



**POLITECHNIKA POZNAŃSKA**  
WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ

**DZIEDZINA NAUK INŻYNIERYJNO-TECHNICZNYCH**  
DYSCYPLINA INŻYNIERIA MECHANICZNA

## **ROZPRAWA DOKTORSKA**

Analiza właściwości mechanicznych struktur auksetycznych  
przy obciążeniach dynamicznych

Autor: mgr inż. Bartłomiej Burlaga

Promotor rozprawy: dr hab. Tomasz Stręk, prof. PP  
Promotor pomocniczy: dr inż. Paweł Fritzkowski

Poznań, 2024



## **Podziękowania**

*Serdecznie dziękuję:*

*Promotorowi,*

*Panu dr. hab. Tomaszowi Strękowi, prof. PP*

*za wsparcie w realizacji badań oraz cenne uwagi do pracy*

*Promotorowi pomocniczemu,*

*Panu dr. inż. Pawłowi Fritzkowskiemu*

*za cenne uwagi i sugestie dotyczące pracy*

*Rodzinie,*

*za okazane wsparcie w czasie całej mojej edukacji.*





# Spis treści

<b>Streszczenie</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1. Wprowadzenie . . . . .	1
1.2. Motywacja . . . . .	3
1.3. Cel pracy . . . . .	4
1.4. Teza pracy . . . . .	5
1.5. Układ pracy . . . . .	5
<b>2 Materiały auksetyczne</b>	<b>9</b>
2.1. Charakterystyka współczynnika Poissona . . . . .	9
2.2. Charakterystyka materiałów auksetycznych . . . . .	12
2.3. Przykłady struktur auksetycznych . . . . .	16
2.3..1 Struktury re-reentrant . . . . .	16
2.3..2 Struktury chrialne . . . . .	19
2.3..3 Struktury rotujące . . . . .	21
2.3..4 Struktury powstałe przez modyfikację płaskich arkuszy . . . . .	22
2.3..5 Pozostałe struktury . . . . .	25
2.4. Zastosowania . . . . .	27
<b>3 Zastosowane metody obliczeniowe</b>	<b>31</b>
3.1. Podstawy teorii sprężystości . . . . .	32
3.2. Podstawy metody elementów skończonych . . . . .	33
3.3. Metoda elementów skończonych w dynamice . . . . .	35
3.4. Analiza modalna . . . . .	37
3.5. Zagadnienie odpowiedzi harmonicznej . . . . .	38
3.6. Zagadnienie analizy przejściowej . . . . .	39
<b>4 Model obliczeniowy</b>	<b>43</b>
4.1. Generowanie geometrii . . . . .	44
4.2. Właściwości siatki elementów skończonych . . . . .	48

4.3. Parametry symulacji . . . . .	48
4.4. Model materiałowy <i>neo-Hookean</i> . . . . .	50
<b>5 Analiza oddziaływania siły pionowej</b>	<b>53</b>
5.1. Opis problemu . . . . .	53
5.2. Analiza pierścienia z jednorodnym wypełnieniem . . . . .	54
5.3. Analiza wpływu szerokości żeber na odpowiedź struktury . . . . .	55
5.4. Analiza wpływu kształtu komórek na odpowiedź struktury . . . . .	58
<b>6 Wyniki analizy działania siły wzdłużnej</b>	<b>61</b>
6.1. Opis problemu . . . . .	61
6.2. Analiza pierścienia z jednorodnym wypełnieniem . . . . .	62
6.3. Analiza wpływu szerokości żeber na odpowiedź struktury . . . . .	63
6.4. Analiza wpływu kształtu komórek na odpowiedź struktury . . . . .	66
<b>7 Wyniki analizy działania momentu obrotowego</b>	<b>69</b>
7.1. Opis problemu . . . . .	69
7.2. Analiza pierścienia z jednorodnym wypełnieniem . . . . .	70
7.3. Analiza wpływu szerokości żeber na odpowiedź struktury . . . . .	71
7.4. Analiza wpływu kształtu komórek na odpowiedź struktury . . . . .	73
<b>8 Wyniki analizy uderzenia pocisku</b>	<b>75</b>
8.1. Opis problemu . . . . .	75
8.2. Wyniki symulacji . . . . .	77
<b>9 Wnioski i podsumowanie</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>

# Streszczenie

Przedmiotem niniejszej rozprawy są dyski ze strukturami komórkowymi. Celem określenia własności dynamicznych tych struktur poddano je analizie metodą elementów skończonych w programie ANSYS Mechanical. Wykorzystano szereg metod numerycznych do określenia zachowania nowych struktur przy różnych obciążeniach dynamicznych: sile działającej w płaszczyźnie symetrii wzdłużnej, sile wzdłużnej (normalnej do wymienionej wcześniej), momentu obrotowego oraz analizie uderzenia. W części poświęconej analizie obecnego stanu wiedzy, praca zawiera omówienie podstawowych praw dotyczących zagadnień wytrzymałości materiałów, charakterystykę struktur komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona wraz z ich obecnymi i potencjalnymi zastosowaniami. Kolejna część zawiera przedstawienie i omówienie zastosowanych metod obliczeniowych, ze szczególnym uwzględnieniem metody elementów skończonych (MES) dla zagadnień stacjonarnych i dynamicznych. W dalszej części omówiono opracowany przez autora algorytm generowania struktur płaskich, przyjęte parametry symulacji i omówiono zastosowany model materiałowy. Cztery kolejne rozdziały zawierają opis przeprowadzonych analiz oraz ich wyniki. W podsumowaniu pracy zawarto syntetyczny opis uzyskanych wyników oraz wnioski z poszczególnych symulacji. Przedstawiono prototypy struktur wytworzone metodami przyrostowymi z materiałów termoplastycznych. Wskazano też proponowane dalsze kierunki badań symulacyjnych i eksperymentalnych oraz potencjalne obszary zastosowań badanych struktur.



# Abstract

The main subject of this dissertation were discs with cellular structures. In order to determine the dynamic properties of these structures, these discs were subjected to finite element analysis in ANSYS Mechanical. A variety of numerical methods were used to determine the behavior of the new structures under various dynamic loads: vertical force, longitudinal force, torque and impact analysis. In the section devoted to the analysis of the current state of knowledge, the work includes a discussion of the basic laws of material strength, the characteristics of cellular structures with a negative Poisson's ratio, along with their current and potential applications. The next section includes a presentation and discussion of the computational methods used, with particular emphasis on the finite element method (FEM) for stationary and dynamic problems. The next section discusses the algorithm developed by the author, used for generating planar structures, the simulation parameters used and discusses the material model used. The following four chapters contain a description of the analyses performed and their results. The conclusion of this dissertation includes a description of the obtained results and conclusions of the individual simulations. Prototypes of structures fabricated by additive manufacturing methods from thermoplastic materials are presented. Finally, the proposed further directions of simulation and experimental research and potential areas of application are presented.



# Rozdział 1

## Wstęp

Coraz wyższe wymagania stawiane przez przemysł w obszarach bioinżynierii, motoryzacyjnym, lotniczym, a nawet zbrojeniowym, niejako zmuszają do odejścia od materiałów konwencjonalnych. W konsekwencji można zaobserwować wzrost zainteresowania naukowego meta-materiałami i nowymi strukturami. Właściwości mechaniczne należą do najszerzej badanych zagadnień w dziedzinie inżynierii materiałowej, a zarazem pozwalają na ilościowy opis badanego materiału. Uzyskane informacje mają kluczowe znaczenie dla analizy inżynierskiej oraz umożliwiają wybór odpowiedniego materiału do danego zastosowania. Ilość dostępnych obecnie materiałów do zastosowań technicznych jest znaczna, a nowe materiały są w trakcie opracowywania lub badań [Surjadi i inni, 2019].

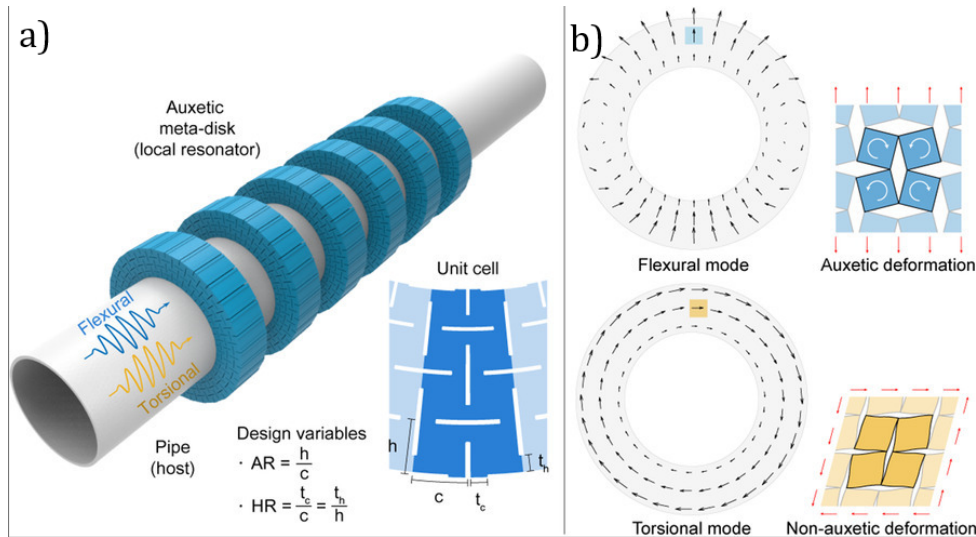
### 1.1. Wprowadzenie

W ujęciu mechanicznym, struktury komórkowe złożone są z sieci połączonych prętów lub płaszczyzn tworzących pojedyncze komórki elementarne. Ich efektywne własności mechaniczne w największym stopniu zależą od porowatości (gęstości względnej) oraz materiału bazowego [Raymont i inni, 2011]. Stosunkowo niedawno, bo w latach 80. XX wieku, Gibson i inni [Gibson i inni, 1982] zaproponowała kształt komórki elementarnej przypominający klepsydrę. Była to pierwsza struktura, która wykazywała ujemny efektywny (mierzony dla całej struktury komórkowej) współczynnik Poissona. Później tego typu struktury nazwano auksetykami i zostały zaliczone do meta-materiałów. Od momentu publikacji prac Gibson obserwuje się rosnące zainteresowanie naukowe tego typu strukturami.

Liczne badania wykazały, że struktury auksetyczne wykazują zwiększoną odporność na odkształcenia postaciowe, wyższe współczynniki tłumienia drgań mechanicznych i dźwięku, większą wytrzymałość na propagację pęknięć oraz większą zdolność do absorpcji energii mechanicznej w porównaniu do struktur bardziej konwencjonalnych, takich jak sześciokątna struktura plastra miodu [Novak i inni, 2023].

Zdecydowana większość badań dotyczy jednak prawie wyłącznie struktur losowych do których należą pianki auksetyczne [Lakes, 1987] lub płaskich lub przestrzennych struktur warstwowych w kształcie płyty lub prostopadłościanu. Stosunkowo mało jest opracowań w których występują struktury kołowe lub pierścieniowe. Można wyróżnić trzy główne tematy prac traktujących o strukturach kołowych.

Do pierwszej z nich zaliczane są prace badawcze, w których używa się tłumików auksetycznych do kontrolowania lub całkowitego wytłumienia drgań rur lub prętów. Najczęściej wykorzystywane są dyski z odpowiednią strukturą rozmieszczone w określonych odstępach na zewnętrznej części obiektu. Hur i inni [Hur i Kim, 2023] zaproponował strukturę pokazaną na rysunku 1.1.



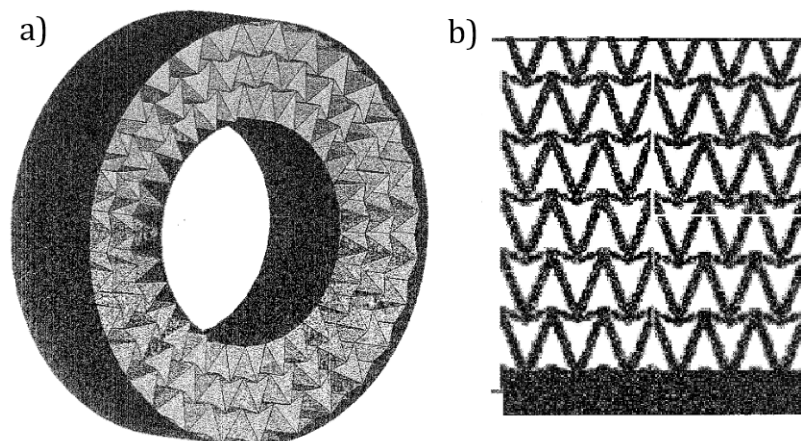
Rysunek 1.1: Zagadnienie tłumienia drgań poprzecznych i skrętnych: a) obiekt badań oraz struktura dysków tłumiących b) zachowanie komórek elementarnych przy różnych rodzajach drgań [Hur i Kim, 2023].

Hur i inni opracowali dyski z nacięciami formującymi jedną strukturę *rotujących kwadratów*. Jak można zauważyć, przy drganiach poprzecznych, struktura wykazywała zachowanie auksetyczne, a przy drganiach skrętnych już nie. Autorzy prac wykazali, że stosowanie tego typu dysków pozwala w prosty sposób ograniczyć propagację fal mechanicznych w rurach i prętach, a po modyfikacji kształtu również w innych obiektach.

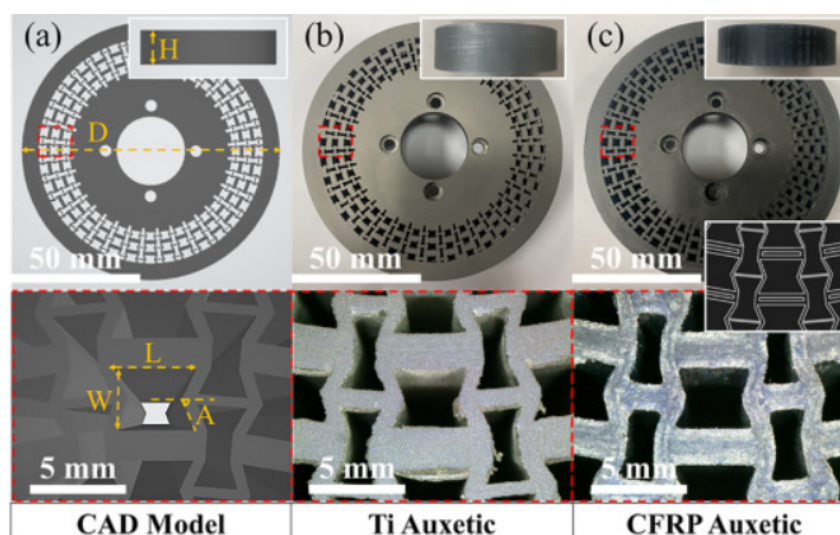
Drugą grupę prac badawczych i przedmiotów patentów, stanowią bezdętkowe opony [Biswas i inni, 2022, Ma i inni, 2013]. Budowa takiej opony opiera się na wypełnieniu przestrzeni normalnie wypełnionej gazem pod ciśnieniem przez strukturę auksetyczną. Badania Biswas i innych [Biswas i inni, 2022] wykazały, że tego typu opony wykazują większą odporność na przebicia i lepiej amortyzują uderzenia oraz nierówności podczas jazdy. Przykładową budowę opony i strukturę która ją wypełnia pokazano na rysunku 1.2.

Ostatnią grupę stanowią prace dotyczące zastosowania płaskich dysków w zastosowaniach inżynierskich. W tej grupie jest najmniej prac, większość z ostatnich kilku lat. Ciekawe zastosowanie tego typu struktur zaproponował Kim i inni [Kim i inni, 2022]. Wraz z zespołem zaprojektowali i wykonali metodami przyrostowymi dyski z wycięciami w kształcie komórek auksetycznych, które pokazano na rysunku 1.3. Stanowiły one element mocujący wrzeczono we frezarce sterowanej numerycznie. Następnie wykonano frezowanie płytki ze stopów aluminium przy tych samych parametrach i zmierzono ich chropowatość. Wyniki przedstawiono na rysunku 1.4.





Rysunek 1.2: Przykład budowy opony bezdętowej z wypełnieniem auksetycznym: a) rozmieszczenie elementów opony b) struktura wewnętrzna [Ma i inni, 2013].



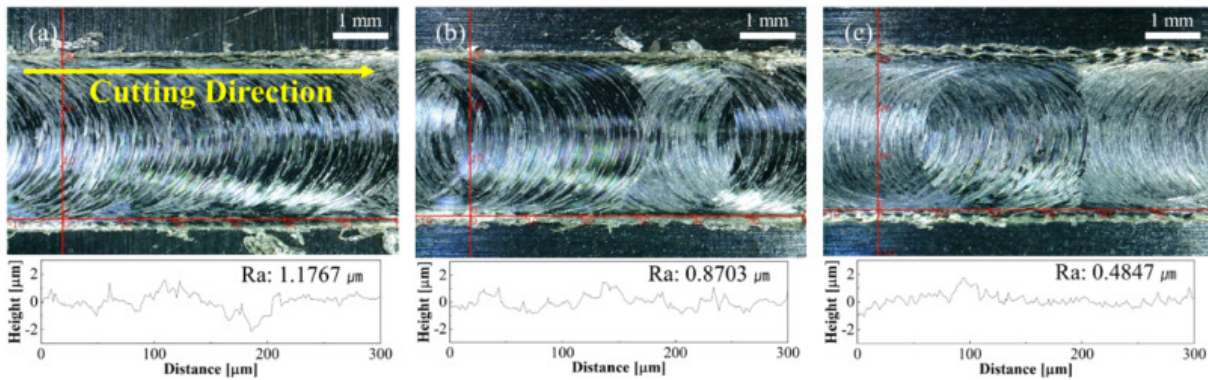
Rysunek 1.3: Dyski z wyciętą strukturą auksetyczną: a) model CAD b) dysk ze stopu tytanu c) dysk z polimeru wzmocnionego włóknem węglowym [Kim i inni, 2022].

Jak można zauważyć nastąpiła znaczna redukcja drgań wrzeciona i w konsekwencji poprawiono wartości chropowatości obrabianej powierzchni.

Można zauważyć potencjał struktur pierścieniowych w zastosowaniu w postaci absorberów energii oraz tłumików drgań. Mimo badań w konkretnych zastosowaniach, brakuje badań dotyczących podstawowych własności dysków ze strukturą auksetyczną.

## 1.2. Motywacja

Każde urządzenie techniczne jest projektowane z uwzględnieniem obciążeń na nie działających. Ich pochodzenie może być zewnętrzne lub wynikające z pracy samego urządzenia. Dodatkowo, charakter tych oddziaływań może być skrajnie różny - od obciążeń statycznych do silnie dynamicznych uderzeń. Celem zredukowania ich negatywnego wpływu na poprawność działania i żywotność urządzenia, szeroko



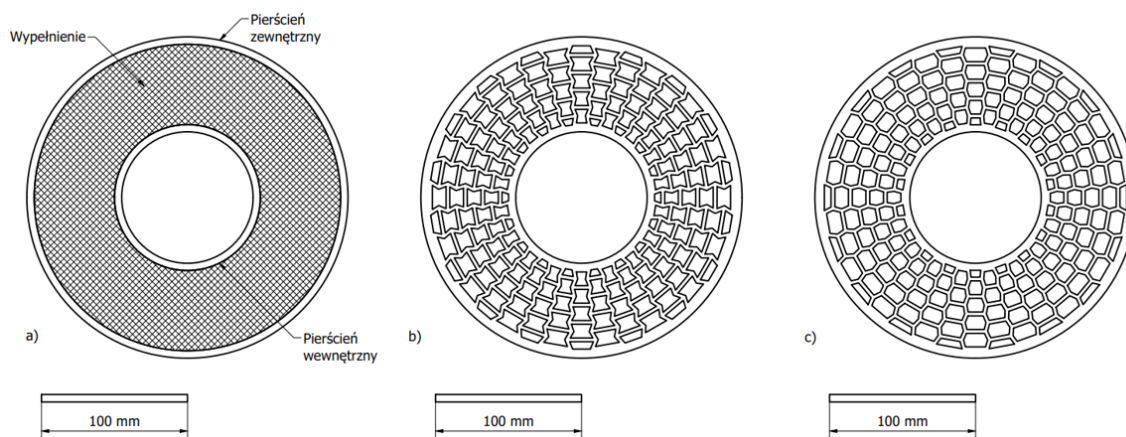
Rysunek 1.4: Przejścia frezu z wrzecionem frezarki zamontowanym na dysku: a) pełnym ze stali  
 b) dysku ze stopu tytanu c) dysku z polimeru wzmocnionego włóknem węglowym  
 [Kim i inni, 2022].

stosowane są różnego rodzaju tłumiki drgań oraz absorbery energii mechanicznej. Najczęściej przybierają one postać dodatkowych elementów konstrukcyjnych, a ich stosowanie wiąże się z koniecznością doboru elementu normatywnego lub zaprojektowaniu nowego elementu od podstaw. Coraz to wyższe wymagania dotyczące niższej masy, wyższej wytrzymałości lub określonego zachowania przy obciążeniu napędzają badania i poszukiwania nowych struktur czy też specjalnych materiałów. W toku tych badań powstają różne meta-materiały, o nowych właściwościach. Jedną z tych grup stanowią struktury o ujemnym współczynniku Poissona, które znajdują coraz więcej zastosowań (na przykład w postaci płyt warstwowych). W niektórych zastosowaniach, konieczne jest użycie struktur o innych kształtach niż płaska płyta. Mimo licznych artykułów dotyczących materiałów o ujemnym współczynniku Poissona, struktury pierścieniowe nie zostały dotychczas zbadane. Stąd konieczność przeprowadzania ich badań oraz opracowania metod ich tworzenia.

### 1.3. Cel pracy

Nadrzędnym celem niniejszej pracy jest zbadanie zachowania przy obciążeniu dynamicznym struktur, których przykłady pokazano na rysunku 1.5.

Realizacja celu nadrzędnego odbędzie się poprzez realizację celów cząstkowych. Pierwszym z nich jest poznanie odpowiedzi struktur pierścieniowej na wymuszenie dynamiczne w postaci siły pionowej. Kolejnym celem cząstkowym będzie poznanie zachowania struktur pierścieniowych przy dynamicznym obciążeniu wzdłużnym (w kierunku normalnym). Trzeci cel stanowi określenie zmian kąta skręcenia wewnętrznego pierścienia przy dynamicznym obciążeniu momentem. Odstani cel cząstkowy stanowi określenie zdolności struktur pierścieniowych do absorpcji energii uderzenia. Podczas realizacji wymienionych celów, dochodzi dodatkowy cel w postaci porównania wyników otrzymanych dla struktur z komórkami typu re-entrant z ich analogami - strukturami o komórkach typu plaster miodu.



Rysunek 1.5: Przykładowe modele badanych struktur: a) struktura pierścieniowa z jednorodnym wypełnieniem, b) struktura pierścieniowa z komórkami typu re-entrant, c) struktura pierścieniowa z komórkami typu plaster miodu.

## 1.4. Teza pracy

Przeprowadzone badania udowadniają, że struktury auksetyczne charakteryzują się zdolnością do tłumienia drgań w większym stopniu niż materiały (czy struktury konwencjonalne). Potencjalnie, struktury pierścieniowe stworzone na podstawie już istniejących struktur powinny również charakteryzować się taką zdolnością i wykazywać lepsze właściwości niż struktury pierścieniowe powstałe na podstawie struktur o dodatnim współczynniku Poissona. Implikuje to możliwość zastosowania tych struktur przy absorpcji energii mechanicznej przy różnorodnych obciążeniach dynamicznych. Bezpośrednio z poprzedniej tezy wynika, że możliwym byłoby jest zastosowanie tych struktur jako elementów bezpieczeństwa lub tłumiących w różnych dziedzinach inżynierii.

## 1.5. Układ pracy

Przedmiotem niniejszej rozprawy są unikalne struktury pierścieniowe powstałe w wyniku przekształcenia już istniejących struktur płaskich. Celem określenia własności dynamicznych struktur pierścieniowych poddano je analizie metodą elementów skończonych w programie ANSYS Mechanical. Wykorzystano szereg metod numerycznych do określenia zachowania nowych struktur przy różnych obciążeniach: sile działającej w płaszczyźnie symetrii wzdłużnej, sile wzdłużnej (normalnej do wymienionej wcześniej), momentu obrotowego oraz analizie dynamicznego uderzenia.

Rozdział drugi zawiera rys historyczny współczynnika Poissona oraz podstawowych praw dotyczących zagadnień wytrzymałości materiałów. W dalszej części rozdziału przedstawiono podstawowy podział struktur akustycznych, scharakteryzowano główne kategorie tych struktur, dokonano przeglądu literatury związanej z obecnym stanem wiedzy o materiałach auksetycznych oraz przedstawiono właściwości struktur. Przedstawiono w nim również obecne i potencjalne zastosowania tego typu struktur.

Rozdział trzeci poświęcono opisowi zastosowanych w pracy metod obliczeniowych. Zaczęto od krótkiej historii wdrażania metody elementów skończonych, a następnie przywołano równania konstytutywne sprężystości. Bazując na nich, przedstawiono wyprowadzenie metody elementów skończonych dla zagadnień stacjonarnych. W kolejnych podrozdziałach przybliżono metody numeryczne stosowane w rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych. Zaczęto od podania wyprowadzeń dla analizy modalnej i przejściowej. Omówiono różnice, wady i zalety jawnych i niejawnych metod całkowania równań ruchu. Pod koniec rozdziału przedstawiono metodę superpozycji modalnej oraz wskazano jej wady i zalety oraz ograniczenia stosowania tej metody.

W rozdziale czwartym omówiono zastosowany model obliczeniowy. W części pierwszej rozdziału przedstawiono opracowany przez autora algorytm generowania struktur płaskich. Omówiono sposób jego działania, ze szczególnym uwzględnieniem sposobu uzyskania struktur pierścieniowych o różnych parametrach komórek elementarnych. W kolejnej części skupiono się na przedstawieniu parametrów siatki elementów skończonych oraz sposobu jej generacji dla badanych struktur. W ostatniej części omówiono przyjęte parametry materiałowe oraz zawarto opis nieliniowego modelu materiałowego *neo-Hookean* użytego w symulacji uderzenia w strukturę.

Następny rozdział jest pierwszym rozdziałem z wynikami. Zaczęto od zdefiniowania problemu obliczeniowego. W tym wariancie symulacji badano wpływ oddziaływania siły pionowej na zachowanie struktur pierścieniowych. Następnie omówiono parametry tych obiektów ulegające modyfikacji. W rozdziale wyróżniono trzy analizy: analizę struktury pierścieniowej z jednorodnym rdzeniem, analizę oceniającą wpływ grubości żeber struktury na zachowanie pod obciążeniem dynamicznym oraz analizę oceniającą wpływ kształtu komórki na zachowanie pod obciążeniem dynamicznym. Przeprowadzono analizy w domenie czasu oraz domenie częstotliwości. Na koniec rozdziału podsumowano uzyskane wyniki i wskazano najważniejsze wartości.

Układ kolejnego rozdziału prezentującego wyniki jest analogiczny do poprzedniego. Wynika to z faktu zastosowania tego samego podejścia do rozwiązania zagadnienia podobnego. Rozdział zaczyna się od definicji problemu. W tym przypadku, zmieniony był kierunek obciążenia z pionowego na poziomy (wzdłużny). Następnie przedstawiono wyniki dla trzech typów analiz: analizy struktury pierścieniowej z jednorodnym rdzeniem, analizy oceniającej wpływ grubości żeber i kształtu komórki na zachowanie struktury przy obciążeniu dynamicznym. Analizy prowadzono w domenie czasu i częstotliwości. Rozdział kończy się podsumowaniem uzyskanych wyników.

Trzeci rozdział zawiera wyniki symulacji zachowania struktur przy dynamicznym obciążeniu momentem skręcającym. Początek rozdziału zawiera definicję i opis problemu. W dalszej części, podobnie jak w poprzednim rozdziale, przedstawiono wyniki dla trzech przypadków analiz realizowanych w domenie czasu i częstotliwości. Na końcu rozdziału zawarto podsumowanie i krótkie omówienie uzyskanych wyników.

Ostatni rozdział dotyczący wyników symulacji, zawiera te uzyskane w wyniku analizy uderzenia w strukturę. Opisano niezbędne zmiany geometrii dla tego typu symulacji. Przedstawiono definicję elementu uderzającego w postaci walca o zadanych wymiarach i masie poruszającego się zadaną prędkością. Przedstawiono użytą siatkę elementów skończonych oraz przyjęte parametry symulacji. W sekcji

poświęconej wynikom przedstawiono wykresy przemieszczeń w wyniku uderzenia przez dwie struktury: jedną z komórkami re-entrant i jedną z komórkami w kształcie plastra miodu. Rozdział zakończono podsumowaniem oraz dokonano porównania stopnia absorpcji energii przez struktury.

W podsumowaniu pracy zawarto syntetyczny opis uzyskanych wyników oraz wnioski z poszczególnych symulacji. Zaproponowano również potencjalne zastosowania otrzymanych struktur. Przedstawiono prototypy struktur wytworzone metodami przyrostowymi z materiałów termoplastycznych. Wskazano też proponowane dalsze kierunki badań symulacyjnych i eksperymentalnych. Pracę zamyka bibliografia obejmująca 188 pozycji literaturowych.



## Rozdział 2

# Materiały auksetyczne

W dziedzinie materiałoznawstwa i inżynierii, badania materiałów o ujemnym współczynniku Poissona stanowią relatywnie nowy kierunek naukowy. Charakteryzujące się sprzecznym z intuicją zachowaniem pod wpływem odkształceń, struktury auksetyczne wykazują unikalne właściwości. Ich potencjalne wykorzystanie obejmuje między innymi inżynierię lotniczą, urządzenia biomedyczne, branżę motoryzacyjną i projektowanie architektoniczne. Obecnie, największe zainteresowanie naukowe obserwuje się w takich obszarach jak: absorpcja energii uderzeń, przestrajalne metamateriały i adaptowalne elementy konstrukcyjne.

Niniejszy rozdział stanowi wyjaśnienie auksetyków, omawiając teoretyczne podstawy, charakterystyczne cechy, przykładowe struktury i potencjał zastosowania w różnych dziedzinach inżynierii.

### 2.1. Charakterystyka współczynnika Poissona

Doskonale znanym zachowaniem materiałów jest zmniejszenie ich przekroju poprzecznego przy obciążeniu wzdłużnym. Zjawisko przedstawiono na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Zmiana przekroju obiektu z materiału o dodatnim współczynniku Poissona przy działaniu siły wzdłużnej [Bertoldi i inni, 2017].



Parametrem opisującym to zachowanie materiału w stanie obciążenia jest współczynnik Poissona, zdefiniowany wzorem:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{Trans}}{\varepsilon_{Load}}, \quad (2.1)$$

gdzie  $\varepsilon_{Load}$  jest odkształceniem w kierunku działania obciążenia, a  $\varepsilon_{Trans}$  odkształceniem w kierunku prostopadłym do kierunku odkształcenia. Ze względu na typ obciążenia (tu: rozciąganie), wartości przyjmowane przez  $\varepsilon_{Load}$  będą dodatnie (zwiększenie długości), a wartości  $\varepsilon_{Trans}$  będą ujemne (zmniejszenie wymiaru poprzecznego). Implikuje to konieczność uwzględnienia znaku ujemnego we wzorze, celem uzyskania dodatnich wartości współczynnika. Współczynnik Poisson'a należy do grupy czterech podstawowych parametrów materiałowych, do której należą moduł Younga  $E$  opisujący sztywność materiału, moduł Kirchhoffa  $G$  opisujący sprężystość materiału oraz moduł Helmholtza  $K$  opisujący niepodatność materiału na odkształcenia objętościowe. Wspomniane moduły związane są równaniami;

$$E = 2G(1 + \nu), \quad (2.2)$$

$$E = 3K(1 - 2\nu). \quad (2.3)$$

Podstawowym prawem opisującym zależność między przyłożoną siłą, a wynikającym z niej odkształceniem sformułował w połowie XVII wieku Robert Hook. Szerzej zjawiskiem pocienienia materiału przy jego elongacji zajął się Thomas Young, który przedstawił je w 1807 roku podczas „*Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*” [Young, 1807]. Wskazał na istnienie zależności między odkształceniem wzdłużnym i poprzecznym, jednak nie podjął się jego zdefiniowania. Wspomniane wystąpienie było również istotne dla mechaniki ze względu na wprowadzenie definicji modułu odkształcalności liniowej  $E$  - nazwanego później nazwiskiem Younga. Sama koncepcja występowania tego modułu została opracowana w 1727 roku przez Leonharda Eulera, a pierwsze eksperymenty wykorzystujące koncepcję modułu Younga w jego nowoczesnej formie zostały przeprowadzone przez włoskiego naukowca Giordano Riccatiego w 1782 roku. Opracowanie kompleksowych modeli matematycznych opisujących zjawiska elastyczne nastąpiło na początku XIX wieku [Greaves, 2013]. Pierwszy model zaproponował Navier [Navier, 1827], następnie Cauchy [Cauchy, 1828] oraz w latach późniejszych Stokes [Stokes, 1845].

Nazwania i zdefiniowania współczynnika podjął się Siméon Denis Poisson, wydając w 1827 roku publikację wprowadzając oznaczenie  $\nu$  [Poisson, 1827]. W swojej propozycji oparł się o zależność wydłużenia obiektu do zmiany jego przekroju poprzecznego, uzyskując stałą wartość współczynnika  $\nu = 1/4$ . Wyniki eksperymentów na prętach mosiężnych uzyskane przez Cagniarda de la Tour dodatkowo potwierdzały tę wartość, jednak późniejsze badania wykazały dużą niedokładność pomiarową zastosowanej metody [Greaves, 2013].

W latach 50. XIX wieku, Gustav Kirchhoff przeprowadził badania metali, mierząc niezależnie ich moduł Younga  $E$  i moduł ścinania  $G$ , z których wyznaczył równanie 2.4 wiążące te dwie wartości [Kirchhoff, 1859]:

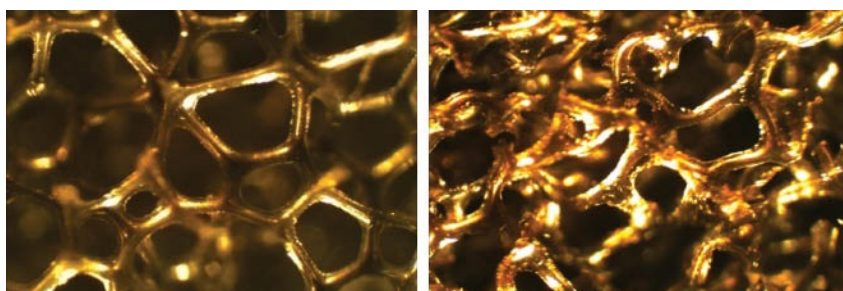
$$\nu = \left( \frac{E}{2G} - 1 \right). \quad (2.4)$$



Uzyskane wartości oraz nowe podejście zapoczątkowało dalsze badania. Wykazały one, że współczynnik Poissona nie jest wartością stałą, a jego wartość różni się w zależności od materiału.

Za pierwszego naukowca, który przedstawił możliwość występowania materiałów anizotropowych z ujemnym współczynnikiem Poissona oraz większym niż  $1/2$  uznawany jest Saint-Venant [de Saint-Venant, 1848]. Swoje wnioski wysunął na podstawie przekształceń równania Cauchego [Greaves, 2013]. Bazując na teorii sprężystości i prawach termodynamiki, zdefiniowano zakres wartości współczynnika Poissona dla izotropowych ciał stałych jako:  $1 \leq \nu \leq 0.5$  [Poisson, 1827, Cauchy, 1828, Fung i Drucker, 1966]. Występowanie materiałów z ujemnym współczynnikiem Poissona potwierdzono dopiero w XX wieku, gdy Voigt w 1910 roku [Voigt, 1910], a później Hearmon [Hearmon, 1946] oraz Simmons [Simmons i Wang, 1971], zmierzili współczynniki Poissona dla pojedynczych kryształów. Love [Love, 1927] w swoich badaniach wykazał, że naturalnie występujący pirit charakteryzuje się wartością  $\nu = -0.14$  [Greaves, 2013]. W toku dalszych badań określono, że podobne właściwości posiadają niektóre tkanki biologiczne [Veronda i Westmann, 1970] oraz kryształy o układzie regularnym [Milstein i Huang, 1979].

Od lat 80. XX wieku zaobserwowano dynamiczny wzrost zainteresowania naukowego syntetycznymi metamateriałami auksetycznymi, co stanowi istotny przełom w dziedzinie inżynierii materiałowej. W 1982 roku, Gibson zaproponowała makrostrukturę o unikalnym kształcie re-entrant [Gibson i inni, 1982]. W kolejnych latach, rozwijając koncepcję Gibson, w 1987 roku Rod Lakes przedstawił pierwszą metodę uzyskiwania syntetycznej pianki o ujemnym współczynniku Poissona [Lakes, 1987]. Proces przekształcenia pianki polimerowej polega na wstępnej kompresji w formie oraz zwiększeniu temperatury powyżej temperatury mięknienia. Następnie stopniowym ostudzeniu do temperatury otoczenia i ekstrakcji z formy. W ostatnim etapie umożliwia się swobodną ekspansję pianki. Zmiany temperatury i kompresja muszą przebiegać w ściśle określony sposób, a największy wpływ na rodzaj pianki mają warunki ściskania [Choi i Lakes, 1992, Wang i inni, 2001, Lakes i Witt, 2002]. Porównanie mikrostruktur materiału konwencjonalnego i zmodyfikowanego znajduje się na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2: Mikrostruktura otwarto-komórkowej pianki poliuretanowej przed (a) i po (b) przekształceniu w piankę akustyczną [Bhullar, 2015].

