



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ

ZAKŁAD MECHANIKI TECHNICZNEJ

ROZPRAWA DOKTORSKA

*Analiza sprawności urządzeń odzyskujących energię
z galopowania poprzecznego*

Autor: **mgr inż. Filip Sarbinowski**

Promotor: **dr hab. inż. Roman Starosta**

Promotor pomocniczy: **dr inż. Paweł Fritzkowski**

Poznań, 2023

Spis treści

Streszczenie.....	2
Spis ważniejszych oznaczeń	4
1. Wstęp	7
1.1. Wprowadzenie	7
1.2. Odzyskiwanie energii z drgań.....	9
1.3. Odzyskiwanie energii drgań wzbudzonych przepływem.....	12
1.4. Cele pracy	21
1.5. Struktura pracy oraz informacje dodatkowe	22
2. Analiza wariantu podstawowego	23
3. Układy o dwóch stopniach swobody.....	31
3.1. Informacje ogólne	31
3.2. Podwariant I.....	33
3.3. Podwariant II.....	41
4. Układy nieliniowe	48
4.1. Postać rozwiązań – eliptyczne funkcje Jacobiego.....	50
4.2. Progresywna charakterystyka sprężystości.....	56
4.3. Degresywna charakterystyka sprężystości.....	75
4.4. Bistabilna charakterystyka sprężystości.....	88
5. Podsumowanie i wnioski.....	105
5.1. Perspektywa dalszych badań.....	109
Literatura.....	110

Streszczenie

W dobie globalnego kryzysu energetycznego, silnie eksplorowane są alternatywne sposoby pozyskiwania energii z niekonwencjonalnych źródeł, w tym z drgań. Jedną z nowoczesnych technologii tego typu, jest odzyskiwanie energii z jednego ze zjawisk wzbudzenia drgań stałym przepływem – galopowania poprzecznego. Choć pozostaje ona obiektem wielu badań, to jednak podstawowe cechy, świadczące o potencjale użytkowym różnych rodzajów urządzenia, pozostają niezdefiniowane. Celem pracy jest uzupełnienie tej luki. W niniejszej rozprawie poddano analizie sprawność energetyczną sześciu wariantów urządzenia odzyskującego energię galopowania poprzecznego. Należą do nich: wariant podstawowy, dwa podwarianty układu o dwóch stopniach swobody oraz trzy urządzenia o nieliniowej charakterystyce sprężystości. Właściwości dynamiczne każdego z generatorów opisane zostały modelami matematycznymi, których rozwiązanie było niezbędne do sformułowania sprawności układów. Modele wariantów liniowych rozwiązano przy pomocy Metody Bilansu Harmonicznych, natomiast wariantów nieliniowych korzystając z autorskiego rozszerzenia Metody Bilansu Harmonicznych Eliptycznych. Na drodze analizy uzyskanych rozwiązań wykazano, że sprawność jest funkcją prędkości przepływu, lecz można scharakteryzować ją wyczerpująco przy pomocy dwóch parametrów kryterialnych – sprawności szczytowej, czyli maksymalnej sprawności układu oraz szerokości pasma wysokiej sprawności, opisującej szerokość pasma prędkości przepływu, przy którym sprawność układy wynosi nie mniej niż 90% sprawności szczytowej. Wartości tych parametrów silnie zależy od prędkości, przy której układ osiąga sprawność szczytową – prędkości nominalnej. Porównanie parametrów kryterialnych przeanalizowanych wariantów wskazało, że najwyższą sprawnością charakteryzuje się jeden z podwariantów o dwóch stopniach swobody. Wysokimi sprawnościami szczytowymi cechują się również układy o progresywnej i bistabilnej charakterystyce sprężystości, przy czym doznają one również silnego spadku sprawności w wyniku odchylenia prędkości pracy od prędkości nominalnej.

Abstract

In the era of the global energy crisis, alternative ways of obtaining energy from unconventional sources, including vibrations, are strongly explored. One of the modern technologies of this type is the recovery of energy from one of the phenomena of excitation of vibrations with a constant flow - transverse galloping. Although it remains the subject of many studies, the basic features that prove the utility potential of various types of devices remain undefined. The aim of the work is to fill this gap. In this dissertation, the energy efficiency of six variants of the transverse galloping energy recovery device was analyzed. These include: the basic variant, two sub-variants of the system with two degrees of freedom and three devices with non-linear elasticity characteristics. The dynamic properties of each of the generators were described by mathematical models, the solution of which was necessary to formulate the efficiency of the systems. Models of linear variants were solved using the Harmonic Balance Method, while non-linear variants were solved using the authorial extension of the Elliptic Harmonic Balance Method. By analyzing the obtained solutions, it was shown that the efficiency is a function of the flow velocity, but it can be exhaustively characterized by two criteria parameters - peak efficiency, i.e. the maximum efficiency of the system, and high efficiency bandwidth, describing the width of the flow velocity bandwidth at which the efficiency of the system is not lesser than 90% peak efficiency. The values of these parameters strongly depend on the speed at which the system reaches peak efficiency - the peak speed. Comparison of the criterion parameters of the analyzed variants showed that one of the sub-variants with two degrees of freedom is characterized by the highest efficiency. Systems with progressive and bistable elastic characteristics are also characterized by high peak efficiencies, but they also experience a strong decrease in efficiency as a result of the deviation of the operating speed from peak speed.

Spis ważniejszych oznaczeń

$\dot{()}$	Pierwsza pochodna względem czasu
$\ddot{()}$	Druga pochodna względem czasu
$\widehat{()}$	Oznaczenie wielkości wymiarowej

Indeksy górne:

L	Wielkość charakteryzująca wariant podstawowy
I	Wielkość charakteryzująca podwariant I układu o dwóch stopniach swobody
II	Wielkość charakteryzująca podwariant II układu o dwóch stopniach swobody
H	Wielkość charakteryzująca wariant o progresywnej charakterystyce sprężystości
S	Wielkość charakteryzująca wariant o degresywnej charakterystyce sprężystości
B	Wielkość charakteryzująca wariant o bistabilnej charakterystyce sprężystości
$\Gamma_1, \Gamma_1^B, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_3^B, \Gamma_4, \Gamma_5^B$	Współczynniki aproksymacji iloczynów z funkcją dn
\widehat{P}_f	Wymiarowa powierzchniowa gęstość mocy przepływu
\widehat{P}_g	Wymiarowa moc elektryczna urządzenia
$\Gamma_l, \Gamma_o, \Gamma_c, \Gamma_g, \Gamma_{is}, \Gamma_k, \Gamma_p, \Gamma_o^B, \Gamma_g^B, \Gamma_L^B$	Podstawienia upraszczające
A_v, B_v	Składowe amplitudy napięcia
A_y, A_{y2}, G_{y2}	Amplituda drgań
A_{ys}	Kwadrat amplitudy drgań A_y

$B^L, B^I, B^{II}, B^H, B^S, B^B$	Szerokość pasma wysokiej sprawności
D_s^L, D_s^I, D_s^{II}	Wrażliwość na tłumienie
\hat{T}	Wymiarowy okres funkcji napięcia elektrycznego
T_e	Okres funkcji eliptycznej
T_t	Okres funkcji trygonometrycznej
$e^L, e^{I1}, e^{II1}, e^{I2}, e^{II2}, e^H, e^S, e^B$	Tłumienie elektryczne
$e_{opt}^L = e_{opt}$	Optymalne tłumienie elektryczne
$e_p^L, e_p^I, e_p^{II}, e_p^H, e_p^S, e_p^B$	Nominalne tłumienie elektryczne – tłumienie elektryczne przy prędkości nominalnej
k_n	Współczynnik sprężystości nieliniowej
$m_p^L, m_p^I, m_p^{II}, m_p^H, m_p^S, m_p^B$	Nominalna wartość modułu eliptycznego – moduł eliptyczny przy prędkości nominalnej
$u_{cr}^L = u_{cr}$	Prędkość krytyczna układu liniowego
$u_p^L, u_p^I, u_p^{II}, u_p^H, u_p^S, u_p^B$	Nominalna prędkość przepływu
u_s, u_s^B	Prędkość siodłowa
a_1	Pierwszy współczynnik kształtu
a_3	Trzeci współczynnik kształtu
$\varepsilon^I, \varepsilon^{II}$	Zastępcze tłumienie elektryczne
$\eta_{\Delta}^I, \eta_{\Delta}^H, \eta_{\Delta}^B$	Charakterystyka wzmocnienia
$\eta^L, \eta^I, \eta^{II}, \eta^H, \eta^S, \eta^B$	Charakterystyka sprawności sprawność układu
$\eta_m^H, \eta_m^S, \eta_m^B$	Zasadnicza funkcja sprawności układu nieliniowego
η_{opt}^L	Sprawność optymalna wariantu podstawowego
$\eta_p^L, \eta_p^I, \eta_p^{II}, \eta_p^H, \eta_p^S, \eta_p^B$	Sprawność szczytowa układu
λ^I, λ^{II}	Zastępcze tłumienie strukturalne
ψ^H, ψ^S, ψ^B	Funkcja wzmocnienia układu nieliniowego

Ω	Eliptyczna częstość drgań
E	Zupełna całka eliptycznego drugiego rodzaju
K	Zupełna całka eliptycznego pierwszego rodzaju
M	Stosunek mas układu o dwóch stopniach swobody
c, c_1, c_2	Tłumienie strukturalne
k, k_2	Współczynnik sztywności
m	Moduł eliptyczny
r	Opór elektryczny
t	Czas
u	Prędkość przepływu
v, v_1, v_2	Napięcie elektryczne
y, y_1, y_2	Współrzędna położenia drgającej masy
V	Energia potencjalna
$\kappa, \kappa_1, \kappa_2$	Współczynnik piezoelektryczny
ρ	Gęstość płynu
φ	Przesunięcie fazowe
$\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_B$	Kołowa częstość drgań
ϕ	Amplituda Jacobiego

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie

We współczesnym świecie energia odgrywa kluczową rolę we wszystkich aspektach życia ludzi. Zasilanie urządzeń elektronicznych, zapewnienie światła i ciepła w domach, a także napędzanie maszyn – wszystko to wymaga energii. Jednak wraz ze wzrostem populacji i rozwijającymi się technologiami, zaobserwować można coraz większe trudności związane z wytwarzaniem i dystrybucją odpowiedniej ilości energii. Kryzys energetyczny jest coraz bardziej powszechnym problemem, z którym należy się zmierzyć.

Kryzys energetyczny dotyczy niedoboru źródeł energii, których użytkowanie jest ekonomicznie racjonalnie, a także zagrożeń dla środowiska związanych z tradycyjnymi metodami jej wytwarzania. Przemysł energetyczny, oparty na spalaniu paliw kopalnych, takich jak węgiel, gaz ziemny i ropa naftowa, jest głównym producentem energii, ale przyczynia się do wzrostu emisji gazów cieplarnianych i pogorszenia jakości powietrza. Fundamentalne znaczenie w kontekście ekologii ma również cena energii. Jak wykazano w doskonałej książce [1], świadomość potrzeby ochrony środowiska jest silnie skorelowana z zamożnością społeczeństwa. Ważne jest zatem, aby podejmować kroki mające na celu ograniczenie ubóstwa, między innymi, poprzez dążenie do redukcji kosztów wyprodukowania energii. W rezultacie, poszukiwanie alternatywnych, bardziej zrównoważonych i przede wszystkim, tanich źródeł energii, można postrzegać jako jeden z krytycznych kierunków rozwoju techniki.

