimum design of a nonlinear vibration absorber coupled to a resonant Oscillator: a case study*, Hindawi, Shock and Vibration, Volume 2018, Article ID 2107607 (2018)
- [2] Adhikari S., *Damping modelling using generalized proportional damping*, Journal of Sound and Vibration 293, 156-170 (2006)
- [3] Amer T.S., Bek M.A., Abouhmr M.K., *On the vibrational analysis for the motion of a harmonically damped rigid body pendulum*, Nonlinear Dyn 91:2485-2502 (2018)
- [4] Awrejcewicz J., Krysko V.A., *Wprowadzenie do współczesnych metod asymptotycznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (2004)
- [5] Baker G.L., Blackburn J.A. *The pendulum: a case study in physics*, Oxford University Press, Oxford (2005)
- [6] Beards C.F., *Structural vibration: analysis and damping*, Arnold, London (1996)
- [7] Benaouicha M., Astolfi J.-A., *Analysis of added mass in cavitating flow*, Journal of Fluids and Structures 31 30–48 (2012)
- [8] Bondada A., Nair V.G., *Dynamics of multiple pendulum system under a translating and tilting pivot*, Archive of Applied Mechanics Archive of Applied Mechanics 93(9):1-42 (2023)
- [9] Boyd S., Vandenberghe L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press (2004)
- [10] Braun S., *Encyclopedia of vibration*, Academic Press, San Diego (2002)
- [11] Burden R.L., Faires J.D., *Numerical Analysis*, 9th Edition, Brooks/Code, Cengage Learning, Boston (2010)
- [12] Cabboi A., Marino L., Ciciello A., *A comparative study between Amontons–Coulomb and Dieterich–Ruina friction laws for the cyclic response of a single degree of freedom system*, European Journal of Mechanics / A Solids 96, 104737 (2022)
- [13] Cerquaglia M.L., Thomas D., Boman R., Terrapon V., Ponthot J.P., *A fully partitioned Lagrangian framework for FSI problems characterized by free surfaces, large solid deformations and displacements, and strong added-mass effects*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 348, 409-442 (2019)
- [14] Chang T.-P., *Deterministic and random vibration analysis of fluid-contacting transversely isotropic magneto-electro-elastic plates*, Computers and Fluids 84 247–254 (2013)
- [15] Chapra S.C., Canale R.P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, Boston (2010)

- [16] Dahlquist G., Björck A., *Numerical Methods in Scientific Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2008)
- [17] de Silva C.W., *Vibration and shock handbook*, CRC Press, Boca Raton (2007)
- [18] Dehkharghani A.S., Aidanpää J.-O., Engström F., Cervantes M.J., *A Review of Available Methods for the Assessment of Fluid Added Mass, Damping, and Stiffness With an Emphasis on Hydraulic Turbines*, Appl. Mech. Rev. 70(5) 050801 (2018)
- [19] Draper N.R., Smith H., *Analiza regresji stosowana*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (1973)
- [20] Duckworth R.A., *Mechanika płynów*, WNT, Warszawa (1983)
- [21] Dulikravich G.S., Martin T.J., Dennis B.H., *Multidisciplinary inverse problems*, Proceedings of Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, 3rd International Conference on Inverse Problems in Engineering, June 13-18, 1999, Port Ludlow, WA, USA (1999)
- [22] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2009)
- [23] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., *Metody numeryczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (2001)
- [24] Fritzkowski P., Kamiński H., *Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members*, Comput Mech 44(4):473–480 (2009)
- [25] Fritzkowski P., Kamiński H., *A discrete model of a rope with bending stiffness or viscous damping*, Acta Mech Sin 27(1):108–113 (2011)
- [26] Fritzkowski P., Starosta R., Awrejcewicz J., *Analytical approach to a two-module vibre-impact system*, Topics in Nonlinear Mechanics and Physics: Selected Papers from CSNDD 2018, Springer, s. 187-201 (2019)
- [27] Gatti P.L., Ferrari V., *Applied structural and mechanical vibrations: theory and methods*, CRC Press, London (2017)
- [28] Gauthier J.P., Giroux A.M, Etienne S., Gosseli F.P., *CFD evaluation of added damping due to fluid flow over a hydroelectric turbine blade*, IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 49 (2016)
- [29] Gautschi W., *Numerical Analysis: An Introduction*, Springer (2004)
- [30] Gewert M., Skoczylas Z., *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Oficyna Wydawnicza GIS, Wydanie 6 zmienione (2001)
- [31] Goedecke A., *Transient Effects in friction. Fractal Asperity Creep*, Springer-Verlag, Viena (2013)
- [32] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A., *Deep Learning*, MIT Press (2016)
- [33] Greiner W., *Classical mechanics: point particles and relativity*, Springer, New York (2004)