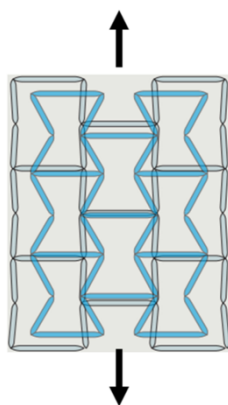
Metody podobne, pozwalające uzyskać tego typu struktury zaproponowali w latach późniejszych Chan i Evans [Chan i Evans, 1997], Quadrini [Quadrini i inni, 2016] i Friis [Friis i inni, 1988]. Umożliwiły one znaczącą poprawę jakości otrzymywanych pianek (m.in. zmniejszenie uszkodzeń komórek) oraz zmniejszeniem anizotropii. Poza materiałami polimerowymi, opracowano metody polegające na

wykorzystaniu serii odkształceń plastycznych celem uzyskania metalowych pianek wykazujących własności akustyczne [Friis i inni, 1988].

Nazwa, która obecnie jest powszechnie stosowana, została zaproponowana przez Evansa w 1991 roku, opierając się na greckim słowie *auxetos*, które dosłownie oznacza "mający tendencję do powiększania się". Ta terminologia nie tylko oddaje istotę badanego zjawiska, ale również podkreśla dynamiczny charakter tych materiałów [Evans, 1991].

## 2.2. Charakterystyka materiałów auksetycznych

Materiały auksetyczne można zdefiniować jako ciała stałe charakteryzujące się ujemną wartością współczynnika Poissona. Oznacza to, że podczas rozciągania materiału, następuje jego poszerzenie w kierunku prostopadłym do kierunku działania siły. Analogiczne zachowanie można zaobserwować dla obciążeń ściskających. Schemat obrazujący zachowanie materiałów auksetycznych przy ujemnych wartościach współczynnika Poissona przedstawiono na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Zmiana przekroju obiektu z materiału o ujemnym współczynniku Poissona przy działaniu siły wzdłużnej [Bertoldi i inni, 2017].

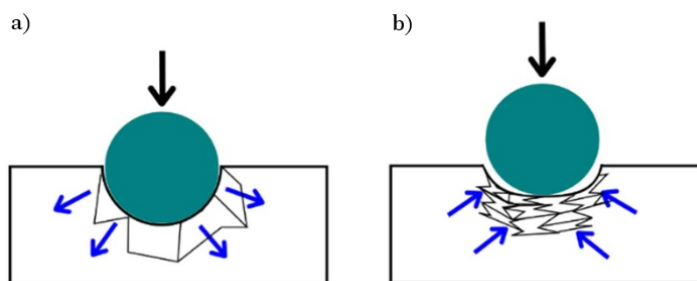
Do celów porównawczych można wyróżnić pięć charakterystycznych wartości współczynnika Poissona. Wartością skrajną, w przypadku dwuwymiarowym, jest  $\nu = 1$ . W takim przypadku odkształcenie wzdłużne wywoła równe co do wartości odkształcenie poprzeczne i w konsekwencji zachowane zostanie pole powierzchni analizowanego obiektu.

Wartością maksymalną dla jednorodnych obiektów przestrzennych jest  $\nu = 0.5$ . Podczas odkształcania materiału o takim współczynniku następuje zachowana zostaje objętość obiektu. Należy zaznaczyć, że jest to wartość teoretyczna. W praktyce nie występują jednorodne, ciągłe materiały o takich parametrach. Najbardziej zbliżonymi są elastomery i mieszanki gum, które charakteryzują się współczynnikami  $\nu > 1/4$ .

Kolejną charakterystyczną wartością współczynnika Poisson'a jest  $\nu = 0$ . Przy tej wartości nie obserwuje się zmiany wymiaru poprzecznego przy odkształceniach wzdłużnych. Takie zjawisko określane jest mianem „zachowania powierzchni przekroju”. Jednym z naturalnie występujących materiałów o takiej wartości współczynnika jest naturalny korek.

Następne dwie istotne wartości współczynnika Poissona wynikają bezpośrednio z równania (1.5). Przy założeniu materiału izotropowego i jednorodnego, przy wartości  $\nu = -0.5$  następuje stan określany jako „zrównoważenia modułów”, czyli zrównanie wartości modułów Kirchhoffa i Younga. W przypadku  $\nu = -1$ , odkształcenie w jednym kierunku wywoła równoczesne odkształcenie w kierunku poprzecznym prowadząc do odkształcenia dylatacyjnego – zostaną zachowane proporcje obiektu.

Materiały auksetyczne cechują się zwiększoną odpornością na obciążenia o charakterze impulsowym, do których zalicza się eksplozje, zderzenia i uderzenia. Auksetyki wykazują tendencję do kompresji i miejscowego umocnienia bezpośrednio pod miejscem oddziaływania zewnętrznego wymuszenia. Struktury niewykazujące ujemnego współczynnika Poissona wykazują przeciwną tendencję - materiał jest przemieszczany poza strefę oddziaływania obciążenia. Prowadzi to do zmniejszenia gęstości i redukuje opór stawiany przez strukturę podczas ugięcia [Wallbanks i inni, 2021, Saxena i inni, 2016]. Graficzne przedstawienie różnic w zachowaniu oby typów pokazano na rysunku 2.4.



Rysunek 2.4: Schematyczne przedstawienie zachowania struktur pod obciążeniem dynamicznym: a) struktura o dodatnim współczynniku Poissona b) struktura auksetyczna [Wallbanks i inni, 2021].

Oporność na zagłębienie można wyrazić wzorem 2.5 [Timoshenko i Goodier, 1969]:

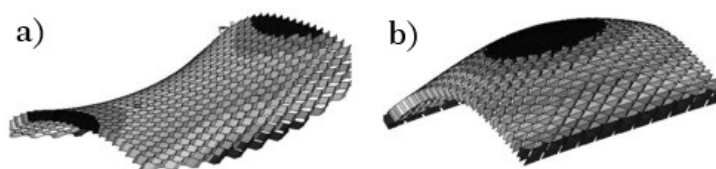
$$H \propto \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right)^\gamma, \quad (2.5)$$

gdzie  $\gamma = 1$  dla równomiernego rozkładu naprężeń i  $\gamma = 2/3$  dla naprężeń Hertz'a. Dla określonego modułu Younga  $E$ , twardość będzie wzrastać wraz ze spadkiem współczynnika Poissona. Gdy wartość będzie  $\nu$  bliska -1, podatność na zagłębienia dąży do nieskończoności. Równanie 2.5 częściowo poprawnie opisuje struktury auksetyczne, jednak tylko przy założeniu izotropowości właściwości. W przypadku anizotropowych auksetyków, odporność wynika z mechanizmu przekazywania odkształceń w komórkach elementarnych. W badaniach przebicia struktur [Lakes i Elms, 1993], Lakes oraz Elms wykazali, że pianki auksetyczne wykazują wyższy efektywny moduł Younga, ale niższą sztywność w porównaniu do pianek konwencjonalnych o zbliżonej gęstości. Mimo uszkodzenia próbek obu typów podczas testów, wykazano, że te o niższym współczynniku Poissona absorbowały energię w większym stopniu niż te o dodatnim. Szerzej zakrojone badania zachowania struktur auksetycznych przy obciążeniach dynamicznych prowadzili Dirrenberger i inni [Dirrenberger i inni, 2013]. Praca opierała się na przebadaniu trzech struktur płaskich stanowiących rdzeń płyty warstwowej. Wykazano, że przy odpowiednich warunkach, struktury auksetyczne mogą wykazywać porównywalne lub lepsze parametry niż te oparte o struktury konwencjonalne. Kolejne badania wykazały, że stosowanie belkowych struktur au-

ksetycznych jako rdzeni płyt warstwowych skutkuje mniejszą deformacją w porównaniu z płytami homogenicznymi o dodatnim współczynniku Poissona [Imbalzano i inni, 2017]. Dalsze badania struktur o ujemnym współczynniku Poissona prowadził Yang i inni [Yang i inni, 2018], który skupił się na strukturach typu re-entrant i *double-arrowhead*. W ramach prac, wykonali symulacje oraz wydruki przestrzenne struktur i poddał je badaniu pod kątem ustalenia ich parametrów podczas działania dynamicznego obciążenia i uderzeń. Po porównaniu wyników symulacji i eksperymentu, składowali, że struktury auksetyczne wykazują lepsze właściwości do absorpcji uderzenia w porównaniu z nieauksetykami. Autorzy sugerowali również wykorzystanie swoich badań w zastosowaniach ochronnych. Liczne badania Novaka i innych [Novak i inni, 2019, Novak i inni, 2020], Michalskiego i innych [Michalski i Streck, 2020] oraz Shaha i innych [Shah i inni, 2022] potwierdziły wyższą odporność auksetyków i płyt z rdzeniem auksetycznym na wybuch i przebicie pociskiem. Kluczowa różnicą była różnica w prędkościach odkształceń wymaganych do przebicia obiektu. Wyższa była wymagana przy przebicciu tych obiektów wykorzystujących struktury auksetyczne. Potencjalne zastosowania upatrywane są w pancierzach pojazdów oraz środkach indywidualnej ochrony balistycznej.

Poza płytami i strukturami płaskimi, przebadano struktury przestrzenne pod kątem dynamicznego zgniatania. Zhang i inni [Zhang i inni, 2015] zajęli się badaniami struktur o komórkach sześciokątnych, zarówno z dodatnim jak i ujemnym współczynnikiem Poissona. Wykazano, że dla danej prędkości uderzenia można obniżyć występujące naprężenia i zwiększyć zdolność pochłaniania energii poprzez zwiększenie auksetyczności komórki i gęstości względnej całej struktury. Gao i inni [Gao i inni, 2018] przeprowadzili wieloparametryczną optymalizację struktury cylindrycznej, celem poprawy jej wytrzymałości na dynamiczne obciążenie osiowe. Autorom udało się uzyskać niższą szczytową siłę uderzenia, wyższy stopień absorpcji energii oraz ustabilizowanie siły w trakcie zgniatania. Porównanie struktur o różnych wartościach współczynnika Poissona przeprowadzili Li i inni [Li i inni, 2020]. W toku badań, określili i potwierdzili mechanizm odpowiedzi struktur auksetycznych przy uderzeniu. Dodatkowo zaproponowali kompozyt z osnową z miękkiego materiału i rdzeniem o strukturze auksetycznej, wykazujący jeszcze wyższą odporność na uderzenia.

Kolejną własnością wyróżniającą struktury auksetyczne jest zachowanie struktur przy obciążeniu momentem gnącym. Struktura konwencjonalna w postaci plastra miodu przybiera kształt "siodła", natomiast struktury auksetyczne deformują się w kształt wypukły (krzywizna synklastyczna) [Alderson i inni, 2010b], co zostało pokazane na rysunku 2.5.

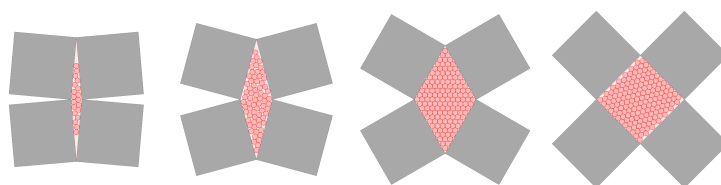


Rysunek 2.5: Odształcenie struktur przy obciążeniu momentem gnącym [Alderson i inni, 2010b].

Należy zaznaczyć, że wyżej opisane zjawisko zachodzi tylko dla struktur o niskim współczynniku Poissona. Przy wartościach co raz bliższych zeru, charakter ugięcia co staje się co raz bardziej zbliżony do kształtu dla struktur konwencjonalnych. Dodatkowo, niektóre typy struktur są bardziej odporne

na zginanie [Alderson i inni, 2010b]. Ze względu na tworzenie kształtów obłych, zbliżonych do kształtów biologicznych, upatruje się potencjalnych zastosowań w sporcie jako ochraniacze oraz jako elementy zwiększające komfort [Duncan i inni, 2018]. Easey i inni [Easey i inni, 2019] przeprowadził badanie dotyczące struktur komórkowych w kształcie kopuły z efektem auksetycznym. Wykazano unikalne zachowanie tych struktur podczas wgniatania i ich zwiększoną odporność na odkształcenia w quasi-statycznych warunkach obciążenia dynamicznego [Wallbanks i inni, 2021].

Podczas rozciągania struktur auksetycznych następuje ich poszerzenie w kierunku prostopadłym. Ze względu na fakt, że w większości są to struktury otwarto-komórkowe obserwuje się również zwiększenie pola powierzchni światła otworu. Oznacza to, że poprzez odpowiednie obciążenie zewnętrzne, można regulować przepuszczalność struktury (rys. 2.6) - ustalając maksymalny rozmiar przepuszczanych cząstek cieczy lub gazów [Attard i inni, 2018, Alderson i inni, 2010b].



Rysunek 2.6: Schematyczne przedstawienie mechanizmu flitującego auksetyków [Attard i inni, 2018].

W badaniach [Choi i Lakes, 1992, Scarpa i Tomlin, 2000a] wykazano, że struktury auksetyczne charakteryzują się zwiększoną odpornością na naprężenia tnące w porównaniu ze strukturami typu plaster miodu. Potwierdza to teoria sprężystości wedle której, materiałny izotropowe można opisać za pomocą czterech stałych materiałowych, powiązanych równaniami 2.2 - 2.3. Szerzej opisano zjawisko przy opisie poszczególnych struktur.

Metamateriały auksetyczne wykazują wyższą odporność na pękanie w porównaniu z materiałami konwencjonalnymi. Takie wnioski postulowali Choi i Lakes [Choi i Lakes, 1992, Choi i Lakes, 1996] po przeprowadzeniu badań nad piankami o dodatnim i ujemnym współczynniku Poissona. We wspomnianych pracach, zaproponowano matematyczną zależność 2.6 służącą do porównania odporności na pękanie dla struktur auksetycznych (typu re-entrant) i struktur konwencjonalnych:

$$\frac{K_{Ic}^a}{K_{Ic}^c} = 0.53 \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{2} - \varphi}}{1 + \cos 2\varphi}, \quad (2.6)$$

gdzie  $K_{Ic}$  to odporność na pękanie, indeksy  $a$  i  $c$  dotyczą odpowiednio: struktur auksetycznych i konwencjonalnych. Kąt  $\varphi$  to kąt pochylenia żeber struktury wskazany na rysunku 2.7. Badania Choi'a i Lakes'a wykazały, że auksetyki posiadają o 80% – 130% wyższy współczynnik  $K_{Ic}$ . Inne badania [Wallbanks i inni, 2021] wykazały również, że powstanie i propagacja pęknięcia struktur o ujemnym współczynniku Poissona wymaga większej energii. Obecnie uważa się, że ma to związek z zamykaniem komórek elementarnych i przez to ograniczanie propagacji pęknięć [Carneiro i inni, 2013].

Struktury auksetyczne wpływają na charakterystykę fal mechanicznych które się w nich rozchodzą. Odgrywają istotną rolę w osłabieniu amplitudy i ukierunkowaniu fali. Wykazano, że periodyczność komórek jest bezpośrednio odpowiedzialna określenie pasm częstotliwości w których fala może

się rozchodzić oraz tych, w których jest silnie osłabiana. Można to przyrównać w działaniu do filtrów dolno- i górnoprzepustowych. Ich położenie jest ustalone przez wielkość, ilość, rozkład i kształt komórek elementarnych [Liu i inni, 2016, Vinay i Varma, 2019]. W ramach badań opracowano zestaw auksetycznych pianek poliuretanowych i przetestowano je w warunkach obciążenia dynamicznego w celu oceny odpowiedzi lepko-sprężystej przy losowym wzbudzeniu i cyklicznym ściskaniu. Wyniki pokazały, że znormalizowana przepuszczalność ISO 13753 dla tych pianek spada poniżej 0,6 powyżej 100 Hz, przy niższych szczytowych maksymalnych naprężeniach przy wgniataniu w porównaniu do konwencjonalnych pianek o otwartych komórkach. W przypadku cyklicznego ściskania, zdolność tłumienia pianek auksetycznych wzrosła 10-krotnie w porównaniu do konwencjonalnych pianek stosowanych do produkcji pianek o ujemnym współczynniku Poissona [Scarpa i inni, 2006]. W kolejnych badaniach udowodniono wpływ i wykorzystano anizotropię struktur komórkowych do kierowania fal w założonych kierunkach [Ruzzene i inni, 2003, Zhu i Deng, 2024]. W pracy Xiang i innych [Xiang i inni, 2012] wykorzystali teorię elastodynamiki i twierdzenie Blocha-Floqueta do zbadania mechanizmu przerw pasmowych w periodycznych strukturach. Zbudowano model elementów skończonych, aby pokazać charakterystykę izolacji sejsmicznej fundamentu o skończonych wymiarach. Zaobserwowano silne tłumienie w zakresie przerw pasmowych. Ribeiro i Körner [Liebold-Ribeiro i Körner, 2014] zbadali dynamiczne właściwości skończonych, dwuwymiarowych, periodycznych struktur komórkowych za pomocą metody elementów skończonych dla wybranych kształtów komórek elementarnych. Uzyskano wyraźne przerwy pasmowe dla sieci komórek chiralnych w różnych konfiguracjach. Uzyskane wyniki stanowią podstawę projektowania okresowych struktur komórkowych z ustalonymi pasmami przenoszenia wibracji i drgań.

### 2.3. Przykłady struktur auksetycznych

W zdecydowanej większości struktury auksetyczne przybierają postać komórkową. Powstają one poprzez periodyczne lub losowe rozmieszczenie otwartych lub zamkniętych komórek elementarnych w postaci konfiguracji płaskich, dwuwymiarowych (np. struktura plastra miodu) lub przestrzennych, trójwymiarowych (np. płyt warstwowych) [Scheffler i Colombo, 2006]. Struktury komórkowe mogą wykazywać własności różne od własności materiału bazowego z którego wykonane są komórki elementarne. Celem uzyskania pożądaných parametrów modyfikuje się kształt, rozmiar, rozmieszczenie komórek elementarnych. Ponadto, można łączyć ich różne rodzaje w ramach jednego obiektu [Gibson, 2003, Mazur i inni, 2017].

Najczęściej spotykany w literaturze podział komórkowych metamateriałów auksetycznych wyróżnia następujące kategorie struktur: re-entrant, chiralne, rotujące, modyfikowane arkusze oraz pozostałe, niepasujące do powyższych [Ren i inni, 2018].

#### 2.3.1 Struktury re-entrant

Jak wspomniano wcześniej, pierwszą strukturę zaproponowała Gibson w 1982 roku. Składa się ona z komórek o kształcie klepsydry. Taki kształt uzyskano zbliżając dwa, naprzeciwległe wierzchołki sześciokąta w komórce elementarnej plastra miodu. Mechanizm zachowania auksetycznego bazuje na ugię-

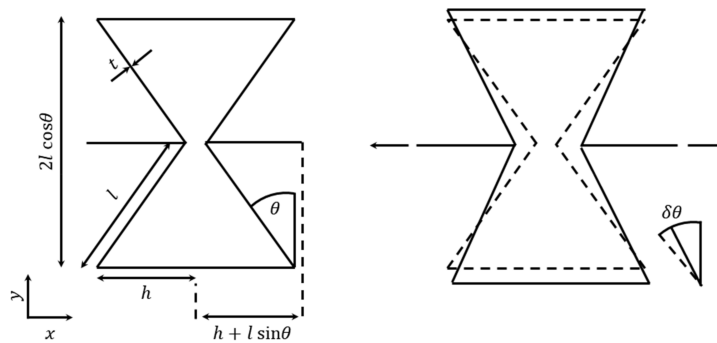
ciu skośnie ułożonych członów wraz z jednoczesnym przesunięciem członów poziomych na zewnątrz. Master i Evans zaproponowali teoretyczny model do wyznaczania efektywnego modułu sprężystości dla struktur płaskich [Masters i Evans, 1996]. Gibson [Gibson, 2003] zaproponowała model obliczeniowy umożliwiający wyznaczenie współczynnika Poissona oraz modułu Younga dla komórek elementarnych z następujących wzorów:

$$\nu_{yx} = \frac{\sin \theta (h/l + \sin \theta)}{\cos^2 \theta}, \quad (2.7)$$

$$E_y = k \frac{h/l + \sin \theta}{b \cos^2 \theta}, \quad (2.8)$$

$$k = E_s b \left(\frac{t}{l}\right)^3, \quad (2.9)$$

gdzie:  $h, l, \theta$  zdefiniowane są na rysunku 2.7, a  $E_s$  to moduł Younga materiału ścianek komórki.



Rysunek 2.7: Sześciokątna komórka elementarna opisana przez Masters i innych [Masters i Evans, 1996].

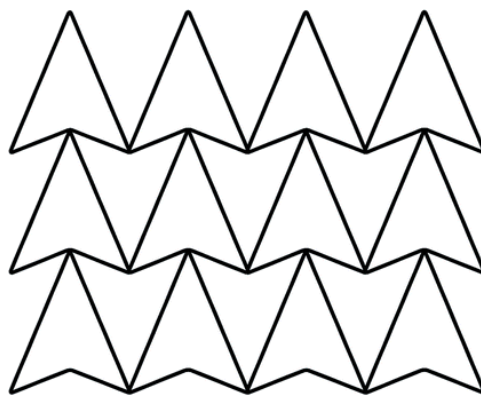
Ekstrapolując wartości uzyskane z powyższych równań, otrzymuje się wartości efektywnego współczynnika Poissona i modułu Younga dla danej struktury.

Struktury płaskie w kształcie re-entrant wykazują wysoką anizotropię własności wytrzymałościowych w przeciwieństwie do struktur płaskich typu plaster miodu [Masters i Evans, 1996]. Wykazano, że auksetyki tego typu charakteryzują się większym modułem Younga i modułem Kirchoffa w kierunku poprzecznym w stosunku do struktur z komórkami sześciokątnymi [Smith i inni, 2002, Scarpa i Tomlin, 2000b]. Badania potwierdziły, że zginanie żeber ukośnych dominuje w odkształceniu, gdy ich grubość jest podobna lub mniejsza niż grubość żeber poziomych [Whitty i inni, 2002]. Jednak w przypadku obciążenia w kierunku  $x$  (według rysunku 2.7), rozciąganie żeber poziomych może stać się dominującym mechanizmem deformacji, gdy ich grubość jest znacznie mniejsza niż grubość żeber ukośnych [Whitty i inni, 2002, Scarpa i Tomlin, 2000b]. Dodatkowo poprzeczny moduł ścinania maleje wraz ze wzrostem smukłości poszczególnych żeber struktury [Scarpa i Tomlin, 2000b] oraz wzrasta wraz kątem  $\theta$  (według rysunku 2.7) [Fu i inni, 2016].

Innym przykładem struktury, należącej do tej grupy jest struktura *dobble-arrowhead* przedstawiona na rysunku 2.8. W zależności od ustawienia żeber, ściskanie spowoduje przemieszczenie krótszych żeber



do wewnątrz i w efekcie zmniejszenie wymiarów całej struktury. Otrzymano ją w wyniku optymalizacji topologicznej, której celem było uzyskanie auksetyku o współczynniku Poissona równym  $-0.8$ , jednak zmierzona wartość wyniosła  $-0.92$  dla małych odkształceń [Larsen i inni, 1997].



Rysunek 2.8: Struktura typu *dobble-arrowhead* [Kolken, 2017].

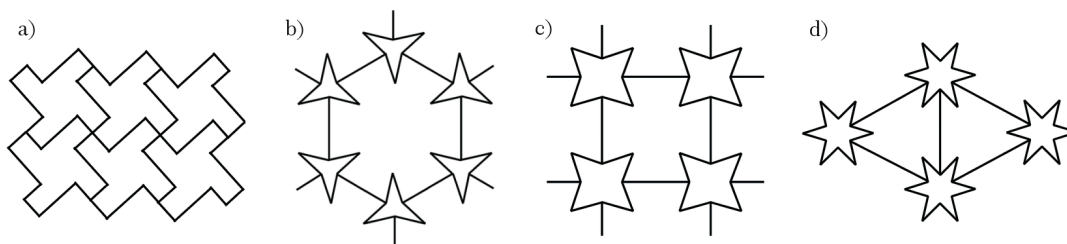
Istotną podgrupę w tej kategorii stanowią struktury typu *missing rib* powstałe w wyniku usunięcia lub przerwania żeber struktury nieauksetycznej lub auksetycznej. Na rysunku 2.9a przedstawiono strukturę zaproponowaną przez Smitha i Grima [Smith i inni, 2000] stworzona poprzez usunięcie jednego z żeber komórki elementarnej w kształcie rombu. Tego typu auksetyki charakteryzują się względnie niskimi wartościami efektywnego współczynnika Poissona, ok.  $-0.43$ . Relatywnie prosty mechanizm działania polega na ugięciu i rotacji poszczególnych żeber struktury przy działaniu zewnętrznego obciążenia [Smith i inni, 2000].

Grima i inni wykorzystali metodę EMUDA (ang. *empirical modelling using dummy atoms*) do analizy nowe kształty komórek elementarnych o kształcie zbliżonym do wieloramiennej gwiazdy. Postały poprzez zmnożenie i zrotowanie wokół punktu centralnego 3,4 lub 6 razy kształtu "strzałki". Przykłady pokazano na rysunku 2.9. Mechanizm działania jest zbliżony do omówionych wcześniej struktur typu *dobble-arrowhead* - w zależności od rodzaju obciążenia następuje zbliżenie lub odsunięcie wewnętrznych wierzchołków. Struktury typu 3-STAR mogą wykazywać zarówno cechy auksetyczne i standardowe, a efektywny współczynnik Poissona zawiera się w zakresie od  $0.872$  do  $-0.163$  [Smith i inni, 2000, Grima i inni, 2005]. Struktury 4-STAR i 6-STAR są zawsze auksetyczne, a współczynnik Poisson's wynosi odpowiednio:  $-0.842$  oraz  $-0.451$ . Ze względu na brak możliwości zakwalifikowania tychże struktur do żadnej z wcześniej opisanych grup, przyjęto, że będą stanowiły osobną [Smith i inni, 2000, Grima i inni, 2005].

Omówiona wcześniej oraz dopracowana metoda konwersji pianek zaproponowana przez Lakes'a [Lakes, 1987] pozwala uzyskiwać struktury przestrzenne, jednak uniemożliwia uzyskanie struktur o konkretnych właściwościach lub powtarzalnych kształtach komórek elementarnych. Za pierwszą, udaną strukturę wykonaną w sposób przyrostowy uznaje się pracę Yanga [Yang i inni, 2012]. Przedstawiono ją na rysunku 2.10.

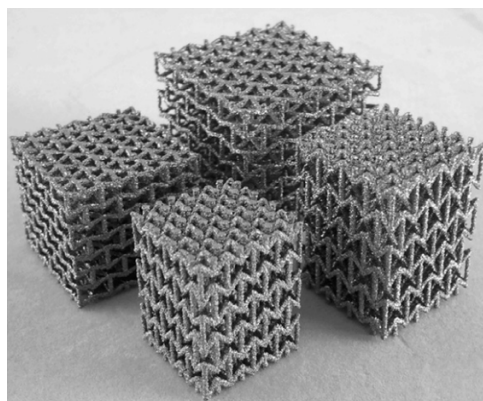
Badania Wan i innych [Wan i inni, 2004] wykazały, że przestrzenne struktury wykazujące niskie wartości współczynnika Poissona, mogą mieć wyższą wytrzymałość na obciążenia kompresyjne i





Rysunek 2.9: Przykłady struktur typu re-entrant:

a) struktura typu *missing rib*, b) struktura 3-STAR, c) struktura 4-STAR, d) struktura 6-STAR  
[Choi i Lakes, 1995, Larsen i inni, 1997, Gaspar i inni, 2005, Grima i inni, 2005].



Rysunek 2.10: Przestrzenna struktura auksetyczna typu re-entrant wykonana ze stopu Ti6Al4V metodą EDM (ang. *Electron Beam Melting*) [Yang i inni, 2012].

sztynność niż struktury konwencjonalne. Prawdopodobnie tą potwierdzają późniejsze prace Shena i innych [Shen i inni, 2014], Lima i innych [Lim, 2016], Fu i innych [Fu i inni, 2016] oraz Lu i innych [Lu i inni, 2016].

### 2.3..2 Struktury chiralne

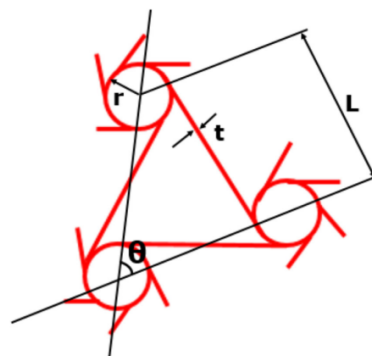
Pierwszą strukturę tego typu zaproponował w 1989 Wojciechowski [Wojciechowski, 1989]. Komórka elementarna w strukturach chiralnych składa się z centralnie umieszczonego okręgu i stycznie rozchodzących się żeber, a przylegające komórki nie stanowią odbicia lustrzanego względem dowolnej osi. Podobną organizacją komórek elementarnych w przestrzeni charakteryzują się struktury antychiralne, w których można wyróżnić płaszczyzny symetrii. Przyłożenie zewnętrznego obciążenia powoduje rotacje wewnętrznego okręgu przy jednoczesnym ugięciu żeber struktury, co zostało pokazane na rysunku 2.11. W zależności od ilości stycznych żeber i proporcji wymiarów poszczególnych elementów, można uzyskać współczynnik Poissona bliski -1 [Alderson i inni, 2010a]. Prall i Lakes zaproponowali wzór 2.10 służący do wyznaczania efektywnego modułu Younga dla struktur chiralnych. Istotną cechą jest tu izotropia tego modułu, wynikająca z występowania żeber stycznych [Prall i Lakes, 1997].

$$E = E_s \sqrt{3} \frac{t^3 L^2}{L^3 r^2}, \quad (2.10)$$

gdzie  $E_s$  to moduł Younga materiału bazowego,  $t$ ,  $r$ ,  $L$  to wymiary geometryczne przedstawione na rysunku 2.12.

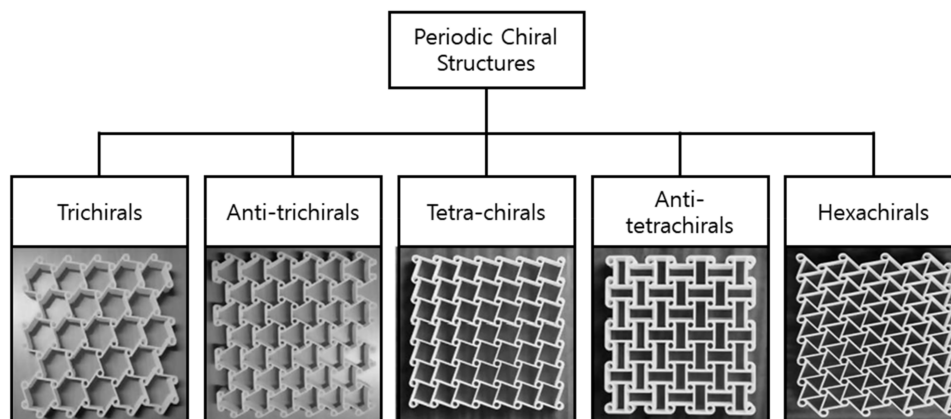


Rysunek 2.11: Mechanizm działania struktur chiralnych [Kolken, 2017].



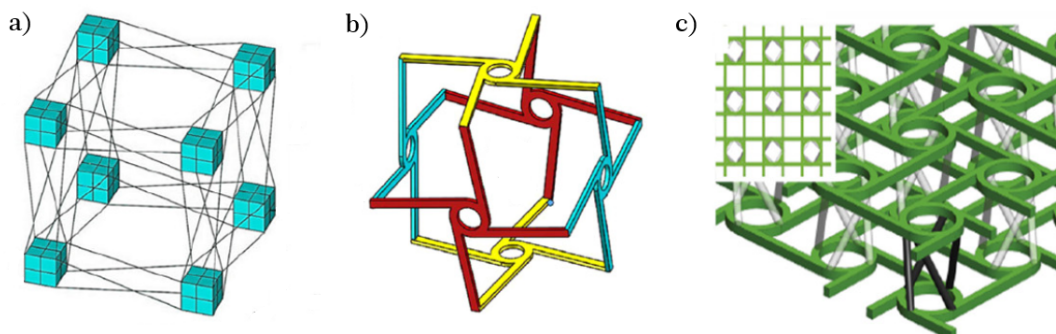
Rysunek 2.12: Geometryczne przedstawienie komórki elementarnej struktury chiralnej [Saxena i inni, 2016].

Periodyczne struktury z elementami chiralnymi mogą istnieć tylko przy spełnieniu warunków wynikających z symetrii obrotowej. Ilość żeber musi być równa rzędowi symetrii. Implikuje to możliwość istnienia tylko pięciu wariantów: trichiralnych, tertachiralnych, tetrantychiralnych, hexachiralnych [Grima i inni, 2008b, Alderson i inni, 2010a]. Zostały one przedstawione na rysunku 2.13. Pozostałe aranżacje przestrzenne są możliwe przy pominięciu opisanego warunku.



Rysunek 2.13: Podział struktur chiralnych i antychiralnych [Alderson i inni, 2010a].

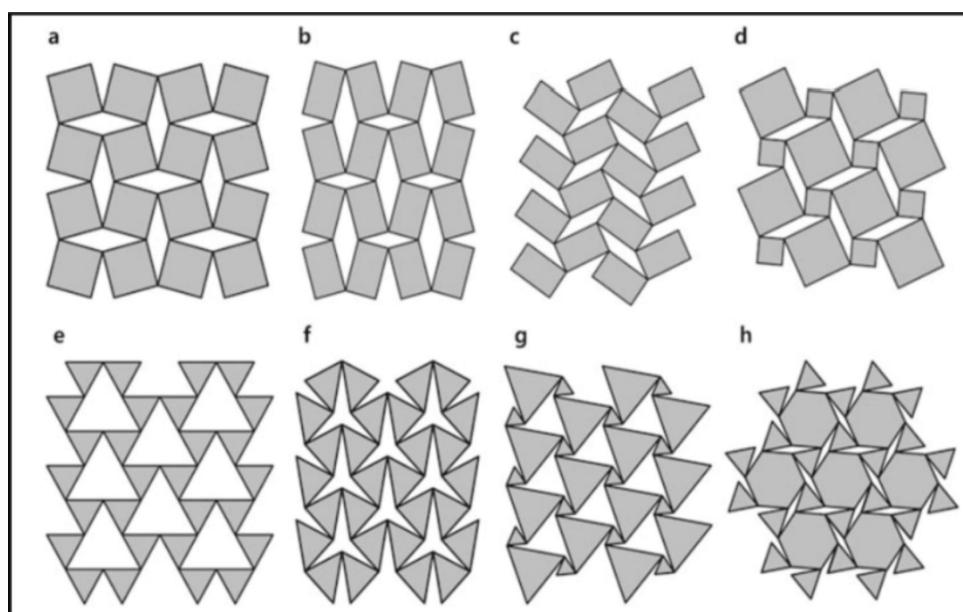
Przykładowe struktury przestrzenne pokazano na rysunku 2.14. Pierwsza z nich została opracowana i przebadana metodami elementów skończonych przez Ha i innych [Ha i inni, 2016]. Charakteryzowała się niskim ujemnym współczynnikiem Poissona  $-0.14$ , jednak z łatwością poddaje się modyfikacji efektywnych parametrów. Moduł Younga zależy od ilości komórek, a stopień auksetyczności od smukłości prętów. Do tej kategorii można zaliczyć również struktury hybrydowe. Przykładem może być praca Jiang i innych [Jiang i Li, 2018], w której zaprezentowano obiekt zawierający zarówno komórki chiralne jak i re-entrant. Takie podejście pozwalało jeszcze większe możliwości modyfikacji właściwości oraz rozszerzało zakres odkształceń przy zachowaniu ciągłości żeber.



Rysunek 2.14: Przykłady struktur przestrzennych: a) struktura z rotującym układem prętów i sześciątów [Ha i inni, 2016] b) trójwymiarowa struktura chiralna [Fu i inni, 2017] c) struktura warstw chiralnych połączonych prętami [Ebrahimi i inni, 2018].

### 2.3.3 Struktury rotujące

Struktury rotujące stanowią kolejną podgrupę struktur auksetycznych i bazują na modelu sztywnej lub półsztywnej rotacji. Zakłada on brak odkształceń (lub pomijalnie małe w porównaniu do odkształcenia całej struktury) komórek elementarnych. W ujęciu płaskim, powstają one poprzez połączenie wierzchołków figur płaskich za pomocą przegubów. Rozmieszczenie początkowe figur płaskich uwzględnia wstępną rotację, a sąsiadujące elementy są względem siebie symetryczne. Z tego powodu, zewnętrzne obciążenie do całej struktury nie będzie współosiowe z siłami występującymi w węzłach. Spowoduje to powstanie momentu pary sił inicjując rotację komórek. Sąsiadujące komórki wykazują tendencję do obrotu w przeciwnych kierunkach [Shukla i Behera, 2022, Alderson i inni, 2010a]. Przykładowe struktury tego typu pokazano na rysunku 2.15.



Rysunek 2.15: Przykłady struktur rotujących z komórkami w kształcie: a) kwadratu, b,c) prostokątów, d) kwadratów o różnych wymiarach, e,f,g) trójkątów, h) sześciokątów i trójkątów [Cho i inni, 2019].