Jednocześnie, wraz z postępowaniem technologicznym, rozwija się koncepcja Internetu Rzeczy (ang. Internet of Things – IoT) [2]. IoT opisuje sieć połączonych urządzeń, które komunikują się między sobą i wymieniają informacje, aby ułatwić codzienne życie ich użytkowników. Inteligentne urządzenia domowe, samochody, czujniki środowiskowe i wiele innych mogą łączyć się ze sobą, analizować dane i podejmować autonomiczne decyzje. Jednak wraz z coraz większą ilością urządzeń IoT, pojawiają się trudności z zapewnieniem im źródeł energii. Tradycyjne metody zasilania, takie jak baterie czy przewody zasilające, mogą być niewygodne, ograniczone pod względem trwałości lub niepraktyczne w przypadku rozproszonych sieci urządzeń IoT.

Odpowiedzią na wskazane problemy mogą być technologie odzyskiwania energii (ang. Energy Harvesting – EH).

Nazwa ta odnosi się do procesów przechwytywania i wykorzystywania energii pochodzącej z różnych dostępnych w otoczeniu źródeł, takich jak promieniowanie słoneczne, ciepło, ruch czy drgania. Zasadność stosowania danej technologii podyktowana jest głównie lokalną dostępnością konkretnego nośnika energii. Ze względu na ograniczone nasłonecznienie, skuteczność pozyskiwania energii

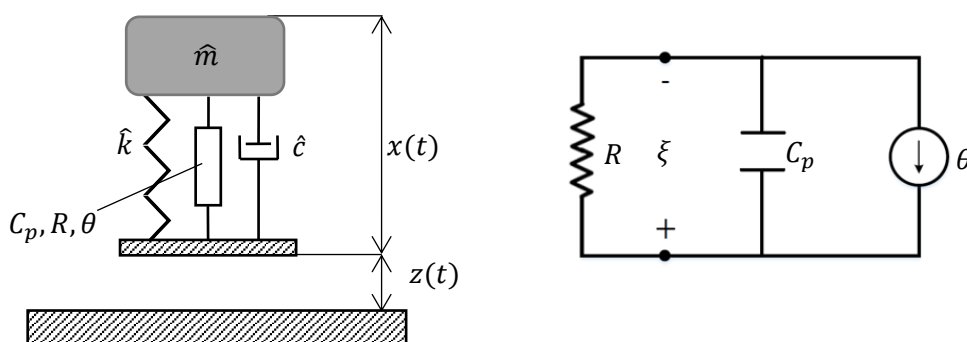
promieniowania słonecznego w Europie Północnej nie może równać się ze sprawnością tego procesu w Europie Środkowej i Południowej [3]. Ponadto można zauważyć, że choć wykorzystanie tej technologii do zasilania urządzeń pracujących pod powierzchnią ziemi jest możliwe, to jednak wiąże się z koniecznością prowadzenia dodatkowych przewodów zasilających. Taki zabieg oznaczałby więc wygenerowanie problemu, który technologie EH miały rozwiązać.

Truizmem jest więc stwierdzenie, że kluczowe jest dobranie odpowiedniej technologii odzyskiwania energii do warunków, w których generator ma pracować. Z drugiej jednak strony, należy mieć na uwadze, że poszczególne technologie mogą diametralnie różnić się efektywnością i to nie tylko ze względu na specyfikę samego źródła energii, ale również z uwagi na stopień zaawansowania danej technologii. Można więc zwrócić uwagę na wszechobecność drgań, ale na obecnym etapie rozpoznania możliwości odzyskiwania z ich energii, nie mogą one stanowić równie skutecznej alternatywy dla powszechnej technologii fotowoltaicznej [4]. Stanowi to jednak silną motywację do intensywnej eksploracji ich potencjału energetycznego przez środowisko naukowe, co znajduje odbicie w bogatej literaturze na ten temat.

1.2. Odzyskiwanie energii z drgań

Drgania są powszechnym zjawiskiem zarówno w przyrodzie, jak i w technologii. Generowane są przez różnorodne źródła, takie jak ruch pojazdów, turbulencje atmosferyczne czy nawet ruch ludzkiego ciała. Do niedawna, drgania były utożsamiane ze stratą energii, jednakże, rozwój technologiczny umożliwił wykorzystanie tych drgań jako potencjalnego źródła energii.

W jego najprostszej postaci, model urządzenia umożliwiającego odzyskiwanie energii z drgań można postrzegać jako ciało o pewnej masie, sprzężone z drgającym podłożem przy pomocy elementu sprężysto – tłumiącego oraz przetwornika elektromechanicznego (rys. 1.2.1). Zadaniem tego ostatniego jest konwersja energii mechanicznej, której źródłem są drgania, na energię elektryczną.



Rys. 1.2.1. Model fizyczny urządzenia odzyskującego energię drgań.

Za jeden z pierwszych opublikowanych prac na ten temat, uznać można artykuł [5], w którym opisano teoretyczne podstawy działania systemu napędzanego źródłem drgań harmonicznymi do zasilania autonomicznych urządzeń mikroelektromechanicznych (MEMS). W badaniu tym zastosowano przetwornik elektromagnetyczny, gdzie ruchomy magnes indukował prąd elektryczny w cewce. W kolejnych latach możliwości takich konwerterów były silnie eksplorowane, czego skutkiem są liczne prace naukowe na ten temat, m.in. [6, 7, 8, 9]. Na szczególną uwagę zasługują prace takie jak [10] czy [11], które dowodzą, że zwiększenie liczby stopni swobody układu może prowadzić do rozszerzenia zakresu częstotliwości drgań, z których urządzenie może efektywnie odzyskiwać energię, zwiększając w ten sposób ogólną sprawność. Podobne efekty okazuje się dawać implementacja do układu nieliniowej sprężystości [12, 13].

Rok po publikacji pracy [5], opublikowano pionierskie opracowanie [14], opisujące możliwość odzyskiwania energii drgań przy użyciu materiałów piezoelektrycznych (ang. Piezoelectric Vibration Energy Harvester - PVEH). Autorzy zbadali możliwość konwersji energii mechanicznej na elektryczną poprzez wzbudzenie drgań elementu piezoelektrycznego uderzeniami. Wykazano, sprawność procesu na poziomie 35%. W kolejnych latach zaproponowana technologia stała się najczęściej stosowanym

sposobem na odzyskiwanie energii z drgań [15, 16, 17, 18]. Warto zaznaczyć, że w pierwszej z tych prac, wyprowadzony został pełny model matematyczny PVEH. Ma on postać:

$$\hat{m}\ddot{x} + \hat{c}\dot{x} + \hat{k}x - \theta\xi = -\hat{m}\ddot{z} \quad (1.2.1a)$$

$$C_p\dot{\xi} + \frac{\xi}{R} + \theta x = 0 \quad (1.2.1b)$$

Gdzie: $x = x(t)[m]$, $z = z(t)[m]$, $\xi = \xi(t)[V]$ to odpowiednio funkcja drgań masy, funkcja drgań wymuszenia oraz funkcja napięcia elektrycznego. Parametry $\hat{m}[kg]$, $\hat{c}[kg/s]$, $\hat{k}[N/m]$ opisują odpowiednio masę, tłumienie oraz sprężystość układu. Wielkości $\theta[N/V]$, $C_p[F]$ i $R[\Omega]$ to z kolei współczynnik elektryczny, równoważna pojemność elektryczna obwodu i opór elektryczny. Kropka oraz dwie kropki nad zmienną ($\dot{\quad}$), ($\ddot{\quad}$), oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną tej zmiennej względem czasu.

Podobnie jak w przypadku urządzeń elektromagnetycznych, intensywnie analizowany był przyrost sprawności PVEH o dwóch stopniach swobody [19], [20] lub charakteryzującym się nieliniową sprężystością [21], [22].

Pierwszą konstrukcję wyposażoną w przetwornik elektrostatyczny zaproponowano w [23]. Sprawność urządzenia została zoptymalizowana poprzez wzbogacenie standardowej konstrukcji o układ dostosowujący odległość okładek kondensatora – przetwornika, do zadanych warunków pracy. Na uwagę zasługuje fakt, że układ ten zasilony został wyłącznie energią wygenerowaną przez urządzenie. W kolejnych latach technologii tej poświęcono znacznie mniej uwagi, co spowodowane jest prawdopodobnie trudnościami w implementacji podobnych rozwiązań. Niemniej jednak, powstałe opracowania dowodzą ich skuteczności, zwłaszcza pod względem możliwości uzyskiwania wysokich napięć przy niewielkich rozmiarach konstrukcji [24, 25, 26].

Choć wskazane powyżej rodzaje przetworników elektromechanicznych stanowią niewielką część obszernej rodziny urządzeń tego typu, to jednak w zdecydowanie przeważającej liczbie prac naukowych rozważa się zastosowanie właśnie jednego z nich.

W tabeli 1.2.1 przedstawiono zestawienie najistotniejszych wyróżników najpowszechniej stosowanych przetworników, sporządzone na podstawie [27, 28, 29].

Tabela 1.2.1. Zestawienie cech najczęściej stosowanych przetworników elektromechanicznych.		
Elektromagnetyczne	Piezoelektryczne	Elektrostatyczne
<p>Duża dostępność na rynku komercyjnym,</p> <p>wysokie prądy i niskie napięcia wyjściowe,</p> <p>napięcie wyjściowe maleje wraz z wielkością urządzenia,</p> <p>duża wytrzymałość zmęczeniowa,</p> <p>skomplikowana budowa.</p>	<p>Najłatwiejsza aplikacja w zastosowaniach opartych na drganiach.</p> <p>może być stosowane w urządzeniach o charakterze udarowym.</p> <p>wysokie napięcia, niskie prądy, prąd maleje wraz z wielkością urządzenia,</p> <p>szeroki wybór materiałów piezoelektrycznych.</p>	<p>Możliwość dostosowania gęstości energii,</p> <p>doskonale nadaje się do zastosowań w urządzeniach mikroelektromechanicznych.</p> <p>bardzo wysokie napięcie wyjściowe, nawet przy niewielkich częstotliwościach,</p> <p>właściwe tylko dla drgań o amplitudzie rzędu kilku mikrometrów,</p> <p>trudne w implementacji.</p>

Cechą łączącą urządzenia omówione w powyższym przeglądzie, jest sposób wzbudzenia – drgania mas indukowane są pośrednio poprzez drgania podstawy, zatem wymuszenie ma tutaj charakter kinematyczny. Drgania układu mogą być jednak wywołane również w inny sposób – układ może być wzbudzony poprzez względny ruch płynu, w którym jest zanurzony.

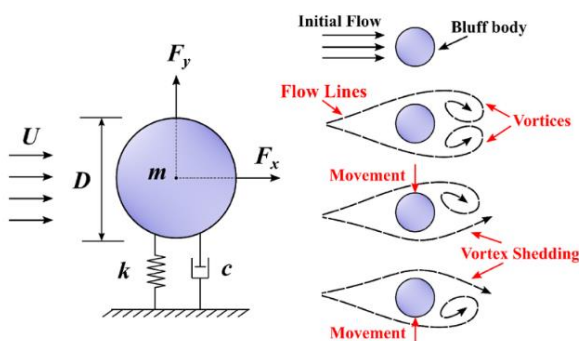
1.3. Odzyskiwanie energii drgań wzbudzonych przepływem

Drgania wzbudzone przepływem (ang. Flow Induced Vibration - FIV) to bardzo powszechne zjawisko fizyczne w dziedzinie inżynierii. Drgania te powstają na skutek niestabilności przepływu powstających podczas opływania smukłej struktury. Choć FIV mogą powodować uszkodzenia i ogromne straty ekonomiczne, mają również duży potencjał do wykorzystania ich jako źródła energii odnawialnej.

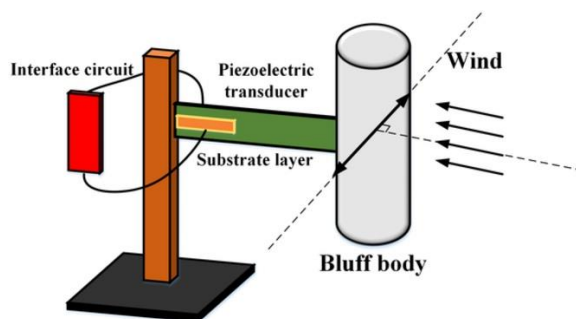
Wskazać można wiele mechanizmów wzbudzenia drgań przepływem, jednak w kontekście technologii EH największy potencjał wykazują: wzbudzenie wirami von Karamana (ang. Vortex Induced Vibration - VIV) oraz galopowanie (ang. Galloping) [30].