- [34] Grysa K., *Funkcje Trefftza i ich zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych*, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach, Kielce (2010)
- [35] Grzymkowski R., Hetmaniok E., Słota D., *Wykłady z modelowania matematycznego*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice (2002)
- [36] Halliday D., Resnick R., Walker J., *Fundamentals of physics*, (7th ed.), Hoboken, NJ: Wiley (2005)
- [37] Henn M.I., Yang Q., Lu M., *Simulation study on the structure of the added air mass layer around a vibrating membrane*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 184 289–295 (2019)
- [38] Hyo-Joon K., Wan-Suk Y., Jin-Kyu O., Dong-Woo K., *Parameter identification of damping models in multibody dynamic simulation of mechanical systems*, Multibody Syst. Dyn. 22: 383-398 (2009)
- [39] Jiasheng L., Qu Y., Chen Y., Hua H., *Investigation of added mass and damping coefficients of underwater rotating propeller using a frequency-domain panel method*, Journal of Sound and Vibration 432, 602-620 (2018)
- [40] Jovanović B.S., Suli E., *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics 46 (2014)
- [41] Kalmar-Nagy T., Balachandran B., *Forced harmonic vibration of a Duffing oscillator with linear viscous damping*. In: The Duffing Equation. Nonlinear Oscillators and their Behaviour ed. by Kovacic, I., Brennan M.J., 139-174, Wiley and Sons (2011)
- [42] Kane T.R., Levinson D.A., *Dynamics, Theory and Applications*, New York: McGraw-Hill (1985)
- [43] Kaushal R.S., *The pendula in mathematical sciences*, Indian J Pure Appl Phys 43:479–488 (2005)
- [44] Kincaid D., Cheney W., *Analiza numeryczna*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa (2006)
- [45] Koo G.-H., Lee J.-H., *Development of FAMD Code to Calculate the Fluid Added Mass and Damping of Arbitrary Structures Submerged in Confined Viscous Fluid*, KSME International Journal, Vol. 17 No. 3, 457-466 (2003)
- [46] Koronacki J., Mielniczuk J., *Statystyka dla kierunków technicznych i przyrodniczych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (2004)
- [47] Krishnaswami G.S., Phatak S., *The Added Mass Effect and the Higgs Mechanism. How Accelerated Bodies and Elementary Particles Can Gain Inertia*, Resonance 25(2), 191 (2020)
- [48] Ladino L.A., Rondon H.S., *Determining the damping coefficient of a simple pendulum oscillating in air*, Phys Educ 52:033007 (2017)
- [49] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Fluid mechanics*, Course of theoretical physics, Pergamon Press, Oxford (1987)

- [50] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Mechanics*, Course of theoretical physics, Butterworth-Heinemann, Oxford (1976)
- [51] Lee J.W., Kim H.W., Ku H.C., Yoo W.S., *Comparison of external damping models in a large deformation problem*, J Sound Vib 325:722–741 (2009)
- [52] Lefrançois E., *How an added mass matrix estimation may dramatically improve FSI calculations for moving foils*, Applied Mathematical Modelling 51, 655-668 (2017)
- [53] Leja F., *Funkcje zespolone*, wydanie drugie poprawione, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1971)
- [54] LeVeque R.J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2007)
- [55] Lisitano D., Bonisoli E., *Direct identification of nonlinear damping: application to a magnetic damped system*, Mechanical Systems and Signal Processing 146 (2021)
- [56] Marion J.B., Thornton S.T., *Classical dynamics of particles & systems*, (4th ed.), Thomson (1995)
- [57] Matthews M.R., Gauld C.F., Stinner A., *The pendulum: scientific, historical philosophical and educational*, perspectives. Springer, Dordrecht (2005)
- [58] McCreech J.P., Goodfellow T.L., Seville A.H., *Vibrations of a hanging chain of discrete links*, Am J Phys 43:646–648 (1975)
- [59] Mirzadeh, J., Kimiaei, M., Cassidy, M.J., *Performance of an example jack-up platform under directional random ocean waves*, Appl. Ocean Res. 54, 87–100 (2016)
- [60] Mohazzabi P., Shankar S.P., *Damping of a simple pendulum due to drag on its string*, J Appl Math Phys 5:122–130 (2017)
- [61] Mohr D.L., Wilson W.J., Freund R.J., *Statistical methods*, (4th ed.), Academic Press Inc (2022)
- [62] Morock A., Aldhizer T., Lanzerotti M.Y., Arena A., Capps J., Lacarbonara W., *A shortening pendulum: Hoisting control for medical evacuation rescues*, International Journal of Non-Linear Mechanics 158(2):104566 (2024)
- [63] Morrow H.W., Kokernak R., *Statics and Strengths of Materials*, (7 ed.), New Jersey: Prentice Hall (2011)
- [64] Nana B., Polczyński K., Woafu P., Awrejcewicz J., Wasilewski G., *Analysis of the nonlinear dynamics of a single pendulum driven by a magnetic field using the magnetic charges interaction model and the experimentally fitted interaction model*, DOI: 10.48550/arXiv.2401.10957 (2024)
- [65] Nelson R.A., Olsson M.G., *The pendulum – rich physics from a simple system*, Am J Phys 54(2):112–121 (1986)
- [66] Newland D.E., *Mechanical vibration analysis and computation*, Dover Publications, Mineola (1989)