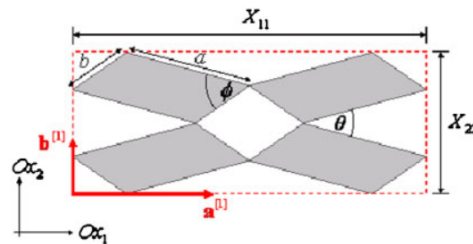
Attard i inni [Attard i inni, 2009] zaproponował wzory służące obliczaniu efektywnego współczynnika Poissona i modułów Younga w poszczególnych kierunkach, dla struktur zbudowanych z prostokątnych komórek elementarnych:

$$\nu_{21} = \frac{1}{\nu_{12}} = \frac{(a^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) - b^2 \cos^2(\frac{\theta}{2}))}{a^2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) - b^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})}, \quad (2.11)$$

$$E_1 = 8K_h \left( \frac{(a \cos(\frac{\theta}{2}) + b \sin(\frac{\theta}{2}))}{z(a \sin(\frac{\theta}{2}) + b \cos(\frac{\theta}{2}))^2} \right), \quad (2.12)$$

$$E_2 = 8K_h \left( \frac{(a \sin(\frac{\theta}{2}) + b \cos(\frac{\theta}{2}))}{z(a \cos(\frac{\theta}{2}) + b \sin(\frac{\theta}{2}))^2} \right), \quad (2.13)$$

gdzie  $K_h$  to sztywność przegubów pomiędzy komórkami,  $a$ ,  $b$  to wymiary boków pojedynczej komórki elementarnej,  $\theta$  to kąt rozwarcia między sąsiadującymi komórkami. Położenie wymiarów zostało przedstawione na rysunku 2.16. Dla wielokątów foremnych, wykazano, że  $\nu = -1$ .



Rysunek 2.16: Wymiary komórek elementarnych w strukturach z rotującymi prostokątami [Attard i inni, 2009].

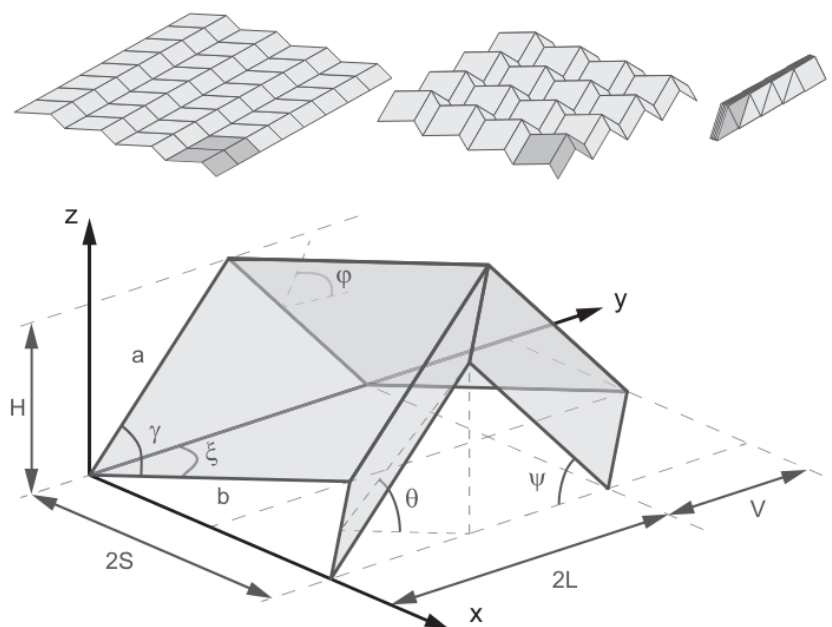
Grima i inni [Grima i Evans, 2000, Grima i Evans, 2006, Grima i inni, 2007], Alderson i inni [Alderson i Evans, 2001] oraz Rafsanjani i inni [Rafsanjani i Pasini, 2016] przeprowadzili szeroko zakrojone badania nad modelami struktur rotujących. Ich badania wykazały, że układy te w zależności od konfiguracji wielokątów i otwartości układu mogą wykazywać zarówno dodatnie, jak i ujemne współczynniki Poissona oraz mogą być anizotropowe [Grima i inni, 2008a].

### 2.3.4 Struktury powstałe przez modyfikację płaskich arkuszy

Jedną z możliwych modyfikacji płaskich arkuszy celem otrzymania struktur auksetycznych jest odpowiednie ich złożenie lub zagięcie. Powoduje to powstanie struktury przestrzennej z płaskiego arkusza materiału - metalowej blachy, płyty lub folii z tworzywa sztucznego, papieru. Jednymi z pierwszych materiałów poddanych modyfikacjom polegającym na zginaniu były jedno- i dwuwarstwowe arkusze wykonane z nanorurek węglowych [Hall i inni, 2008, Scarpa i inni, 2009]. Szersze badania struktur zaproponowali Zhang i inni [Zhang i inni, 2013]. Obejmowały one modelowanie, analizę metodą elementów skończonych i produkcję materiałów zarówno z papieru jak i aluminiowych blach. Wykazali zmianę własności auksetycznych w zależności od ilości zagięć oraz zauważyli, że zmniejszenie ich ilości powoduje utratę stabilności struktury w początkowej fazie ściskania. W osobnych badaniach wykazano

również, że losowo pofałdowana folia aluminiowa może wykazywać ujemny współczynnik Poissona [Bouaziz i inni, 2013].

Nietrudno zauważyć wpływ tradycyjnych technik takich jak "kirigami" i "origami", które stanowiły inspirację dla grona badaczy materiałów auksetycznych. Przykładami takich struktur przestrzennych mogą być prace Schenka i Guesta [Schenk i Guest, 2013] oraz Castle i inni [Castle i inni, 2014].



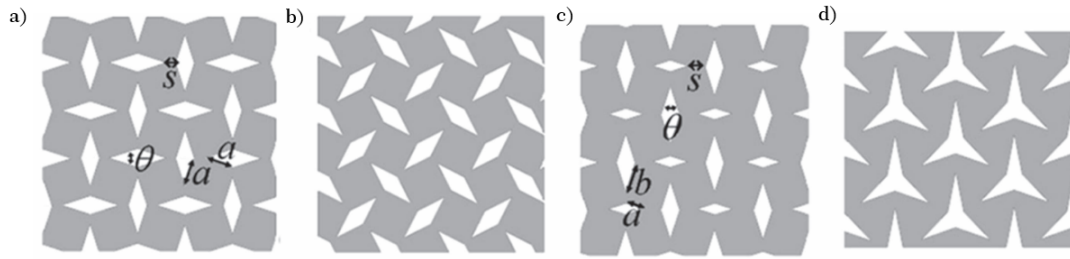
Rysunek 2.17: Przykładowa struktura powstała poprzez złożenie arkusza papieru [Schenk i Guest, 2013].

Pokazana na rysunku 2.17 struktura została opracowana przez Schenka z zespołem [Schenk i Guest, 2013]. W górnej części rysunku przedstawiono proces składania, a poniżej komórkę elementarną z charakterystycznymi wymiarami. W przytoczonej pracy, badaniom podlegał wpływ wartości kątów  $\gamma$  i  $\theta$  na wartość efektywnego współczynnika Poissona całej struktury. Wykazano, że wraz ze wzrostem kąta  $\gamma$  i spadkiem kąta  $\theta$ , spada wartość współczynnika Poissona, ale dla wszystkich wariantów jest on niższy od -1.

Należy również podkreślić nieliniowe własności mechaniczne takich struktur. Przykładowo, istnieją opracowania [Silverberg i inni, 2014], w których zaproponowano struktury bistabilne. Przełączanie pojedynczej komórki między dwoma stabilnymi kształtami geometrycznymi, powoduje zmianę geometrii całej struktury. Dodatkowo, takie materiały wykazują wysoką sztywność przy niskiej masie, stąd zastosowanie podobnych rozwiązań w rozkładanych panelach słonecznych sztucznych satelitów [Miura, 1985].

Inną metodą modyfikacji płaskich arkuszy jest wykonanie nacięć lub otworów, która w ostatnich latach wzbudza co raz szersze zainteresowanie naukowców z całego świata. Za pierwszą tego typu strukturę uważa się pracę Grima i Gatta [Grima i Gatt, 2010] powstałą poprzez wycięcie otworów w kształcie rombów lub wieloramiennych gwiazd. Tak zmodyfikowane arkusze standardowych materiałów wykazywały auksetyczność zarówno przy rozciąganiu, jak i ściskaniu. Mechanizm działania jest zbliżony do opisanych wcześniej struktur rotujących. Przykładowe struktury pokazano na rysunku 2.18.





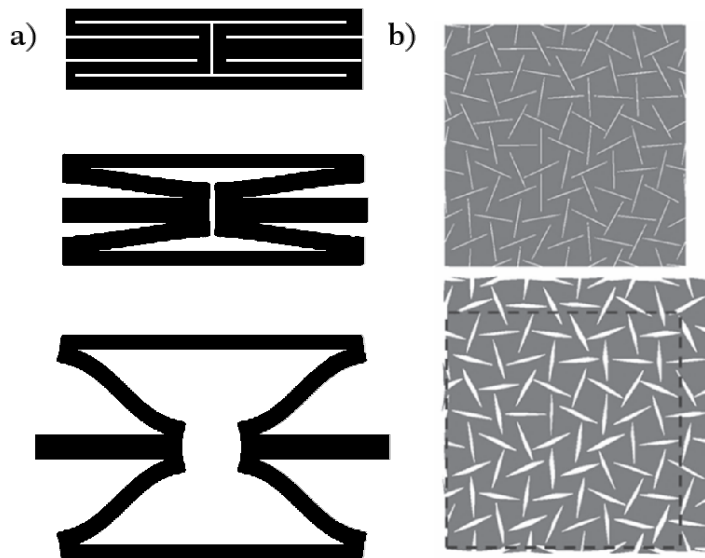
Rysunek 2.18: Przykładowe struktury z perforowanego materiału wykazujące ujemny współczynnik Poissona: a-c) z otworami w kształcie rombów d) z otworami w kształcie trójkątnej gwiazdy [Ren i inni, 2018].

Efektywny współczynnik Poissona dla struktur nacięciami w postaci czworoboków opisuje wzór:

$$\nu_{xy} = \frac{1}{(\nu_{yx})} = \frac{a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - b^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (2.14)$$

gdzie  $a$  i  $b$  to długości boków wycięcia, a  $\theta$  to kąt między tymi bokami. Oznaczenia są zgodne z przedstawionymi na rysunku 2.18.

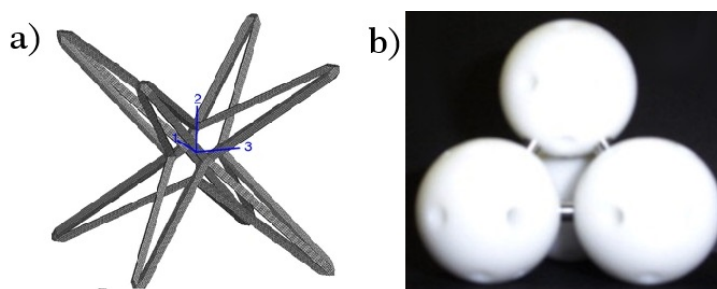
Innowacyjne podejście zaproponowali w swojej publikacji Mizzi i inni [Mizzi i inni, 2015]. Wykorzystuje ono odpowiedni wzór liniowych nacięć pokazany na rysunku 2.19a. Takie wykonanie pozwala na uzyskanie niskich wartości współczynnika Poissona, a widoczna struktura wykazuje jego wartość bliską -13. Podobne podejście zaproponowali Grima i inni [Grima i inni, 2016]. Wprowadzenie quasi-losowych liniowych nacięć zmieniło zachowanie całej próbki - z klasycznej deformacji przy rozciąganiu do postaci auksetycznej. Jedną z takich struktur pokazano na rysunku 2.19b.



Rysunek 2.19: Struktury auksetyczne powstałe poprzez liniowe nacięcia arkusza materiału: a) komórka zaproponowana przez Mizzi i innych b) struktura z quasi-losowymi nacięciami [Ren i inni, 2018].

### 2.3..5 Pozostałe struktury

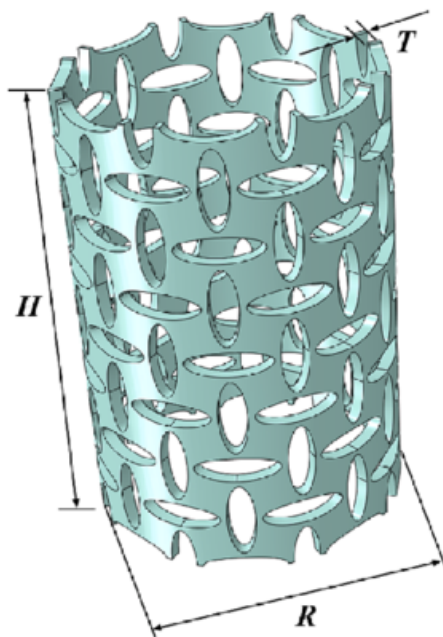
Poza wymienionymi wcześniej grupami, istnieją inne, również wykazujące właściwości auksetyczne, a ze względu na swoją budowę nie mogą być zakwalifikowane do żadnej z powyższych kategorii. Zespół Aldersona i Evansa [Alderson i Evans, 1997] zaproponował płaski model zgrubień połączonych cienkimi włóknami celem wytłumaczenia zjawiska auksetyczności wykazywanego przez niektóre polimery z mikroporami. Gaspar i inni [Gaspar i inni, 2011] zaproponował nowy, trójwymiarowy model, bazujący na wyżej opisanym modelu zgrubień. Ten wariant, zakłada przestrzenne połączenia między zgrubieniami w kształcie sześciątów. Dirrenberger i inni [Dirrenberger i inni, 2013] opracował model zbliżony do struktury *double-arrowhead* - pokazana została na rysunku 2.20a. Mechanizm działania bazuje na ugięciu poszczególnych żeber w miejscu ich łączeń z innymi. Orientacja przestrzenna modelu, umożliwia lepsze zrozumienie innych mechanizmów auksetyczności oraz stanowi bazę do tworzenia nowych struktur. Dodatkowo, taka aranżacja przestrzenna wykazuje wysoką odporność na przebicia przy możliwie małej gęstości względnej. Pasternak i Dyskin [Pasternak i Dyskin, 2012] zaproponował model połączonych suwliwymi elementami kul, o teoretycznym współczynniku Poisson'a równym  $-1$ , jednak badania eksperymentalne wykazały jego nieznacznie wyższą wartość. Model dobrze obrazuje mechanizmy mogące zachodzić w skali mikroskopowej lub wręcz atomowej. Rodney i inni [Rodney i inni, 2016] poddali badaniom strukturę powstałą w ramach quasi-losowego splątania jednorodnego, metalowego drutu. Przedstawiała ona małą auksetyczność ( $\nu = -0.1$ ). Ta publikacja udowadnia, że obiekty wykazujące ujemny efektywny współczynnik Poissona nie muszą być sztucznie wytwarzane, ani regularne. Innymi strukturami, powstałymi również w quasi-losowy sposób przez igłowanie są trójwymiarowe siatki włókien, które wykazują auksetyczność w kierunku prostopadłym do obciążenia przy dużym względnym odkształceniu [Rawal i inni, 2017].



Rysunek 2.20: Inne struktury auksetyczne: a) struktura zaproponowana przez Dirrenberger i inni [Dirrenberger i inni, 2013] b) model połączonych kul [Pasternak i Dyskin, 2012].

Osobną grupę stanowią auksetyki w postaci tubusu. W większości powstają poprzez zawinięcie płaskiej struktury auksetycznej do postaci walca, a Ling i inni [Ling i inni, 2021] zaproponowali kilka struktur z różnymi komórkami elementarnymi. Wykazano, że struktury wydrążone, wykazują wyższe parametry wytrzymałościowe w porównaniu z obiektami niedrażonymi przy takim samym wykorzystaniu materiału i warunkach obciążenia. Wadą tych kształtów jest podatność na wyboczenia. Przeprowadzone badania wykazały wyższą zdolność struktur auksetycznych do absorpcji energii [Gatt i inni, 2014, Ramezani i Rahmani, 2024]. Dodatkowo, ostatnie prace umożliwiają modyfikowanie,

w zależności od potrzeb, parametrów tychże struktur [Ling i inni, 2021, Ramezani i Rahmani, 2024]. Przykładową strukturę tego typu pokazano na rysunku 2.21



Rysunek 2.21: Rurowa struktura auksetyczna [Ren i inni, 2023].

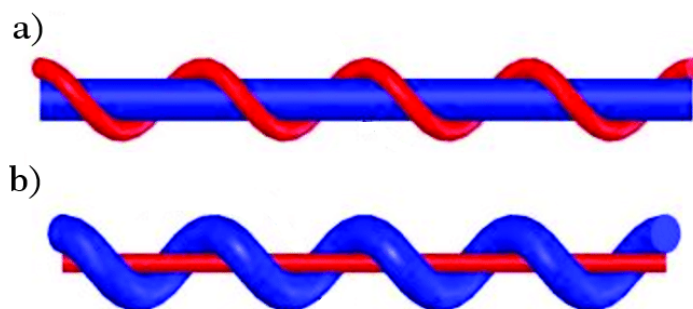
Mianem biomateriałów auksetycznych nazywa się takie biomateriały, które wykazują ujemny współczynnik Poissona przy określonych wymuszeniach zewnętrznych. Pełne i dokładne podanie parametrów materiałowych biomateriałów jest wymagające, a często wręcz niemożliwe. Jednym z zespołów który zaobserwował zjawisko auksetyczności w tkankach był Williams i Lewis [Williams i Lewis, 1982]. Wykazali, że kość gąbczasta z nasady bliższej kości piszczelowej wykazuje ujemny współczynnik Poissona. Veronda i Westmann [Veronda i Westmann, 1970] badali właściwości właściwości kociej skóry i ustalili, że przy niewielkich odkształceniach wykazuje ona *nu* mniejsze od zera. Analogiczne wnioski uzyskano przy badaniach skóry krowiej [Lees i inni, 1991]. Przytoczone badania konkludują, że mechanizm tej auksetyczności wynika z włóknistej budowy tychże tkanek. W skali mikroskopowej badania prowadzili Baughman [Baughman, 2003], który ustalił, że szkielet czerwonych krwinek może wykazywać ujemny współczynnik Poissona. Obecnie największe zainteresowanie naukowe, w odniesieniu do auksetyków, obserwowane jest w tematach scaffoldów służących do indukcji wzrostu tkanek [Yan i inni, 2017, Warner i inni, 2017, Shirzad i inni, 2024, Wanniarachchi i inni, 2023], implantów [Hedayati i inni, 2023] oraz protez [Mrozek i Strek, 2022].

Kompozyty - struktury składające się z dwóch lub więcej różnych materiałów, których połączenie pozwala uzyskać właściwości różne od materiałów bazowych, które pozwala na modyfikację i dopasowanie własności pod konkretne zastosowanie. Dużym zainteresowaniem cieszą się kompozyty strukturalne, które obejmują laminaty oraz płyty warstwowe z rdzeniem w postaci pianki lub struktury komórkowej. Wcześniej prowadzone badania wykazały, że możliwym jest uzyskanie laminatów wykazujących ujemny współczynnik Poissona, bliski -1 [Milton, 1992, Lakes, 2017].



Kompozyty w postaci płyt warstwowych złożone są zwykle z trzech, a rzadziej większej ilości, warstw. Najbardziej powszechną konfigurację stanowi wewnętrzny rdzeń z dwoma cienkimi okładzinami. Zadaniem okładzin jest w głównej mierze zapewnienie sztywności całej płyty. Rdzeń charakteryzuje się zwykle większą grubością niż okładziny, a jego właściwości mają wpływ na parametry całej struktury. Często jako rdzeń stosowana jest struktura komórkowa lub pianka celem obniżenia masy. Obserwuje się trend zastosowania struktur auksetycznych jako materiału rdzenia. Przeprowadzone badania numeryczne przez Stręka i inni [Stręka i inni, 2015] potwierdzają poprawę własności dynamicznych w odniesieniu do struktur konwencjonalnych. Symulacje przeprowadzone przez Imbalzano i innych [Imbalzano i inni, 2017] wykazały, że w przypadku uderzeń pocisków o prędkości do 200 m/s stwierdzono, że auksetyczne panele kompozytowe są w stanie pochłonąć podobną ilość energii poprzez odkształcenie plastyczne, podczas gdy maksymalne przemieszczenia tylnej powierzchni są zmniejszone do 56% z powodu lokalnego zagęszczenia i odkształcenia plastycznego rdzenia auksetycznego. Badania związane z określaniem odporności na wybuch również potwierdzają przewagę płyt ze rdzeniem auksetycznym nad konwencjonalnym [Imbalzano i inni, 2018, Bohara i inni, 2023]. Ze względu na co raz większą dostępność druku przestrzennego, nowe struktury warstwowe stanowią co raz częstszy przedmiot badań [Essassi i inni, 2020, Erkan i inni, 2024].

Innym rodzajem kompozytu jest spiralna przędza auksetyczna opatentowana przez Hook'a [Hook i inni, 2006]. Składa się ona ze splecionych dwóch włókien, jednym o mniejszej średnicy od drugiego. Efekt auksetyczny uzyskuje się poprzez naciągnięcie włókna cieńszego, zawiniętego wokół włókna grubszego, co pokazano na rysunku 2.22. Powoduje to wzrost przekroju poprzecznego całego włókna. W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania strukturami tego typu [Khan i inni, 2021, Liu i inni, 2022].



Rysunek 2.22: Spiralna przędza auksetyczna: a) bez obciążenia b) po przyłożeniu obciążenia zewnętrznego [Khan i inni, 2021].

## 2.4. Zastosowania

Jak pokazano we wcześniejszych rozdziałach, materiały auksetyczne wykazują nietypowe właściwości. Z tego powodu, znajdują zastosowanie w wielu aspektach inżynierii. Do najistotniejszych własności z punktu widzenia wyrobu należy zaliczyć wytrzymałość (w postaci wysokiego modułu Younga lub Kirchhoffa), odporność na pękanie oraz zdolność do absorpcji energii. Zastosowanie takich materiałów warto

rozważyć, jeśli przynajmniej jedna z następujących cech jest pożądana: zerowy lub ujemny współczynnik Poissona, wysoki moduł odkształcenia postaciowego, zwiększona twardość, niższa podatność na pęknięcia, wysoka zdolność do absorpcji energii i zwiększone współczynniki tłumienia.

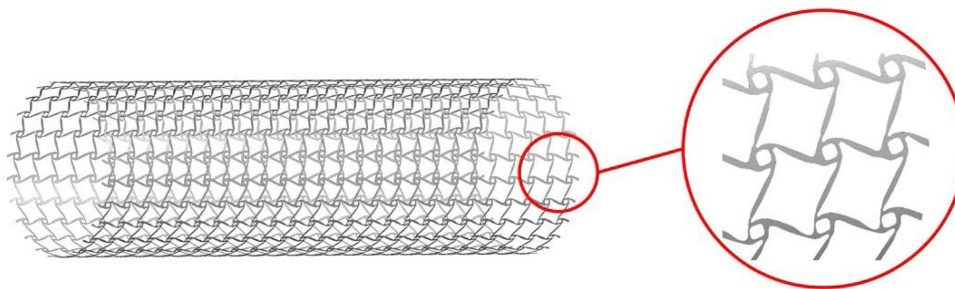
Jedną z gałęzi przemysłu wykorzystujących nowoczesne materiały stanowi przemysł związany ze sprzętem sportowym. Auksetyki, będące jednocześnie lekką strukturą oraz zapewniając większą absorpcję energii niż materiały konwencjonalne, co raz częściej stanowią przedmiot badań i patentów. Dobrym przykładem jest tutaj obuwie sportowe wykorzystujące struktury o ujemnym współczynniku Poissona [Qiao i Chen, 2015, Cross i inni, 2016, Toronjo, 2017]. Użyte materiały zwiększają komfort użytkownika, poprawiają trakcję i lepiej amortyzują w tkaciu ruchu. Ze względu na lepsze dopasowanie, dużą odporność na przebicia przy mniejszych grubościach niż materiały konwencjonalne, opracowywane są środki ochrony indywidualnej w postaci rękawic, podkładek czy kasków [Foster i inni, 2018].



Rysunek 2.23: Propozycja wykorzystania pianek auksetycznych w konstrukcji kasków sportowych [Foster i inni, 2018].

Obserwuje się rosnący trend wykorzystania opisywanych materiałów w dziedzinie inżynierii biomedycznej. Jednym z przykładów mogą być różnego rodzaju stenty ze stopów z pamięcią kształtu. Auksetyki są szeroko stosowane w produkcji stentów do angioplastyki [Kuribayashi i inni, 2006], pierścieni do anuloplastyki [Burriesci i Bergamasco, 2011] i stentów przełyku [Ali i inni, 2014]. Hamzehei i inni [Hamzehei i inni, 2020] opracowali stenty wykorzystujące strukturę antytrichiralną z elementami trójkątnymi jako rdzeń. Stenty te wykazywały trzykrotnie większą zdolność do absorpcji energii niż bardziej konwencjonalne struktury antytrichiralne. Geng i inni [Geng i inni, 2019] wykorzystali metodę selektywnego spiekania laserowego do wytworzenia stentów z mikrostrukturą chiralną. Metoda została później rozwinięta przez Lina i innych [Lin i inni, 2020], którzy dodatkowo użyli algorytmów genetycznych do

stworzenia spersonalizowanych stentów stosowanych w naczyniach krwionośnych. Przykładowy stent wykazujący ujemny efektywny współczynnik Poissona przedstawiono na rysunku 2.24.



Rysunek 2.24: Przykładowy stent ze strukturą auksetyczną po optymalizacji kształtu [Xue i inni, 2020].

Auksetyki znalazły zastosowanie jako wyściółka lejów protez, gdyż ze względu na swoje właściwości zapewniają stabilizację protezy na kikucie [Wang i inni, 2016]. Paxton i inni [Paxton i inni, 2020] wykorzystał innowacyjną metodę przyrostową MEW (ang. *Melt electrowriting*) do produkcji cylindrycznych scaffoldów stosowanych przy rekonstrukcji tkanek. Autorzy sugerują również wykorzystanie tej metody wraz ze strukturą jako elementów do instrumentów medycznych. Vijayavenkataraman i inni wykorzystali struktury typu re-entrant w projekcie płytek kostnych wykorzystywanych przy zabiegach ortopedycznych [Vijayavenkataraman i inni, 2020]. Badania wytrzymałościowe wykazały przewagę płytek auksetycznych nad odpowiednikami wykonanymi z materiałów konwencjonalnych w redukcji zjawiska *stress-shieldingu*. Zespół Yao i innych [Yao i inni, 2020] zaprojektował i wykonał auksetyczne śruby kostne wykorzystując metodę selektywnego spiekania laserowego. Ich badania pokazały, że zastosowanie auksetyków może zwiększyć siłę potrzebną do ekstrakcji śruby po implantacji.

Określenie "czujnik pomiarowy" stosowane jest w odniesieniu do urządzeń służących akwizycji sygnałów, ich przetwarzaniu na mierzalne wartości (np. napięcie elektryczne, opór elektryczny). Są to urządzenia szeroko stosowane w monitorowaniu i kontroli procesów fizycznych. Obserwowany w ostatnich latach trend związany z rozwojem urządzeń typu *wearable* zwrócił uwagę na podatne czujniki odkształceń [Dong i Hu, 2023]. Wyróżnia się kilka głównych grup: rezystancyjne, piezoelektryczne, pojemnościowe i elektromagnetyczne. Czujniki rezystancyjne (tensometry oporowe) odzwierciedlają zmianę naprężenia lub odkształcenia poprzez zmianę rezystancji materiałów przewodzących. Gdy przewodnik (element czujnikowy) jest poddawany działaniu siły zewnętrznej, jego rezystancja zmienia się ze względu na zmiany długości, powierzchni przekroju poprzecznego lub interfejsu z innymi materiałami. Zastosowanie struktur auksetycznych w ich konstrukcji może znacząco zwiększyć ich czułość. Za przykład może posłużyć rozciągliwy czujnik odkształcenia. Składał się ze struktury re-entrant, cienkiej folii i przewodzącej sieci jednościennej nanorurek węglowych. Ze względu na synergiczny efekt zmniejszonego efektywnego współczynnika Poissona i wyższych naprężeń, czujnik wykazywał około 24 razy wyższą czułość niż konwencjonalne czujniki, wykazując duży potencjał w monitorowaniu niewielkich odkształceń. Potencjalnym zastosowaniem może być pomiar parametrów życiowych przez urządzenia medyczne [Jiang i inni, 2018]. Podobne wnioski, dotyczące zwiększonej czułości systemów pomiarowych wykorzystujących struktury auksetyczne udowodniono również dla innych rodzajów czujników [Dong i Hu, 2023, Kelkar i inni, 2020].

Interesujące, funkcjonalne połączenie stopów z pamięcią kształtu i struktur auksetycznych zaproponował zespół Jacobs i innych [Jacobs i inni, 2012], który stworzył składną antenę do zastosowań w przestrzeni kosmicznej. Kolejny zespół badawczy, zaproponował zastosowanie struktur auksetycznych do utworzenia lewo- i prawoskrętnych mogących służyć do tworzenia sztywnych struktur przestrzennych powstałych w wyniku rozwijania skompresowanych żeber [Lipton i inni, 2018]. Lazarus i inni [Lazarus i Reis, 2015] oraz Hasse i inni [Hasse, 2020] zaproponowali konstrukcję podatnych siłowników wykorzystujących struktury auksetyczne, z potencjalnym zastosowaniem w robotach pneumatycznych. Zamknięte komórki tej struktury były wypełniane medium pod ciśnieniem indukując ruch. W zależności od ilości i rozmieszczenia komórek, uzyskiwano różne typy przemieszczenia. Wykorzystując technologie druku przestrzennego, Pfeil i inni [Pfeil i inni, 2018] wykonał zminiaturyzowaną wersję siłownika pneumatycznego z przeznaczeniem do robotów medycznych. Poza indukowaniem ruchu, struktury auksetyczne ze względu na podatność, mogą być użytkowane w systemach odzysku energii [Farhangdoust, 2020].

Ważnym zastosowaniem auksetyków jest wykorzystanie ich w przemyśle zbrojeniowym, do ochrony przed uderzeniami i wybuchami. Jednym ze skutecznych środków ochrony jest tkanina wykonana z przędzy auksetycznej, służąca do wylatywania odłamków i drobnych obiektów [Evans, 2011]. Jak wspomniano wcześniej, struktury auksetyczne były poddane badaniom przy obciążeniach dynamicznych, w tym zachowaniu w trakcie wybuchu [Novak i inni, 2019]. Madke i inni [Madke i Chowdhury, 2020] przeprowadzili interesujące studium przypadku dotyczące płyty pancerza wykonanej z polietylenu o ultrawysokiej masie cząsteczkowej (UHMWPE) wzmocnionej listwami auksetycznymi, czym potwierdzili możliwość zastosowania tych struktur w ochronie osobistej i pojazdów. Ma i inni [Ma i inni, 2013] opatentowali koła do pojazdów wykorzystujące strukturę typu *double-arrowhead* zamiast powszechnie stosowanego rozwiązania pneumatycznego. W ostatnich latach struktury re-entrant i chiralne znajdują zastosowanie przy projektowaniu struktur kompozytowych dla inteligentnych struktur profili lotniczych [Chen i inni, 2020].



Rysunek 2.25: Potencjalne zastosowanie płyt auksetycznych do ochrony pojazdów przed wybuchem [Imbalzano i inni, 2017].

Podsumowując, badania auksetyków są tematem aktualnym, a same struktury, ze swoim nieintuicyjnym zachowaniem pod obciążeniem, wciąż nie zostały dokładnie i w pełni przebadane. Wraz z postępem badań, nastąpi rozwój metod badawczych, metod produkcji oraz zwiększenie udziału nietypowych struktur w konstrukcjach inżynierskich. Jednocześnie, należy zwrócić uwagę, że struktura proponowana przez autora niniejszej pracy, na moment jej pisania, nie wpisuje się całkowicie w żadną z wymienionych grup.

## Rozdział 3

# Zastosowane metody obliczeniowe

Metoda elementów skończonych (MES) to metoda numeryczna wykorzystywana do uzyskania przybliżonego rozwiązania problemów opisanych częściowymi równaniami różniczkowymi ze zdefiniowanymi warunkami brzegowymi wymagająca podziału domeny obliczeniowej na mniejsze elementy. MES jest szeroko stosowany praktycznie w każdej dziedzinie inżynierii. W niniejszym rozdziale przedstawione zostały: krótki rys historyczny, podstawowe założenia i równania dotyczące mechaniki ośrodków ciągłych, głównie w ujęciu wytrzymałości materiałów.

Koncepcja podziału domeny na mniejsze elementy sięga czasów antycznych, kiedy Archimedes dokonał podziału nieregularnego kształtu na podstawowe figury geometryczne celem wyznaczenia całkowitego pola powierzchni. Za pierwszą udaną próbę użycia metody zbliżonej do MES uznawana jest praca Schellbacha [Schellbach, 1851]. Bazując na wcześniejszych koncepcjach Jacoba i Johanna Bernoullich oraz Gottfrieda Leibniza, dokonał podziału powierzchni ograniczonej krzywą w przestrzeni na trójkąty prostokątne i wyprowadził równania różniczkowe celem obliczenia jej powierzchni. Uznał tę metodę za nieprzydatną do innych zagadnień. Na początku XX wieku, naukowcy zauważyli, że układ prętowy, mając odpowiednio dużą liczbę prętów może być traktowany jako model ośrodka ciągłego. W latach późniejszych, Ritz [Ritz, 1909] zaproponował pierwszą metodę bezpośrednią metodę wariacyjną dla płaskiej płyty. Garlekin opublikował w 1915 roku pracę dotyczącą zastosowania metody zbliżonej do metody elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia liniowego [Galerkin, 1915].

Richard Courant w 1943 roku [Courant, 1943] opublikował pracę dotyczącą analizy wałów drażonych poprzez dyskretyzację przekrojów za pomocą elementów trójkątnych. Następnie, określił funkcje naprężeń  $\Phi$  i następnie na podstawie wartości w wierzchołkach trójkątów, interpolował wartości w każdym trójkącie. Turner i inni [Turner i inni, 1956] opublikował pracę, która uznawana jest za pierwsze zastosowanie MES we współczesnej formie. Opisywana metoda jest uogólnieniem i rozwinięciem teorii sprężystości w której siły, sztywność i przemieszczenia są związane równaniami. Niedługo potem, Clough [Clough, 1960] zaproponował nazwę metody elementów skończonych, która jest używana po dziś dzień. W latach kolejnych MES zyskiwał na popularności i już od 1963 roku był uznaną metodą rozwiązywania równań różniczkowych. Od roku 1964, matematyk i inżynier polskiego pochodzenia Olgierd Zienkiewicz współpracował z Cloughem nad dalszym rozwojem MES i napisał pierwszy podręcznik na ten temat [Zienkiewicz i Cheung, 1967]. Prace nad metodą kontynuowano w kolejnych latach, które

przyspieszyły w latach 80. XX wieku. Miało to związek z pojawieniem się komputerów osobistych [Madier, 2020].

Pierwszy program "DAC-1" opracowano w 1959 roku w ramach współpracy IBM i General Motors, do użytku przy projektowaniu samochodów. Kolejnym znaczącym programem był NASTRAN z 1965 roku, wynik prac NASA. Kilka lat później, w roku 1970 nakładem prac Johna Swansona, powstało środowisko ANSYS, które w aktualnej wersji jest wykorzystywane w tej pracy [Sabat i Kundu, 2021]. Pierwsze próby unormowania stosowania MES zaczęto przed rokiem 2007, w którym Amerykańskie Stowarzyszenie Inżynierów Mechaników wydało przewodnik dotyczący weryfikacji i walidacji symulacji mechanicznych [Schwer, 2007] oraz standard NASA określający poprawne praktyki przy modelowaniu i symulacji MES [Blattnig i inni, 2013].

### 3.1. Podstawy teorii sprężystości

W teorii sprężystości, stan naprężeń dla trójwymiarowego ośrodka ciągłego, jest zdefiniowanych przez sześć składowych wektora naprężeń, co pokazano w równaniu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} \text{ lub } [\boldsymbol{\sigma}_{ij}], \quad (3.1)$$

gdzie  $\sigma$  reprezentuje naprężenia normalne, a  $\tau$  naprężenia tnące. Analogicznie zdefiniowany jest stan odkształceń w ośrodku ciągłym - równanie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} \text{ lub } [\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}], \quad (3.2)$$

gdzie  $\varepsilon$  to odkształcenia normalne, a  $\gamma$  to odkształcenia postaciowe. Dla przypadku trójwymiarowego zachodzi relacja 3.3 między naprężeniem, a odkształceniem:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\}, \quad (3.3)$$

Przemieszczenie w układzie przestrzennym zdefiniowane jest poprzez równanie:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

Uwzględniając powyższe równania, można zapisać związek między odkształceniem, a przemieszczeniem w postaci wzoru:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Naprężenia i wektory sił pozwalają zapisać równania 3.6 - 3.8. Są to różniczkowe równania równowagi układu przestrzennego.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0. \quad (3.8)$$

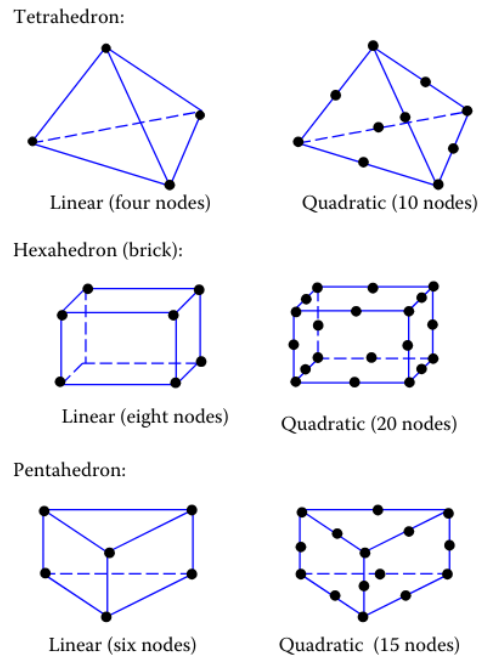
W każdym punkcie na brzegu  $\Gamma$  rozpatrywanego obiektu, powinny być zdefiniowane przemieszczenia  $u_i = \bar{u}_i$  lub naprężenia na powierzchni  $t_i = \bar{t}_i$ . W postaci macierzowej, naprężenia można zapisać w postaci równania:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

gdzie  $\mathbf{n}$  to wektor normalny w danym punkcie. Celem uzyskania wszystkich wartości niewiadomych (łącznie 15 wartości dla obiektu trójwymiarowego), koniecznym jest rozwiązanie układu piętnastu równań przy danych warunkach początkowych. Analityczne rozwiązanie nie jest najbardziej efektywnym, a czasem nie pozwala na rozwiązanie wszystkich równań. Z tego powodu stosuje się metody numeryczne, takie jak MES.