Odzyskiwanie energii drgań wzbudzonych wirami von Karamana

Jest to zjawisko występujące w dynamice płynów, które polega na wzbudzeniu drgań struktury poprzez oddzielające się wiry von Karmana. Wir Karmana jest to niestabilność aerodynamiczna, która pojawia się, gdy płyn przepływa wokół ciała o obłej powierzchni, na przykład cylindra. Podczas przepływu płynu wokół ciała, na skutek różnic ciśnień, przy powierzchni cylindra tworzą się wiry, które oddzielają się okresowo z obu stron cylindra. Oddzielanie wirów powoduje zmianę sił aerodynamicznych działających na cylindra i w efekcie prowadzi do drgań struktury (rys. 1.3.1).



Rys. 1.3.1. Schemat wzbudzenia wirami von Karamana [31].

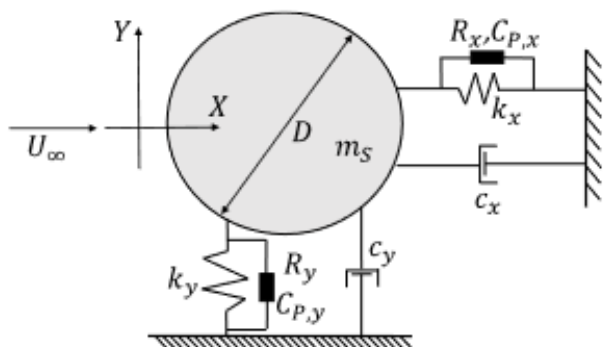


Rys. 1.3.2. Schemat urządzenia odzyskującego energię z VIV [32].

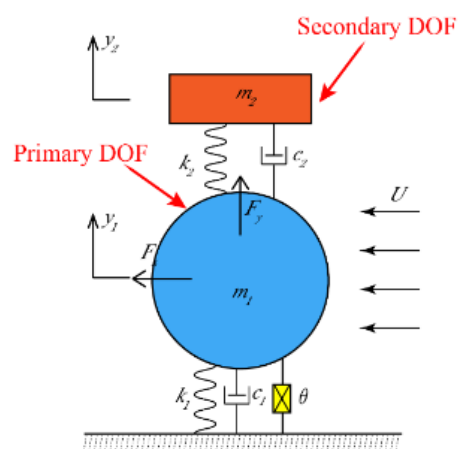
Najprostszym modelem urządzenia odzyskującego energię z VIV jest belka wspornikowa z naklejoną łąką piezoelektryczną, połączona z cylindrem na jej swobodnym końcu (rys. 1.3.2). W wyniku działania naprzemiennych sił wywołanych wirami Karamana dochodzi do drgań opływającego ciała i w konsekwencji do cyklicznego odkształcania piezoelektryka, w skutek czego, generuje on przemienne napięcie elektryczne.

Efektywność odzyskiwania energii z VIV jest wyższa, gdy urządzenie pracuje w zakresie częstotliwości synchronizacji (lock-in) [33]. Gdy liczba Reynoldsa przepływu przekracza pewną wartość, drgania są niesynchronizowane, ich amplituda gwałtownie maleje, a efektywność przechwytywania

energii spada. Dlatego poszerzenie szerokości zakresu częstotliwości synchronizacji stało się celem szeregu badań. W badaniu [34] zbadano wpływ stosunku wymiarów cylindra na drgania wzbudzone wirami. Wyniki sugerują, że zwiększenie tego stosunku nie tylko zwiększa amplitudę drgań, ale także poszerza zakres częstotliwości synchronizacji. Praca [35] dotyczy analizy wpływu sztywności elementu sprężystego na drgania wzbudzone wirami karamana w urządzeniu do odzyskiwania energii płynącej wody przy wysokich liczbach Reynoldsa. Wyniki eksperymentalne sugerują, że maksymalna amplituda i zakres częstotliwości synchronizacji systemu są ściśle związane ze sprężystością sprężyny, a zwiększenie częstotliwości własnej układu prowadzi do zwiększenia amplitudy odpowiedzi i poszerzenia zakresu częstotliwości systemu. Interesujący rezultat przyniosła też modyfikacja zaproponowana w [36], gdzie standardową konstrukcję wzbogacono o dodatkowy, nieruchomy cylinder, ustawiony przed cylindrem ruchomym. Dodatkowy cylinder spowodował powstanie drugiej ścieżki wirów, co spowodowało rozszerzenie zakresu synchronizacji. Istotne wnioski wysnuto również w badaniu [37]. Analizowano tam wpływ liczby stopni swobody układu na efektywność odzyskiwania energii. Wyniki wskazują, że system o dwóch stopniach swobody (rys. 1.3.3) wykazuje znacznie wyższą efektywność niż układ o jednym stopniu swobody. Podobne wnioski wyciągnięto z badań [38] oraz [39], gdzie badano układy dwumasowe (rys. 1.3.4).



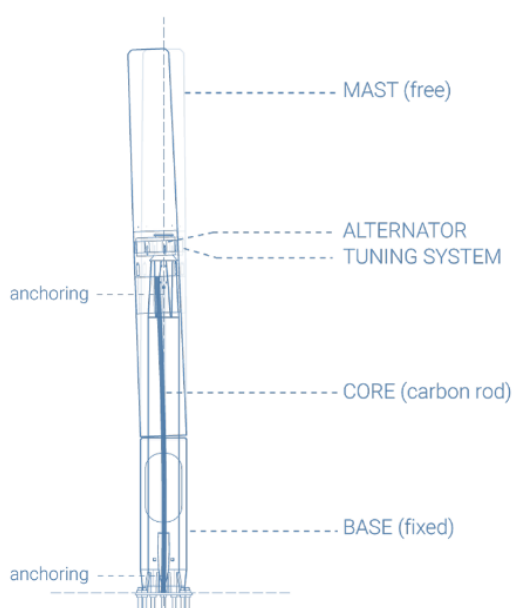
Rys. 1.3.3. Schemat urządzenia drgającego w płaszczyźnie [37].



Rys. 1.3.4. Schemat urządzenia dwumasowego [39].

W badaniach [40, 41] autorzy dowodzą, że urządzenie może zostać usprawnione poprzez wprowadzenie nieliniowej sprężystości, czego skutkiem jest zmniejszenie częstości własnej struktury, a to z kolei umożliwia efektywną pracę przy niskich prędkościach przepływu. W artykule [42] opisano też analizę, gdzie podstawowa struktura została wzbogacona o magnesy powodujące delinearizację potencjału urządzenia, co spowodowało, że sprawność odzyskiwania energii urządzenia wzrosła o 29%, a zakres częstotliwości synchronizacji został poszerzony o 138% .

Jednym z najciekawszych zastosowań omawianej technologii pozostają jednak elektrownie Bladeless Vortex [43]. Kluczowym ich wyróżnikiem, względem klasycznych elektrowni wiatrowych, jest brak wirników. Sprawia to, że elektrownia jest znacznie cichsza i bardziej przyjazna dla środowiska niż tradycyjne rozwiązania. Ponadto, brak wirników eliminuje problem kolizji z latającymi zwierzętami, do których często dochodzi w przypadku turbin wiatrowych, a ponadto znacznie ogranicza przestrzeń zajmowaną przez urządzenie. Niebagatelną zaletą elektrowni Bladeless Vortex jest jej estetyczny wygląd (rys. 1.3.5), co może pomóc w zmniejszeniu oporu społecznego wobec budowy elektrowni w niektórych obszarach. Kluczowym atutem jest jednak możliwość zredukowania kosztów wytworzenia energii do 70% względem elektrowni wiatrowych o poziomej osi obrotu i podobnej wysokości [43].



Rys. 1.3.5a. Schemat budowy Bladeless Vortex [43]

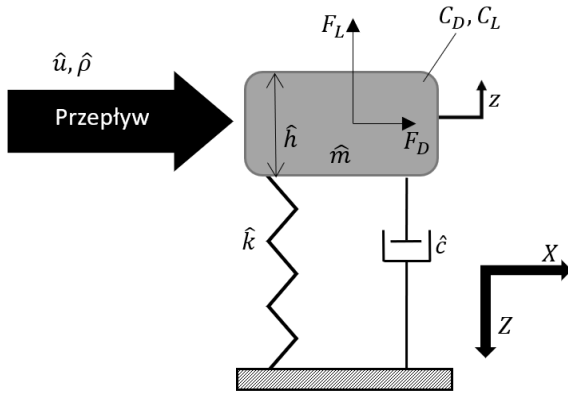


Rys. 1.3.5b. Bladeless Vortex w trakcie pracy [43]

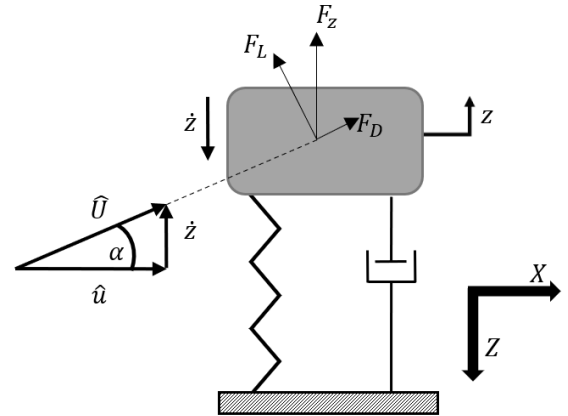
Należy jednak mieć na uwadze, że w czasie powstawania niniejszego opracowania (05.2023), Bladeless Vortex pozostaje stosunkowo nową technologią, toteż jej możliwości nie są zbadane równie dobrze jak jej tradycyjnych odpowiedników. Trzeba również podkreślić, że mechanizm wzbudzenia urządzenia ma istotną wadę – wiry von Karamana indukują się tylko ograniczonym przedziale liczb Reynoldsa, co oznacza, że urządzenie zaprojektowane być musi z myślą o odzyskiwaniu energii z przepływów o ściśle określonym zakresie prędkości. Jeśli zatem urządzenie wystawione zostanie na działanie przepływu o prędkości wyższej niż przewidziana, to nie będzie ono generować energii, pomimo tego, że energia przepływu jest większa niż byłaby w przewidzianych warunkach pracy. Zastosowanie magnetycznego układu strojącego niweluje problem, ale nie eliminuje go. Problemu tego można uniknąć poprzez wykorzystanie innego zjawiska do wzbudzenia drgań przepływem – galopowania.

Odzyskiwanie energii drgań wzbudzonych galopowaniem poprzecznym

Istotę galopowania poprzecznego przedstawić można analizując siły działające na tłumiony oscylator harmoniczny o jednym stopniu swobody, wystawiony na działanie przepływu (rys. 1.3.6a).



Rys. 1.3.6a. Oscylator wystawiony na działanie przepływu.



Rys. 1.3.6b. Oscylator wystawiony na działanie przepływu – galopowanie.

Równanie ruchu takiego oscylatora ma postać:

$$\hat{m} \ddot{z} + \hat{c} \dot{z} + \hat{k} z = F_L = -\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{u}^2 \hat{h} C_L \quad (1.3.1)$$

Gdzie: $\hat{m}[kg]$, $\hat{k}[N/m]$ oraz $\hat{c}[kg/s]$ to odpowiednio masa oscylatora, sprężystość sprężyny i współczynnik tłumienia sprężyny. Parametry $\hat{u}[m/s]$, $\hat{\rho}[kg/m^2]$ i $\hat{h}[m]$ to natomiast prędkość przepływu, gęstość ośrodka oraz wymiar charakterystycznych opływającego ciała. Ponadto, właściwości aerodynamiczne ciała opisane są współczynnikiem siły oporu aerodynamicznego C_D oraz współczynnikiem siły nośnej C_L . Wielkość $z = z(\tau)$ opisuje współrzędną położenia masy w czasie τ .