- [67] Nicolov S.G., *Complex dynamic behavior of inverted pendulum with oscillating suspension point: a review and analysis*, Engineering Sciences, LX, No. 4 (2023)
- [68] Niedoba J., Niedoba W., *Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków (2001)
- [69] Nocedal J., Wright S.J., *Numerical Optimization*, Springer (2006)
- [70] Nakayama Y., Boucher R.F., *Introduction to fluid mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford (2000)
- [71] Ott E., *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, New York (1993)
- [72] Patel M.H., *Dynamics of offshore structures*, Butterworths, London (1989)
- [73] Pook L.P., *Understanding pendulums: a brief introduction*, Springer, Dordrecht (2011)
- [74] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge (1992)
- [75] Qin, S., Gao, Z., *Developments and prospects of long-span high-speed railway bridge technologies in China*, Engineering 3 (6), 787–794 (2017)
- [76] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., *Numerical Mathematics*, Springer (2007)
- [77] Reddy J.N., *An introduction to the finite element method*, Second Edition, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering (1993)
- [78] Robson J.M., *The physics of fly casting*. Am J Phys 58:234–240 (1990)
- [79] Sado D., *Drgania regularne i chaotyczne w wybranych układach z wahadłami*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (2010)
- [80] Salamon R., Kamiński H., Fritzkowski P., *Estimation of parameters of various damping models in planar motion of a pendulum*, Meccanica, Vol. 55, Num. 9, s. 1655-1677 (2020)
- [81] Santis D.D., Shams A., *Scaling of added mass and added damping of cylindrical rods by means of FSI simulations*, Journal of Fluids and Structures 88 241–256 (2019)
- [82] Sarpkaya T., *Wave forces on offshore structures*, Cambridge University Press, Cambridge (2010)
- [83] Sartorelli J.C., Lacarbonara W., *Parametric resonances in a base-excited double pendulum*, Nonlinear Dyn, 69:1679-1692 (2012)
- [84] Schagerl M., Steindl A., Steiner W., Troger H., *On the paradox of the free falling folded chain*, Acta Mech 125:155–168 (1997)
- [85] Średniawa B., *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, PWN, Warszawa (1977)
- [86] Stoer J., Bulirsch R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer (2013)
- [87] Sypniewska-Kamińska G., Awrejcewicz J., Kamiński H., Salamon R., *Resonance study of spring pendulum based on asymptotic solutions with polynomial approximation in quadratic means*, Meccanica 56, iss. 4:963-980 (2021)
- [88] Sypniewska-Kamińska G., Starosta R., Awrejcewicz J., *Two Approaches in the Ana-*

- lytical Investigation of the Spring Pendulum*, Vibrations in Physical Systems, vol. 29, s. 1-11 (2018)
- [89] Taylor J.R., *Classical mechanics*, University Science Books, Sausalito (2005)
- [90] Thornton S.T., Marion J.B., *Classical dynamics of particles and systems*, Brooks/Cole, Belmont (2004)
- [91] Tomaszewski W., Pierański P., Geminard J.C., *The motion of the freely falling chain tip*, AmJ Phys 74:776–783 (2006)
- [92] Török J.S., *Analytical mechanics with an introduction to dynamical systems*, Wiley, New York (2000)
- [93] Trefethen L.N., Bau III D., *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1997)
- [94] Vining G.G., Kowalski S.M., *Statistical Methods for Engineers*, Brooks/Cole, Belmont (2005)
- [95] Wang C.Y., *Stability and large displacements of a heavy rotating linked chain with an end mass*, Acta Mech 107:205–214 (1994)
- [96] Wang H., Shan W., Yu C., *Study on the added mass effect in squeeze-film dampers*, Journal of Mechanical Science and Technology 32 (6), 2889-2895 (2018)
- [97] Wei, K., Myers, A.T., Arwade, S.R., *Dynamic effects in the response of offshore wind turbines supported by jackets under wave loading*, Eng. Struct. 142, 36–45 (2017)
- [98] White F.M., *Fluid mechanics*, WCB/McGraw-Hill, New York (1999)
- [99] Yang W. Li Q., *A New Added Mass Method for Fluid-structure Interaction Analysis of Deep-water Bridge*, KSCE Journal of Civil Engineering 17(6):1413-1424 (2013)
- [100] Yin T., Lua D., Huang Y., Liu Y., *Study on added mass model for fluid-structure interaction of spent fuel storage rack*, Nuclear Engineering and Design 353 (2019) 110224
- [101] Zhang J., Wei K., Qin S., *An efficient numerical model for hydrodynamic added mass of immersed column with arbitrary cross - Section*, Ocean Engineering 187 (2019) 106192
- [102] Zonetti L.F.C., Camargo A.S.S., Sartori J., de Sousa D.F., Nunes L.A.O., *A demonstration of dry and viscous damping of an oscillating pendulum*, Eur J Phys 20:85–88 (1999)