### 3.2. Podstawy metody elementów skończonych

Metoda elementów skończonych stanowi metodę przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych lub brzegowo-początkowych. Jak już wspomniano wyżej, metoda bazuje na podziale domeny obliczeniowej na siatkę elementów skończonych. W zależności od programu do analiz MES, używane są różne metody (metoda wariacyjna lub metoda residuów ważonych Garlekina). Niezależnie od wybranej metody uzyskuje się sformułowanie zagadnienia za pomocą elementów skończonych [Chen i Liu, 2014]. Implikuje to konieczność dyskretyzacji domeny obliczeniowej, czyli jej podział na elementy skończone. Podstawowe kształty tych elementów przedstawiono na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Podstawowe typy elementów skończonych [Chen i Liu, 2014].

W pierwszym kroku, dokonuje się interpolacji przemieszczeń wewnątrz elementu skończonego za pomocą związków:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^N N_i u_i, \\
 v &= \sum_{i=1}^N N_i v_i, \\
 w &= \sum_{i=1}^N N_i w_i,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie  $u_i, v_i, w_i$  to wartości przemieszczeń węzłowych elementu,  $N_i$  to funkcje kształtu, a  $N$  to ilość węzłów w elemencie. Korzystając ze związków 3.5 - 3.8, można zapisać wzór na wektor odkształceń [Chen i Liu, 2014]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \tag{3.11}$$

gdzie  $\mathbf{B}$  to macierz wiążąca wektor przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{d}$  z wektorem naprężeń  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Po znalezieniu wartości macierzy  $\mathbf{B}$ , sztywność elementu można wyrazić wzorem:

$$\mathbf{k} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dv, \tag{3.12}$$

gdzie  $v$  to objętość elementu skończonego. Celem wyznaczenia naprężeń w elemencie, należy skorzystać z równania:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d}. \tag{3.13}$$



Poprzez agregację rozwiązań dla poszczególnych elementów skończonych założonej domeny obliczeniowej uzyskuje się przybliżone całosciowe rozwiązanie problemu. Opisywana metoda ma zastosowanie w zagadnieniach liniowych i dodatkowo statycznych. W rzeczywistych problemach, czysto problemy liniowe występują rzadko. Wraz z rozwojem metod obliczeniowych, zaczęto uwzględniać nieliniowości materiałowe (zależność właściwości od odkształceń), geometryczną i brzegową (między innymi zjawiska kontaktowe) [Chen i Liu, 2014].

### 3.3. Metoda elementów skończonych w dynamice

Analiza zachowań struktur przy wymuszeniach dynamicznych oraz wibracjach stanowi ważny element projektowania inżynierskiego. Obiekty poddane działaniu zewnętrznych wymuszeń periodycznych będą drgać, a indukowany ruch będzie odbywał się wokół położenia równowagi. Można wyróżnić trzy podstawowe typy problemów dla symulacji drgań i dynamiki: analizę modalną  $f(t) = 0$ , analizę odpowiedzi częstotliwościowej  $f(t) = F \sin \omega t$  oraz analizę przejściową. Jako  $f(t)$  przyjęto wymuszenia zewnętrzne układu,  $t$  to czas oraz  $\omega$  to częstość kołowa.

Najprostszym układem drgającym jest masa zawieszona na sprężynie i równoległym do niej tłumiku drgań. Taki modelowy układ charakteryzuje się tylko jednym stopniem swobody, a ruch odbywa się w kierunku rozciągania układu sprężyna-tłumik i jest opisany wzorem:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t), \quad (3.14)$$

gdzie:  $u$  - przemieszczenie,  $\dot{u} = du/dt$  to prędkość,  $\ddot{u} = d^2u/dt^2$  to przyspieszenie,  $c$  to tłumienie,  $m$  to masa, a  $k$  to sztywność.

W przypadku braku wymuszeń wewnętrznych i przy braku tłumienia, układ będzie wykonywał drgania swobodne, zgodnie ze wzorem:

$$m\ddot{u} + ku = 0. \quad (3.15)$$

W ujęciu fizycznym oznacza to, że suma siły bezwładności i sił wynikających ze sztywności musi być równa zero. Pomimo braku wymuszeń, masa może mieć niezerowe przemieszczenie lub doświadczać drgań w warunkach początkowych. Przyjmując przemieszczenie według równania:

$$u(t) = U \sin \omega t, \quad (3.16)$$

gdzie  $U$  to amplituda przemieszczenia, z równania 3.14 otrzyma się równanie:

$$-U\omega^2 m \sin \omega t + kU \sin \omega t = 0. \quad (3.17)$$

Bezpośrednio z niego wynika wzór na częstość drgań własnych układu o jednym stopniu swobody:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.18)$$

Jeśli w układzie występuje tłumienie, należy wprowadzić jego wartość  $c$ , spełniającą równanie:

$$0 < c < c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km}, \quad (3.19)$$

gdzie przez  $c_c$  oznacza się tłumienie krytyczne. Można wtedy wyznaczyć wartość częstotść tłumionych drgań własnych układu ze wzoru:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}, \quad (3.20)$$

gdzie  $\xi = c/c_c$  to współczynnik tłumienia.

Dla układów o większej liczbie stopni swobody, równanie ruchu przyjmuje postać równania:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{t}), \quad (3.21)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze: mas, tłumienia i sztywności, a  $\mathbf{f}$  to wektor obciążeń [Chen i Liu, 2014]. Przy analizie wibracji, konieczne jest wyznaczenie macierzy mas i tłumienia. W postaci uogólnionej, macierz mas zdefiniowana jest równaniem:

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad (3.22)$$

gdzie  $\rho$  to gęstość materiału. Podobnie jak w przypadku macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ , masy elementów są określane we współrzędnych lokalnych, następnie przekształcane do współrzędnych globalnych i finalnie agregowane w postaci globalnej macierzy mas  $\mathbf{M}$ .

Tłumienie modelowane jest najczęściej jednym z dwóch modeli tłumienia: *proporcjonalnego* (*Rayleigh'a*) lub *modalnego*. W pierwszym modelu, macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  jest opisana ogólnym równaniem:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}, \quad (3.23)$$

gdzie współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  opisane są parą równań:

$$\xi_1 = \frac{\alpha\omega_1}{2} + \frac{\beta}{2\omega_1}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha\omega_2}{2} + \frac{\beta}{2\omega_2}, \quad (3.24)$$

gdzie współczynniki  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  to określone częstotści drgań, a  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  to współczynniki tłumienia. Jeśli  $\alpha = 0$ , dominujące będzie tłumienie masowe, a jeśli  $\beta = 0$  to będzie to tłumienie proporcjonalne do sztywności. Drugi rodzaj tłumienia może być wprowadzony jako macierz  $\mathbf{C}_\Phi$  opisana równaniem:

$$\mathbf{C}_\Phi = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

gdzie  $\xi_i$  to wartość tłumienia przy częstotści kołowej  $\omega_i$  w układzie o  $n$  stopniach swobody.

### 3.4. Analiza modalna

Analiza modalna polega na uzyskaniu wartości częstości własnych dla analizowanej struktury. Zakładając, że  $\mathbf{f}(t) = 0$  i pomijając tłumienie, można przekształcić równanie 3.21 do postaci równania:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0, \quad (3.26)$$

przy założeniu, że przemieszczenia odbywają się w sposób harmoniczny to powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.27)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{u}}$  to wektor amplitud przemieszczeń węzłowych. Wzór 3.27 opisuje zagadnienie uogólnionego wektora głównego. Człon przed  $\bar{\mathbf{u}}$  stanowi wielomian  $n$ -tego rzędu  $\omega^2$  z którego możliwym jest wyznaczenie  $n$  rozwiązań  $\omega_i$  stanowiących poszczególne częstości własne. Wyznaczenie przemieszczeń dla poszczególnych węzłów następuje poprzez podstawienie poszczególnych wartości  $\omega_i$  do równania 3.27 [Chen i Liu, 2014]. Uwzględniając rozwiązania, otrzyma się wzór:

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{M}]\bar{\mathbf{u}}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.28)$$

Następnie wprowadza się macierz modalną:  $\Phi_{(n \times n)} = [\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n]$  oraz dokonuje się transformacji wektora przemieszczeń do postaci równania:

$$\mathbf{u} = z_1\bar{\mathbf{u}}_1 + z_2\bar{\mathbf{u}}_2 + \dots + z_n\bar{\mathbf{u}}_n = \Phi\mathbf{z}, \quad (3.29)$$

gdzie:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

Równanie 3.29 postawia się do równania 3.21, otrzyma się równanie:

$$M\Phi\ddot{\mathbf{z}} + C\Phi\dot{\mathbf{z}} + K\Phi\mathbf{z} = \mathbf{f}(t), \quad (3.31)$$

które po uwzględnieniu tłumienia  $C_\Phi$  z równania 3.25 oraz  $\mathbf{p} = \Phi^T\mathbf{f}(t)$ , pozwoli finalnie uzyskać równanie:

$$\ddot{z} + 2\xi_i\omega_i^2\dot{z} + \omega_i^2z_i = p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.32)$$

otrzymując  $N$  niezależnych równań różniczkowych drugiego rzędu, łatwiejszych do rozwiązania od ogólnego równania dynamicznego.

### 3.5. Zagadnienie odpowiedzi harmoniczej

Celem wyznaczenia odpowiedzi harmoniczej analizowanego układu, należy przyjąć, że obciążenie również jest harmoniczne i przebiega zgodnie z przebiegiem funkcji sinus lub cosinus [Chen i Liu, 2014]. W tym przypadku, równanie ruchu przybierze postać wzoru:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \sin \omega t. \quad (3.33)$$

Jedną z metod rozwiązania zagadnienia powyższego rodzaju jest metoda modalna. W tym podejściu, wykorzystuje się wyprowadzone wcześniej równanie z uwzględnieniem charakteru wymuszenia, przybierając postać równania:

$$\ddot{z} + 2\xi_i\omega_i^2\dot{z} + \omega_i^2z = p_i \sin \omega t, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.34)$$

Rozwiązanie dla  $z$  ma postać równania:

$$z_i(t) = \frac{p_i/\omega_i^2}{\sqrt{(1 - \eta_i^2)^2 + (2\xi_i\eta_i)^2}} \sin(\omega t - \theta_i), \quad (3.35)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \theta_i = \arctan \frac{2\xi_i\eta_i}{1 - \eta_i^2}; & \text{kąt fazowy,} \\ \eta_i = \omega/\omega_i, \\ \xi_i = \frac{c_i}{c_c} = \frac{c_i}{2m\omega_i}; & \text{współczynnik tłumienia.} \end{cases} \quad (3.36)$$

Odpowiedź każdego z węzłów  $Z_i$  jest zbliżona do odpowiedzi układu z jednym stopniem swobody. Po rozwiązaniu i znalezieniu wektora współrzędnych neutralnych  $\mathbf{z}$ , rzeczywiste przemieszczenia można uzyskać ze wzoru 3.29 [Chen i Liu, 2014].

Drugą metodę stanowi metoda bezpośrednia. W tym podejściu, rozwiązania równania 3.33 oblicza się poprzez macierz współczynników. Jest to metoda wymagająca większej mocy obliczeniowej niż poprzednio opisana metoda modalna. Wykorzystując równanie  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}^{i\omega t}$ , równanie 3.33 po przekształceniu obrazuje wzór:

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}}. \quad (3.37)$$

Poprzez odwrócenie macierzy  $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] \bar{\mathbf{u}}$  otrzymuje się wektor amplitud przemieszczeń  $\bar{\mathbf{u}}$ . Dla dużych macierzy jest to nieefektywna metoda, a dodatkowo mogą pojawić się rozbieżności jeśli  $\omega$  jest blisko wartości jakiegokolwiek częstości własnej zagadnienia. Metoda stosowana jest głównie do zagadnień o niewielkiej ilości równań oraz gdy częstotliwość wymuszeń jest różna od częstości własnych.

### 3.6. Zagadnienie analizy przejściowej

Analiza przejściowa w metodzie elementów skończonych obejmuje analizę zachowania struktur w czasie, z uwzględnieniem zmian obciążeń i warunków brzegowych w określonym zakresie czasu. Poprzez rozwiązywanie równań ruchu w kolejnych krokach czasowych, można uzyskać przebiegi czasowe odpowiedzi struktury na obciążenia zewnętrzne [Chen i Liu, 2014]. Równanie ruchu, dla dowolnej chwili czasowej  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  jest w postaci wzoru:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K}\mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k, \quad (3.38)$$

Następnie wprowadza się kroki czasowe  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  i dokonuje numerycznego całkowania po czasie. Istniejące metody, można podzielić na bezpośrednie i metodę superpozycji modalnej. Zdecydowanie szersze zastosowanie mają metody bezpośrednie, ze względu na swoją uniwersalność. Zasadniczy podział metod bezpośrednich wyróżnia metodę jawnego (*explicit*) oraz niejawnego (*implicit*) całkowania równań ruchu. Różnica między tymi metodami w analizie numerycznej polega na sposobie, w jaki przyszłe stany są obliczane. Metody niejawne uwzględniają zarówno obecne jak i przyszłe stany, co implikuje konieczność iteracyjnego rozwiązywania równań w obrębie kroku czasowego celem uzyskania stabilności dynamicznej. Metody niejawne uważa się za bardziej uniwersalne, przez co są stosowane tam, gdzie wymagana jest dokładność i stabilność numeryczna. Warto również zauważyć, że metody niejawne są bezwarunkowo stabilne, co oznacza, że nie mają ograniczeń co do wielkości kroków czasowych. Natomiast w metodach jawnych przyspieszenia węzłowe są wyznaczone w sposób bezpośredni i opierają się jedynie na obecnych stanach, co skraca czas obliczeń. Jednak, mogą wymagać mniejszych kroków czasowych. Te metody stosuje się głównie do zagadnień szybkich, takich jak uderzenia lub eksplozje [Chen i Liu, 2014, Huebner i inni, 2001].

Najszerzej stosowaną z metod jawnych jest metoda różnic centralnych. Przybliżenie wartości wektorów prędkości i przyspieszeń uzyskuje się poprzez zastosowanie różnic skończonych - opisane równaniem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_k &= \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_{k-1}), \\ \ddot{\mathbf{u}}_k &= \frac{1}{(\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{k+1} - 2\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{k+1} - 2\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}) \right] + \mathbf{C} \left[ \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_{k-1}) \right] + \mathbf{K}\mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k. \quad (3.40)$$

Wektor przyspieszeń przyjmuje postać równania:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{F}(t), \quad (3.41)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \\ \mathbf{F}(t) = \mathbf{f}_k - \left[ \mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \right] \mathbf{u}_k - \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}_{k-1} \end{cases}, \quad (3.42)$$

W tym przypadku,  $u_{k+1}$  wylicza się z  $u_k$  i  $u_{k-1}$ , które znane są z poprzedniego kroku czasowego. Procedura jest powtarzana dla kolejnych kroków czasowych poczynając od  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}$  aż do momentu uzyskania założonej maksymalnej długości czasu kroku [Huebner i inni, 2001]. Metoda jest niestabilna numerycznie dla dużych wartości  $\Delta t$ .

Jedną z metod niejawnych (*implicit*) jest metoda Newmarka. W niej, wektory przemieszczeń i prędkości przyjmują postać równania:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &\approx \mathbf{u}_k + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_k + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_k + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}], \rightarrow (\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dots), \\ \dot{\mathbf{u}}_{k+1} &\approx \dot{\mathbf{u}}_k + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_k + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}] \end{aligned}, \quad (3.43)$$

gdzie  $\beta$  i  $\gamma$  to arbitralnie obrane stałe. W formie skróconej możliwy jest zapis w postaci wzoru:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{F}(t), \quad (3.44)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M}. \quad (3.45)$$

$$\mathbf{F}(t) = f(\mathbf{f}_{k+1}, \gamma, \beta, \Delta t, \mathbf{C}, \mathbf{M}, \mathbf{u}_k, \dot{\mathbf{u}}_k, \ddot{\mathbf{u}}_k). \quad (3.46)$$

Istotny jest wybór parametrów  $\gamma$  i  $\beta$ . Układ nietłumiony (czyli  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) jest warunkowo stabilny, jeśli  $\gamma \geq 1/2$ , i bezwarunkowo stabilny, jeśli  $\gamma \geq 1/2$  i  $\beta \geq \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2$ . Jednak  $\gamma > 1/2$  wprowadza sztuczne tłumienie do rozwiązania, więc najczęściej stosowane są wartości  $\gamma = 1/2$  i  $\beta = 1/4$ . Metoda ta jest czasami nazywana metodą średniego przyspieszenia i jest bezwarunkowo stabilna, co oznacza, że będzie zbieżna dla wszystkich przyrostów czasu. Jeśli  $\beta$  zostanie wybrane jako  $1/6$ , metoda jest nazywana metodą przyspieszenia liniowego, ale jest tylko warunkowo stabilna. Przyjmując wartość  $\beta = 0$  oraz  $\gamma = 1/2$  przechodzi się na jawną postać metody różnic centralnych [Lindfield i Penny, 2019].

W przypadku analiz z zakresu dynamiki liniowej, można skorzystać z metody superpozycji modalnej. Istnieją jednak publikacje, w których z powodzeniem jest stosowana do zagadnień nieliniowych [Morris, 1977]. Ta metoda korzysta z postaci drgań własnych (*mode shapes*) do ustalenia wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń węzłowych [Chen i Liu, 2014]. Podstawowym założeniem metody jest możliwość powiązania przemieszczeń węzłowych z wektorami własnymi, co można zapisać w postaci równania:

$$\mathbf{u}(t) \approx \sum_{i=1}^n q_i(t) \mathbf{u}_i, \quad (3.47)$$

gdzie  $q_i$  to amplituda modalna w węźle. W tej metodzie, równanie ruchu 3.48 przyjmuje postać zbliżoną do równania 3.33. Prawa strona równania 3.48 zawiera obciążenia.

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q = \frac{r_i(t)}{m_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.48)$$

Przy wykorzystaniu wszystkich częstości własnych układu, byłaby to zależność dokładna, a nie przybliżona. Ponieważ przemieszczenia modalne dla kolejnych częstości są ortogonalne, tworzą one kompletną podstawę, a wyrażenie jest jedynie zmianą współrzędnych z fizycznych zmiennych węzłowych na amplitudy modalne. Gdy używana jest tylko niewielka liczba modów własnych, superpozycja modów może być postrzegana jako rzut przemieszczeń na podprzestrzeń obejmowaną przez wybrane częstości własne. Zaletą tej metody jest mniejsza złożoność obliczeniowa wynikająca z mniejszej ilości równań w porównaniu z metodami bezpośrednimi oraz wyższa wydajność przy analizach z dużą liczbą elementów. Do wad należy zaliczyć niższą dokładność przy zagadnieniach wymagających uwzględnienia wyższych częstości własnych. Do takich zagadnień zaliczane są zjawiska uderzenia, przebiecia lub obciążenia impulsowego [Chen i Liu, 2014, Huebner i inni, 2001].



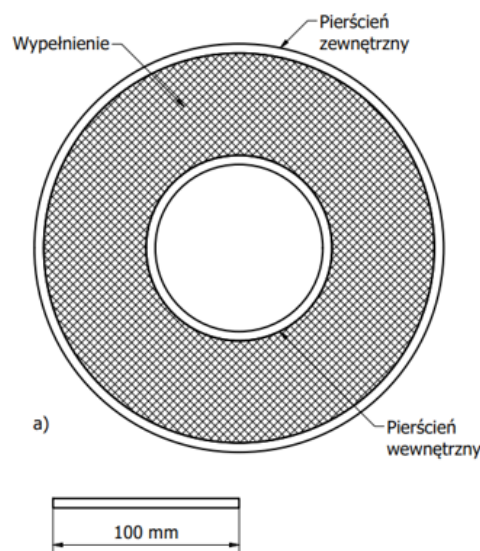


## Rozdział 4

# Model obliczeniowy

Symulacje inżynierskie to metody stosowane do analizy, projektowania i optymalizacji konstrukcji lub procesów. Umożliwiają wirtualne testowanie zachowania bez konieczności przeprowadzania fizycznych testów na rzeczywistym obiekcie. Jednak mimo lat rozwoju metod matematycznych i technologii komputerowej, wciąż trwają prace nad poprawą dokładności modeli, skróceniu czasu obliczeń, skalowaniem symulacji oraz integracją wiedzy i danych z różnych dziedzin nauki. Najistotniejszym etapem przygotowania symulacji jest wybór lub stworzenie modelu matematycznego lub komputerowego pozwalającego na odwzorowanie rzeczywistych obiektów lub zjawisk. Niniejszy rozdział poświęcono opisowi prac które przeprowadzono w trakcie przygotowywania symulacji.

W ramach przeprowadzonych prac, przebadano dwa rodzaje struktur pierścieniowych. Jednym z nich były pierścienie warstwowe w których można wyróżnić pierścień zewnętrzny, pierścień wewnętrzny i jednorodne wypełnienie. Zostały przedstawione na rysunku 4.1.



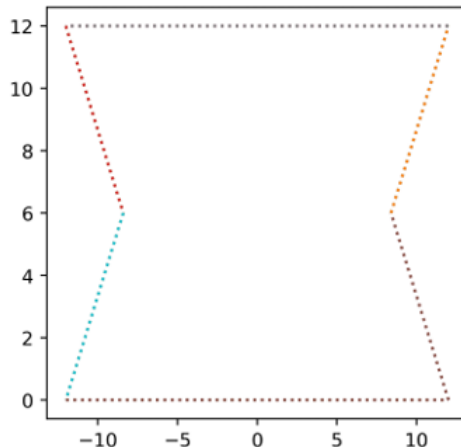
Rysunek 4.1: Wariant pierścieniowy z jednorodnym wypełnieniem.

Drugi rodzaj stanowiły jednorodne pierścienie ze strukturą o różnych kształtach komórek elementarnych.

## 4.1. Generowanie geometrii

Jednym z elementów modelu komputerowego służącego do przeprowadzenia symulacji jest geometryczna reprezentacja obiektu badań. Do jej stworzenia można użyć oprogramowania typu CAD (ang. *Computer Aided Design*), które jest powszechnie użytkowane w praktyce inżynierskiej. Pierwsze oprogramowanie tego typu zostało zaproponowane w latach 50. XX wieku i podobnie jak w przypadku metod obliczeniowych, jego rozwój przyspieszył wraz z wprowadzeniem komputerów osobistych i ich upowszechnieniem. Oprogramowanie do wspomagania projektowania można podzielić ze względu na typ geometrii którą obsługuje: dwuwymiarową lub trójwymiarową, która z kolei dzieli się na bryłową i powierzchniową. Na rynku dostępnych jest znaczna ilość programów w każdej z wymienionych kategorii. Pomimo istnienia narzędzi wspomagających oraz dużej swobodzie użytkowania tych programów, nie zawsze możliwe jest efektywne projektowanie geometrii lub nie zawsze możliwe jest posiadanie pełnej kontroli nad geometrią. Autor niniejszej pracy, opracował skrypt w języku *Python* służący do generowania struktur komórkowych o zadanym kształcie komórki elementarnej. Do obsługi eksportu struktur w postaci wektorowej z algorytmu wykorzystano zewnętrzną bibliotekę *ezdxf* [Moitzi, 2022].

Pierwszym etapem generowania struktury do obliczeń, jest konieczność zdefiniowania kształtu i wymiarów komórki elementarnej. Na potrzeby tej pracy, komórka bazowa miała kształt figury geometrycznej o sześciu zdefiniowanych wierzchołkach i liniach prostych łączących te wierzchołki. Przykładową komórkę pokazano na rysunku 4.2.

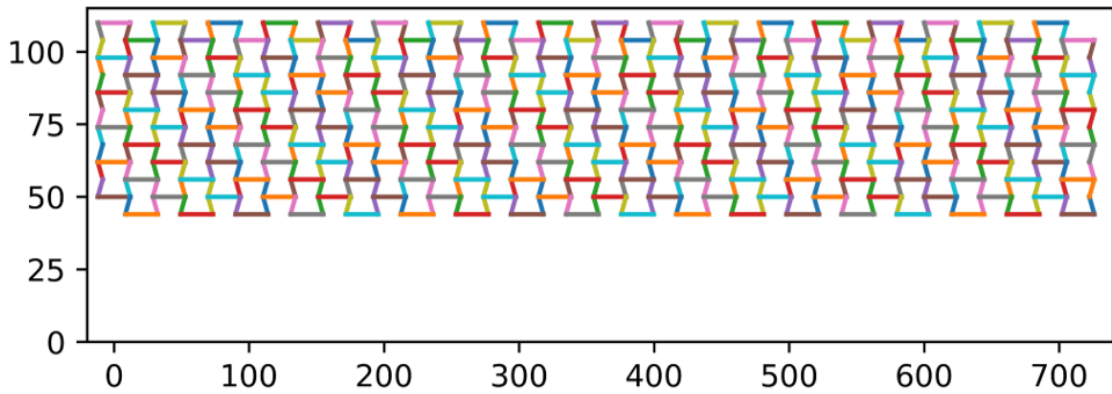


Rysunek 4.2: Przykładowa, sześciokątna komórka elementarna.

W tym kroku, na podstawie podanych wymiarów komórki elementarnej oraz wartości przesunięcia punktów środkowych, generowana jest geometria komórki. Może ona zostać wyeksportowana do postaci pliku wektorowego i wykorzystana do zbudowania modelu obliczeniowego komórki elementarnej opartej na elementach belkowych.

W następnym kroku, poprzez powielenie poszczególnych komórek, powstaje płaska struktura przedstawiona na rysunku 4.3.

Ilość komórek określona jest przez ilość kolumn i rzędów, podanych jako dane wejściowe do algorytmu. Dodatkowo, struktura jest przesuwana o zadaną wartość promienia wewnętrznego struktury



Rysunek 4.3: Przykładowa płaska struktura komórkowa.

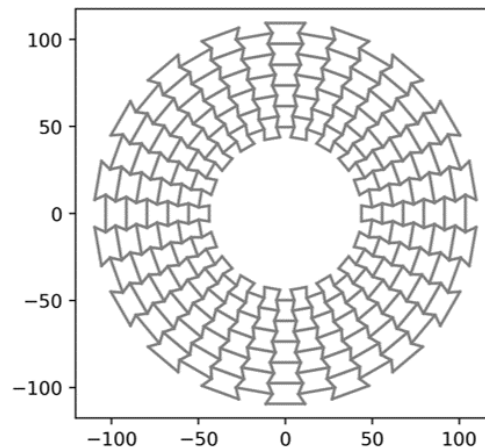
pierścieniowej, stąd zmiana położenia względem początku układu współrzędnych. Na tym etapie również istnieje możliwość eksportu struktury, ponownie w postaci modelu szkieletowego.

Kolejny krok dokonuje rotacji wszystkich wierzchołków o kąt o wartości proporcjonalnej do odległości od początku układu współrzędnych. Nowe współrzędne punktów wyliczane są przy pomocy wzorów 4.1 - 4.2. Jeśli ilość kolumn (rzędy równoległe do osi Y) jest parzysta, algorytm celem ograniczenia ilości wykonywanych działań, może rotować tylko połowę punktów, a drugą połowę uzyska się poprzez odbicie względem osi Y.

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta , \quad (4.1)$$

$$y' = y \cos \theta + x \sin \theta . \quad (4.2)$$

Jeśli zdefiniowana struktura posiada więcej punktów (niebędących wierzchołkami), to komórki ulegną deformacji, co pozwoli uzyskać większą krzywiznę ścianek. Uzyskuje się w ten sposób strukturę pierścieniową. Na tym etapie następuje automatyczne sprawdzenie nakładania się punktów na siebie. Przykładową strukturę pokazano na rysunku 4.4. Analogicznie jak w poprzednich etapach, istnieje możliwość eksportu tej struktury w postaci wektorowej.

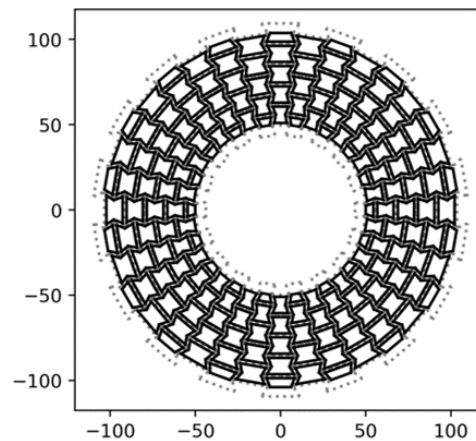


Rysunek 4.4: Przykładowa pierścieniowa struktura komórkowa.

W kolejnym kroku następuje odsunięcie krawędzi komórki do wewnątrz o podaną na wejściu algorytmu wartość. Działanie algorytmu można zawrzeć w następujących punktach:

- inicjalizacja pustej listy do przechowywania nowych współrzędnych wierzchołka
- obliczenie i normalizacja dwóch wektorów:  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  (skierowanych odpowiednio do poprzedniego i następnego wierzchołka)
- wyznaczenie i normalizacja wektora wypadkowego  $\mathbf{e}$
- określenie, poprzez iloczyn wektorowy, czy kąt między wektorami  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  jest ostry czy rozwarty
- następuje przesunięcie wierzchołka o zadaną wartość od kierunków wyznaczonych przez wektory  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  wyznaczonym przez wersor wypadkowy
- zapisanie danych do listy wyników i przejście do kolejnej komórki.

W wyniku zastosowania algorytmu, powstaje struktura pokazana na rysunku 4.5.



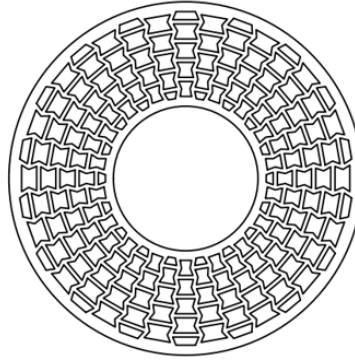
Rysunek 4.5: Przykładowa pierścieniowa struktura komórkowa po odsunięciu linii łączących.

Na tym etapie są również usuwane zbędne fragmenty komórek wychodzące poza obszar zdefiniowany za pomocą dwóch okręgów. Jest możliwość eksportu struktury, jednak sugeruje się eksport po kolejnym etapie. Dodatkowo, za pomocą równania 4.3 liczona jest suma powierzchni figur wewnątrz komórek, powstałych przez odsunięcie.

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right|, \quad (4.3)$$

gdzie  $x_i$  i  $y_i$  to współrzędne kolejnych wierzchołków, odczytywane w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

W ostatnim etapie działania algorytmu następuje sprawdzenie czy występują zduplikowane punkty bądź krawędzie, dodanie okręgów i obliczenie pola powierzchni powstałej struktury. Sfinalizowaną strukturę przedstawia rysunek 4.6.



Rysunek 4.6: Wynik działania algorytmu - finalna struktura pierścieniowa.

W tabeli 4.1 zebrano parametry globalne algorytmu, do których ma dostęp użytkownik. Struktury w niniejszej pracy wykorzystują wartości parametrów podane w tabeli 4.1 jako przykładowe. Wpływ wartości podkreślonych parametrów na zachowanie struktur jest przedmiotem niniejszej pracy.

Tabela 4.1: Zestawienie parametrów algorytmu

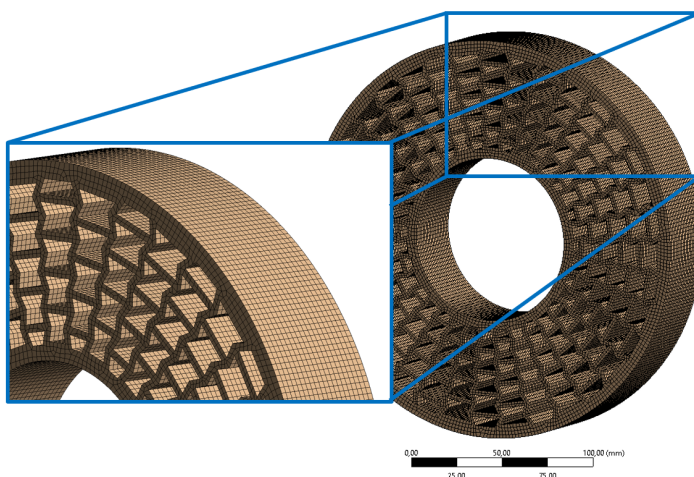
Nazwa parametru	Przykładowa wartość	Opis
$n$	36	ilość komórek elementarnych w kierunku x
$n_{\text{seg}}$	6	ilość segmentów komórki
$R_{\text{in}}$	50	odsunięcie od osi bazowej
$L_{\text{height}}$	12	wysokość warstwy
$I_{\text{number}}$	5	ilość warstw
$Angle_{\text{total}}$	$2\pi$	kąt zawinięcia [rad]
$Offset$	<u>1.3</u>	wartość odsunięcia
$Point_{\text{mid}}$	<u>0.7</u>	pozycja punktu środkowego komórki elementarnej
$D_{\text{outter}}$	220	średnica zewnętrznego okręgu
$D_{\text{inner}}$	90	średnica wewnętrznego okręgu

Wygenerowana geometria jest bezwymiarowa, jednak na potrzeby pracy jako jednostkę przyjęto milimetr. W dalszych częściach pracy, wykorzystywane będą modele przestrzenne. Powstały one poprzez zaimportowanie geometrii płaskich wygenerowanych przez algorytm do natywnego oprogramowania typu CAD dostępnego w pakiecie ANSYS - SpaceClaim. W tym programie dokonano jedynie wycięcia kształtu płaskiego na zadaną wartość grubości dysku, w tym przypadku 40 mm.

Zaproponowany algorytm pozwala w efektywnie generować pierścieniowe struktury z komórkami elementarnymi o różnych kształtach. Ze względu na wyodrębnienie kluczowych parametrów, użytkownik algorytmu ma możliwość zmian w procesie generowania struktury. W sposób empiryczny wykazano, że zaproponowany algorytm umożliwia generowanie struktur o dowolnym stopniu skomplikowania, nawet przy ograniczonych zasobach sprzętowych.

## 4.2. Właściwości siatki elementów skończonych

Dyskretyzację modelu do postaci siatki elementów skończonych przeprowadzono w programie ANSYS Mechanical. Wielkość elementu zależała od grubości pojedynczego żebra struktury i była każdorazowo dobierana w taki sposób, żeby na grubości żebra występowały dwie warstwy elementów. Wykorzystano elementy sześciennie o ośmiu węzłach (HEX8). Przykładową siatkę przedstawiono na rysunku 4.7.



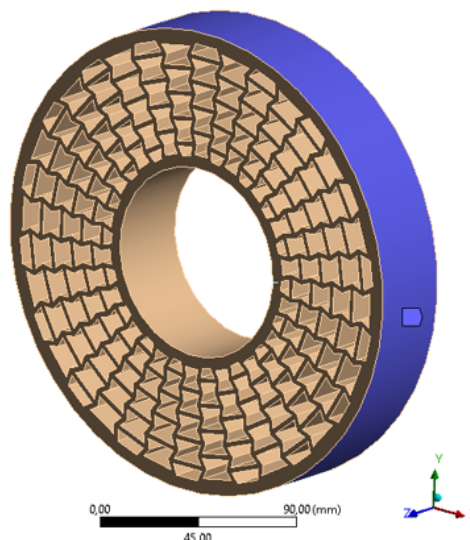
Rysunek 4.7: Przykładowa siatka elementów skończonych.

Zaprezentowana siatka elementów skończonych składała się z 127 400 elementów typu HEX8 oraz 657 725 węzłów. W każdym przypadku, sprawdzano jakość elementów siatki. W programie ANSYS, dla elementów przestrzennych ta metryka opiera się na stosunku objętości komórki odniesionej do pierwiastka kwadratowego z sześcianną sumą kwadratów długości krawędzi elementu. Wartość jakości zawiera się w przedziale od 0 do 1. Uzyskana, minimalna wartość elementów wynosiła 0.36, przy średniej wartości jakości elementów na poziomie 0.89. Dla innych geometrii ze strukturą pierścieniową, ilość elementów i wartości metryk jakości siatki były zbliżone.

## 4.3. Parametry symulacji

Jak wspomniano wcześniej, jednym z elementów symulacji inżynierskich jest stworzenie modelu matematycznego lub komputerowego dla zagadnienia. W poprzedniej sekcji opisano sposób generowania geometrii i przedstawiono sposób dyskretyzacji. W kolejnych rozdziałach pracy przedstawione są wyniki symulacji. Celem dopełnienia definicji problemu, w niniejszej sekcji przedstawione będą parametry wspólne dla wszystkich wariantów symulacji, a różnice zostały szerzej omówione w poszczególnych rozdziałach.

Dla każdej analizowanej struktury, przyjęto taki sam rodzaj utwierdzenia. Polegało ono na odebraniu wszelkich stopni swobody węzłom leżącym na zewnętrznej powierzchni, oznaczonej kolorem niebieskim na rysunku 4.8



Rysunek 4.8: Miejsce zaaplikowania warunku brzegowego w postaci całkowitego utwierdzenia.

Parametry materiałowe zależały od wariantu struktury. Przyjęto izotropowy, liniowy materiał pierścieni wewnętrznego i zewnętrznego struktury pierścieniowej przedstawionej na rysunku 4.1. Uogólnione parametry dla tego materiału odpowiadają stali i zostały zestawione w tabeli 4.2.