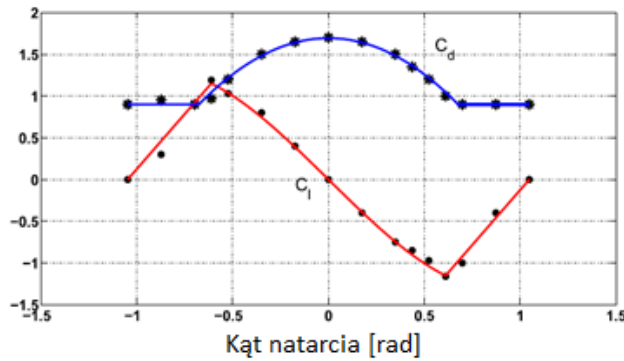
Na oscylator działa więc znana, stała siła aerodynamiczna. Jeśli jednak, w wyniku działania siły nośnej F_L lub zadania niezerowych warunków początkowych, masa zacznie poruszać się w kierunku Z , to nie będzie ona poddana wyłącznie przepływowi \hat{u} , ale wypadkowemu przepływowi \hat{U} , odchylenemu od pierwotnego o kąt α , zależny od prędkości ruchu \dot{z} ciała (rys. 1.3.6b). W konsekwencji, w kierunku, w którym ciało może się poruszać – w kierunku Z – nie działa już siła o stałej wartości, ale nieznaną siłą $F_Z = F_Z(\alpha)$. Zakładając, że $\alpha \ll 1$, siłę tę można wyrazić w postaci szeregu Maclaurina:

$$F_Z(\alpha) \approx -\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{u}^2 \hat{h} C_L - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{u}^2 \hat{h} \cdot (a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4)) \quad (1.3.2)$$

Gdzie współczynniki $a_i, i = 1,2,3$, pozostają nieznane. Zakładając, że opływane ciało jest symetryczne względem osi równoległej do kierunku przepływu \hat{u} , przyjąć można, że: $C_L = 0$ oraz $a_2 = 0$. Można zauważyć, że dla $\alpha \ll 1, \alpha \approx \frac{\dot{z}}{\hat{u}}$. Równanie ruchu omawianego oscylatora przyjmie wtedy postać:

$$\hat{m} \ddot{z} + \hat{c} \dot{z} + \hat{k} z = F_L = -\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{u}^2 \hat{h} \left(a_1 \frac{\dot{z}}{\hat{u}} + a_3 \left(\frac{\dot{z}}{\hat{u}} \right)^3 \right) \quad (1.3.3)$$

Zasadność powyższych założeń, uwarunkowana jest spełnieniem warunku quasi-stacjonarności [44]. Siła aerodynamiczna działająca na oscylator jest więc nieliniowo zależna od prędkości ruchu oscylatora, można więc ją postrzegać jako nieliniowe tłumienie aerodynamiczne. Współczynniki a_1 i a_3 to wielkości opisujące właściwości aerodynamiczne opływanego ciała i wyznacza się je eksperymentalnie dla danego kształtu. Można jednak wykazać, że $a_1 = \frac{dC_L}{d\alpha} + C_D$ [44].



Rys. 1.3.7. Zależność współczynników aerodynamicznych przekroju kwadratowego od kąta natarcia

Istotną kwestią jest, że istnieją przekroje (rys. 1.3.7), dla których:

$$a_1 = \frac{dC_L}{d\alpha} + C_D < 0 \quad (1.3.4)$$

Wobec tego, dla wystarczająco dużej prędkości przepływu \hat{u} , spełniony zostanie warunek:

$$\hat{c} + \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{u} \hat{h} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) < 0 \quad (1.3.5)$$

oznaczający, że całkowite tłumienie liniowe w układzie jest ujemne. Wywoła to drgania o rosnącej amplitudzie, która ograniczona zostanie poprzez wpływ nieliniowego składnika tłumienia, prowadząc do powstania cyklu granicznego. Nierówność (1.3.4) nazywana jest kryterium Den Hartoga [45].

Spełnienia kryterium Den Hartoga należy spodziewać się przede wszystkim, po kształtach o nieobłej powierzchni natarcia. Wartości współczynników a_1 i a_3 dla wybranych kształtów zestawiono w tabeli 1.3.1.

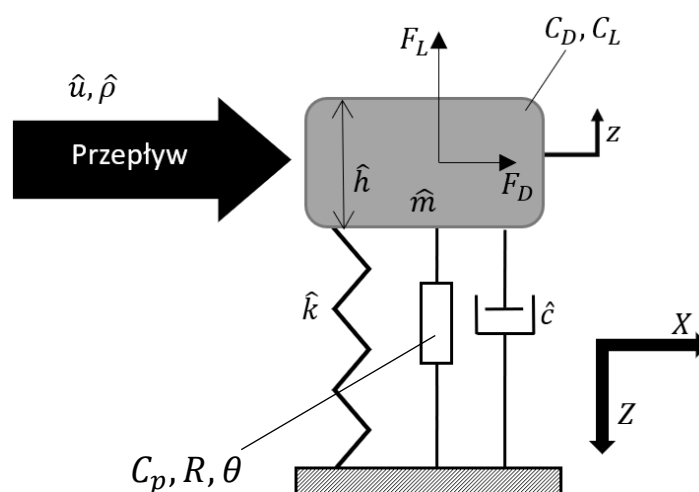
Tabela 1.3.1. Wartości a_1 i a_3 dla wybranych kształtów [46]		
Przekrój	a_1	a_3
Kwadrat	-2,3	18
Trójkąt równoramienny	-2,9	6,2
D-kształtny	-0,79	0,19

Energię galopującego oscylatora odzyskać można poprzez sprzężenie go z przetwornikiem elektromechanicznym, w tym przypadku, piezoelektrykiem. Zgodnie z (1.2.1) oraz (1.3.3), model urządzenia odzyskującego energię z poprzecznego galopowania przyjmie postać:

$$\hat{m} \ddot{z} + \hat{c} \dot{z} + \hat{k} z - \theta \xi = F_L = -\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{u}^2 \hat{h} \left(a_1 \frac{\dot{z}}{\hat{u}} + a_3 \left(\frac{\dot{z}}{\hat{u}} \right)^3 \right) \quad (1.3.6a)$$

$$C_p \dot{\xi} + \frac{\xi}{R} + \theta x = 0 \quad (1.3.6b)$$

Jego model fizyczny przedstawiono natomiast na rysunku 1.3.8.



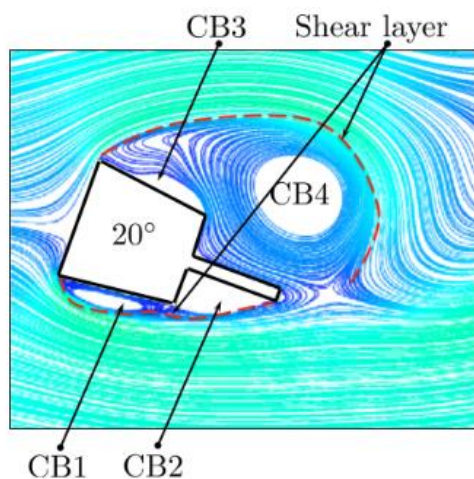
Rys. 1.3.8. Schemat urządzenia odzyskującego energię galopowania poprzecznego.

Pierwsze badania, opisujące możliwość odzyskania energii z drgań wzbudzonych galopowaniem (ang. – Galloping Energy Harvester - GEH) opisano w artykule [46]. Badano tam uproszczony model urządzenia, gdzie odzyskiwaną energię elektryczną modelowano przy pomocy tłumienia strukturalnego. Przedstawiono tam wniosek, że maksymalna sprawność urządzenia determinowana jest wyłącznie przez współczynniki a_1 i a_3 . Dowiedzono tam również, że urządzenie spełnia warunek quasi-stacjonarności. Badania te stały się podstawą opracowania [47]. Przedstawiono w nim analityczne, numeryczne i eksperymentalne badania nad GEH, analizując przy tym pełny model elektromechaniczny oraz wpływ

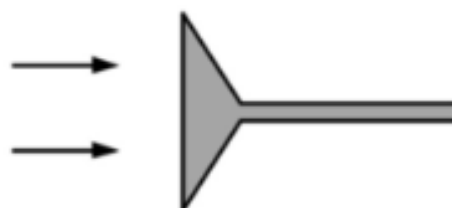
tłumienia strukturalnego na sprawność. Zdaniem autora niniejszej rozprawy, ze względu na ogólność przedstawionych wniosków, prace [46, 47] pozostają najbardziej wartościowymi opracowaniami naukowymi na temat GEH.

W istotnym badaniu [48] wykazano, że aproksymacja funkcji (1.3.2) przy pomocy szeregu wyższego rzędu, nie ma istotnego wpływu na uzyskane rozwiązania.

Z uwagi na wykazane w pracy [47] fundamentalne znaczenie kształtu opływającego ciała, wiele uwagi poświęcono poszukiwaniom geometrii zapewniającej najwyższą sprawność urządzenia [49, 50, 51, 52]. Można z nich wyciągnąć zbiorczy wniosek, że dodanie do opływającej masy rozdzielacza strugi po stronie przeciwnej względem powierzchni natarcia (rys. 1.3.9), sprzyja generowaniu większych mocy. Warto jednak zaznaczyć, że dotychczasowe badania na ten temat oparte były na analizie właściwości różnych wariantów arbitralnie wyselekcjonowanych przekrojów. Poszukiwanie najkorzystniejszej geometrii na drodze optymalizacji topologicznej pozostaje więc atrakcyjnym kierunkiem badań.



Rys. 1.3.9a. Symulacja przepływu wokół ciała z rozdzielaczem strugi [50].



Rys. 1.3.9b. Przykład profilu z rozdzielaczem strugi [52].

Pośród sposobów na usprawnienie GEH, często wskazuje się rozbudowę urządzenia o dodatkowy stopień swobody [53, 54, 55, 56, 57]. W pracach tych przedstawiono jednak niewłaściwą metodykę porównywania układów o dwóch stopniach swobody z układem o jednym stopniu swobody, opartą na wyrażonych numerycznie zestawieniach mocy lub napięć generowanych przez układy o arbitralnie wybranych parametrach. Wnioski wyciągnięte na podstawie takich badań, choć udzielają cennych przesłanek, nie mogą być użyte do wystosowania ogólnej oceny właściwości wariantu urządzenia. Wskazać należy jednak, że artykuły [53, 55] potwierdzają eksperymentalnie poprawność modeli urządzeń o dwóch stopniach swobody.

Innym, silnie eksplorowanym kierunkiem rozwoju GEH, jest badanie wpływu nieliniowej sprężystości na jego wydajność. W artykułach [58, 59] przedstawiono metodę analizy wpływu współczynnika nieliniowej sprężystości na charakter zachodzącej bifurkacji Hopfa. W pracy [60] omówiono koncepcję urządzenia o modyfikowalnej strukturze mechanicznej, która pozwalała na dostosowanie jego charakterystyki sprężystości. Na podstawie badań numerycznych i eksperymentalnych potwierdzono, że nieliniowość sprzyja zwiększeniu sprawności GEH przy niewielkich prędkościach przepływu. W badaniu [61] wykazano natomiast, że układ o nieliniowej i niesymetrycznej charakterystyce sprężystości może cechować się obniżoną prędkością pracy. Skutkiem niepożądanym jest jednak zmniejszenie generowanej mocy. Artykuł [62], którego autor niniejszej pracy jest współautorem, stanowi próbę oceny wpływu różnych typów nieliniowości na moc urządzenia. Na podstawie powyższych badań nie można jednak wyciągnąć ogólnych wniosków na temat badanych wariantów. Analizuje się tam układy o ściśle zdefiniowanych parametrach i nie można wykluczyć, że dla innego ich zestawu, konkluzje byłyby inne. Ponadto, sposoby porównywania wariantów są niejednolite, co utrudnia przeprowadzenie metaanalizy przedstawionych danych. Prace te można więc uznać za bardzo wartościowe badania wstępne, jednak nie można na ich podstawie dokonać definitywnej oceny urządzeń różnych typów. Wyjątek stanowi tutaj rozprawa [63], której autor dokonuje analizy efektywności podstawowych wariantów nieliniowych GEH, jednak, jak zostanie wykazane w dalszej części pracy, zastosowana metoda obliczeń, nie pozwala na określenie cech układów o silnej nieliniowości.