Tabela 4.2: Zestawienie własności materiałowych dla pierścieni: zewnętrznego i wewnętrznego

Właściwość	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	$E$	200	GPa
Współczynnik Poissona	$\nu$	0.33	-
Gęstość	$\rho$	7850	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Analogicznie postąpiono z wypełnieniem, dla którego również założono liniowy materiał izotropowy. Ten materiał należy traktować w sposób modelowy, gdyż zmianie ulegał współczynnik Poissonon'a. Takie działanie miało na celu wyizolowanie jednego parametru zmieniającego zachowanie całej struktury. Pozostałe wartości przyjęto według tabeli 4.3.

Tabela 4.3: Zestawienie własności materiałowych dla jednorodnego wypełnienia

Właściwość	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	$E$	70	GPa
Współczynnik Poissona	$\nu$	*opis w tekście	-
Gęstość	$\rho$	2700	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Do symulacji pierścieni ze strukturą komórkową, przyjęto zbliżony materiał do przedstawionego wcześniej, jednak przyjęto stałą wartość współczynnika Poissona. Dane materiałowe zestawiono w tabeli 4.4.



Tabela 4.4: Zestawienie własności materiałowych dla materiału pierścieni ze strukturą

Właściwość	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	$E$	70	GPa
Współczynnik Poissona	$\nu$	0.3	-
Gęstość	$\rho$	2700	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Podane właściwości odpowiadają standardowym wartościom stopów aluminium. Dla wszystkich wymienionych materiałów przyjęto stały współczynnik tłumienia  $\xi = 0.5\%$ . Niezerowa wartość była konieczna celem aktywacji równań uwzględniających tłumienie.

#### 4.4. Model materiałowy *neo-Hookean*

Materiały w ujęciu inżynierskim można podzielić na materiały polimerowe, materiały ceramiczne, metale i ich stopy oraz kompozyty. W przypadku małych odkształceń, będących w obrębie stosowania prawa Hook'a, liniowy model materiału jest sposób wystarczający do modelowania zachowania przede wszystkim materiałów metalicznych. W przypadku tworzyw sztucznych, a w szczególności gumy i jej mieszanek, model liniowy należy zastąpić modelem uwzględniającym hipersprężystość. Do najczęściej stosowanych należy zliczyć modele: Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Odgen, Arruda-Boyce, Gent, Yeoh, Błatz-Ko [Safar i Mihai, 2018].

Pierwszym modelem materiałowym uwzględniającym zjawisko hipersprężystość jest zaproponowany przez Ronalda Rivlina w 1948 roku model neo-Hookean [Rivlin i Rideal, 1948]. Do najważniejszych charakterystyk tego modelu należy zaliczyć silnie nieliniową zależność między naprężeniem i odkształceniem. W tym modelu zakładana jest stała wartość modułu Kirchhoffa. Wynika z tego największa wada tego modelu, który w sposób poprawny odwzorowuje względnie niewielkie odkształcenia. Za wartość graniczną przy gumie uważa się odkształcenie na poziomie około 30% przy rozciąganiu oraz do około 80% przy obciążeniach tnących [Safar i Mihai, 2018, Kossa i inni, 2023]. Do zalet zalicza się łatwość implementacji i walidacji modelu materiałowego oraz wysoką zgodność z rzeczywistością dla małych i średnich odkształceń [Kossa i inni, 2023].

Hipersprężyste modele materiałowe bazują na definicji funkcji energii odkształcenia  $W$ , która dla materiałów izotropowych może zostać wyrażona jako zależność od niezmienników  $I_1, I_2, I_3$  tensora deformacji Cauchy'ego-Greena  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ , gdzie  $F$  to gradient odkształceń [Kossa i inni, 2023].

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \quad (4.4)$$

Do wyznaczenia niezmienników tensora deformacji, konieczne jest wprowadzenie głównych odkształceń liniowych  $\lambda$  zgodnie ze równaniem 4.5 [Safar i Mihai, 2018].

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{L_1}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{L_2}, \quad \lambda_3 = \frac{l_3}{L_3}, \quad (4.5)$$



gdzie  $l_i$  to długość obiektu po odkształceniu w danym kierunku, a  $L_i$  to długość początkowa elementu w tym kierunku. Niezmienniki zdefiniowane są następującymi równaniami:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{b}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (4.6)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2)) = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2, \quad (4.7)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{b}) = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 = J^2, \quad (4.8)$$

gdzie  $J = \det(\mathbf{F})$ . Pochodne cząstkowe niezmienników  $I_1, I_2, I_3$  względem  $\mathbf{b}$  opisuje równanie [Kossa i inni, 2023]:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{b}} = I_1\mathbf{I} - \mathbf{b}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{b}} = I_3\mathbf{b}^{-1}, \quad (4.9)$$

Mając powyższe na uwadze, można zapisać tensor naprężeń Cauch'ego równaniem [Abdel-Rahman, 2023]:

$$\sigma = 2J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b} = 2J^{-1} \left( W_{,1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{b}} + W_{,2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{b}} + W_{,3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{b}} \right) \mathbf{b}, \quad (4.10)$$

Korzystając z własności  $W_{,3} = W_{,J}/(2J)$  i równania 4.9, można przekształcić równanie na tensor Cauch'ego do postaci równania:

$$\sigma = 2\mathbf{J}^{-1} \left( (W_{,1} + W_{,2}I_1) \mathbf{b} - W_{,2}\mathbf{b}^2 \right) + W_{,J}\mathbf{I}. \quad (4.11)$$

Z powyższych równań, można wyprowadzić uogólniony wzór na funkcję energii odkształcenia w postaci równania: [Kossa i inni, 2023].

$$W = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_{\text{dev}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{\text{vol}}(J), \quad (4.12)$$

gdzie  $W_{\text{dev}}$  reprezentuje energię odkształceń postaciowych (z zachowaniem niezmienniczej objętości), a  $W_{\text{vol}}$  opisuje energię związaną ze zmianą objętości [Abdel-Rahman, 2023, Kossa i inni, 2023].

W oprogramowaniu do analiz metodą elementów skończonych (na przykład ANSYS i Comsol), energię odkształceń opisuje się równaniem [ANSYS, 2011]:

$$W = \frac{G}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{K}{2} (J - 1)^2, \quad (4.13)$$

gdzie  $G$  i  $K$  to odpowiednio początkowy Kirchhoffa i Hemholtza dla materiału. W programie ANSYS koniecznym jest podanie parametru związanego z nieściśliwością materiału, spełniającego równość:  $d = 2/K$ . Jeśli rozważany materiał przyjmuje się jako nieściśliwy, to  $J = 1$  i drugi człon równania 4.13 ulega redukcji.

Opisywany model materiałowy został użyty w symulacji uderzenia pocisku w struktury pierścieniowe ze strukturą komórkową, opisaną w rozdziale 8. W symulacji przyjęto parametry materiałowe dla płyty polietylenowej na podstawie danych literaturowych [Aligholizadeh i inni, 2020, Jordan i inni, 2020]. Zestawienie wartości znajduje się w tabeli 4.5

Tabela 4.5: Zestawienie własności materiałowych dla materiału pierścieni ze strukturą komórkową w symulacjach uderzenia

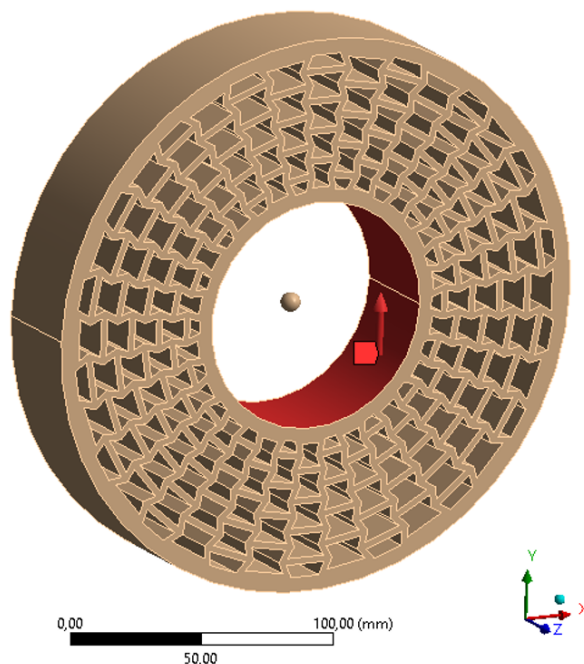
Właściwość	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	$E$	0.52	GPa
Moduł Kirchhoffa	$G$	0.15	GPa
Moduł Hemholtza	$K$	1.0	GPa
Współczynnik Poissona	$\nu$	0.43	-
Gęstość	$\rho$	940	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

## Rozdział 5

# Analiza oddziaływania siły pionowej

### 5.1. Opis problemu

Pierwszą grupę symulacji stanowią symulacje zachowania struktur pierścieniowych w przypadku dynamicznego obciążenia siłą pionową. Na rysunku 5.1 pokazano przykładową geometrię użytą w tym rodzaju symulacji. Opis generowania geometrii oraz parametry materiałowe zostały opisane w rozdziale 3. W węzłach leżących na powierzchni oznaczonej kolorem czerwonym, zadano warunek brzegowy obciążenia w postaci siły skierowanej równoległe do osi Y, którą oznaczono jako  $F_p$ .



Rysunek 5.1: Miejsce zadania warunku brzegowego w postaci obciążenia siłą skupioną  $F_p$ .

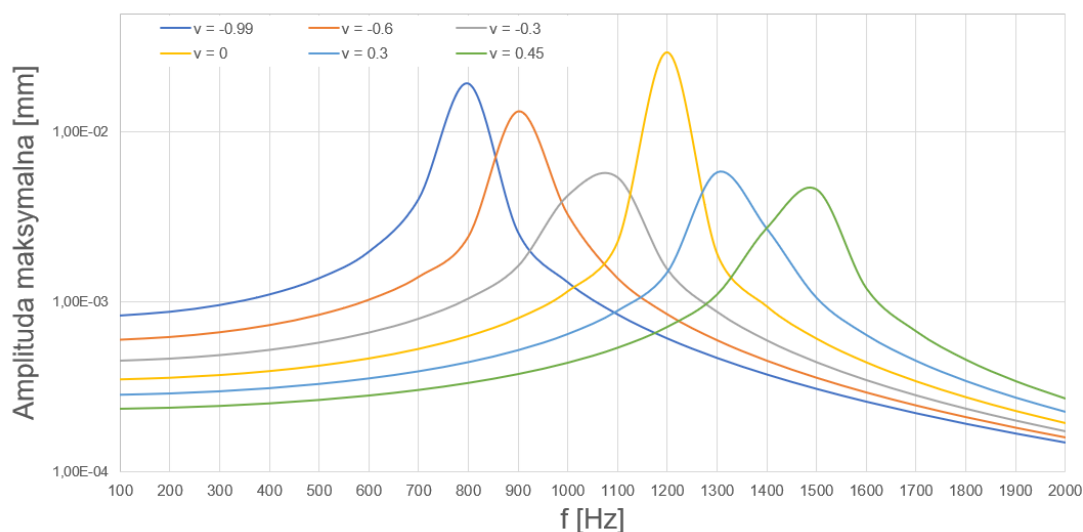
Wartość szczytowa siły i charakter jej oddziaływania  $F_p$  zależały od typu analizy. W analizie modalnej przyjęto  $F_p = 1000$  N, a charakter oddziaływania został opisany równaniem 3.48. W analizie przejściowej, wykorzystano działanie siły  $F_p$  do wywołania przemieszczenia początkowego węzłów należących do obciążonej płaszczyzny geometrii. Następnie, w chwili  $t = 0$  s następowała skokowe odję-

cie siły. W wyniku tego struktura zaczynała wykonywać oscylacje, aż do ich ustania. Celem uzyskania wartości przemieszczeń i przyspieszeń, stworzono wirtualną geometrię w postaci pojedynczego punktu, którą w formie kuli przedstawiono na rysunku 5.1.

## 5.2. Analiza pierścienia z jednorodnym wypełnieniem

W tym wariancie symulacji, zmianie ulegał współczynnik Poissona. W sposób arbitralny wybrano sześć wartości współczynnika  $\nu$ : 0.45, 0.3, 0.0,  $-0.3$ ,  $-0.6$ ,  $-0.99$ .

Pierwsza analiza polegała na oszacowaniu amplitudy przemieszczeń centralnego punktu w kierunku pionowym przy pomocy metody superpozycji modalnej w zakresie częstotliwości od 1 do 20 000 Hz. Metoda osiąga wysoką stabilność numeryczną przy użyciu dużej liczby wektorów drgań własnych. Na potrzeby symulacji, dla każdej struktury obliczono pierwszych 80 niezerowych wektorów drgań własnych. Spełniały one warunek  $\omega_{\max} \gtrsim 30000$  Hz [ANSYS, 2009, Chen i Liu, 2014]. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.2.

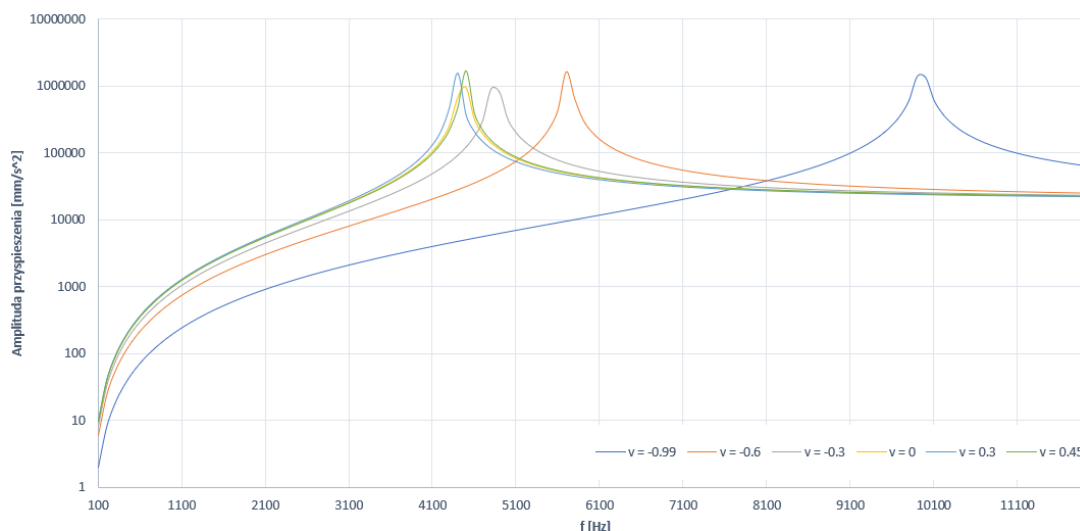


Rysunek 5.2: Amplituda przemieszczeń w kierunku pionowym w domenie częstotliwości.

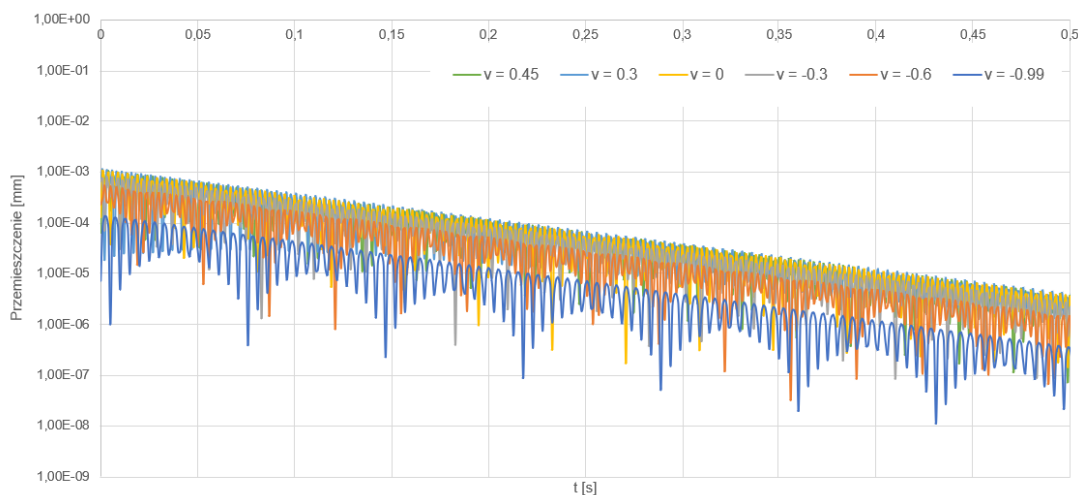
W analogiczny sposób obliczono amplitudę przyspieszeń. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.3.

Druga analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 0.5s, z arbitralnym doborem kroku czasowego. Wykorzystano niejawne całkowanie równań ruchu ze względu na umiarkowane prędkości odkształceń. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.3.

Jak można odczytać z wykresu 5.2, najniższą amplitudę uzyskano dla dodatnich współczynników Poissona. Wykres 5.3 obrazuje niższą wartość amplitudy przy tych samych częstotliwościach dla materiałów o bardziej ujemnym współczynniku Poissona. Analiza przejściowa również pokazuje, że materiały o bardziej ujemnym współczynniku wykazują niższą amplitudę przemieszczeń w porównaniu do materiałów konwencjonalnych.



Rysunek 5.3: Amplituda przyspieszeń w kierunku pionowym w domenie częstotliwości.



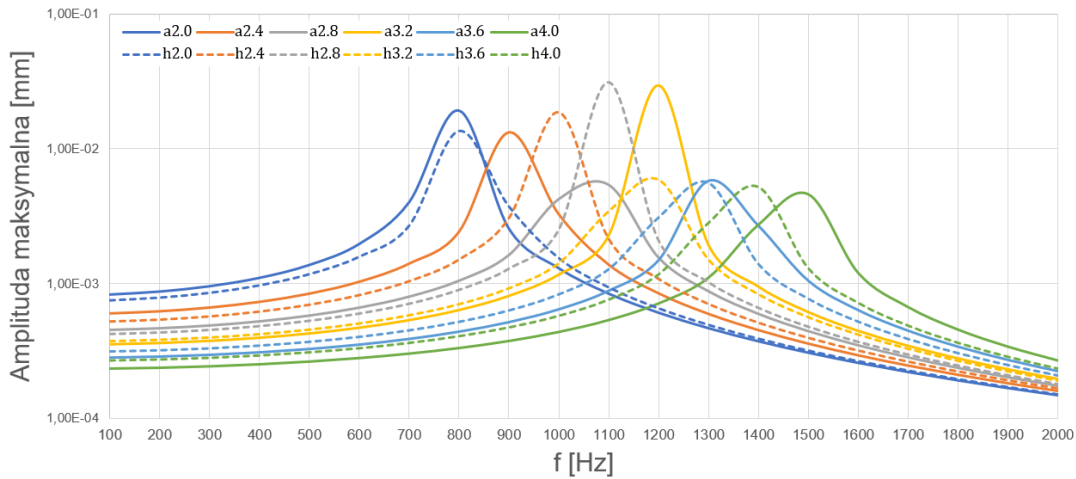
Rysunek 5.4: Amplituda przemieszczeń w domenie czasu.

### 5.3. Analiza wpływu szerokości żeber na odpowiedź struktury

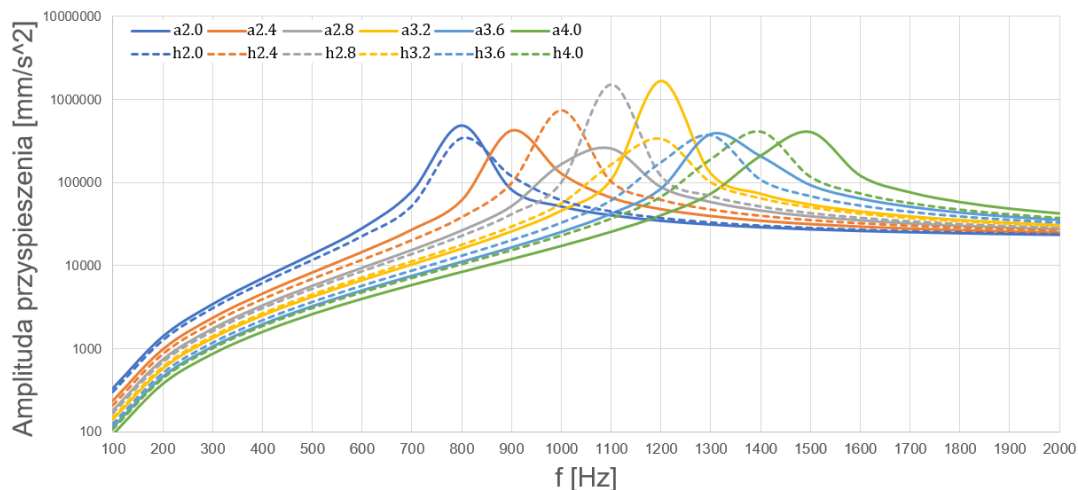
W tym wariantcie symulacji, zmianie ulegała szerokość żeber struktury. Wygenerowano dwanaście struktur, sześć z komórkami w kształcie sześciokąta i sześć struktur z komórkami w kształcie re-entrant. W sposób arbitralny wybrano sześć wartości grubości żeber: 2.0 mm, 2.4 mm, 2.8 mm, 3.2 mm, 3.6 mm, 4.0 mm. Zrealizowano to poprzez modyfikację parametru *Offset* w algorytmie. Na prezentowanych niżej wykresach, linią przerywaną oraz literą *h* oznaczono wyniki dla struktur z komórkami w kształcie plastra miodu, a linią ciągłą oraz literą *a* struktury z komórkami typu re-entrant. Oznaczenie liczbowe obok litery oznacza grubość żebra w danej strukturze.

Pierwsza analiza polegała na oszacowaniu amplitudy przemieszczeń centralnego punktu w kierunku pionowym przy pomocy metody superpozycji modalnej w zakresie częstotliwości od 1 do 20 000 Hz. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.5.

W analogiczny sposób obliczono amplitudę przyspieszeń. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.6.



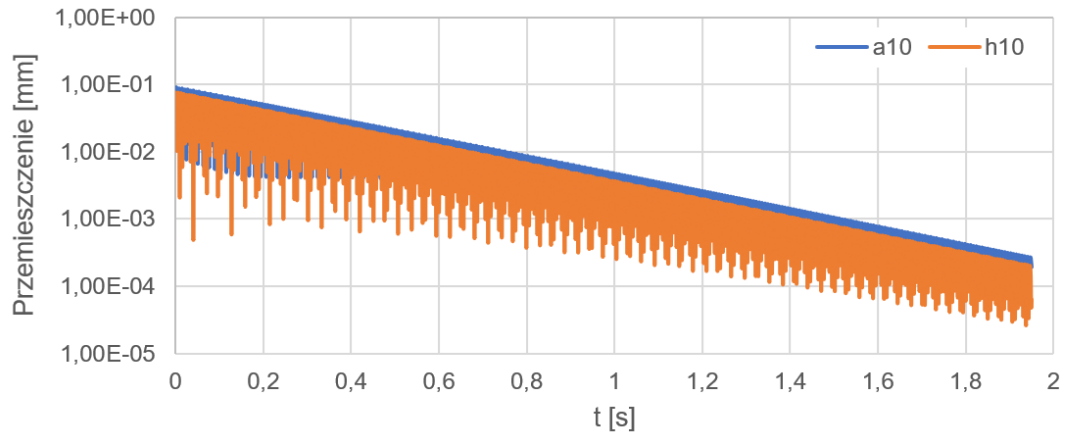
Rysunek 5.5: Amplituda przemieszczeń w kierunku pionowym w domenie częstotliwości.



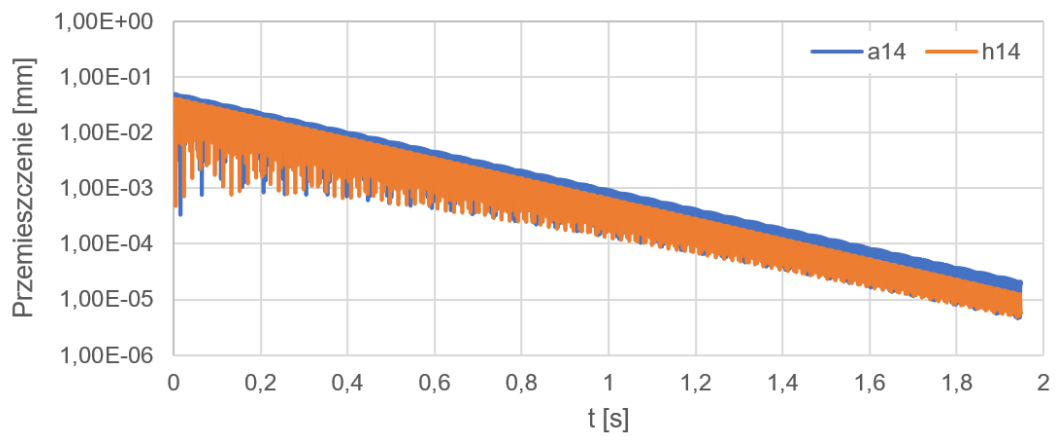
Rysunek 5.6: Amplituda przyspieszeń w kierunku pionowym w domenie częstotliwości.

Druga analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 2s, z arbitralnym doбором kroku czasowego. Wykorzystano niejawne całkowanie równań ruchu ze względu na umiarkowane prędkości odkształceń. Wyniki przedstawiono na rysunkach 5.7 - 5.9. Kolorem niebieskim i literą *a* oznaczono struktury z komórkami w kształcie re-entrant, a kolorem pomarańczowym i literą *h* struktury z komórkami w kształcie plastra miodu. Wartość liczbową przy literze oznacza wartość zmiennej *Offset*.

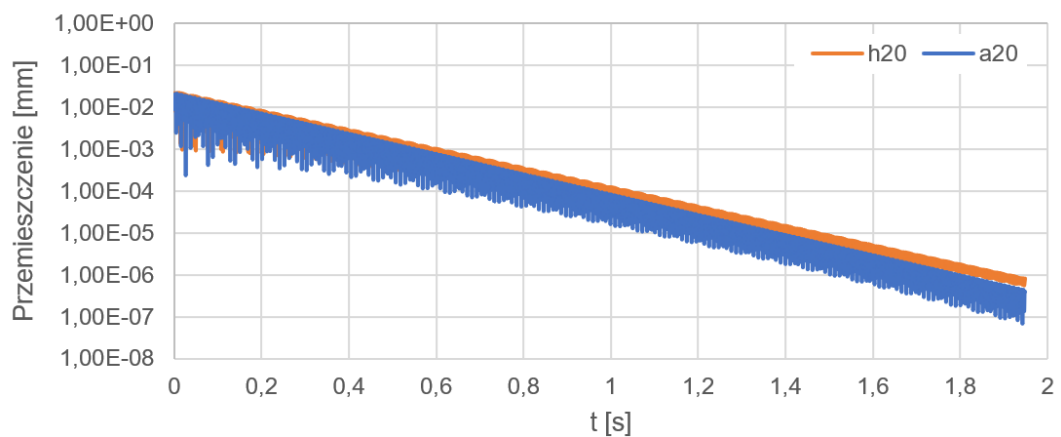
Z wykresu 5.5 można zauważyć, że dla trzech wartości grubości ścianek, struktury posiadające komórki w kształcie re-entrant wykazały się niższą amplitudą niż struktury z komórkami o kształcie plastra miodu. Analogiczną zależność można zaobserwować na wykresie 5.6. Analiza przejściowa również pokazuje, że przy większej dużej grubości żeber, oscylacje zanikają w krótszym czasie dla struktur z komórkami w kształcie re-entrant.



Rysunek 5.7: Przeszczenie w kierunku pionowym dla struktur z grubością ścianki 2 mm w domenie czasu.



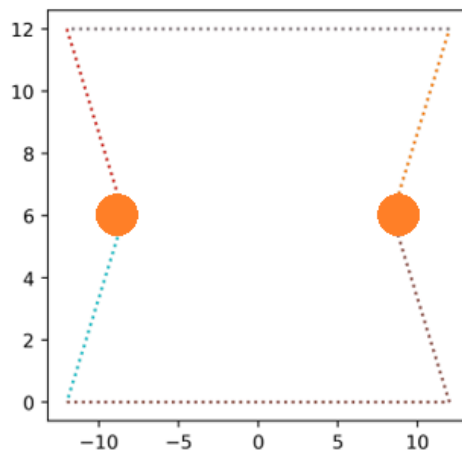
Rysunek 5.8: Przeszczenie w kierunku pionowym dla struktur z grubością ścianki 2.8 mm w domenie czasu.



Rysunek 5.9: Przeszczenie w kierunku pionowym dla struktur z grubością ścianki 4.0 mm w domenie czasu.

## 5.4. Analiza wpływu kształtu komórek na odpowiedź struktury

W tym wariacie symulacji, zmianie ulegały współrzędne poziome środkowych wierzchołków komórki elementarnej. Modyfikowane wierzchołki przedstawiono na rysunku 5.10.



Rysunek 5.10: Wierzchołki ulegające przesunięciu.

Wygenerowano siedem struktur: trzy z komórkami w kształcie sześciokąta, trzy struktury z komórkami w kształcie re-entrant oraz jedną z komórkami w kształcie czworokąta. Wybranych zostało siedem wartości parametru  $Point_{mid}$  używanego w algorytmie generującym struktury: 0.4, 0.7, 0.9, 1.0, 1.3, 1.6. W sensie fizycznym, ten parametr określa wartość współrzędnej  $x_{srod}$  poprzez multiplikację parametru  $Point_{mid}$  przez połowę szerokości komórki. Przykładowo, na rysunku 5.10, połowa szerokości komórki wynosi 12 (układ bezwymiarowy, domyślnie zakładane są milimetry), to przy zastosowanym parametrze  $Point_{mid} = 0.7$ , współrzędna  $x_{srod}$  prawego wierzchołka będzie wynosić 8.4. Analogicznie, współrzędna lewego oznaczonego wierzchołka będzie wynosić  $-8.4$ .

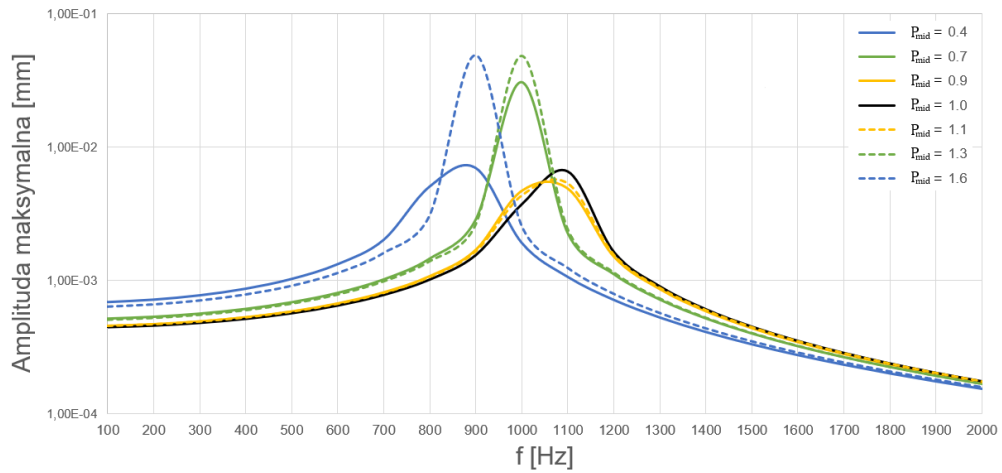
Podobnie jak w przypadku poprzednich symulacji, pierwsza analiza polegała na oszacowaniu amplitudy przemieszczeń centralnego punktu w kierunku pionowym przy pomocy metody superpozycji modalnej w zakresie częstotliwości od 1 do 20 000 Hz. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.11.

W taki sam sposób obliczono amplitudę przyspieszeń. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.12.

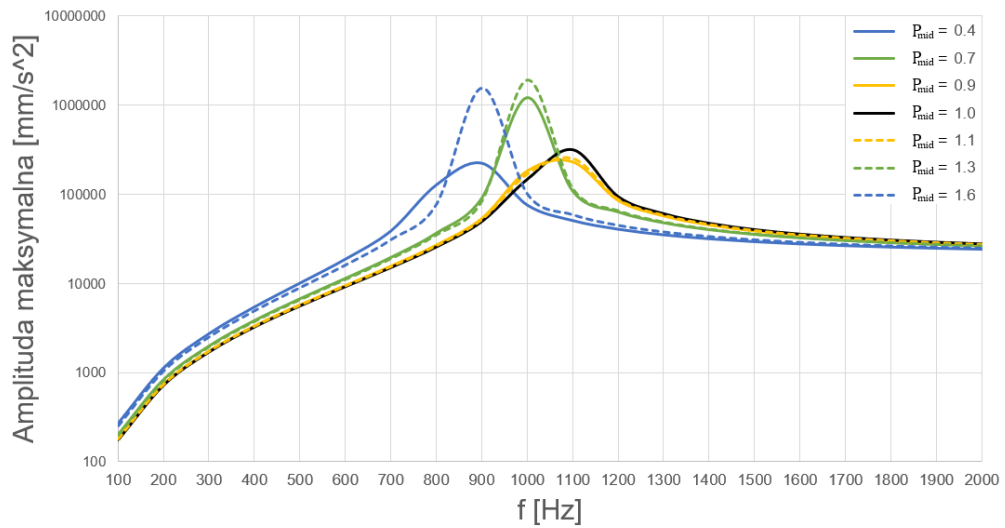
Druga analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 1s, z arbitralnym doborem kroku czasowego. Ponownie wykorzystano niejawne całkowanie równań ruchu. Wyniki przedstawiono na rysunkach 5.13 - 5.14. Oznaczenie krzywych zawiera liczbę, która stanowi wartość parametru  $Point_{mid}$ . Jeśli jest większa od 1.0 komórki struktury przybierają kształt plastra miodu, jeśli jest równa 1.0 to komórki mają kształt czworokątny. Natomiast jeśli wartość jest mniejsza od 1.0 to w strukturze występują komórki re-entrant.

Z wykresu 5.11 można odczytać, że struktury posiadające komórki w kształcie re-entrant wykazały się niższą amplitudą niż struktury z komórkami o kształcie plastra miodu. Analogiczną zależność można zaobserwować na wykresie 5.12. Analiza przejściowa również pokazuje, że w przypadku struktur z komórkami typu re-entrant, szybciej maleją amplitudy drgań.

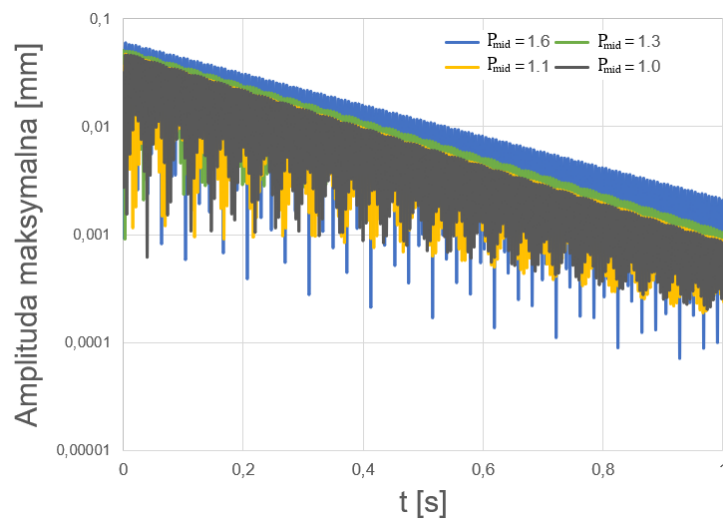




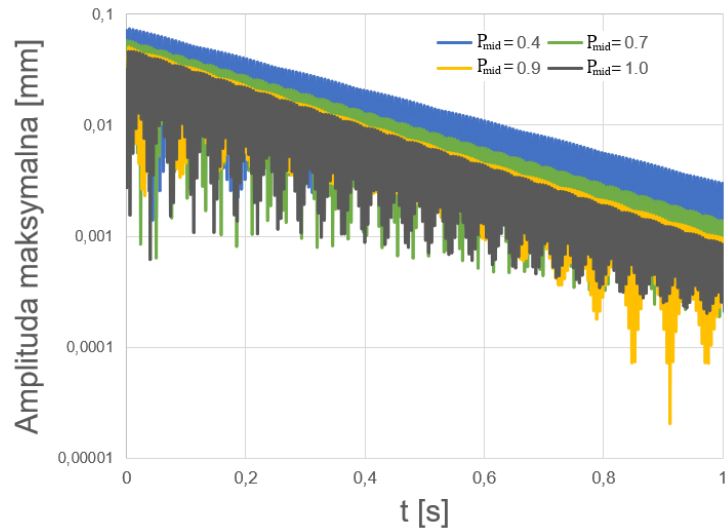
Rysunek 5.11: Amplituda przemieszczeń w kierunku pionowym w domenie częstotliwości.



Rysunek 5.12: Amplituda przyspieszeń w kierunku pionowym w domenie częstotliwości.



Rysunek 5.13: Przemieszczenie w kierunku pionowym dla struktur z komórkami nieauksetycznymi w domenie czasu.



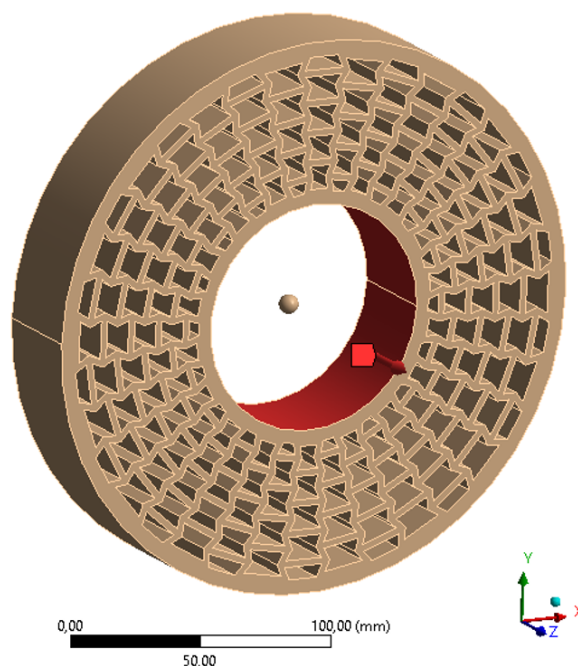
Rysunek 5.14: Przemieszczenie w kierunku pionowym dla struktur z komórkami auksetycznymi w domenie czasu.