Wskazać można również szereg badań, których przedmiotem są GEH o jeszcze bardziej złożonej strukturze. Interesującym przykładem jest tutaj praca [64], gdzie autorzy sugerują możliwość zmniejszenia prędkości pracy oraz zwiększenia generowanej mocy urządzenia poprzez zastosowanie dwóch różnych sprzężonych przetworników elektromechanicznych. W artykule [65] zaprezentowano wariant, którego przetwornik piezoelektryczny był zarówno cyklicznie odkształcany przez drgania, jak i wymuszany udarowo. Zgodnie z raportem autorów, w skutek wykorzystania nietypowego sposobu wzbudzenia, sprawność urządzenia wzrosła o 80%, względem wersji klasycznej. Efekt wzmocnienia na poziomie 40% opisano w pracy [66], dotyczącej urządzenia o układzie kinematycznym utrzymującym stałą orientację kątową opływającego ciała. Publikacja [67] zawiera opis badań nad tandemowym urządzeniem składającym się z dwóch oscylatorów sprzężonych magnetycznie. Wykazano, że odległość pomiędzy magnesami sprzęgającymi podukłady, ma istotny wpływ na moc generowaną przez generator.

Wartość powyższych rozwiązań ocenia się na podstawie odniesienia uzyskanych wyników do informacji na temat wariantów prostszych. Jak jednak wskazano wcześniej, właściwości wariantów

prostszych nie są rozpoznane na tyle dokładnie, aby odnoszenie się do nich podczas oceny innych urządzeń, prowadziło do wniosków, co do poprawności których, można mieć pewność.

Z powyższego przeglądu literatury dotyczącej odzyskiwania energii z galopowania poprzecznego wyłania się więc pewna luka w stanie wiedzy na ten temat. Otóż, pomimo intensywnego – zwłaszcza w ostatnich latach – rozwoju tej dziedziny oraz opracowywania coraz bardziej zaawansowanych wariantów urządzeń, fundamentalne informacje na temat wariantów elementarnych, takich jak układy o dwóch stopniach swobody czy proste układy nieliniowe, pozostają nieokreślone lub nieusystematyzowane.

1.4. Cele pracy

Niniejsza praca ma stanowić odpowiedź na wskazaną na końcu poprzedniego podrozdziału lukę badawczą. Pierwszym celem jest więc określenie uniwersalnego zestawu parametrów, który w wyczerpujący sposób, opisywał będzie sprawność urządzeń odzyskujących energię galopowania poprzecznego. Drugim z celów jest zdefiniowanie zestawu parametrów kryterialnych dla podstawowego wariantu – urządzenia liniowego o jednym stopniu swobody, a także dla grupy liniowych urządzeń o dwóch stopniach swobody oraz wariantów o nieliniowej sprężystości. Uzyskane kryteria posłużyć mają do porównania sprawności wszystkich urządzeń. Porównanie to ma mieć charakter ogólny i nie odwoływać się do żadnego arbitralnego zestawu parametrów układów. Celem dodatkowym jest określenie zjawisk wywołujących różnicę sprawności poszczególnych wariantów.

1.5. Struktura pracy oraz informacje dodatkowe

Cele pracy są realizowane na przestrzeni czterech kolejnych rozdziałów. W rozdziale drugim, dotyczącym wariantu liniowego o jednym stopniu swobody, przedstawiono bezwymiarowy model matematyczny urządzenia oraz ogólne równanie pozwalające na sformułowanie sprawności układu. Następnie zapostulowano potrzebę rozwiązania modelu matematycznego urządzenia, wskazano metodę umożliwiającą realizację tego celu oraz uzasadniono wybór ogólnej postaci rozwiązań modelu. W dalszej części rozdziału przedstawiona została procedura rozwiązywania modelu matematycznego i analitycznego wyprowadzania sprawności układu. Na podstawie uzyskanego wyrażenia opisującego sprawność, sformułowano wielkości kryterialne opisujące sprawność układu. W ostatniej części rozdziału omówiono zjawiska determinujące te kryteria.

Rozdział trzeci dotyczy analizy sprawności układów o dwóch stopniach swobody. W pierwszej jego części wskazano sześć podwariantów, których sprawność wyprowadzana jest w dalszej części pracy. Określone wielkości kryterialne porównano z analogicznymi wielkościami opisującymi układ o jednym stopniu swobody.

Na początku rozdziału czwartego zdefiniowane są układy o nieliniowej sprężystości. Następnie wykazano zasadność założenia rozwiązań tych układów w postaci eliptycznych funkcji Jakobiego, omawiając przy tym ich istotę. W kolejnych częściach pracy, poprzez zastosowanie autorskiej procedury, określono stosunkową zmianę wartości parametrów kryterialnych poszczególnych układów w odniesieniu do analogicznych wielkości wariantu podstawowego.

Ostatni, piąty rozdział, zawiera zestawienie uzyskanych wyników oraz wnioski.

Należy zaznaczyć, że na początku każdego z rozdziałów 2 – 4 zamieszczono odniesienia do prac, które poruszały podobną tematykę do tej, jakiej dotyczy dany rozdział.

Choć praca ma charakter analityczny, wyniki często zwizualizowane są przy pomocy wykresów, do sporządzenia których, niezbędne jest przyjęcie pewnych danych w postaci numerycznej. Jako, że ich każdorazowe wskazywanie w tekście mogłoby utrudniać analizę treści, zdefiniowano zestaw domyślnych wartości parametrów. Są to:

$$\rho = 0,02, k_n = 1, k = 1, k_2 = 0,3, \kappa = \kappa_1 = 0,9, \kappa_2 = 1,3, r = 1, M = 0,5, a_1 = 2,3, a_3 = -18, c = c_1 = 0,2, c_2 = 0,15.$$

Należy przyjąć, że jeśli w tekście, legendzie wykresu lub jego opisie nie wskazano innych wartości poszczególnych parametrów, to grafika została sporządzona na ich podstawie. Obliczenia numeryczne, służące ocenie poprawności rozwiązań analitycznych, realizowano przy pomocy zestawu narzędzi pakietu Wolfram Mathematica.

2. Analiza wariantu podstawowego

Przez wariant podstawowy rozumie się tutaj urządzenie o liniowej charakterystyce sprężystości oraz jednym stopniu swobody. Choć analiza układów tego typu jest przedmiotem opracowań [46, 47], to jednak zdaniem autora niniejszej pracy, nie zawierają one wyczerpujących informacji o potencjale użytkowym urządzenia. Zasadne jest więc, aby zaprezentować tutaj pogłębioną jego charakterystykę. Ponadto, ten najprostszy wariant GEH, stanowić będzie układ referencyjny, niezbędny do oceny wariantów bardziej skomplikowanych, zatem tym bardziej istotne jest, aby jego charakterystyka znalazła się w tej pracy.

W literaturze, jako miarę efektywności GEH, uznaje się zwykle generowane przez nie napięcie elektryczne [54, 60], wygenerowaną moc elektryczną [48, 50] lub sprawność [46 47]. Ta ostatnia wielkość niesie informację najbardziej kompleksową, a ze względu na swój inherentnie bezwymiarowy charakter może być stosowana do porównania nie tylko wariantów tego samego urządzenia, ale i konwerterów energii różnych typów. Zatem to właśnie sprawność będzie podstawą oceny poszczególnych typów GEH.

Przez sprawność rozumie się stosunek średniej mocy wygenerowanej przez urządzenie \widehat{P}_g w czasie równym okresowi \widehat{T} funkcji napięcia $\xi(\tau)$ oraz powierzchniowej gęstości mocy przepływu \widehat{P}_f . Wprowadzając wielkości bezwymiarowe (2.1), sprawność układu można wyrazić jako:

$$y = \frac{z}{\widehat{h}}, \quad v = \xi \frac{\widehat{h}}{c_p}, \quad \widehat{\omega}_n = \sqrt{\frac{\widehat{k}}{\widehat{m}}}, \quad c = \frac{\widehat{c}}{\widehat{m}\widehat{\omega}_n}, \quad u = \frac{\widehat{u}}{\widehat{h}\widehat{\omega}_n}, \quad \rho = \widehat{\rho} \frac{\widehat{h}^2}{2\widehat{m}}, \quad r = C_p R \widehat{\omega}_n, \quad (2.1)$$

$$\kappa = \frac{\theta}{\widehat{m} \widehat{h} \widehat{\omega}_n^2}, \quad t = \tau \widehat{\omega}_n.$$

$$\eta = \frac{\widehat{P}_g}{\widehat{P}_f} = \frac{\frac{1}{\widehat{T}} \int_0^{\widehat{T}} \frac{\xi^2(\tau)}{\widehat{r}} d\tau}{\frac{1}{2} \widehat{\rho} \widehat{h} \widehat{u}^3} = \frac{\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \frac{v^2(t)}{r} dt}{\rho u^3} \quad (2.2)$$

Gdzie T_c oznacza okres funkcji $v(t)$. Do określenia sprawności układu jest więc niezbędna znajomość funkcji bezwymiarowego napięcia $v = v(t)$, którą można wyznaczyć poprzez rozwiązanie bezwymiarowego modelu matematycznego układu. Zgodnie z (1.3.6) oraz (2.1), ma on postać:

$$\ddot{y} + c\dot{y} + y - v = \rho \left(a_1 u \dot{y} + a_3 \frac{\dot{y}^3}{u} \right) \quad (2.3a)$$

$$\kappa \dot{v} + \frac{v}{r} + \dot{y} = 0 \quad (2.3b)$$

Dynamika układu jest więc opisana nieliniowym układem równań różniczkowych drugiego rzędu, którego ścisłe rozwiązanie nie jest znane. Funkcja $v = v(t)$ może jednak zostać określona w sposób przybliżony metodą bilansu harmoniczných. Jako że indukowanie się napięcia w układzie wywołane będzie pośrednio poprzez ruch rezonatora, uzasadnione jest założenie, że przebiegi $v = v(t)$ oraz $y = y(t)$ będą opisane jednakowymi funkcjami czasu, różniącymi się amplitudą. Należy również podkreślić, że równanie (2.3a) to w istocie model matematyczny liniowego oscylatora harmonicznego poddanego działaniu siłom tłumienia o różnym charakterze. Składniki $c\dot{y}$ oraz $-\kappa v$ to opory ruchu prowadzące do zaniku drgań. Dla piezoelektryka o zerowej pojemności elektrycznej " $-\kappa v$ " będzie tłumieniem w rozumieniu ścisłym, natomiast piezoelektryk rzeczywisty generował będzie tłumienie przesunięte w fazie. Z kolei składnik $\rho a_1 u \dot{y}$, zgodnie z istotą działania urządzenia, doprowadzać ma energię do układu, przewyższając przy tym sumaryczną wartość oporów ruchu i prowadząc w ten sposób do samowzbudzenia układu i wykładniczego wzrostu amplitudy jego drgań. Nieliniowe tłumienie $\rho a_3 \frac{\dot{y}^3}{u}$, spowoduje natomiast uformowanie się cyklu granicznego. W związku z powyższym, można przewidywać, że ruch omawianego układu będzie taki jak ruch liniowego oscylatora harmonicznego o modelu matematycznym

$$\ddot{y}^* + y^* = 0 \quad (2.4)$$

z tą różnicą, że ustalona amplituda drgań jego będzie inna niż ta, wynikająca z zadanych warunków początkowych. Skutkiem takiego założenia jest pominięcie zniekształcenia cyklu granicznego wywołanego przez nieliniowe tłumienie. Można również przewidzieć, że niezerowa pojemność elektryczna układu powodować będzie wystąpienie względnego przesunięcia fazowego szukanych funkcji.