## Rozdział 6

# Wyniki analizy działania siły wzdłużnej

### 6.1. Opis problemu

Drugą grupę symulacji stanowią symulacje zachowania struktur pierścieniowych w przypadku dynamicznego obciążenia siłą poziomą. Na rysunku 6.1 pokazano przykładową geometrię użytą w tych symulacjach. Opis generowania geometrii oraz parametry materiałowe zostały opisane w rozdziale 3. W węzłach leżących na powierzchni oznaczonej kolorem czerwonym, zadano warunek brzegowy obciążenia w postaci siły skierowanej równoległe do osi Z, którą oznaczono jako  $F_p$ .



Rysunek 6.1: Miejsce zadania warunku brzegowego w postaci obciążenia siłą skupioną  $F_p$ .

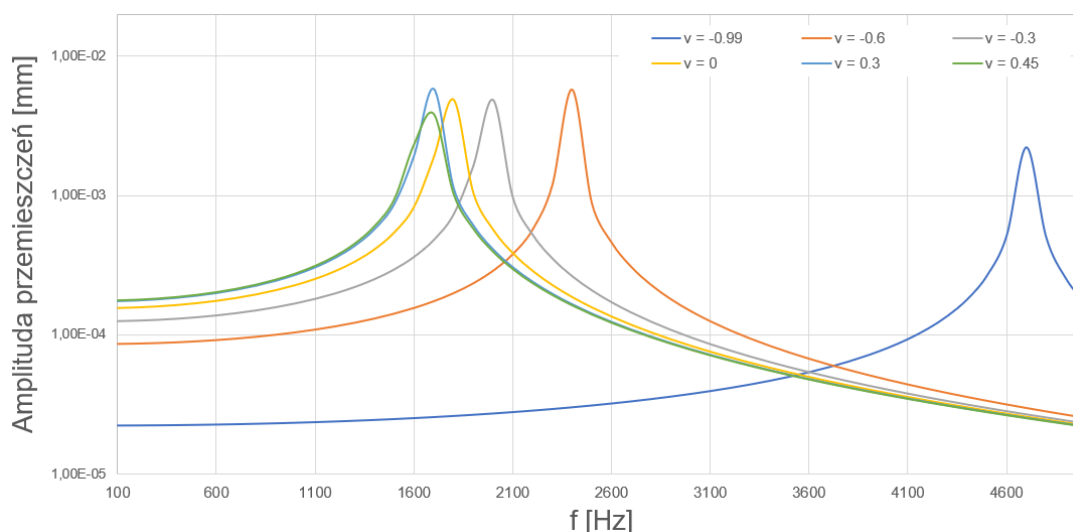
Wartość szczytowa siły i charakter jej oddziaływania  $F_p$  zależały od typu analizy. W analizie modalnej przyjęto  $F_p = 1000$  N, a charakter oddziaływania został opisany równaniem 3.48. W analizie przejściowej, wykorzystano działanie siły  $F_p$  do wywołania przemieszczenia początkowego węzłów należących do obciążonej płaszczyzny geometrii. Następnie, w chwili  $t = 0$  s następowała skokowe odję-

cie siły. W wyniku tego struktura zaczynała wykonywać oscylacje, aż do ich ustania. Celem uzyskania wartości przemieszczeń i przyspieszeń, stworzono wirtualną geometrię w postaci pojedynczego punktu, którą w formie kuli przedstawiono na rysunku 6.1.

## 6.2. Analiza pierścienia z jednorodnym wypełnieniem

Analogicznie do symulacji w rozdziale poprzednim, badano wpływ współczynnik Poissona na zachowanie struktury przy obciążeniu. Wykorzystano ponownie tę samą geometrię wariantu pierścieniowego z wybranymi współczynnikami Poissona  $\nu$ : 0.45, 0.3, 0.0,  $-0.3$ ,  $-0.6$ ,  $-0.99$ .

Pierwsza analiza polegała na oszacowaniu amplitudy przemieszczeń centralnego punktu w kierunku poziomym przy pomocy metody superpozycji modalnej w zakresie częstotliwości od 1 do 20 000 Hz. Dla przedstawionych wartości współczynnika Poissona, obliczono pierwszych 80 niezerowych wektorów drgań własnych. Wyniki przedstawiono na rysunku 6.2.

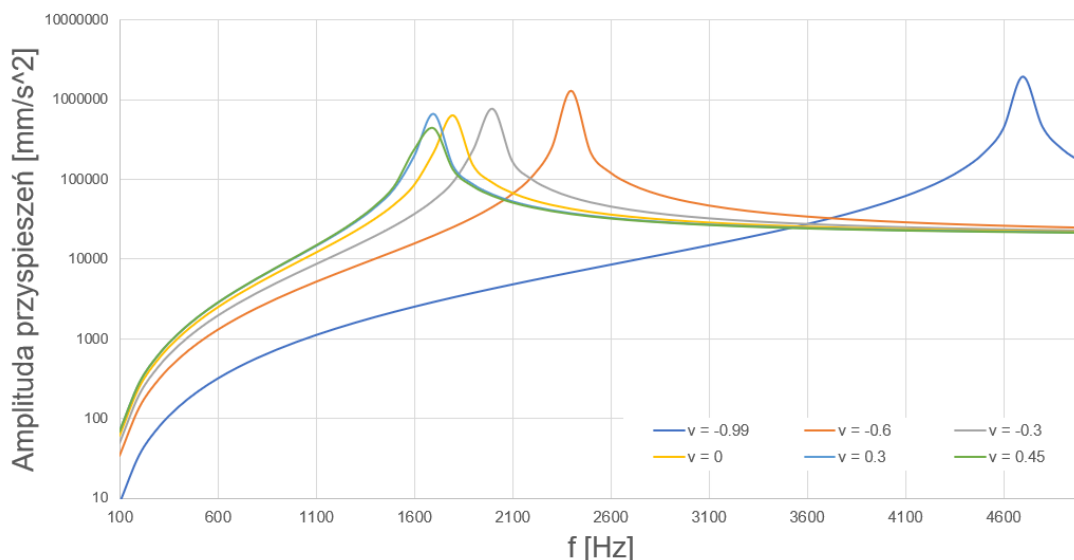


Rysunek 6.2: Amplituda przemieszczeń w kierunku poziomym w domenie częstotliwości.

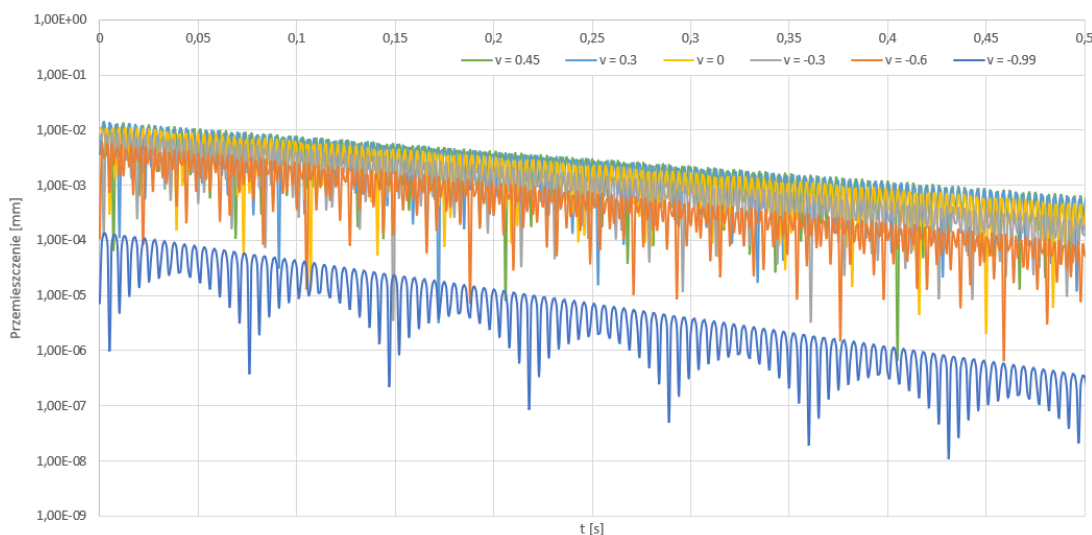
Wyniki przedstawiające amplitudę przyspieszeń przedstawiono na rysunku 6.3.

Druga analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 0.5 s. Krok czasowy był odbierany w sposób automatyczny przez program ANSYS. Wykorzystano tę samą metodę obliczeń jak w rozdziale 4. Wyniki przedstawiono na rysunku 6.3.

Jak można odczytać z wykresu 6.2, wartość amplitud była zbliżona, ale zauważalne jest przesunięcie wykresów dla materiałów z ujemnym współczynnikiem Poissona. Dla silnie ujemnych wartości, amplituda była znacząco niższa. Dane na wykresie 6.3 obrazują analogiczną zależność jak dla poprzedniego wykresu. Wyniki analizy przejściowej pokazują, że zmiana współczynnika na ujemny powoduje znacząco szybsze wygaszenie drgań oraz mniejsze amplitudy przemieszczeń w kierunku wzdłużnym.



Rysunek 6.3: Amplituda przyspieszeń w kierunku poziomym w domenie częstotliwości.



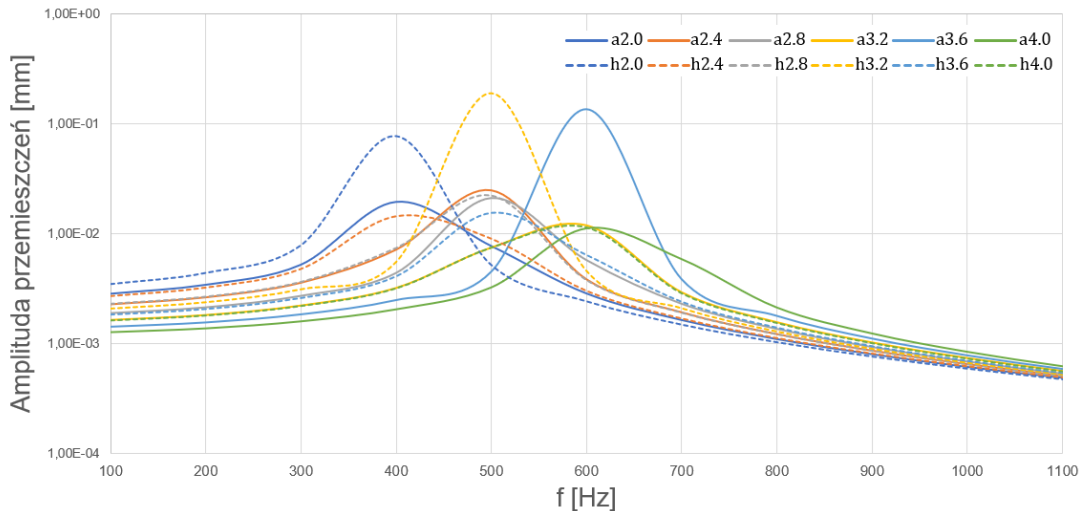
Rysunek 6.4: Amplituda przemieszczeń w domenie czasu.

### 6.3. Analiza wpływu szerokości żeber na odpowiedź struktury

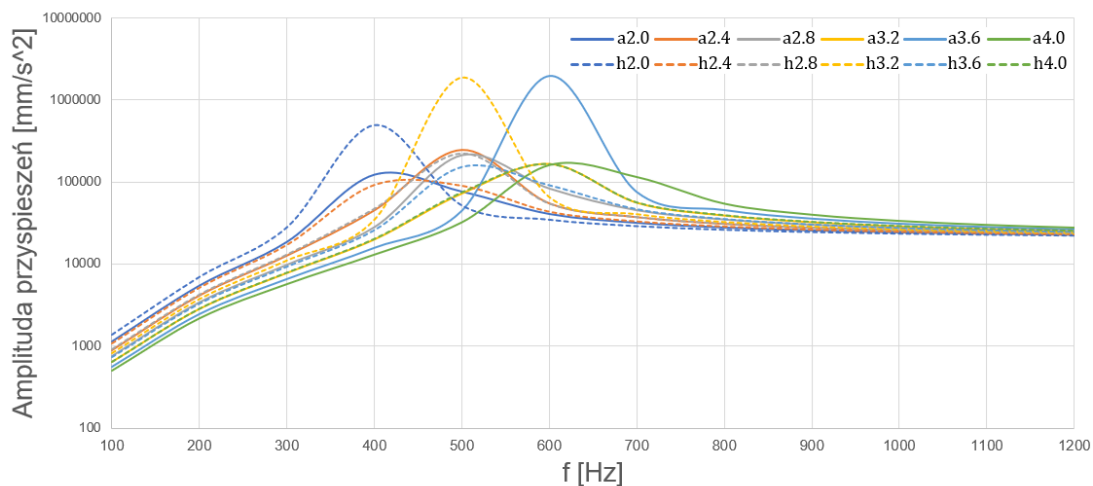
W tym wariancie symulacji, ponownie badano wpływ grubości żeber na odpowiedź dynamiczną układu. Wykorzystano wygenerowane wcześniej struktury, z określoną grubością żeber: 2.0 mm, 2.4 mm, 2.8 mm, 3.2 mm, 3.6 mm, 4.0 mm. Na prezentowanych niżej wykresach, linią przerywaną oraz literą  $h$  oznaczono wyniki dla struktur z komórkami w kształcie plastra miodu, a linią ciągłą oraz literą  $a$  struktury z komórkami typu re-entrant. Oznaczenie liczbowe obok litery oznacza grubość żebra w danej strukturze.

Podobnie jak w rozdziale poprzednim, zaczęto od analizy wyznaczającej amplitudę przemieszczeń centralnego punktu w kierunku poziomym. Zakres częstotliwości nie uległ zmian (obejmował wartości do 20 kHz). Wyniki znajdują się na rysunku 6.5.

Amplitudę przyspieszeń, dla poszczególnych struktur przedstawiono na rysunku 6.6.



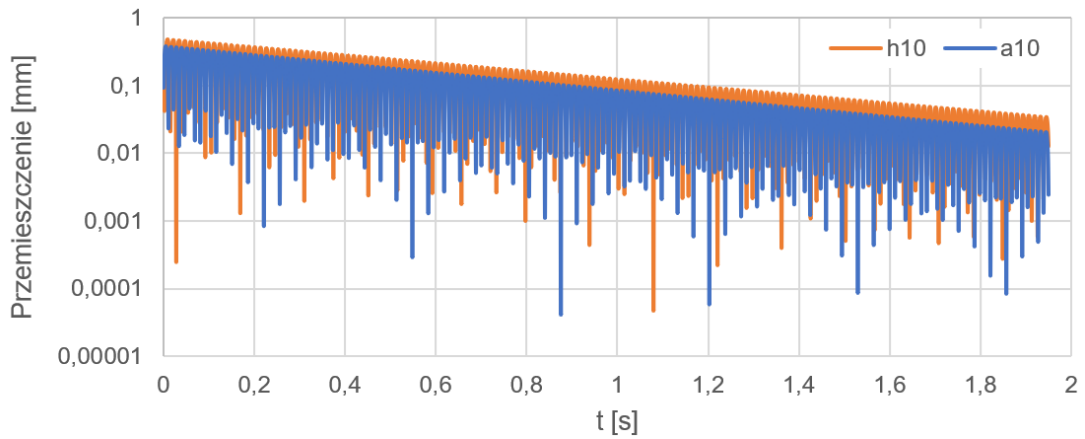
Rysunek 6.5: Amplituda przemieszczeń w kierunku poziomym w domenie częstotliwości.



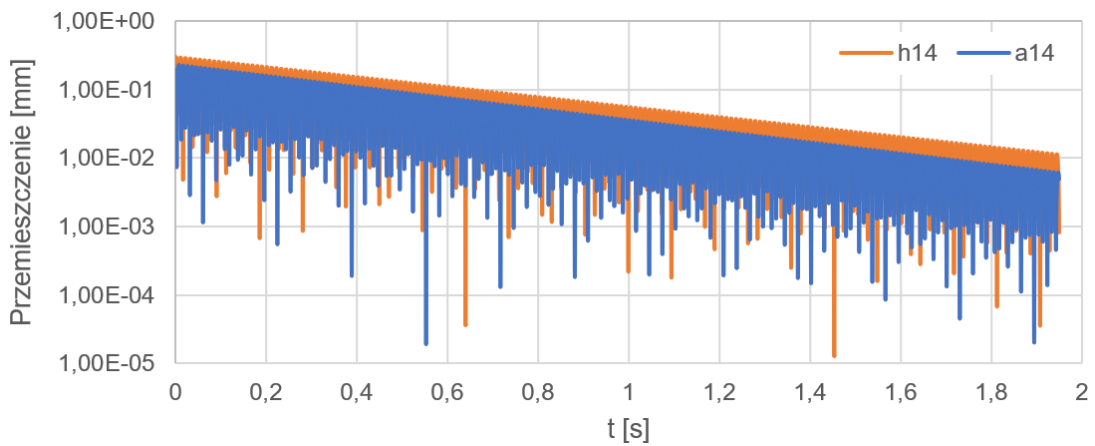
Rysunek 6.6: Amplituda przyspieszeń w kierunku poziomym w domenie częstotliwości.

Kolejna analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 2s, a krok czasowy był dobierany w sposób automatyczny. Wyniki przedstawiono na rysunkach 6.7 - 6.9. Kolorem niebieskim i literą *a* oznaczono struktury z komórkami w kształcie re-entrant, a kolorem pomarańczowym i literą *h* struktury z komórkami w kształcie plastra miodu. Wartość liczbową przy literze oznacza wartość zmiennej *Offset*.

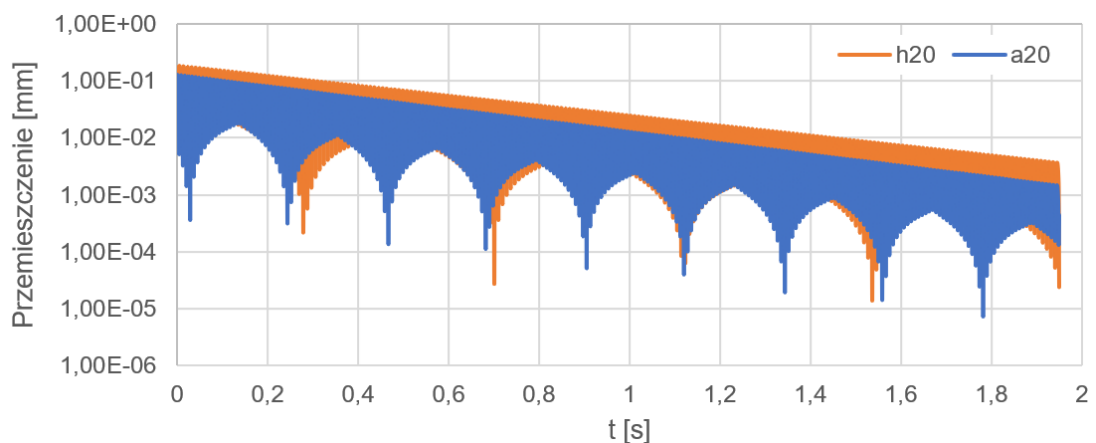
Z wykresu 6.5 wynika, że największa różnica amplitud występuje dla pary struktur o grubości ścianek 3.2 mm. W tym przypadku, struktura z elementami re-entrant wykazuje niższą wartość amplitudy niż struktura plastra miodu. Analogiczną zależność można zaobserwować na wykresie 6.6. Analiza przejściowa również wykazała, że struktury z komórkami re-entrant wykazują niższe wartości amplitudy i krótszy czas zaniku drgań.



Rysunek 6.7: Przemieszczenie w kierunku poziomym dla struktur z grubością ścianki 2 mm w dziedzinie czasu.



Rysunek 6.8: Przemieszczenie w kierunku poziomym dla struktur z grubością ścianki 2.8 mm w dziedzinie czasu.

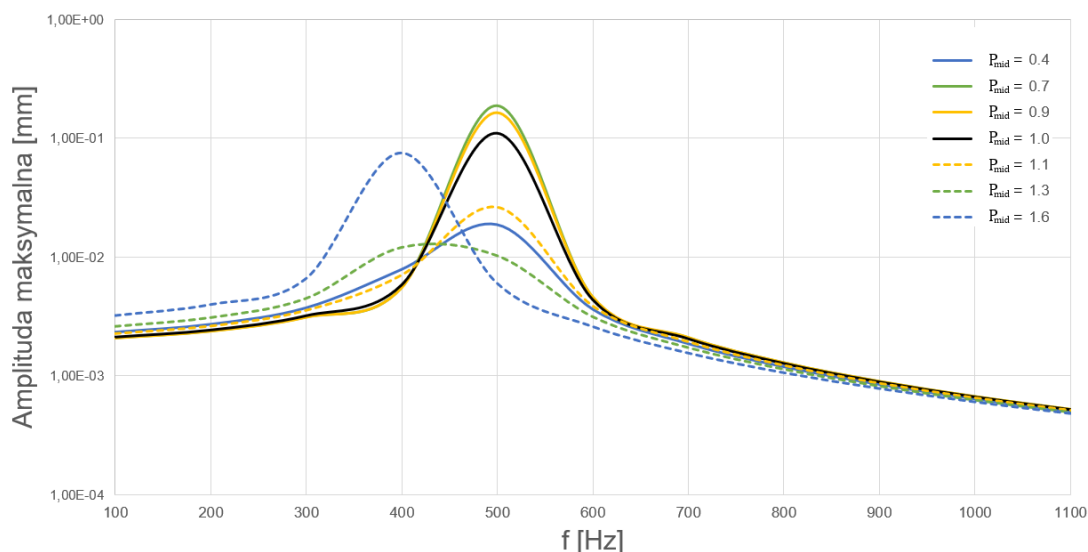


Rysunek 6.9: Przemieszczenie w kierunku poziomym dla struktur z grubością ścianki 4.0 mm w dziedzinie czasu.

## 6.4. Analiza wpływu kształtu komórek na odpowiedź struktury

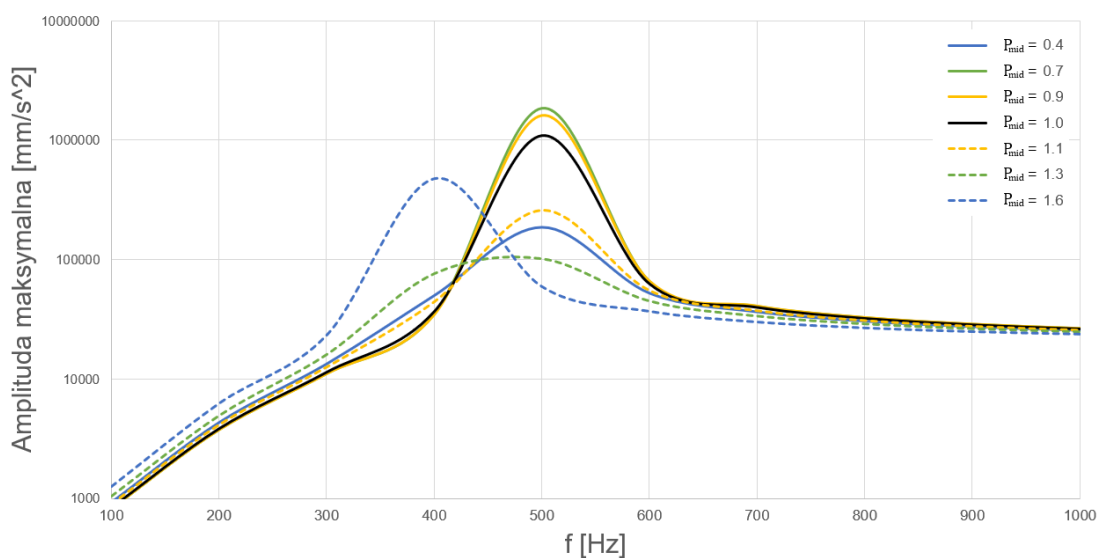
Analogicznie jak w poprzednim rozdziale, w trzecim wariantcie symulacji zmianie ulegały współrzędne poziome środkowych wierzchołków komórki elementarnej. Wykorzystano wygenerowane wcześniej struktury. Łącznie przebadano ich siedem: trzy z komórkami w kształcie sześciokąta, trzy struktury z komórkami w kształcie re-entrant oraz jedną z komórkami w kształcie czworokąta.

Pierwsza analiza została przeprowadzona przy pomocy metody superpozycji modalnej, przy częstotliwościach do 20 000 Hz. Wyniki przedstawiono na rysunku 6.10.



Rysunek 6.10: Amplituda przemieszczeń w kierunku poziomym w domenie częstotliwości.

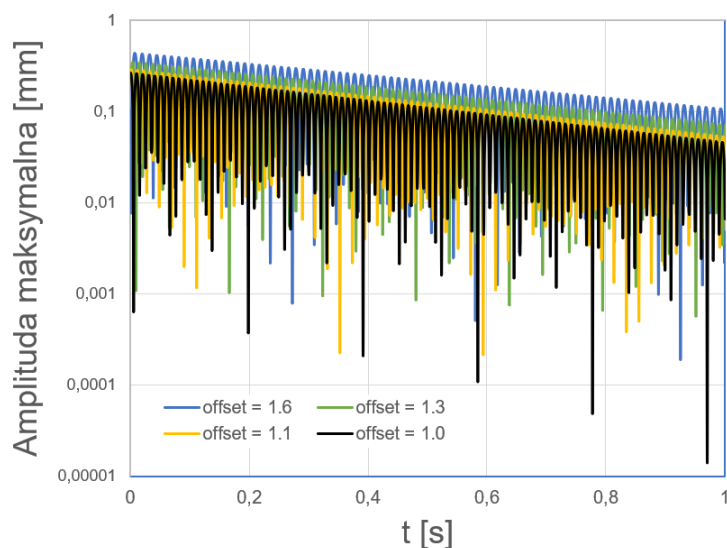
Podobnie obliczono amplitudę przyspieszeń. Wyniki przedstawiono na rysunku 6.11.



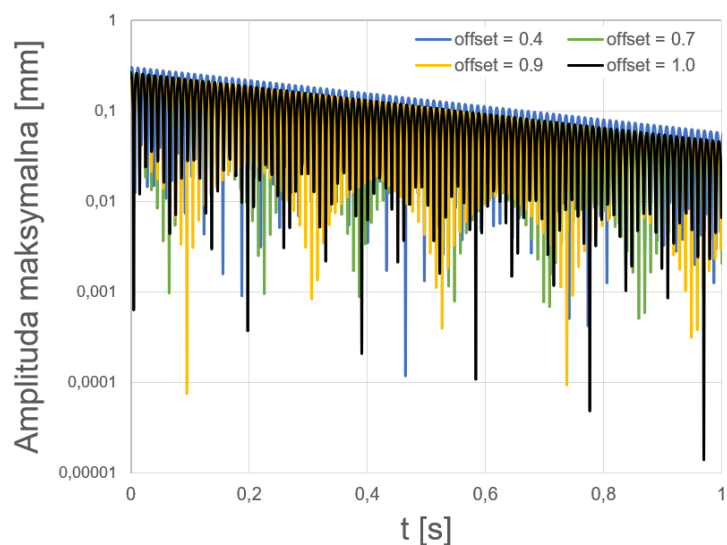
Rysunek 6.11: Amplituda przyspieszeń w kierunku poziomym w domenie częstotliwości.



Kolejna analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 1s. Wyniki przedstawiono na rysunkach 6.12 - 6.13. Tak jak w poprzedniej analizie, oznaczenia krzywych zawierają liczbę, która stanowi wartość parametru  $Point_{mid}$  dla danej struktury.



Rysunek 6.12: Przemieszczenie w kierunku poziomym dla struktur z komórkami nieauksetycznymi w domenie czasu.



Rysunek 6.13: Przemieszczenie w kierunku poziomym dla struktur z komórkami auksetycznymi w domenie czasu.

Z wykresu 6.10 można odczytać, że prawie wszystkie struktury posiadające komórki w kształcie re-entrant wykazały wyższą amplitudę drgań niż struktury z komórkami o kształcie plastra miodu. Analogicznie wygląda wykres 6.11. Struktura z komórkami re-entrant (wartość parametru  $Point_{mid} = 0.4$ , wykazała mniejszą amplitudę drgań, niż struktura odwrotna. Analiza przejściowa wykazała, że w przypadku struktur z komórkami typu re-entrant, szybciej maleją amplitudy drgań i mają niższe wartości.

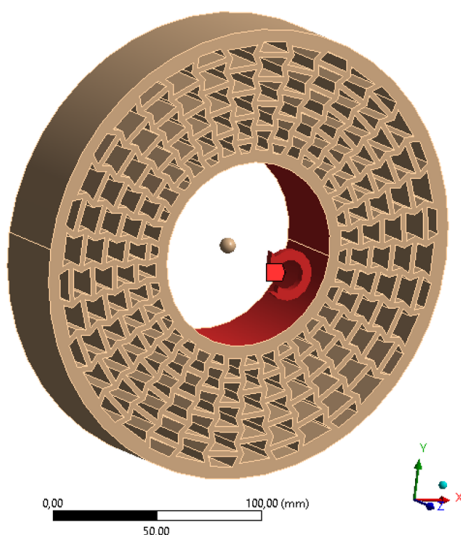


## Rozdział 7

# Wyniki analizy działania momentu obrotowego

### 7.1. Opis problemu

Trzecią grupę symulacji stanowią symulacje zachowania struktur pierścieniowych w przypadku dynamicznego obciążenia momentem skręcającym. Rysunek 7.1 pokazuje przykładową geometrię użytą w tej grupie symulacji. parametry materiałowe oraz opis generowania geometrii zostały przedstawione w poprzednich rozdziałach. Zadano warunek brzegowy w węzłach leżących na powierzchni oznaczonej kolorem czerwonym. Miał on postać obciążenia momentem skręcającym, a oś obrotu pokrywała się z osią  $Z$ , moment oznaczono jako  $M$ .



Rysunek 7.1: Miejsce zadania warunku brzegowego w postaci obciążenia momentem  $M$ .

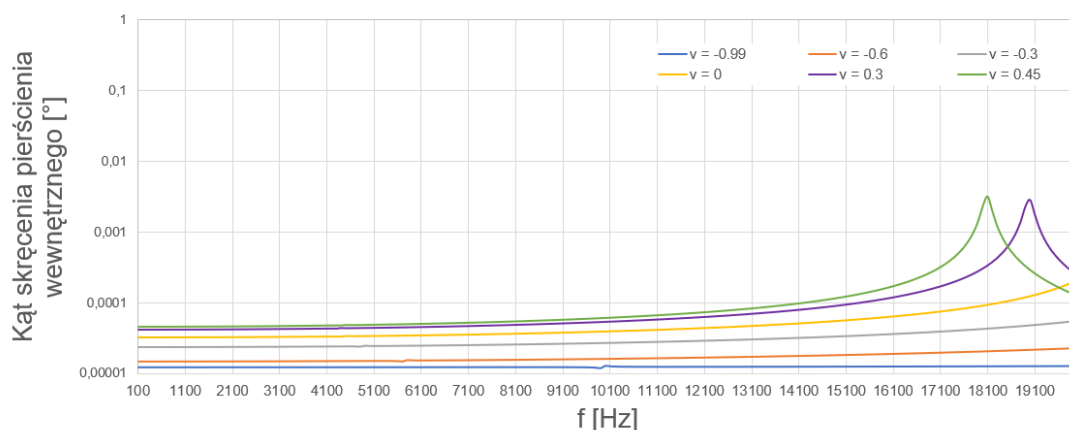
Wartość szczytowa momentu i charakter jego oddziaływania  $M$  zależały od typu analizy. W analizie modalnej przyjęto  $M = 100 \text{ Nm}$ , a charakter oddziaływania wyrażono wzorem 3.48. W analizie przejściowej, wykorzystano działanie momentu obrotowego  $M$  do wywołania przemieszczenia począt-

kowego węzłów należących do obciążonej płaszczyzny geometrii, który skokowo odjęto w chwili  $t = 0$  s. W wyniku tego struktura zaczynała wykonywać oscylacje, aż do ich ustania. Celem uzyskania wartości przemieszczeń i przyspieszeń, stworzono wirtualną geometrię w postaci pojedynczego punktu będącego wirtualnie połączonym z węzłami siatki elementów skończonych, którą w formie kuli przedstawiono na rysunku 7.1.

## 7.2. Analiza pierścienia z jednorodnym wypełnieniem

W pierwszym wariantcie symulacji, badano wpływ współczynnik Poissona na zachowanie struktury przy obciążeniu. Wykorzystano ponownie tę samą geometrię wariantu pierścieniowego z wybranymi współczynnikami Poissona  $\nu$ : 0.45, 0.3, 0.0,  $-0.3$ ,  $-0.6$ ,  $-0.99$ .

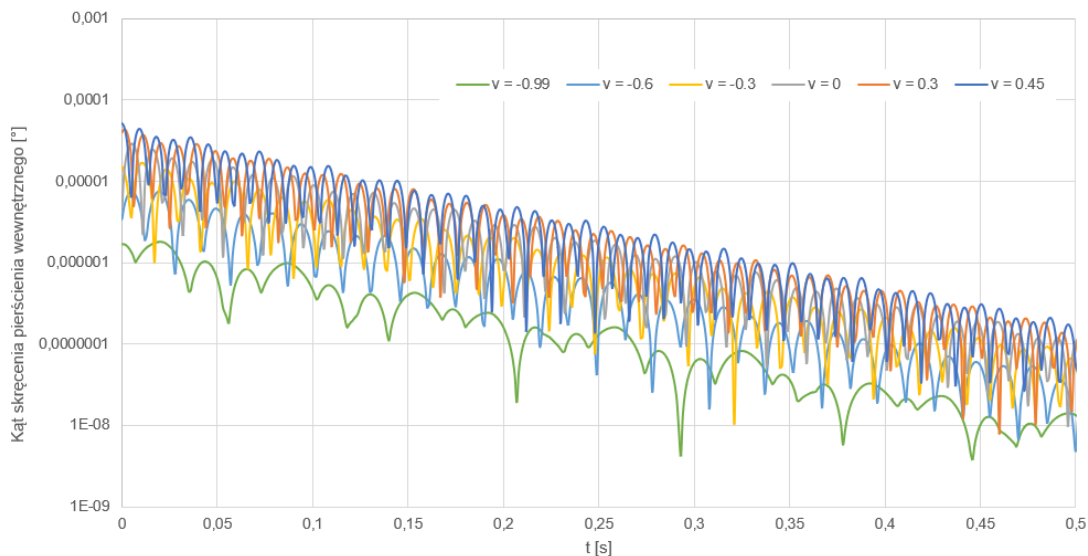
Pierwsza analiza polegała na oszacowaniu amplitudy rotacji centralnego punktu wokół osi Z przy pomocy metody superpozycji modalnej w zakresie częstotliwości od 1 do 20 000 Hz. Dla każdej struktury, z różnymi wartościami współczynnika Poissona, obliczono pierwszych 80 niezerowych wektorów drgań własnych. Wyniki przedstawiono na rysunku 7.2.



Rysunek 7.2: Amplituda kąta rotacji wokół osi Z w domenie częstotliwości.

Druga analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 0.5 s. Krok czasowy był odbierany w sposób automatyczny przez program ANSYS. Wykorzystano niejawną całkowanie równań ruchu ze względu na umiarkowane prędkości odkształceń. Wyniki przedstawiono na rysunku 7.3.

Jak można odczytać z wykresu 7.2, częstotliwości własne struktur z ujemnym współczynnikiem Poissona były poza założonym zakresem częstotliwości. Porównując wartości amplitud, można jednak zauważyć przesunięcie wykresów dla materiałów z ujemnym współczynnikiem Poissona. Dla silnie ujemnych wartości, amplituda była znacząco niższa. Dane na wykresie 7.3 pokazują, że zmiana współczynnika na ujemny powoduje znacząco szybsze wygaszenie drgań oraz mniejsze amplitudy przemieszczeń. Ponadto, charakter drgań jest mniej zmienny.

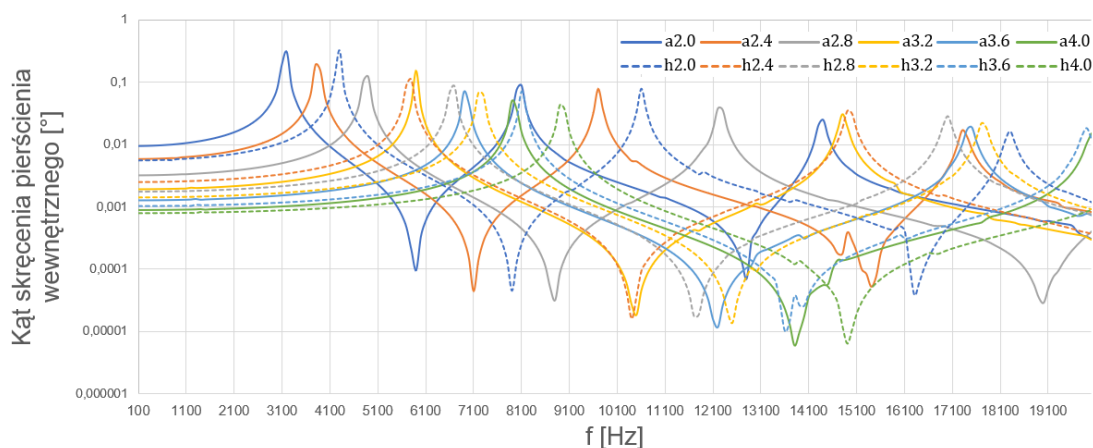


Rysunek 7.3: Amplituda kąta rotacji wokół osi Z w domenie czasu.