Zgodnie z powyższymi obserwacjami założono, że stan ustalony rozwiązań układu (2.3), wystarczająco dokładnie opisany będzie funkcjami:

$$y = A_y \cos(\omega t) \quad (2.5a)$$

$$v = A_v \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.5b)$$

gdzie cztery niewiadome wielkości A_y , A_v , $\omega = \frac{\hat{\omega}}{\hat{\omega}_n}$, φ to kolejno: bezwymiarowa amplituda drgań, bezwymiarowa amplituda napięcia, bezwymiarowa częstość drgań, i przesunięcie fazowe pomiędzy drganiami oscylatora a przebiegiem napięcia. Parametr $\hat{\omega}$ to nieznaną, wymiarową częstość drgań układu. Rozwiązania o postaci (2.5) podstawione zostają do modelu (2.3), co skutkuje przekształceniem układu równań różniczkowych do układu równań algebraicznych:

$$A_y (1 - \omega^2) \cos(\omega t) + A_y^3 \frac{\rho \omega^3 a_3}{u} \sin^3(\omega t) + A_y \omega (\rho a_1 - c) \sin(\omega t) - A_v \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.6a)$$

$$A_v \left(\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{r} - \omega \kappa \sin(\omega t + \varphi) \right) - A_y \omega \sin(\omega t) = 0 \quad (2.6b)$$

Będzie on spełniony dla każdej chwili czasu t wtedy i tylko wtedy gdy suma współczynników przy odpowiednich funkcjach czasu będzie równa zero. Uwzględniając tożsamości trygonometryczne na sumę argumentów, na podstawie równania (2.6b) otrzymano:

$$\frac{A_v (\cos(\varphi) - r\kappa\omega \sin(\varphi))}{r} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\frac{A_v (r\kappa\omega \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + A_y r\omega}{r} = 0 \quad (2.7b)$$

Z równania (2.7a) wynika, że:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{1}{\omega \kappa r} \quad (2.8)$$

zatem:

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(\omega \kappa r)^2 + 1}} \quad (2.9a)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega r}{\sqrt{(\omega \kappa r)^2 + 1}} \quad (2.9b)$$

Na podstawie równań (2.7b), (2.9) wyprowadzić można wyrażenie opisujące zależność pomiędzy amplitudą drgań a amplitudą napięcia:

$$A_v = -A_y \frac{r\kappa\omega}{\sqrt{1 + r^2\kappa^2\omega^2}} \quad (2.10)$$

Poprzez podstawienie tożsamości $\sin(\omega t)^3 = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)$ do równania (2.6a) i zbilansowanie jego harmonicznych, uzyskuje się pozostałe dwa równania algebraiczne niezbędne do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania modelu urządzenia. Po uwzględnieniu wcześniej wyprowadzonych relacji (2.9) oraz (2.10) przyjmują one postać:

$$A_y k_e^L \omega - A_y(\omega^2 - 1) = 0 \quad (2.11a)$$

$$A_y u \rho \omega a_1 + A_y^3 \frac{3\rho\omega^3 a_3}{4u} - A_y c \omega - A_y e^L \omega = 0 \quad (2.11b)$$

gdzie $k_e^L = \frac{r^2\kappa\omega}{1+r^2\kappa^2\omega^2}$ oraz $e^L = \frac{r}{1+r^2\kappa^2\omega^2}$ to odpowiednio sprężystość piezoelektryka oraz tłumienie elektryczne układu liniowego.

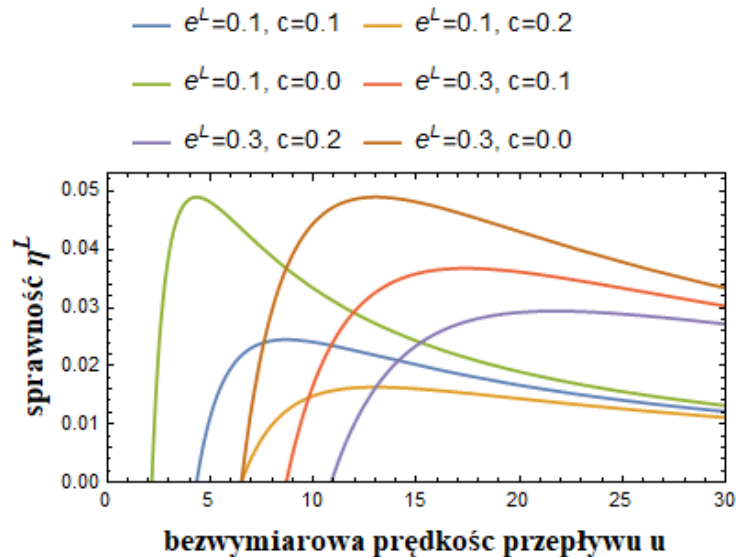
Na podstawie powyższego układu równań wykazać można, że:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{r^2\kappa(1+\kappa) - 1 \pm \sqrt{4r^2\kappa^2 + (r^2\kappa(1+\kappa))^2}}{2r^2\kappa^2} \quad (2.12a)$$

$$A_y^2 = \frac{4u(c + e^L - u\rho a_1)}{3\rho\omega^2 a_3} \quad (2.12b)$$

Niewiadome wielkości występujące w założonym rozwiązaniu (2.3) oraz tym samym, parametry niezbędne do opisu sprawności układu zostały zdefiniowane. Można wykazać, że $\forall r \in \mathbb{R} \wedge r \neq 0 \omega_1^2 > 0$, natomiast $\forall r \in \mathbb{R} \wedge r \neq 0 \omega_2^2 < 0$, należy więc wnioskować, że układ równań (2.3) ma jedno fizycznie racjonalne rozwiązanie o postaci (2.12). Aby uprościć zapis, w dalszej części pracy przyjęto więc $\omega_1 = \omega$. Wracając teraz do ogólnej definicji sprawności (2.2) i podstawiając do niej kolejno wyrażenia (2.5b), (2.10), (2.12b) uzyskano:

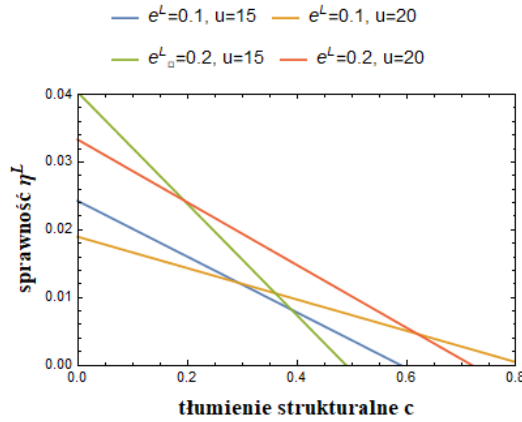
$$\begin{aligned} \eta = \eta^L &= \frac{\frac{1}{T_c} \kappa \int_0^{T_c} \frac{v^2(t)}{r} dt}{\rho u^3} = \frac{\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \frac{A_y^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{r} dt}{\rho u^3} \\ &= \frac{\frac{A_y^2}{2r} \frac{r^2 \omega^2}{1 + r^2 \omega^2}}{\rho u^3} = \frac{2e^L(c + e^L - u\rho a_1)}{3u^2 \rho^2 a_3} \end{aligned} \quad (2.13)$$



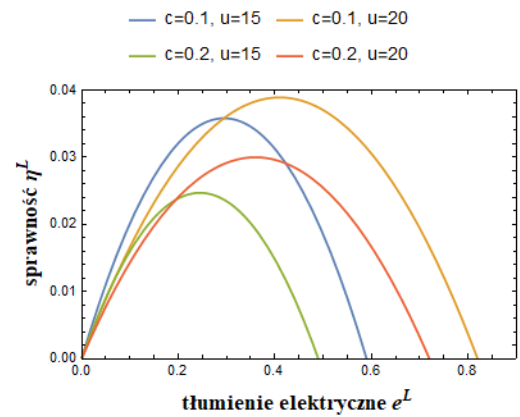
Rys. 2.1. Przykłady charakterystyk GEH dla różnych wartości tłumienia elektrycznego e^L oraz tłumienia strukturalnego c .

Zakładając, że badaniu poddany zostaje GEH z rezonatorem o niezmiennym kształcie pracujący zawsze w tym samym płynie, należy zauważyć, że jego sprawność zależy od trzech wielkości: tłumienia elektrycznego e^L , bezwymiarowego tłumienia strukturalnego c oraz bezwymiarowego tłumienia

aerodynamicznego $u\rho a_1$, które zważywszy na wyżej poczynione założenia, zależy wyłącznie od bezwymiarowej prędkości przepływu u . Charakter tych zależności zilustrowano na rys. 2.1 – 2.3.



Rys. 2.2. Zależność sprawności η^L od współczynnika tłumienia strukturalnego c dla różnych wartości tłumienia elektrycznego e^L oraz prędkości przepływu u .



Rys. 2.3. Zależność sprawności η^L od tłumienia elektrycznego e^L dla różnych wartości tłumienia strukturalnego c oraz prędkości przepływu u .

Na podstawie powyższych wykresów, wskazać można szereg charakterystycznych cech układu. Na rys. 2.1 zaobserwować można, że prędkość przepływu, przy której układ przechodzi buforcję Hopfa, zwana dalej krytyczną prędkością przepływu u_{cr} zmienia się wraz ze zmianą parametrów układu. Jej wartość wynika bezpośrednio z (2.13):

$$\eta^L = \frac{2e^L(c + e^L - u\rho a_1)}{3u^2\rho^2 a_3} = 0 \Rightarrow u = u_{cr} = \frac{c + e^L}{\rho a_1} \quad (2.14)$$

Innym faktem, na który wskazuje ten sam zestaw wykresów jest to, że niezależnie od zestawu parametrów, istnieje pewna nominalna prędkość przepływu $u = u_p^L$, dla której sprawność η^L przyjmuje wartość maksymalną, nazywaną dalej sprawnością szczytową η_p^L . Wielkości te dane są wyrażeniami:

$$\frac{\delta\eta^L}{\delta u} = 0 \Rightarrow u = u_p^L = 2\frac{c + e^L}{\rho a_1} = 2u_{cr} \quad (2.15)$$

$$\eta_p^L = \eta^L(u_p^L) = \frac{-a_1^2 e^L}{6a_3(c + e^L)} \quad (2.16)$$

Powyższe tożsamości, dla uproszczonych modeli matematycznych, zostały wyprowadzone wcześniej w [46, 47], natomiast w dalszej części rozdziału, omówiono treści całkowicie pionierskie. Powyższe tożsamości, wraz z rysunkiem 2.2 wskazują, że aby ograniczyć negatywny wpływ tłumienia strukturalnego c na sprawność η należy zmaksymalizować tłumienie elektryczne e^L , tak aby $e^L \gg c$. Mając na uwadze to, że wzrostowi tłumienia elektrycznego e^L zawsze towarzyszy liniowy wzrost