### 7.3. Analiza wpływu szerokości żeber na odpowiedź struktury

W tym wariantcie symulacji, ponownie zbadano wpływ szerokości żeber na odpowiedź dynamiczną układu. Wykorzystano wygenerowane wcześniej struktury, z określoną grubością żeber: 2.0 mm, 2.4 mm, 2.8 mm, 3.2 mm, 3.6 mm, 4.0 mm. Na prezentowanych niżej wykresach, linią przerywaną oraz literą  $h$  oznaczono wyniki dla struktur z komórkami w kształcie plastra miodu, a linią ciągłą oraz literą  $a$  struktury z komórkami typu re-entrant. Oznaczenie liczbowe obok litery oznacza grubość żebra w danej strukturze.

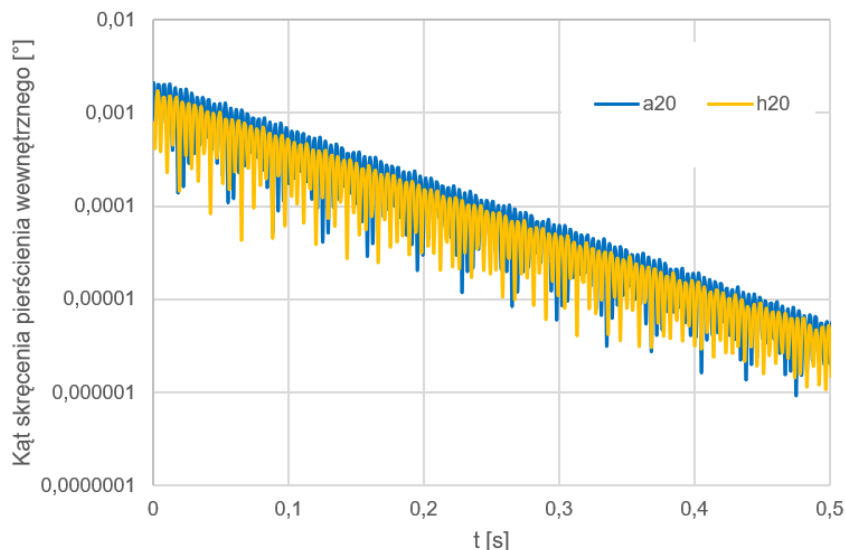
Podobnie jak w poprzedniej symulacji, zaczęto od analizy wyznaczającej amplitudę kąta skręcenia pierścienia wewnętrznego wokół osi Z. Zakres częstotliwości nie uległ zmian (obejmował wartości od 1 do 20 000 Hz). Wyniki znajdują się na rysunku 7.4.



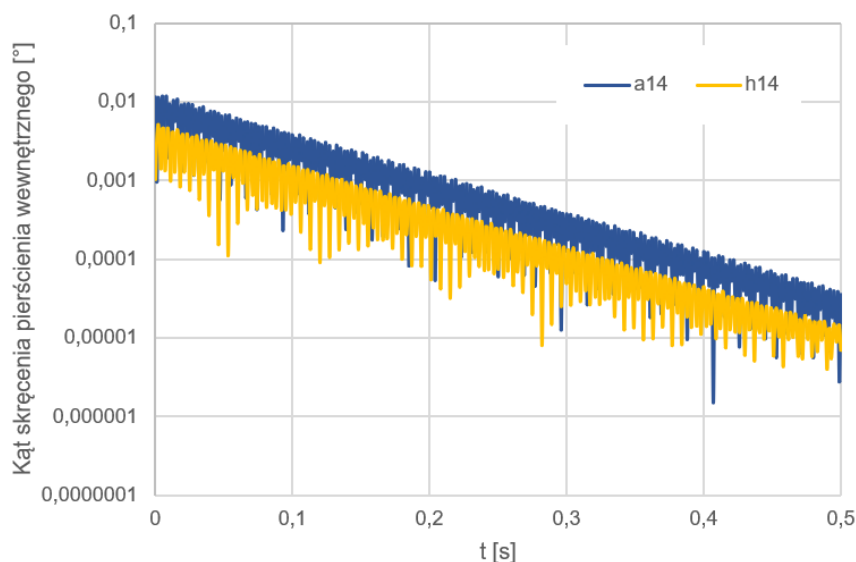
Rysunek 7.4: Amplituda przemieszczeń w domenie czasu.

Kolejna analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 0.5s, a krok czasowy był dobierany w sposób automatyczny. Wyniki przedstawiono na rysunkach 7.5 i 7.6. Kolorem niebie-

skim i literą  $a$  oznaczono struktury z komórkami w kształcie re-entrant, a kolorem pomarańczowym i literą  $h$  struktury z komórkami w kształcie plastra miodu. Wartość liczbową przy literze oznacza wartość zmiennej  $Offset$ .



Rysunek 7.5: Amplituda kąta skręcenia pierścienia wewnętrznego w czasie dla struktur z komórkami o grubości ścianki 4.0 mm w domenie czasu.



Rysunek 7.6: Amplituda kąta skręcenia pierścienia wewnętrznego w czasie dla struktur z komórkami o grubości ścianki 2.8 mm w domenie czasu

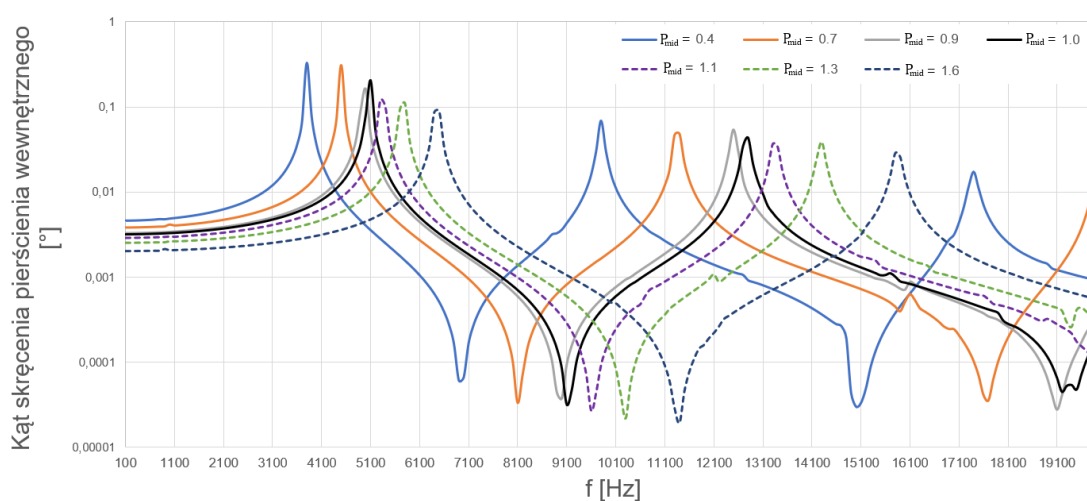
Z wykresu 7.4 można odczytać, że dla najmniejszej grubości ścianek (tj. 2.0 mm) amplituda kąta obrotu jest mniejsza w przypadku struktury z komórkami o kształcie re-entrant. Dla pozostałych par struktur, niezależnie od grubości ścianek, struktury z komórkami w kształcie plastra miodu wykazywały mniejsze kąty skręcenia niż struktury typu re-entrant. Analiza przejściowa, której wyniki pokazano na

wykresach 7.5 oraz 7.6, pokazała, że struktury z komórkami re-entrant wykazują wyższe wartości amplitudy i dłuższy czas zaniku drgań w porównaniu z drugim rodzajem struktur.

#### 7.4. Analiza wpływu kształtu komórek na odpowiedź struktury

Analogicznie jak w poprzednim rozdziale, w trzecim wariantcie symulacji zmianie ulegały współrzędne poziome środkowych wierzchołków komórki elementarnej, przy czym wygenerowane wcześniej struktury. Łącznie przebadano ich siedem: trzy z komórkami w kształcie sześciokąta, trzy struktury z komórkami w kształcie re-entrant oraz jedną z komórkami w kształcie czworokąta.

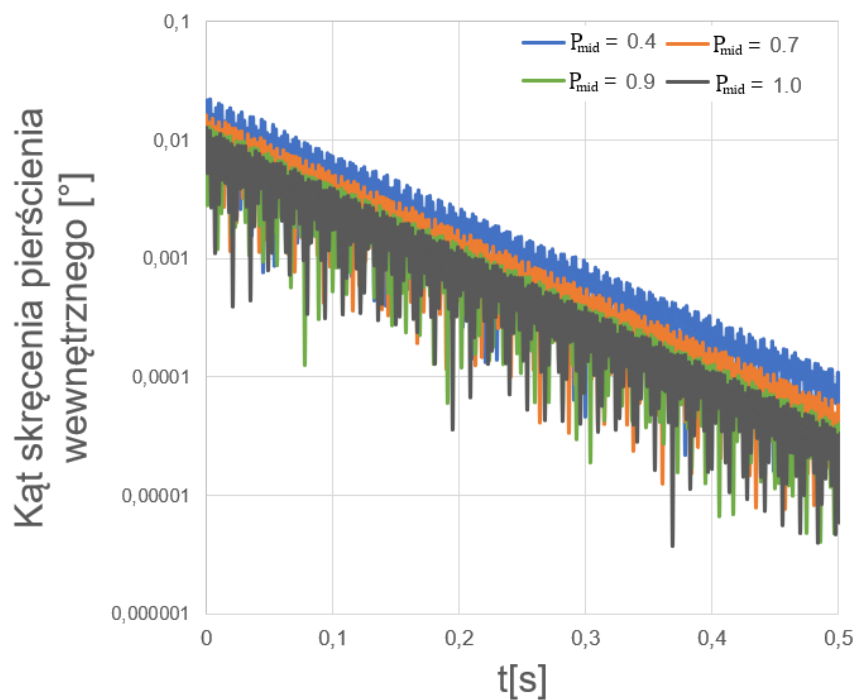
Pierwsza analiza została przeprowadzona przy pomocy metody superpozycji modalnej, przy częstotliwościach do 20 000 Hz. Wyniki przedstawiono na rysunku 7.7.



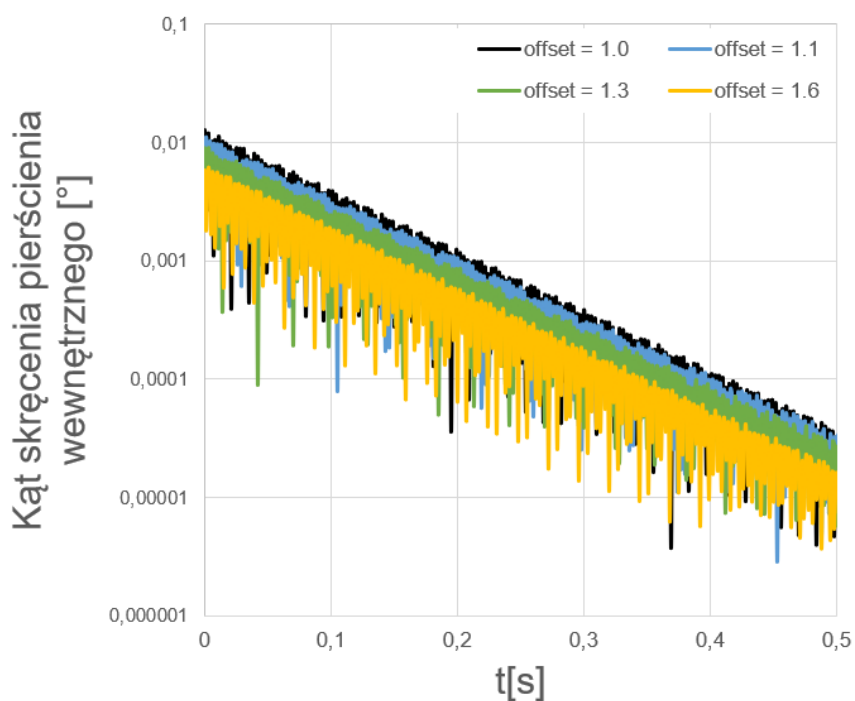
Rysunek 7.7: Amplituda kąta rotacji wokół osi Z w domenie częstotliwości.

Kolejna analiza miała charakter przejściowy. Czas symulacji wynosił od 0 do 0,5 s. Wyniki przedstawiono na rysunkach. Tak jak w poprzedniej analizie, oznaczenia krzywych zawierają liczbę, która stanowi wartość parametru  $Point_{mid}$  dla danej struktury. Wybrane wyniki pokazano na rysunkach 7.8 - 7.9.

Wykres 7.7 pokazuje, że amplituda kąta skręcenia była wyższa dla wszystkich struktur auksetycznych, niż dla struktur z komórkami elementarnymi w kształcie zmodyfikowanego plastra miodu. Przyjmując wartości uzyskane dla struktury o czworokątnym kształcie komórki elementarnej (wartość parametru  $Point_{mid} = 1.0$ ) jako odniesienie pomiędzy wykresami 7.8 - 7.9, można zauważyć, że wszystkie struktury posiadające komórki w kształcie re-entrant wykazały wyższą amplitudę drgań skrętnych niż struktury z komórkami o kształcie plastra miodu.



Rysunek 7.8: Amplituda kąta kręcenia pierścienia wewnętrznego w czasie dla struktur z komórkami auksetycznymi w domenie czasu.



Rysunek 7.9: Amplituda kąta skręcenia pierścienia wewnętrznego w czasie dla struktur z komórkami sześciokątnymi w domenie czasu.

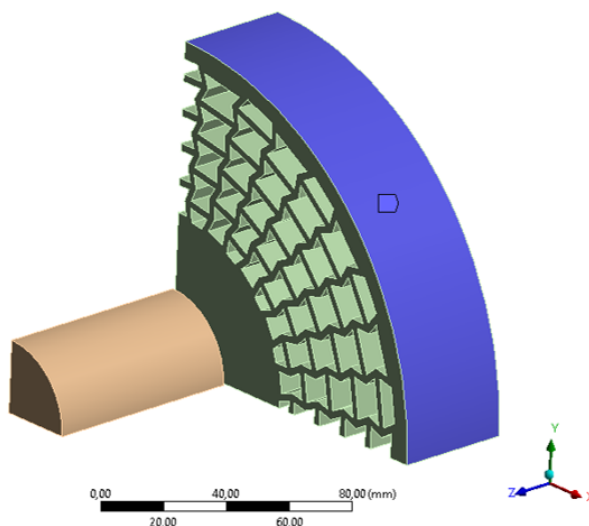


## Rozdział 8

# Wyniki analizy uderzenia pocisku

### 8.1. Opis problemu

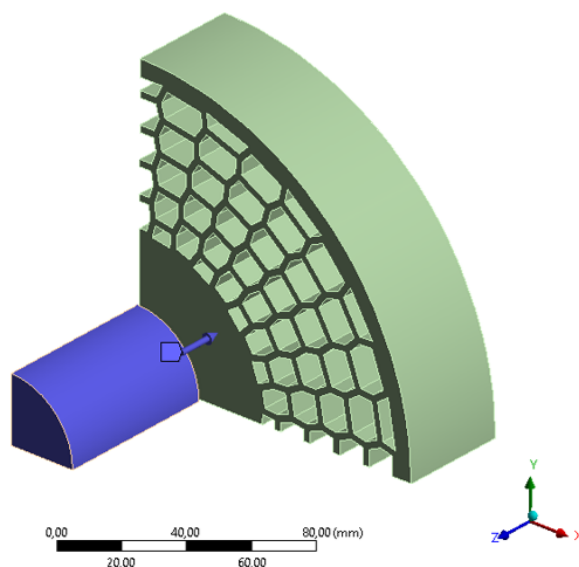
Ostatnią przeprowadzoną analizą była symulacja uderzenia w strukturę walca stalowego reprezentującego pocisk. Celem było ustalenie odpowiedzi struktury na wymuszenie impulsowe. Na rysunku 8.1 pokazano przykładową geometrię użytą w symulacji. Widoczna jest tylko 1/4 całej geometrii, celem zwiększenia czytelności rysunku. Układ komórek elementarnych został uzyskany z algorytmu opisanego w rozdziale 3. Zasadniczą różnicą jest brak otworu centralnego - ta część geometrii została wypełniona materiałem. Kolorem niebieskim pokazano powierzchnię na której założono warunek brzegowy w postaci całkowitego utwierdzenia węzłów siatki elementów skończonych.



Rysunek 8.1: Miejsce zadania warunku brzegowego w postaci całkowitego utwierdzenia brzegu dysku.

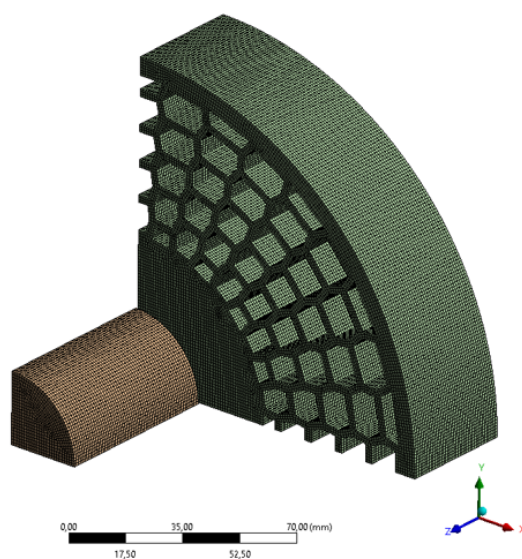
Na kolejnym rysunku 8.2 kolorem niebieskim zaznaczono bryłę walca. W całej objętości, dla każdego węzła należącego do domeny obliczeniowej, zdefiniowano warunek początkowy w postaci prędkości  $v$ . Przyjęto w sposób arbitralny wartość 100 m/s. Organicznie ilość stopni swobody walca do jednego - godnego z kierunkiem uderzenia. Wymiary walca to odpowiednio: średnica  $\phi = 50$  mm i długość  $L = 70$

mm. Dla walca, przyjęto liniowy model aluminium opisany w rozdziale 3. Ze względu na wielokrotnie wyższą sztywność walca, zdecydowano o wyłączeniu obliczeń naprężeń w tej domenie. Takie działanie pozwoliło znacząco przyspieszyć czas obliczeń, bez utraty poszukiwanych informacji (tj. odkształceń struktury będącej celem).

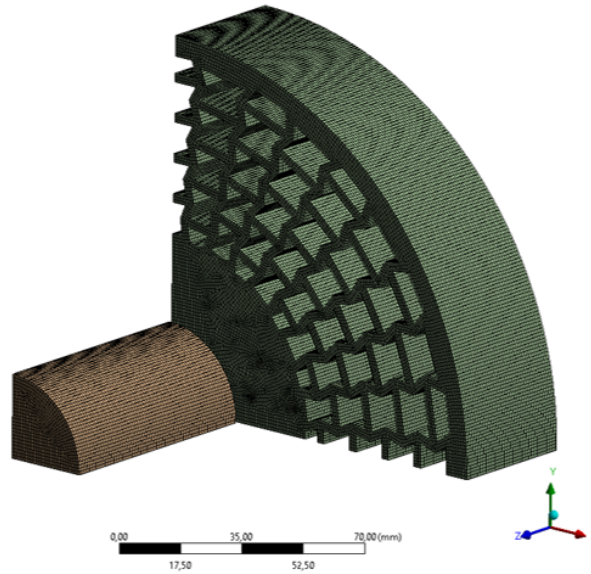


Rysunek 8.2: Zobrazowanie założonych warunków początkowych dotyczących prędkości początkowej walca.

Dla struktury przyjęto materiał nieliniowy, zdefiniowany według modelu *neo-Hookean*, opisanego szerzej w rozdziale 3. Fragmenty siatek elementów skończonych zastosowanych w tej symulacji, przedstawiono na rysunkach 8.3-8.3. Każda ze sfinalizowanych siatek dysku zawierała ok. 250 000 elementów skończonych typu HEX8, a walec ok. 10 000 elementów typu HEX8.



Rysunek 8.3: Siatka elementów skończonych dla struktury z komórkami sześciokątnymi.



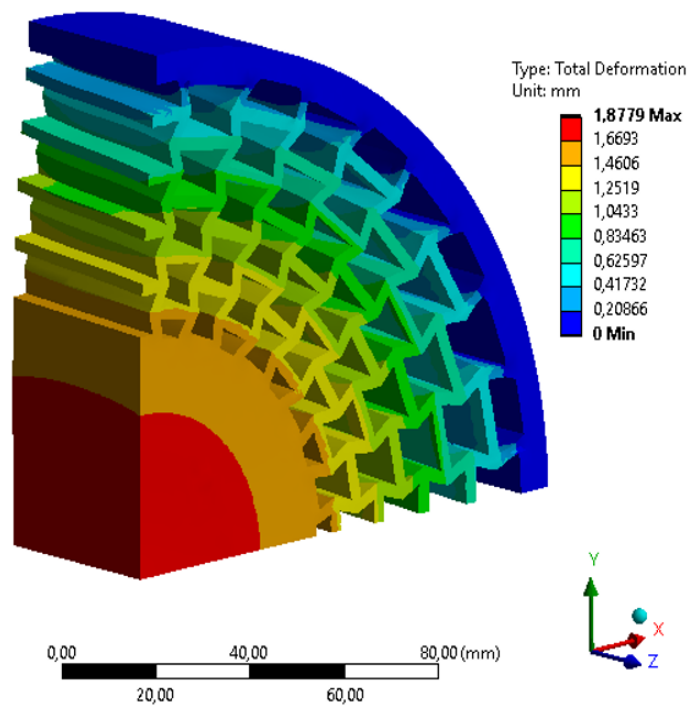
Rysunek 8.4: Siatka elementów skończonych dla struktury z komórkami re-entrant

Analizy przeprowadzono przy wykorzystaniu procedury dynamicznej z jawnym całkowaniem równań ruchu, z uwzględnieniem nieliniowości materiału. Całkowity czas symulacji wynosił 0,1 ms.

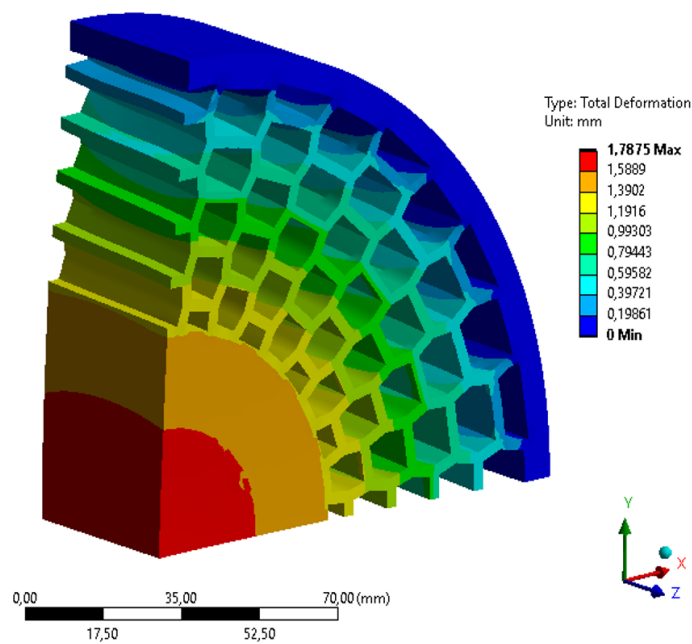
## 8.2. Wyniki symulacji

Wyniki przedstawiające odkształcenie struktury z komórkami w kształcie re-entrant przedstawiono na rysunku 8.5, a wyniki dla struktury w kształcie plastra miodu znajdują się na kolejnym rysunku 8.6. Należy zwrócić uwagę, że nie nastąpiło przerwanie ciągłości struktury. Analogicznie do poprzednich rysunków, tylko 1/4 geometrii jest widoczna.

Bezpośrednio z wykresu można odczytać, że struktura z komórkami re-entrant odkształciła się w większym stopniu niż druga struktura. Dokonując prostych obliczeń, można wyznaczyć energię kinetyczną walca w momencie uderzenia. Wyniosła ona  $E_k = 1800$  J. W programie ANSYS stworzono wirtualną sondę pomiarową, która pozwoliła odczytać wartości prędkości walca po odbiciu. Dla struktury z komórkami w kształcie plastra miodu wyniosła ona  $v_{hex} = 42,9$  m/s, a dla drugiej struktury  $v_{aux} = 38,7$  m/s. Obliczając energię kinetyczną walca po odbiciu, otrzymano odpowiednio:  $E_{hex} = 994$  J oraz  $E_{aux} = 809$  J. Oznacza to, że struktura auksetyczna, przy większym odkształceniu, zaabsorbowała o 185 J więcej energii uderzenia.



Rysunek 8.5: Przemieszczenie elementów dysku z komórkami w kształcie re-entrant.



Rysunek 8.6: Przemieszczenie elementów dysku z komórkami w kształcie sześciokątnym.

## Rozdział 9

# Wnioski i podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono badania pierścieniowych struktur auksetycznych w trzech podstawowych wariantach obciążeń: siłą pionową, wzdłużną i momentem. Sprawdzono wpływ zmian wartości współczynnika Poissona, kształtu komórki elementarnej oraz grubości żeber struktury na odpowiedź układu na opisane wymuszenia zewnętrzne.

W rozdziale piątym przeprowadzono analizę oddziaływania siły pionowej na różne struktury pierścieniowe. Wykazano, że zmiana współczynnika Poissona na bardziej ujemny dla jednorodnego wypełnienia skutkuje uzyskaniem niższej wartości amplitudy drgań przy tej samej częstotliwości niż dla wypełnień o dodatnich współczynnikach. Udowodniono, że dla pewnych wartości grubości żeber, struktury z komórkami w kształcie re-entrant wykazują globalnie niższe amplitudy drgań własnych, a zawsze zmiana grubości powoduje zmianę częstości własnej. Analogiczne zachowanie obserwuje się przy analizie przejściowej. Dowiedziono, że zmiana kształtu komórki elementarnej na re-entrant powoduje obniżenie amplitud drgań oraz redukuje czas wygaszenia drgań.

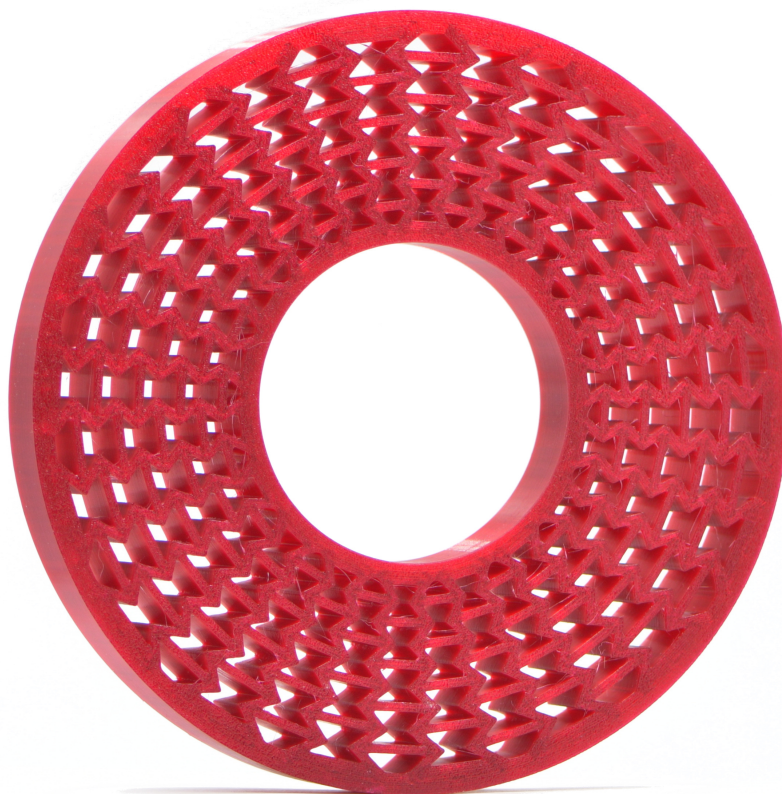
Przedstawione w rozdziale szóstym badania miały na celu poznanie zachowania struktur przy obciążeniu siłą wzdłużną. Dla wariantu z jednorodnym wypełnieniem udowodniono, że wartość amplitud była zbliżona dla obu rodzajów struktur, jednak zauważalne było poniesienie częstości własnej obiektu wraz ze spadkiem wartości współczynnika Poissona. Wyniki analizy przejściowej pokazały, że zmiana współczynnika na ujemny powoduje znacząco szybsze wygaszenie drgań oraz mniejsze amplitudy przemieszczeń w kierunku wzdłużnym. W kolejnym wariancie, gdzie analizie podlegał wpływ grubości żebra na odpowiedź układu, struktura z elementami re-entrant wykazała niższą wartość amplitudy niż struktura plastra miodu. Analizy przejściowe wykazały, że struktury z komórkami re-entrant wykazują niższe wartości amplitudy i krótszy czas zaniku drgań.

Rozdział siódmy opisuje przeprowadzone analizy odpowiedzi struktur pierścieniowych na wymuszenia zewnętrzne w postaci momentu siły. W wariancie jednorodnego wypełnienia wykazano, że dla silnie ujemnych wartości współczynnika Poissona, amplituda była znacząco niższa, a częstość rezonansowa była poza badanym zakresem. W analizie przejściowej wykazano, że im niższy współczynnik Poissona dla materiału wypełnienia, tym szybciej następuje wygaszenie drgań skrętnych i charakteryzują się one niższą amplitudą. Kolejne symulacje na za modelowanych strukturach wykazały, że struktury auksetyczne przeważnie wykazywały niższą zdolność do tłumienia drgań skrętnych.

Badania opisane w rozdziale ósmym polegały na zbadaniu zachowania struktury pierścieniowej przy uderzeniu. Wykazano, że struktury z komórkami w kształcie re-entrant są bardziej podatne od struktur w kształcie plastra miodu, jednak absorbują większą ilość energii uderzenia.

Wyniki uzyskane z przeprowadzonych symulacji udowadniają, że teza postawiona we wstępie pracy jest prawdziwa. Struktury pierścieniowe z komórkami re-entrant wykazują lepsze właściwości tłumiące drgania różnego typu niż struktury z komórkami w kształcie plastra miodu, ale tylko w określonych konfiguracjach. Drugi wniosek ogólny, można sformułować w odniesieniu do zdolności absorpcji energii mechanicznej: struktury auksetyczne wykazują wyższe zdolności odbierania energii uderzenia niż struktury z komórkami o kształcie sześciokąta foremego.

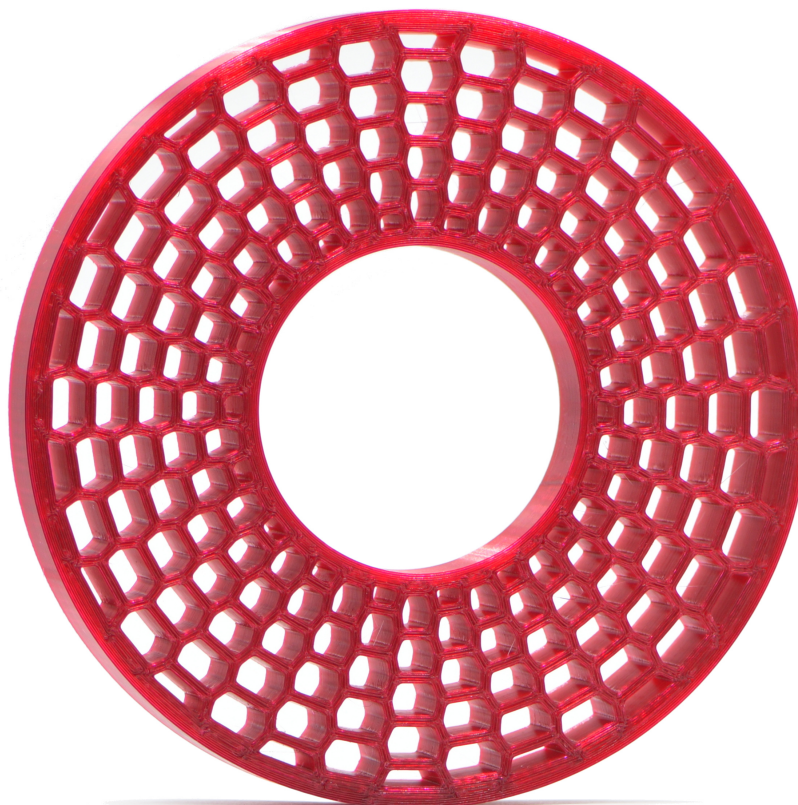
Celem weryfikacji możliwości wykonania opisywanych struktur zastosowano metodę druku przestrzennego z tworzyw termoplastycznych. Uzyskane obiekty przedstawiono na rysunkach 9.1 i 9.2.



Rysunek 9.1: Model opracowanej struktury wykonany technikami przyrostowymi

Ze względu na krótki czas który upłynął od opracowania pierwszych struktur akustycznych, jest to tematyka nowa, wciąż w pełni nie poznana. Przedstawione w niniejszej pracy wyniki obliczeń metodami elementów skończonych należy traktować jako badania wstępne unikalnych struktur o budowie pierścieniowej. Dalsze badania nie tylko są możliwe, ale wydają się konieczne, aby w pełni poznać właściwości i ograniczenia struktur tego rodzaju. Z możliwych dalszych kierunków badań, zdaniem autora, należy wskazać: badania przy złożonym stanie obciążeń zewnętrznych, wytrzymałościowe badania eksperymentalne z wykorzystaniem struktur wykonanych różnymi metodami (na przykład przedstawione





Rysunek 9.2: Model opracowanej struktury wykonany technikami przyrostowymi

wcześniej na rysunkach 9.1 i 9.2), zbadanie struktur ze zmienionym kształtem komórek elementarnych oraz dynamiczne badania odporności na przebicie przy dużych prędkościach odkształceń.

Wykazany potencjał struktur akustycznych może znaleźć zastosowanie w szerokim spektrum dziedzin inżynierii mechanicznej. Zaproponowane struktury pierścieniowe i podobne można użyć w konstrukcji maszyn, urządzeń i ich części. Jednym z potencjalnych zastosowań jest wycięcie takiej struktury w elementach przekładni mechanicznych, jako zintegrowany tłumik drgań pojawiających się w trakcie ich pracy, przy okazji redukując poziom ciśnienia akustycznego generowanego przez nie dźwięku. Dzięki podatności mechanicznej struktury, możliwe jest wykonanie części lub montaż urządzeń w niższej klasie dokładności, a ewentualne błędy kształtu, położenia i brak osiowości skorygowane poprzez odpowiednio dobraną strukturę. Kolejnym obszarem zastosowań może być przemysł motoryzacyjny. Integracja takich struktur do elementów zawieszenia pozwoli na zmniejszenie ich ilości w konstrukcji tym samym redukując koszty produkcji oraz zwiększając trwałość elementów. Przy zastosowaniu takich elementów zamiast elementów gumowych, uniknie się konieczności łączenia elementów gumowych z metalem oraz zminimalizuje się zjawisko starzenia elementów gumowych. Takie działania można również podjąć w innych dziedzinach inżynierii. Przykładowo, można zastąpić elementy gumowe w sprzęcie AGD zwiększając ich trwałość. Następnym zastosowaniem mogą znaleźć w inżynierii bezpieczeństwa jako elementy absorbujące energię mechaniczną i rozpraszające ją w bezpieczny sposób. Jednym z przykładów mogą być urządzenia pociągowo-zderzne lub różnego rodzaju odboje. We wstępie wspomniano już o opra-

cowanych oponach bezdętkowych ze strukturą auksetyczną. Zaproponowane struktury mogą stanowić kolejną wersję tego typu opon, a docelowo nawet całkowicie zastąpić koła pojazdów.

Autor żywi głęboką nadzieję, że niniejsza praca posłuży rozwojowi zarówno auksetyków w postaci struktur pierścieniowych, jak i samych auksetyków.



# Bibliografia

- [Abdel-Rahman, 2023] Abdel-Rahman, A. S. (2023). A semi-empirical approach model for neo-hookean solids. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 24(2):155–166.
- [Alderson i inni, 2010a] Alderson, A., Alderson, K., Attard, D., Evans, K., Gatt, R., Grima, J., Miller, W., Ravirala, N., Smith, C., i Zied, K. (2010a). Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 70(7):1042–1048. Special issue on Chiral Smart Honeycombs.
- [Alderson i inni, 2010b] Alderson, A., Alderson, K., Chirima, G., Ravirala, N., i Zied, K. (2010b). The in-plane linear elastic constants and out-of-plane bending of 3-coordinated ligament and cylinder-ligament honeycombs. *Composites Science and Technology*, 70(7):1034–1041. Special issue on Chiral Smart Honeycombs.
- [Alderson i Evans, 1997] Alderson, A. i Evans, K. E. (1997). Modelling concurrent deformation mechanisms in auxetic microporous polymers. *Journal of Materials Science*, 32(11):2797–2809.
- [Alderson i Evans, 2001] Alderson, A. i Evans, K. E. (2001). Rotation and dilation deformation mechanisms for auxetic behaviour in the  $\alpha$ -cristobalite tetrahedral framework structure. *Physics and Chemistry of Minerals*, 28(10):711–718.
- [Ali i inni, 2014] Ali, M. N., Busfield, J. J., i Rehman, I. U. (2014). Auxetic oesophageal stents: structure and mechanical properties. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 25:527–553.
- [Aligholizadeh i inni, 2020] Aligholizadeh, E., Yazdani, M., i Sabouri, H. (2020). Modeling hypervisco-elastic behavior of elastomeric materials (hdpe/poe blend) at different dynamic biaxial and uniaxial tensile strain rates by a new dynamic tensile-loading mechanism. *Journal of Elastomers and Plastics*, 52(4):285 – 303.
- [ANSYS, 2009] ANSYS (2009). Theory reference for ansys mechanical apdl and mechanical applications.
- [ANSYS, 2011] ANSYS (2011). Ansys mechanical apdl material reference.
- [Attard i inni, 2018] Attard, D., Casha, A. R., i Grima, J. N. (2018). Filtration properties of auxetics with rotating rigid units. *Materials*, 11(5).

- [Attard i inni, 2009] Attard, D., Manicaro, E., i Grima, J. N. (2009). On rotating rigid parallelograms and their potential for exhibiting auxetic behaviour. *Physica Status Solidi (b)*, 246(9):2033–2044.
- [Baughman, 2003] Baughman, R. H. (2003). Auxetic materials: Avoiding the shrink. *Nature*, 425(6959):667–667.
- [Bertoldi i inni, 2017] Bertoldi, K., Vitelli, V., Christensen, J., i van Hecke, M. (2017). Flexible mechanical metamaterials. *Nature Reviews Materials*, 2(11):17066.
- [Bhullar, 2015] Bhullar, S. K. (2015). Three decades of auxetic polymers: a review. *e-Polymers*, 15(4):205–215.
- [Biswas i inni, 2022] Biswas, A. N., Mahesh, N., Peri, S. R., R Krishnan, B., i Rama Sreekanth, P. (2022). Hybrid auxetic materials implemented in crates & non-pneumatic wheels for shock absorption. *Materials Today: Proceedings*, 56:1327–1334. First International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Material Science.
- [Blattnig i inni, 2013] Blattnig, S., Luckring, J., Morrison, J., Sylvester, A., Tripathi, R., i Zang, T. (2013). “nasa standard for models and simulations: Philosophy and requirements overview”. *Journal of Aircraft*, 50:20.
- [Bohara i inni, 2023] Bohara, R. P., Linforth, S., Nguyen, T., Ghazlan, A., i Ngo, T. (2023). Anti-blast and-impact performances of auxetic structures: A review of structures, materials, methods, and fabrications. *Engineering Structures*, 276:115377.
- [Bouaziz i inni, 2013] Bouaziz, O., Masse, J., Allain, S., Orgéas, L., i Latil, P. (2013). Compression of crumpled aluminum thin foils and comparison with other cellular materials. *Materials Science and Engineering: A*, 570:1–7.
- [Burriesci i Bergamasco, 2011] Burriesci, G. i Bergamasco, G. (2011). Annuloplasty prosthesis with an auxetic structure. US Patent 8,034,103.
- [Carneiro i inni, 2013] Carneiro, V. H., Meireles, J., i Puga, H. (2013). Auxetic materials — a review. *Materials Science-Poland*, 31(4):561–571.
- [Castle i inni, 2014] Castle, T., Cho, Y., Gong, X., Jung, E., Sussman, D. M., Yang, S., i Kamien, R. D. (2014). Making the cut: Lattice kirigami rules. *Phys. Rev. Lett.*, 113:245502.
- [Cauchy, 1828] Cauchy, A. L. (1828). *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide élastique ou non élastique*, volume 8 of *Série 2*. Gauthier-Villars, Paris.
- [Chan i Evans, 1997] Chan, N. i Evans, K. (1997). Fabrication methods for auxetic foams. *Journal of Materials Science*, 32:5945–5953.
- [Chen i Liu, 2014] Chen, X. i Liu, Y. (2014). *Finite Element Modeling and Simulation with ANSYS Workbench*. CRC Press.

- [Chen i inni, 2020] Chen, Z., Wu, X., Wang, Z., i Shao, J. (2020). Concepts for morphing airfoil using novel auxetic lattices. In *Proceedings of the International Conference on Aerospace System Science and Engineering 2019*, pages 265–274. Springer.
- [Cho i inni, 2019] Cho, H., Seo, D., i Kim, D.-N. (2019). *Mechanics of auxetic materials*. Springer Singapore.
- [Choi i Lakes, 1992] Choi, J. B. i Lakes, R. S. (1992). Non-linear properties of metallic cellular materials with a negative poisson's ratio. *Journal of Materials Science*, 27(19):5375–5381.
- [Choi i Lakes, 1995] Choi, J. B. i Lakes, R. S. (1995). Nonlinear analysis of the poisson's ratio of negative poisson's ratio foams. *Journal of Composite Materials*, 29(1):113–128.
- [Choi i Lakes, 1996] Choi, J. B. i Lakes, R. S. (1996). Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative poisson's ratio: experiment and analysis. *International Journal of Fracture*, 80(1):73–83.
- [Clough, 1960] Clough, R. (1960). The finite element method in plane stress analysis. In *Proceedings of the 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh.
- [Courant, 1943] Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, pages 1–23.
- [Cross i inni, 2016] Cross, T. M., Hoffer, K. W., Jones, D. P., Kirschner, P. B., Langvin, E., i Meschter, J. C. (2016). Auxetic structures and footwear with soles having auxetic structures. US Patent 9,402,439.
- [de Saint-Venant, 1848] de Saint-Venant, B. (1848). *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, première section*. Dunod, Paris.
- [Dirrenberger i inni, 2013] Dirrenberger, J., Forest, S., i Jeulin, D. (2013). Effective elastic properties of auxetic microstructures: anisotropy and structural applications. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 9(1):21–33.
- [Dong i Hu, 2023] Dong, S. i Hu, H. (2023). Sensors based on auxetic materials and structures: A review. *Materials*, 16(9).
- [Duncan i inni, 2018] Duncan, O., Shepherd, T., Moroney, C., Foster, L., Venkatraman, P. D., Winwood, K., Allen, T., i Alderson, A. (2018). Review of auxetic materials for sports applications: Expanding options in comfort and protection. *Applied Sciences*, 8(6).
- [Easey i inni, 2019] Easey, N., Chuprynyuk, D., Musa, W. M. S. W., Bangs, A., Dobah, Y., Shterenlikht, A., i Scarpa, F. (2019). Dome-shape auxetic cellular metamaterials: Manufacturing, modeling, and testing. *Frontiers in Materials*, 6.

- [Ebrahimi i inni, 2018] Ebrahimi, H., Mousanezhad, D., Nayeb-Hashemi, H., Norato, J., i Vaziri, A. (2018). 3d cellular metamaterials with planar anti-chiral topology. *Materials and Design*, 145:226–231.
- [Erkan i inni, 2024] Erkan, S., Orhan, S., i Sarikavak, Y. (2024). Effect of production angle on low cycle fatigue performance of 3d printed auxetic re-entrant sandwich panels. *Construction and Building Materials*, 426.
- [Essassi i inni, 2020] Essassi, K., Rebiere, J.-l., El Mahi, A., Ben Souf, M. A., Bouguecha, A., i Haddar, M. (2020). Experimental and analytical investigation of the bending behaviour of 3d-printed bio-based sandwich structures composites with auxetic core under cyclic fatigue tests. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 131.
- [Evans, 2011] Evans, K. (2011). Blast-proof curtain will reduce impact of bomb explosions. [https://news-archive.exeter.ac.uk/featurednews/title\\_85818\\_en.html](https://news-archive.exeter.ac.uk/featurednews/title_85818_en.html). Dostęp: March 9, 2024.
- [Evans, 1991] Evans, K. E. (1991). Auxetic polymers: a new range of materials. *Endeavour*, 15(4):170–174.
- [Farhangdoust, 2020] Farhangdoust, S. (2020). Auxetic cantilever beam energy harvester. In *Smart Structures and NDE for Industry 4.0, Smart Cities, and Energy Systems*, volume 11382, pages 97–106. SPIE.
- [Foster i inni, 2018] Foster, L., Peketi, P., Allen, T., Senior, T., Duncan, O., i Alderson, A. (2018). Application of auxetic foam in sports helmets. *Applied Sciences*, 8(3).
- [Friis i inni, 1988] Friis, E., Lakes, R., i Park, J. (1988). Negative poisson's ratio polymeric and metallic foams. *Journal of Materials science*, 23:4406–4414.
- [Fu i inni, 2016] Fu, M., Xu, O., Hu, L., i Yu, T. (2016). Nonlinear shear modulus of re-entrant hexagonal honeycombs under large deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 80:284–296.
- [Fu i inni, 2017] Fu, M.-H., Zheng, B.-B., i Li, W.-H. (2017). A novel chiral three-dimensional material with negative poisson's ratio and the equivalent elastic parameters. *Composite Structures*, 176:442–448.
- [Fung i Drucker, 1966] Fung, Y. C. i Drucker, D. C. (1966). Foundation of solid mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 33:238–238.
- [Galerkin, 1915] Galerkin, B. G. (1915). Beams and plates, series for some problems of elastic equilibrium of beams and plates. *Wjescnik Ingenerow*, 10:897–908.
- [Gao i inni, 2018] Gao, Q., Zhao, X., Wang, C., Wang, L., i Ma, Z. (2018). Multi-objective crashworthiness optimization for an auxetic cylindrical structure under axial impact loading. *Materials & Design*, 143:120–130.

- [Gaspar i inni, 2005] Gaspar, N., Ren, X., Smith, C., Grima, J., i Evans, K. (2005). Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Materialia*, 53(8):2439–2445.
- [Gaspar i inni, 2011] Gaspar, N., Smith, C. W., Alderson, A., Grima, J. N., i Evans, K. E. (2011). A generalised three-dimensional tethered-nodule model for auxetic materials. *Journal of Materials Science*, 46(2):372–384.
- [Gatt i inni, 2014] Gatt, R., Caruana-Gauci, R., Attard, D., Casha, A. R., Wolak, W., Dudek, K., Mizzi, L., i Grima, J. N. (2014). On the properties of real finite-sized planar and tubular stent-like auxetic structures. *Physica Status Solidi (b)*, 251(2):321–327.
- [Geng i inni, 2019] Geng, L., Ruan, X., Wu, W., Xia, R., i Fang, D. (2019). Mechanical properties of selective laser sintering (sls) additive manufactured chiral auxetic cylindrical stent. *Experimental Mechanics*, 59:913–925.
- [Gibson, 2003] Gibson, L. J. (2003). Cellular solids. *Mrs Bulletin*, 28(4):270–274.
- [Gibson i inni, 1982] Gibson, L. J., Ashby, M. F., Schajer, G. S., i Robertson, C. (1982). The mechanics of two-dimensional cellular materials. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 382:25 – 42.
- [Greaves, 2013] Greaves, G. N. (2013). Poisson’s ratio over two centuries: challenging hypotheses. *Notes and Records: the Royal Society Journal of the History of Science*, 67(1):37–58.
- [Grima i Evans, 2000] Grima, J. N. i Evans, K. E. (2000). Auxetic behavior from rotating squares. *Journal of materials science letters*, 19:1563–1565.
- [Grima i Evans, 2006] Grima, J. N. i Evans, K. E. (2006). Auxetic behavior from rotating triangles. *Journal of materials science*, 41(10):3193–3196.
- [Grima i inni, 2008a] Grima, J. N., Farrugia, P.-S., Gatt, R., i Attard, D. (2008a). On the auxetic properties of rotating rhombi and parallelograms: A preliminary investigation. *Physica Status Solidi (b)*, 245(3):521–529.
- [Grima i Gatt, 2010] Grima, J. N. i Gatt, R. (2010). Perforated sheets exhibiting negative poisson’s ratios. *Advanced Engineering Materials*, 12(6):460–464.
- [Grima i inni, 2005] Grima, J. N., Gatt, R., Bray, T. G. C., Alderson, A., i Evans, K. E. (2005). Empirical modelling using dummy atoms (emuda): an alternative approach for studying “auxetic” structures. *Molecular Simulation*, 31(13):915–924.
- [Grima i inni, 2008b] Grima, J. N., Gatt, R., i Farrugia, P.-S. (2008b). On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures. *Physica Status Solidi (b)*, 245(3):511–520.
- [Grima i inni, 2016] Grima, J. N., Mizzi, L., Azzopardi, K. M., i Gatt, R. (2016). Auxetic perforated mechanical metamaterials with randomly oriented cuts. *Advanced materials*, 28(2):385–389.

- [Grima i inni, 2007] Grima, J. N., Zammit, V., Gatt, R., Alderson, A., i Evans, K. (2007). Auxetic behaviour from rotating semi-rigid units. *Physica Status Solidi (b)*, 244(3):866–882.
- [Ha i inni, 2016] Ha, C. S., Plesha, M. E., i Lakes, R. S. (2016). Chiral three-dimensional lattices with tunable poisson's ratio. *Smart Materials and Structures*, 25(5):054005.
- [Hall i inni, 2008] Hall, L. J., Coluci, V. R., Galvão, D. S., Kozlov, M. E., Zhang, M., Dantas, S. O., i Baughman, R. H. (2008). Sign change of poisson's ratio for carbon nanotube sheets. *Science*, 320(5875):504–507.
- [Hamzehei i inni, 2020] Hamzehei, R., Rezaei, S., Kadkhodapour, J., Anaraki, A. P., i Mahmoudi, A. (2020). 2d triangular anti-trichiral structures and auxetic stents with symmetric shrinkage behavior and high energy absorption. *Mechanics of Materials*, 142:103291.
- [Hasse, 2020] Hasse, Alexander i Mauser, K. (2020). Poisson induced bending actuator for soft robotic systems. *Soft robotics*, 7(2):155–167.
- [Hearmon, 1946] Hearmon, R. F. S. (1946). The elastic constants of anisotropic materials. *Reviews of Modern Physics*, 18:409–440.
- [Hedayati i inni, 2023] Hedayati, R., Yousefi, A., Dezaki, M. L., i Bodaghi, M. (2023). Analytical relationships for 2d re-entrant auxetic metamaterials: An application to 3d printing flexible implants. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 143:105938.
- [Hook i inni, 2006] Hook, P., Evans, K., Hannington, J., Hartmann-Thompson, C., i Bunce, T. (2006). Patent number: Kr20060009826.
- [Huebner i inni, 2001] Huebner, K. H., Dewhirst, D. L., Smith, D. E., i Byrom, T. G. (2001). *The Finite Element Method for Engineers*. John Wiley & Sons, New York.
- [Hur i Kim, 2023] Hur, J. M. i Kim, D.-N. (2023). Auxetic meta-disk for independent control of flexural and torsional waves. *International Journal of Mechanical Sciences*, 243:108050.
- [Imbalzano i inni, 2018] Imbalzano, G., Linforth, S., Ngo, T. D., Lee, P. V. S., i Tran, P. (2018). Blast resistance of auxetic and honeycomb sandwich panels: Comparisons and parametric designs. *Composite Structures*, 183:242–261.
- [Imbalzano i inni, 2017] Imbalzano, G., Tran, P., Ngo, T. D., i Lee, P. V. (2017). Three-dimensional modelling of auxetic sandwich panels for localised impact resistance. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 19(3):291 – 316. Cited by: 217.
- [Jacobs i inni, 2012] Jacobs, S., Coconnier, C., DiMaio, D., Scarpa, F., Toso, M., i Martinez, J. (2012). Deployable auxetic shape memory alloy cellular antenna demonstrator: design, manufacturing and modal testing. *Smart Materials and Structures*, 21(7):075013.
- [Jiang i Li, 2018] Jiang, Y. i Li, Y. (2018). 3d printed auxetic mechanical metamaterial with chiral cells and re-entrant cores. *Scientific Reports*, 8(1):2397.

- [Jiang i inni, 2018] Jiang, Y., Liu, Z., Matsuhisa, N., Qi, D., Leow, W. R., Yang, H., Yu, J., Chen, G., Liu, Y., Wan, C., i inni (2018). Auxetic mechanical metamaterials to enhance sensitivity of stretchable strain sensors. *Advanced Materials*, 30(12):1706589.
- [Jordan i inni, 2020] Jordan, J., Rowland, R., Greenhall, J., Moss, E., Huber, R., Willis, E., Hrubciak, R., Kenney-Benson, C., Bartram, B., i Sturtevant, B. (2020). Elastic properties of polyethylene from high pressure sound speed measurements. *Polymer*, 212:123164.
- [Kelkar i inni, 2020] Kelkar, P. U., Kim, H. S., Cho, K.-H., Kwak, J. Y., Kang, C.-Y., i Song, H.-C. (2020). Cellular auxetic structures for mechanical metamaterials: A review. *Sensors*, 20(11).
- [Khan i inni, 2021] Khan, M. K., Begum, H., i Siddique, A. B. (2021). Auxetic yarn: Fundamentals, influencing parameters, application areas and challenges. *Textile & Leather Review*, 4.
- [Kim i inni, 2022] Kim, J., Hegde, H., young Kim, H., i Lee, C. (2022). Spindle vibration mitigation utilizing additively manufactured auxetic materials. *Journal of Manufacturing Processes*, 73:633–641.
- [Kirchhoff, 1859] Kirchhoff, G. R. (1859). Über das verhältnis der quercontraction zur längen-dilatation bei stäben von federharten stahl. *Poggendorfs Annalen*, 108:369–392.
- [Kolken, 2017] Kolken, H. M. A. i Zadpoor, A. A. (2017). Auxetic mechanical metamaterials. *RSC Adv.*, 7:5111–5129.
- [Kossa i inni, 2023] Kossa, A., Valentine, M. T., i McMeeking, R. M. (2023). Analysis of the compressible, isotropic, neo-hookean hyperelastic model. *Meccanica*, 58(1):217–232.
- [Kuribayashi i inni, 2006] Kuribayashi, K., Tsuchiya, K., You, Z., Tomus, D., Umemoto, M., Ito, T., i Sasaki, M. (2006). Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of ni-rich tni shape memory alloy foil. *Materials Science and Engineering: A*, 419(1-2):131–137.
- [Lakes, 1987] Lakes, R. (1987). Foam structures with a negative poisson's ratio. *Science*, 235(4792):1038–1040.
- [Lakes i Elms, 1993] Lakes, R. i Elms, K. (1993). Indentability of conventional and negative poisson's ratio foams. *Journal of Composite Materials*, 27(12):1193–1202.
- [Lakes, 2017] Lakes, R. S. (2017). Negative-poisson's-ratio materials: Auxetic solids. *Annual Review of Materials Research*, 47:63 – 81. Cited by: 295; All Open Access, Bronze Open Access.
- [Lakes i Witt, 2002] Lakes, R. S. i Witt, R. (2002). Making and characterizing negative poisson's ratio materials. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 30(1):50–58.
- [Larsen i inni, 1997] Larsen, U., Signund, O., i Bouwsta, S. (1997). Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative poisson's ratio. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 6(2):99–106.

- [Lazarus i Reis, 2015] Lazarus, A. i Reis, P. M. (2015). Soft actuation of structured cylinders through auxetic behavior. *Advanced Engineering Materials*, 17(6):815–820.
- [Lees i inni, 1991] Lees, C., Vincent, J. F. V., i Hillerton, J. E. (1991). Poisson's ratio in skin. *Bio-Medical Materials and Engineering*, 1:19–23. 1.
- [Li i inni, 2020] Li, T., Liu, F., i Wang, L. (2020). Enhancing indentation and impact resistance in auxetic composite materials. *Composites Part B: Engineering*, 198:108229.
- [Liebold-Ribeiro i Körner, 2014] Liebold-Ribeiro, Y. i Körner, C. (2014). Phononic band gaps in periodic cellular materials. *Advanced Engineering Materials*, 16(3):328–334.
- [Lim, 2016] Lim, T.-C. (2016). A 3d auxetic material based on intersecting double arrowheads. *Physica Status Solidi (b)*, 253(7):1252–1260.
- [Lin i inni, 2020] Lin, C., Zhang, L., Liu, Y., Liu, L., i Leng, J. (2020). 4d printing of personalized shape memory polymer vascular stents with negative poisson's ratio structure: A preliminary study. *Science China Technological Sciences*, 63(4):578–588.
- [Lindfield i Penny, 2019] Lindfield, G. i Penny, J. (2019). Chapter 5 - solution of differential equations. In Lindfield, G. i Penny, J., editors, *Numerical Methods (Fourth Edition)*, pages 239–299. Academic Press, fourth edition edition.
- [Ling i inni, 2021] Ling, B., Wei, K., Qu, Z., i Fang, D. (2021). Design and analysis for large magnitudes of programmable poisson's ratio in a series of lightweight cylindrical metastructures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 195:106220.
- [Lipton i inni, 2018] Lipton, J. I., MacCurdy, R., Manchester, Z., Chin, L., Cellucci, D., i Rus, D. (2018). Handedness in shearing auxetics creates rigid and compliant structures. *Science*, 360(6389):632–635.
- [Liu i inni, 2022] Liu, S., Chen, H., Li, Y., i Du, Z. (2022). Design, manufacture, and characterization of auxetic yarns with multiple core/wrap structure by braiding method. *Materials*, 15(18).
- [Liu i inni, 2016] Liu, W., Wang, N., Luo, T., i Zhenqiong, L. (2016). In-plane dynamic crushing of re-entrant auxetic cellular structure. *Materials & Design*, 100:84–91.
- [Love, 1927] Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover (Reprint of the Cambridge University Press), 4th edition.
- [Lu i inni, 2016] Lu, Z.-X., Li, X., Yang, Z.-Y., i Xie, F. (2016). Novel structure with negative poisson's ratio and enhanced young's modulus. *Composite Structures*, 138:243–252.
- [Ma i inni, 2013] Ma, Z.-D., Liu, Y., Liu, X., Sun, C., i Cui, Y. (2013). Ultralightweight runflat tires based upon negative poisson ratio (npr) auxetic structures. US Patent 8,544,515.
- [Madier, 2020] Madier, D. (2020). *Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers*. FEA Academy, Kanada.



- [Madke i Chowdhury, 2020] Madke, R. R. i Chowdhury, R. (2020). Anti-impact behavior of auxetic sandwich structure with braided face sheets and 3d re-entrant cores. *Composite Structures*, 236:111838.
- [Masters i Evans, 1996] Masters, I. i Evans, K. (1996). Models for the elastic deformation of honeycombs. *Composite Structures*, 35(4):403–422.
- [Mazur i inni, 2017] Mazur, M., Leary, M., McMillan, M., Sun, S., Shidid, D., i Brandt, M. (2017). 5 - mechanical properties of ti6al4v and als12mg lattice structures manufactured by selective laser melting (slm). In Brandt, M., editor, *Laser Additive Manufacturing*, Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials, pages 119–161. Woodhead Publishing.
- [Michalski i Strek, 2020] Michalski, J. i Strek, T. (2020). Blast resistance of sandwich plate with auxetic anti-tetrachiral core. *Vibrations in Physical Systems*, 31(3):art. no. 2020317.
- [Milstein i Huang, 1979] Milstein, F. i Huang, K. (1979). Existence of a negative poisson ratio in fcc crystals. *Phys. Rev. B*, 19:2030–2033.
- [Milton, 1992] Milton, G. W. (1992). Composite materials with poisson's ratios close to—1. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(5):1105–1137.
- [Miura, 1985] Miura, K. (1985). Method of packing and deployment of large membranes in space, the institute of space and astronautical science. Technical report, Report.
- [Mizzi i inni, 2015] Mizzi, L., Azzopardi, K. M., Attard, D., Grima, J. N., i Gatt, R. (2015). Auxetic metamaterials exhibiting giant negative poisson's ratios. *Physica Status Solidi (RRL) – Rapid Research Letters*, 9(7):425–430.
- [Moitzi, 2022] Moitzi, M. (2022). ezdxf: A python library for reading, writing, and modifying dxf files. <https://pypi.org/project/ezdxf/>.
- [Morris, 1977] Morris, N. F. (1977). The use of modal superposition in nonlinear dynamics. *Computers & Structures*, 7(1):65–72.
- [Mrozek i Strek, 2022] Mrozek, A. i Strek, T. (2022). Numerical analysis of dynamic properties of an auxetic structure with rotating squares with holes. *Materials*, 15:8712.
- [Navier, 1827] Navier, C. L. M. H. (1827). Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 7:375–394.
- [Novak i inni, 2023] Novak, N., Plesec, V., Harih, G., Cupar, A., Kaljun, J., i Vesenjaj, M. (2023). Development, fabrication and mechanical characterisation of auxetic bicycle handlebar grip. *Scientific Reports*, 13(1):8158.
- [Novak i inni, 2019] Novak, N., Starčević, L., Vesenjaj, M., i Ren, Z. (2019). Blast response study of the sandwich composite panels with 3d chiral auxetic core. *Composite Structures*, 210:167–178.

- [Novak i inni, 2020] Novak, N., Vesenjajk, M., Kennedy, G., Thadhani, N., i Ren, Z. (2020). Response of chiral auxetic composite sandwich panel to fragment simulating projectile impact. *Physica Status Solidi (b)*, 257(10):1900099.
- [Pasternak i Dyskin, 2012] Pasternak, E. i Dyskin, A. (2012). Materials and structures with macroscopic negative poisson's ratio. *International Journal of Engineering Science*, 52:103–114.
- [Paxton i inni, 2020] Paxton, N. C., Daley, R., Forrestal, D. P., Allenby, M. C., i Woodruff, M. A. (2020). Auxetic tubular scaffolds via melt electrowriting. *Materials & design*, 193:108787.
- [Pfeil i inni, 2018] Pfeil, A., Barbe, L., Wach, B., Bruyas, A., Geiskopf, F., Nierenberger, M., i Renaud, P. (2018). A 3d-printed needle driver based on auxetic structure and inchworm kinematics. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 51807, page V05AT07A057. American Society of Mechanical Engineers.
- [Poisson, 1827] Poisson, S. D. (1827). Note sur l'extension des fils et des plaques élastiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 36:384–387.
- [Prall i Lakes, 1997] Prall, D. i Lakes, R. (1997). Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of — 1. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3):305–314.
- [Qiao i Chen, 2015] Qiao, J. i Chen, C. (2015). Impact resistance of uniform and functionally graded auxetic double arrowhead honeycombs. *International Journal of Impact Engineering*, 83:47–58.
- [Quadrini i inni, 2016] Quadrini, F., Bellisario, D., Ciampoli, L., Costanza, G., i Santo, L. (2016). Auxetic epoxy foams produced by solid state foaming. *Journal of Cellular Plastics*, 52(4):441–454.
- [Rafsanjani i Pasini, 2016] Rafsanjani, A. i Pasini, D. (2016). Bistable auxetic mechanical metamaterials inspired by ancient geometric motifs. *Extreme Mechanics Letters*, 9:291–296.
- [Ramezani i Rahmani, 2024] Ramezani, M. J. i Rahmani, O. (2024). Potential and applications of auxetic tubular: a review. *Functional Composites and Structures*, 6(1):012001.
- [Rawal i inni, 2017] Rawal, A., Kumar, V., Saraswat, H., Weerasinghe, D., Wild, K., Hietel, D., i Dauner, M. (2017). Creating three-dimensional (3d) fiber networks with out-of-plane auxetic behavior over large deformations. *Journal of Materials Science*, 52(5):2534–2548.
- [Raymont i inni, 2011] Raymont, D., Yan, C., Hussein, A., i Young, P. (2011). Design and additive manufacturing of cellular lattice structures.
- [Ren i inni, 2018] Ren, X., Das, R., Tran, P., Ngo, T. D., i Xie, Y. M. (2018). Auxetic metamaterials and structures: a review. *Smart Materials and Structures*, 27(2):023001.
- [Ren i inni, 2023] Ren, X., Han, D., Sun, L., Zhang, X., Jiang, W., Tao, Z., i Xie, Y. (2023). Experimental and numerical investigations of aluminum foam-filled auxetic circular tubular metamaterials with elliptical cells. *Construction and Building Materials*.

- [Ritz, 1909] Ritz, W. (1909). Über eine neue methode zur lösung gewisser probleme der mathematischen physik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135:1–61.
- [Rivlin i Rideal, 1948] Rivlin, R. S. i Rideal, E. K. (1948). Large elastic deformations of isotropic materials iv. further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(835):379–397.
- [Rodney i inni, 2016] Rodney, D., Gadot, B., Martinez, O. R., du Roscoat, S. R., i Orgéas, L. (2016). Reversible dilatancy in entangled single-wire materials. *Nature Materials*, 15(1):72–77.
- [Ruzzene i inni, 2003] Ruzzene, M., Scarpa, F., i Soranna, F. (2003). Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures. *Smart Materials and Structures*, 12(3):363.
- [Sabat i Kundu, 2021] Sabat, L. i Kundu, C. K. (2021). History of finite element method: A review. In Das, B. B., Barbhuiya, S., Gupta, R., i Saha, P., editors, *Recent Developments in Sustainable Infrastructure*, pages 395–404, Singapore. Springer Singapore.
- [Safar i Mihai, 2018] Safar, A. i Mihai, L. A. (2018). The nonlinear elasticity of hyperelastic models for stretch-dominated cellular structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 106:144–154.
- [Saxena i inni, 2016] Saxena, K. K., Das, R., i Calius, E. P. (2016). Three decades of auxetics research materials with negative poisson's ratio: A review. *Advanced Engineering Materials*, 18(11):1847–1870.
- [Scarpa i inni, 2009] Scarpa, F., Adhikari, S., i Phani, A. S. (2009). Effective elastic mechanical properties of single layer graphene sheets. *Nanotechnology*, 20(6):065709.
- [Scarpa i inni, 2006] Scarpa, F., Giacomini, J. A., Bezazi, A., i Bullough, W. A. (2006). Dynamic behavior and damping capacity of auxetic foam pads. In Clark, W. W., Ahmadian, M., i Lumsdaine, A., editors, *Smart Structures and Materials 2006: Damping and Isolation*, volume 6169, page 61690T. International Society for Optics and Photonics, SPIE.
- [Scarpa i Tomlin, 2000a] Scarpa, F. i Tomlin, P. J. (2000a). On the transverse shear modulus of negative poisson's ratio honeycomb structures. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23(8):717–720.
- [Scarpa i Tomlin, 2000b] Scarpa, F. i Tomlin, P. J. (2000b). On the transverse shear modulus of negative poisson's ratio honeycomb structures. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23(8):717–720.
- [Scheffler i Colombo, 2006] Scheffler, M. i Colombo, P. (2006). *Cellular ceramics: structure, manufacturing, properties and applications*. John Wiley & Sons.
- [Schellbach, 1851] Schellbach, K. H. (1851). Probleme der variationsrechnung. *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 41:293–363.

- [Schenk i Guest, 2013] Schenk, M. i Guest, S. D. (2013). Geometry of miura-folded metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(9):3276–3281.
- [Schwer, 2007] Schwer, L. (2007). An overview of the ptc 60/v&v 10: Guide for verification and validation in computational solid mechanics: Transmitted by l. e. schwer, chair ptc 60v&v 10. *Eng. Comput. (Lond.)*, 23:245–252.
- [Shah i inni, 2022] Shah, I. A., Khan, R., Kooloor, S. S. R., Petru, M., Badshah, S., Ahmad, S., i Amjad, M. (2022). Finite element analysis of the ballistic impact on auxetic sandwich composite human body armor. *Materials*, 15(6).
- [Shen i inni, 2014] Shen, J., Zhou, S., Huang, X., i Xie, Y. M. (2014). Simple cubic three-dimensional auxetic metamaterials. *Physica Status Solidi (b)*, 251(8):1515–1522.
- [Shirzad i inni, 2024] Shirzad, M., Bodaghi, M., Oh, D., Yi, M., i Nam, S. Y. (2024). Design and optimization of bioinspired auxetic structure for biomedical applications. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 103:105139.
- [Shukla i Behera, 2022] Shukla, S. i Behera, B. (2022). Auxetic fibrous structures and their composites: A review. *Composite Structures*, 290:115530.
- [Silverberg i inni, 2014] Silverberg, J. L., Evans, A. A., McLeod, L., Hayward, R. C., Hull, T., Santangelo, C. D., i Cohen, I. (2014). Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials. *Science*, 345(6197):647–650.
- [Simmons i Wang, 1971] Simmons, G. i Wang, H. F. (1971). *Single Crystal Elastic Constants and Calculated Aggregate Properties. A Handbook*. The MIT Press.
- [Smith i inni, 2000] Smith, C., Grima, J., i Evans, K. (2000). A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams: missing rib foam model. *Acta Materialia*, 48(17):4349–4356.
- [Smith i inni, 2002] Smith, F. C., Scarpa, F., i Burriesci, G. (2002). Simultaneous optimization of the electromagnetic and mechanical properties of honeycomb materials. In *SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*.
- [Stokes, 1845] Stokes, G. G. (1845). On the theories of the internal friction of fluids in motion, and the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287–319.
- [Strek i inni, 2015] Strek, T., Jopek, H., i Nienartowicz, M. (2015). Dynamic response of sandwich panels with auxetic cores. *Physica Status Solidi (b)*, 252(7):1540–1550.
- [Surjadi i inni, 2019] Surjadi, J. U., Gao, L., Du, H., Li, X., Xiong, X., Fang, N. X., i Lu, Y. (2019). Mechanical metamaterials and their engineering applications. *Advanced Engineering Materials*, 21(3):1800864.

- [Timoshenko i Goodier, 1969] Timoshenko, S. i Goodier, J. (1969). *Theory of Elasticity*. Engineering mechanics series. McGraw-Hill.
- [Toronjo, 2017] Toronjo, A. (2017). Articles of apparel including auxetic materials. US Patent 9,629,397.
- [Turner i inni, 1956] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., i Topp, L. J. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9):805–823.
- [Veronda i Westmann, 1970] Veronda, D. i Westmann, R. (1970). Mechanical characterization of skin—finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 3(1):111–124.
- [Vijayavenkataraman i inni, 2020] Vijayavenkataraman, S., Gopinath, A., i Lu, W. F. (2020). A new design of 3d-printed orthopedic bone plates with auxetic structures to mitigate stress shielding and improve intra-operative bending. *Bio-Design and Manufacturing*, 3(2):98–108.
- [Vinay i Varma, 2019] Vinay, V. C. i Varma, D. S. M. (2019). Fabrication and testing of auxetic foams for rehabilitation applications. *Journal of the Indian Institute of Science*, 99(3):511–518.
- [Voigt, 1910] Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. B.G. TEUBNER, Leipzig.
- [Wallbanks i inni, 2021] Wallbanks, M., Khan, M. F., Bodaghi, M., Triantaphyllou, A., i Serjoui, A. (2021). On the design workflow of auxetic metamaterials for structural applications. *Smart Materials and Structures*, 31(2):023002.
- [Wan i inni, 2004] Wan, H., Ohtaki, H., Kotosaka, S., i Hu, G. (2004). A study of negative poisson's ratios in auxetic honeycombs based on a large deflection model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(1):95–106.
- [Wang i inni, 2016] Wang, B., Zhang, C., Zeng, C., Kramer, L. D., i Gillis, A. (2016). Prosthetic socket apparatus and systems. US Patent 9,486,333.
- [Wang i inni, 2001] Wang, Y.-C., Lakes, R. S., i Butenhoff, A. (2001). Influence of cell size on re-entrant transformation of negative poisson's ratio reticulated polyurethane foams. *Cellular Polymers*, 20:373–385.
- [Wanniarachchi i inni, 2023] Wanniarachchi, C. T., Arjunan, A., Baroutaji, A., i Singh, M. (2023). 3d printing customised stiffness-matched meta-biomaterial with near-zero auxeticity for load-bearing tissue repair. *Bioprinting*, 33:e00292.
- [Warner i inni, 2017] Warner, J. J., Gillies, A. R., Hwang, H. H., Zhang, H., Lieber, R. L., i Chen, S. (2017). 3d-printed biomaterials with regional auxetic properties. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 76:145–152. Structure-Property Relationships in Biological and Bioinspired Materials.

- [Whitty i inni, 2002] Whitty, J. P. M., Nazaré, F., i Alderson, A. (2002). Modelling the effects of density variations on the in-plane poisson's ratios and young's moduli of periodic conventional and re-entrant honeycombs - part 1: Rib thickness variations. *Cellular Polymers*, 21:69–98.
- [Williams i Lewis, 1982] Williams, J. L. i Lewis, J. L. (1982). Properties and an Anisotropic Model of Cancellous Bone From the Proximal Tibial Epiphysis. *Journal of Biomechanical Engineering*, 104(1):50–56.
- [Wojciechowski, 1989] Wojciechowski, K. (1989). Two-dimensional isotropic system with a negative poisson ratio. *Physics Letters A*, 137(1):60–64.
- [Xiang i inni, 2012] Xiang, H. J., Shi, Z. F., Wang, S. J., i Mo, Y. L. (2012). Periodic materials-based vibration attenuation in layered foundations: experimental validation. *Smart Materials and Structures*, 21(11):112003.
- [Xue i inni, 2020] Xue, H., Luo, Z., Brown, T., i Beier, S. (2020). Design of self-expanding auxetic stents using topology optimization. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 8.
- [Yan i inni, 2017] Yan, Y., Li, Y., Song, L., Zeng, C., i Li, Y. (2017). Pluripotent stem cell expansion and neural differentiation in 3-d scaffolds of tunable poisson's ratio. *Acta Biomaterialia*, 49:192–203.
- [Yang i inni, 2018] Yang, C., Vora, H. D., i Chang, Y. (2018). Behavior of auxetic structures under compression and impact forces. *Smart Materials and Structures*, 27(2):025012.
- [Yang i inni, 2012] Yang, L., Harrysson, O., West, H., i Cormier, D. (2012). Compressive properties of ti-6al-4v auxetic mesh structures made by electron beam melting. *Acta Materialia*, 60(8):3370–3379.
- [Yao i inni, 2020] Yao, Y., Wang, L., Li, J., Tian, S., Zhang, M., i Fan, Y. (2020). A novel auxetic structure based bone screw design: Tensile mechanical characterization and pullout fixation strength evaluation. *Materials & design*, 188:108424.
- [Young, 1807] Young, T. (1807). *Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. Taylor & Walton, London, 1st edition.
- [Zhang i inni, 2015] Zhang, X.-C., min Ding, H., qiang An, L., i lei Wang, X. (2015). Numerical investigation on dynamic crushing behavior of auxetic honeycombs with various cell-wall angles. *Advances in Mechanical Engineering*, 7(2):679678.
- [Zhang i inni, 2013] Zhang, Z., Hu, H., Liu, S., i Xu, B. (2013). Study of an auxetic structure made of tubes and corrugated sheets. *Physica Status Solidi (b)*, 250(10):1996–2001.
- [Zhu i Deng, 2024] Zhu, Z. i Deng, Z. (2024). Sub-preferential rotational wave beaming in structurally rhombus re-entrant honeycombs. *International Journal of Solids and Structures*, 290:112666.
- [Zienkiewicz i Cheung, 1967] Zienkiewicz, O. i Cheung, Y. (1967). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, New York.