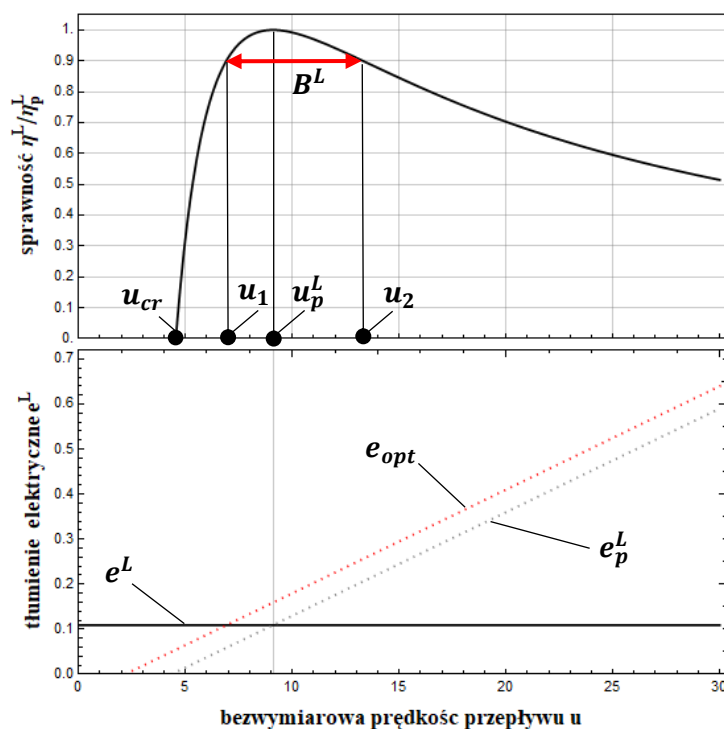
prędkości nominalnej u_p^L , należy wysnuć wniosek, że GEH pracujący przy wysokich prędkościach przepływu zawsze będzie bardziej sprawny od konfiguracji pracującej przy małych prędkościach przepływu. Należy również zaznaczyć, że dla $c = 0$ sprawność szczytowa η_p^L zależy wyłącznie od parametrów opisujących aerodynamikę opływanej części urządzenia, tj. $c = 0 \Rightarrow \eta_p^L = \frac{-a_1^2}{6a_3}$.

Teoretyczne sprawności urządzeń zapewniane przez różne kształty zestawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Teoretyczna sprawność urządzeń o różnych kształtach [46].			
Przekrój	a_1	a_3	η_p^L
Kwadrat	-2,3	18	0,048
Trójkąt równoramienny	-2,9	6,2	0,226
D-kształtny	-0,79	0,19	0,547

Rozwiązując równanie (2.15) dla e^L uzyskać można zależność definiującą wartość tłumienia elektrycznego $e^L(u_p^L) = e_p^L$ wymaganą do osiągnięcia przez układ sprawności η_p^L (2.17). Jest to wniosek trywialny, ale będzie on kilkakrotnie przywoływany w dalszych rozdziałach.

$$e_p^L = \frac{1}{2} \rho a_1 - c \quad (2.17)$$



Rys. 2.4. Charakterystyka sprawności układu zestawiona z przebiegami tłumienia elektrycznego, nominalnego tłumienia elektrycznego oraz optymalnego tłumienia elektrycznego.

Inną cechą, ograniczającą zasadność stosowania GEH do odzyskiwania energii z wolnych przepływów jest też kolejne zjawisko, które zaobserwować można na rysunku 2.1 lub wyciągając wnioski z tożsamości $u_p^L = 2u_{cr}$. Układ o niskiej prędkości krytycznej u_{cr} będzie doświadczać intensywniejszego spadku sprawności w wyniku odchylenia prędkości przepływu u przy jakiej pracuje od prędkości nominalnej u_p^L . Niech miarą tego zjawiska będzie pasmo prędkości przepływu, w którym sprawność układu η nie spada poniżej 90% sprawności maksymalnej η_p^L , nazywane dalej pasmem wysokiej sprawności B^L . Zgodnie z definicją B^L dane jest jako:

$$\eta^L = 0,9\eta_p^L \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{0,9}\rho a_1(c + e^L) \pm \frac{\sqrt{0,4}}{0,9}\rho a_1(c + e^L)}{(\rho a_1)^2} \quad (2.18)$$

$$B^L = u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{160}{81} \frac{(c + e^L)}{\rho a_1}} \approx 1,4u_{cr} \approx 0,7u_p^L \quad (2.19)$$

Kolejną istotną cechą układu zaobserwować można na rysunku 2.3. Wynika z niego, że pracę urządzenia z optymalną sprawnością η_{opt}^L przy danej prędkości przepływu $u > \frac{c}{\rho a_1}$ można wymusić poprzez odpowiedni dobór tłumienia elektrycznego $e^L = e_{opt}^L$:

$$\frac{\delta\eta^L}{\delta e^L} = 0 \Rightarrow e^L = e_{opt}^L = \frac{1}{2}(u\rho a_1 - c) \quad (2.20)$$

$$\eta_{opt}^L = \eta(e_{opt}^L) = \frac{(u\rho a_1 - c)^2}{-6u^2\rho^2 a_3} \quad (2.21)$$

Należy podkreślić, że dla $c \neq 0 \Rightarrow e_{opt}^L \neq e_p^L$, zatem tłumienie strukturalne uniemożliwia pracę układu z jego sprawnością optymalną η_{opt}^L . Różnica funkcji e_p^L oraz e_{opt}^L stanowić będzie miarę wrażliwości wariantu na tłumienie D_s^L :

$$D_s^L = e_{opt}^L - e_p^L = \frac{1}{2}c \quad (2.22)$$

Podstawiając wyrażenie opisujące nominalne tłumienie elektryczne $e^L = e_p^L$ (2.17), do tego, opisującego sprawność (2.13), a następnie badając prędkość, dla jakiej uzyskana funkcja przyjmuje wartość równą zero, określić można minimalną prędkość nominalną, przy jakiej może pracować układ:

$$\eta^L = \frac{2\frac{1}{2}u\rho a_1 - c \left(c + \frac{1}{2}u\rho a_1 - c - u\rho a_1 \right)}{3u^2\rho^2 a_3} = 0 \Rightarrow u = \frac{2c}{\rho a_1} \quad (2.23)$$

Na rys. 2.4 przedstawiono charakterystykę sprawności omawianego układu, wraz z oznaczeniem najważniejszych, wyprowadzonych powyżej, wielkości. Sprawność wyrażono tam jako krotność

sprawności szczytowej η^L/η_p^L i taka jej prezentacja została utrzymana również w dalszej części pracy. Zabieg taki sprzyjać ma czytelności prowadzonym w kolejnych rozdziałach porównaniom.

Fundamentalnymi parametrami charakteryzującymi sprawność urządzenia są więc: szerokość pasma wysokiej sprawności B^L oraz sprawność szczytowa η_p^L . Obydwie wielkości są ściśle powiązane z prędkością nominalną u_p^L układu. Wykazano również, że obecność tłumienia strukturalnego c w układzie, uniemożliwia jego pracę z optymalną sprawnością, czego skalę opisuje wrażliwość na tłumienie D_s^L . Pośród parametrów układu, wskazać można też prędkość krytyczną u_{cr} , opisującą prędkość przepływu, przy której układ przechodzi bifurkację Hopfa. W kolejnych rozdziałach pracy analizowany będzie wpływ różnych modyfikacji struktury urządzenia na te parametry.

3. Układy o dwóch stopniach swobody

3.1. Informacje ogólne

W literaturze dotyczącej odzyskiwania energii z galopowania, o układach o dwóch stopniach swobody mówi się zarówno w kontekście urządzeń jednomasowych, mających poprzeczny i skrętny stopień swobody [68, 69], jak i w przypadku wariantów dwusegmentowych, składających się z dwóch mas połączonych szeregowo elementem sprężysto – tłumiącym [53, 54, 55]. W niniejszym opracowaniu analizowane będą warianty należące do drugiej grupy.

Powyższa definicja wariantu nie niesie jednak wyczerpującej informacji na temat jego cech. Obecność dwóch mas w układzie rodzi pytanie, która z nich będzie opływana, a która pozostanie bierna. Ponadto, rozważyć należy umiejscowienie przetwornika piezoelektrycznego – może się on znaleźć pomiędzy nieruchomym podłożem a pierwszą masą, pomiędzy masami lub w obydwu tych miejscach. Można więc wyróżnić sześć podwariantów urządzenia o dwóch stopniach swobody (tabela 3.1.1) i wszystkie one zostaną omówione w tym rozdziale. W cytowanej powyżej literaturze, badane były tylko modele Ia [53, 54, 55] oraz IIa [54].

Tabela 3.1.1. Rodzina układów o dwóch stopniach swobody.			
	a	b	c
I			
II			

Dynamikę urządzeń z omawianej kategorii, opisać można ogólnym bezwymiarowym modelem matematycznym o postaci (3.1.1), gdzie poza tożsamościami (2.1), obowiązują również:

$$y_i = \frac{z_i}{\hat{h}}, v_i = \xi_i \frac{\hat{h}}{c_{pi}}, c_i = \frac{\hat{c}_i}{\hat{m}_1 \hat{\omega}_n}, k_2 = \frac{\hat{k}_2}{\hat{k}_1}, \kappa_i = \frac{\theta_i}{\hat{m}_i \hat{h} \hat{\omega}_n^2}, M = \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1}, \quad i = 1, 2.$$

$$\ddot{y}_1 + y - k_2(y_2 - y_1) + c\dot{y}_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - v_1 + v_2 = f_1 \rho \left(a_1 u \dot{y}_1 + a_3 \frac{\dot{y}_1^3}{u} \right) \quad (3.1.1a)$$

$$\kappa_1 \dot{v}_1 + \frac{v_1}{r} + \dot{y}_1 = 0 \quad (3.1.1b)$$

$$M\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - v_2 = f_2 \rho \left(a_1 u \dot{y}_2 + a_3 \frac{\dot{y}_2^3}{u} \right) \quad (3.1.1c)$$

$$\kappa_2 \dot{v}_2 + \frac{v_2}{r} + \dot{y}_2 - \dot{y}_1 = 0 \quad (3.1.1d)$$

Przyjęcie odpowiednich wartości współczynników f_i umożliwi formalne wskazanie, która z mas wystawiona jest na przepływ – $f_1 = 1$ oraz $f_2 = 0$ wskazywać będzie na warianty z wiersza pierwszego (wariant I), natomiast $f_1 = 0$ i $f_2 = 1$ na warianty z wiersza drugiego (wariant II). Możliwe jest też przyjęcie wartości $\kappa_2 = 0$ lub $\kappa_1 = 0$, co spowoduje rozprężenie odpowiednio równania (3.1.1b) lub (3.1.1d), redukując w ten sposób model ogólny do modelu podwariantu z kolumny a lub b.

Trudności w wyprowadzeniu przybliżonego rozwiązania modelu (3.1.1) można ograniczyć rozwiązując go niezależnie dla $f_1 = 1$ i $f_2 = 0$ oraz $f_1 = 0$ i $f_2 = 1$. Obliczono więc sprawności układów 1c – podwariant I oraz 2c – podwariant II, a następnie oceniono wpływ nieobecności piezoelektryka w danym miejscu, poprzez analizę konsekwencji założenia, że $\kappa_2 = 0$ lub $\kappa_1 = 0$. Do wyprowadzenia rozwiązań modeli obydwu wariantów, zaadaptowano procedurę zaproponowaną w [56].

3.2. Podwariant I

Założono, że przybliżone rozwiązanie modelu (3.1.1) dla $f_2 = 0$, będzie miało postać:

$$y_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + G_1 \cos(\omega_2 t) + H_1 \sin(\omega_2 t) \quad (3.2.1a)$$

$$v_1 = n_1 \cos(\omega_1 t) + n_2 \sin(\omega_1 t) + n_3 \cos(\omega_2 t) + n_4 \sin(\omega_2 t) \quad (3.2.1b)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_1 t) + G_2 \cos(\omega_2 t) + H_2 \sin(\omega_2 t) \quad (3.2.1c)$$

$$v_2 = \vartheta_1 \cos(\omega_1 t) + \vartheta_2 \sin(\omega_1 t) + \vartheta_3 \cos(\omega_2 t) + \vartheta_4 \sin(\omega_2 t) \quad (3.2.1d)$$

Podstawienie powyższych tożsamości do równań (3.1.1b) oraz (3.1.1d), a następnie zbilansowanie harmonicznym $\cos(\omega_1 t)$, $\sin(\omega_1 t)$, $\cos(\omega_2 t)$, $\sin(\omega_2 t)$, umożliwia wyprowadzenie zależności pomiędzy amplitudami napięcia oraz amplitudami drgań:

$$n_1 = b_2 \frac{r\omega_1}{1+r^2\kappa_1^2\omega_1^2} - a_2 \frac{r^2\kappa_1\omega_1^2}{1+r^2\kappa_1^2\omega_1^2} \quad n_2 = -a_2 \frac{r\omega_1}{1+r^2\kappa_1^2\omega_1^2} - b_2 \frac{r^2\kappa_1\omega_1^2}{1+r^2\kappa_1^2\omega_1^2} \quad (3.2.2)$$

$$n_3 = h_2 \frac{r\omega_2}{1+r^2\kappa_1^2\omega_2^2} - g_2 \frac{r^2\kappa_1\omega_2^2}{1+r^2\kappa_1^2\omega_2^2} \quad n_4 = -g_2 \frac{r\omega_2}{1+r^2\kappa_1^2\omega_2^2} - h_2 \frac{r^2\kappa_1\omega_2^2}{1+r^2\kappa_1^2\omega_2^2}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= (b_1 - b_2) \frac{r\omega_1}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} & \vartheta_2 &= (a_2 - a_1) \frac{r\omega_1}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} \\ &+ (a_2 - a_1) \frac{r^2\kappa_2\omega_1^2}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} & &+ (b_2 - b_1) \frac{r^2\kappa_2\omega_1^2}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_3 &= (h_1 - h_2) \frac{r\omega_1}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} & \vartheta_4 &= (g_2 - g_1) \frac{r\omega_1}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} \\ &+ (g_2 - g_1) \frac{r^2\kappa_2\omega_1^2}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} & &+ (h_2 - h_1) \frac{r^2\kappa_2\omega_1^2}{1+r^2\kappa_2^2\omega_1^2} \end{aligned}$$

Bilans harmonicznym $\cos(\omega_1 t)$ i $\sin(\omega_1 t)$ równania algebraicznego uzyskanego poprzez podstawienie rozwiązań (3.2.1) do równania (3.1.1c) oraz skorzystanie z tożsamości (3.2.2) oraz (3.2.3) prowadzi do układu równań:

$$A_1 = B_2 p_1 + A_2 q_1 \quad (3.2.4a)$$

$$B_1 = B_2 q_1 - A_2 p_1 \quad (3.2.4b)$$

Gdzie: $p_1 = \frac{M(e^{l_2+c_2})\omega_1^3}{(e^{l_2+c_2})^2\omega_1^2+(k_2+k_e^{l_2}-M\omega_1^2)^2}$, $q_1 = \frac{(e^{l_2+c_2})^2\omega_1^2+(k_2+k_e^{l_2})(k_2+k_e^{l_2}-M\omega_1^2)}{(e^{l_2+c_2})^2\omega_1^2+(k_2+k_e^{l_2}-M\omega_1^2)^2}$ oraz

$e^{li} = \kappa_i \frac{r}{1+r^2\kappa_i^2\omega_1^2}$, $k_e^{li} = \kappa_i \frac{r^2\omega_1^2}{1+r^2\kappa_i^2\omega_1^2}$, $i = 1,2$ to odpowiednio tłumienie elektryczne i sprężystość

i – tego piezoelektryka dla drgań z częstotnością ω_1 . Podstawienie powyższych tożsamości do równań bilansu harmonicznym $\cos(\omega_1 t)$ i $\sin(\omega_1 t)$ wyrażenia (3.1.1a) umożliwia sformułowanie tożsamości:

$$A_2 g_1 + B_2 h_1 - A_2 \frac{3\rho a_3 \omega_1 ((A_2^2 + B_2^2) \omega_1^2 + 2(G_2^2 + H_2^2) \omega_2^2)}{4u} = 0 \quad (3.2.5a)$$

$$A_2 h_1 - B_2 g_1 + B_2 \frac{3\rho a_3 \omega_1 ((A_2^2 + B_2^2) \omega_1^2 + 2(G_2^2 + H_2^2) \omega_2^2)}{4u} = 0 \quad (3.2.5b)$$

Gdzie: $g_1 = e^{I1} - e^{I2}(q_1 - 1) + p_1(k_2 + k_e^{I2}) + (c_1 - (q_1 - 1)c_2 - u\rho a_1)\omega_1$
oraz $h_1 = 1 - e^{I2}p_1 - (q_1 - 1)k_2 + k_e^{I1} - (q_1 - 1)k_e^{I2} - p_1 c_2 \omega_1 - \omega_1^2$.

Powtórzenie powyższej procedury do zbilansowania harmonicznym $\cos(\omega_2 t)$ i $\sin(\omega_2 t)$ równań (3.1.1c) oraz (3.1.1a) umożliwia wyprowadzenie kolejnych równań:

$$G_1 = H_2 p_2 + G_2 q_2 \quad (3.2.6a)$$

$$H_1 = H_2 q_2 - G_2 p_2 \quad (3.2.6b)$$

$$G_2 g_2 + H_2 h_2 - G_2 \frac{3\rho a_3 \omega_2 (2(A_2^2 + B_2^2) \omega_1^2 + (G_2^2 + H_2^2) \omega_2^2)}{4u} = 0 \quad (3.2.7a)$$

$$G_2 h_2 - H_2 g_2 + H_2 \frac{3\rho a_3 \omega_2 (2(A_2^2 + B_2^2) \omega_1^2 + (G_2^2 + H_2^2) \omega_2^2)}{4u} = 0 \quad (3.2.7b)$$

Gdzie:

$$p_2 = \frac{M(e^{I22} + c_2)\omega_2^3}{(e^{I22} + c_2)^2 \omega_2^2 + (k_2 + k_e^{I22} - M)\omega_2^2}, \quad q_2 = \frac{(e^{I22} + c_2)^2 \omega_2^2 + (k_2 + k_e^{I22})(k_2 + k_e^{I22} - M)\omega_2^2}{(e^{I22} + c_2)^2 \omega_2^2 + (k_2 + k_e^{I22} - M)\omega_2^2},$$

$$g_2 = e^{I12} + e^{I22} + (k_2 + k_e^{I22})q_2 + (c_1 + c_2 - u\rho a_1)\omega_2 - p_2(e^{I22} + c_2\omega_2),$$

$$h_2 = 1 + k_e^{I12} - k_2(p_2 - 1) - k_e^{I22}(p_2 - 1) - \omega_2^2 - q_2(e^{I22} + c_2\omega_2).$$

Współczynniki $e^{Ii2} = \frac{r}{1+r^2\kappa_i^2\omega_2^2}$ i $k_e^{Ii2} = \kappa_i \frac{r^2\omega_2^2}{1+r^2\kappa_i^2\omega_2^2}$ to odpowiednio tłumienie elektryczne i sprężystość i – tego piezoelektryka dla drgań z częstotnością ω_2 .

Poprzez dodanie równania 3.2.5a pomnożonego przez B_2 do równania 3.2.5b pomnożonego przez A_2 uzyskano wyrażenie pozwalające na jawne sformułowanie częstotności ω_1 :

$$1 - p_1(e^{I2} + c_2\omega_1) - (q_1 - 1)(k_2 + k_e^{I2}) + k_e^{I1} - \omega_1^2 = 0 \quad (3.2.8a)$$

Podobnie, dodając pomnożone przez H_2 równanie (3.2.7a) do pomnożonego przez G_2 równania (3.2.7b) uzyskano równanie, z którego można wyprowadzić częstotność ω_2 :

$$1 - p_2(e^{I22} + c_2\omega_2) - (q_2 - 1)(k_2 + k_e^{I22}) + k_e^{I12} - \omega_2^2 = 0 \quad (3.2.8b)$$

Należy zwrócić uwagę, że w każdej parze parametrów (p_1, p_2) , (q_1, q_2) , (e^{I2}, e^{I22}) , (k_e^{I1}, k_e^{I12}) , (k_e^{I2}, k_e^{I22}) , jedyną różnicą jest występująca w ich definicji częstość – ω_1 lub ω_2 . Mając na uwadze podobieństwo pomiędzy równaniami (3.2.8a) oraz (3.2.8b), oznacza to, że częstości ω_1 i ω_2 muszą być jednakowe, co z kolei wyklucza możliwość wystąpienia w układzie drgań polimodalnych. Wyrażenie opisujące częstość drgań $\omega_1 = \omega_2$ można więc wyprowadzić rozwiązując tylko jedno z powyższych równań. Trzeba jednak podkreślić, że nie oznacza to, że model matematyczny urządzenia może mieć tylko jedno rozwiązanie – równania (3.2.8) są wielomianami szóstego stopnia ze względu ω_i^2 , zatem oczekiwać można do sześciu rozwiązań układu. Niezmienna pozostaje natomiast zależność pomiędzy amplitudą drgań a częstością drgań. Konsekwencje mnogości rozwiązań rozpatrzono w dalszej części pracy.

Pierwsze z równań niezbędnych od wyznaczenia amplitudy drgań uzyskano odejmując równanie (3.2.5b) pomnożone przez B_2 od pomnożonego przez A_2 równia (3.2.5a). Drugie natomiast jest różnicą równania (3.2.7a) pomnożonego przez G_2 oraz równania (3.2.7b) pomnożonego przez H_2 :

$$e^{I1} + p_1(k_2 + k_e^{I2}) + e^{I2}(1 - q_1) + (c_1 + c_2(1 - q_1) - u\rho a_1)\omega_1 - \frac{3\rho a_3\omega_1(A_{y2}^2\omega_1^2 + 2G_{y2}^2\omega_2^2)}{4u} = 0 \quad (3.2.9a)$$

$$e^{I12} + p_2(k_2 + k_e^{I22}) + e^{I22}(1 - q_1) + (c_1 + c_2(1 - q_2) - u\rho a_1)\omega_2 - \frac{3\rho a_3(2A_{y2}^2\omega_1^2\omega_2 + G_{y2}^2\omega_2^3)}{4u} = 0 \quad (3.2.9b)$$

Gdzie: $A_{y2}^2 = A_2^2 + B_2^2$ oraz $G_{y2}^2 = G_2^2 + H_2^2$. Układ równań (3.2.9) posiada trzy rozwiązania:

$$A_{y2}^2 = \frac{4u(e^{I1} - e^{I2}(q_1 - 1) + p_1(k_2 + k_e^{I2}) + (c_1 - (q_1 - 1)c_2 - u\rho a_1)\omega_1)}{3\rho a_3\omega_1^3}, G_{y2}^2 = 0 \quad (3.2.10a)$$

$$G_{y2}^2 = \frac{4u(e^{I12} - e^{I22}(q_2 - 1) + p_2(k_2 + k_e^{I22}) + (c_1 - (q_2 - 1)c_2 - u\rho a_1)\omega_2)}{3\rho a_3\omega_2^3}, A_{y2}^2 = 0 \quad (3.2.10b)$$

$$A_{y2}^2 = \frac{4u}{9\rho a_3\omega_1^3\omega_2^3} \left(\omega_1 \left(2(e^{I12} + e^{I22}) + 2(k_2 + k_e^{I22})p_2 + (c_1 + c_2(1 + q_1) - u\rho a_1)\omega_2 - (e^{I1} + e^{I2} + (k_2 + k_e^{I2})p_1 - e^{I2}q_1)\omega_2 - 2q_2(e^{I22} + c_2\omega_2) \right) \right),$$

$$G_{y2}^2 = \frac{4u}{9\rho a_3\omega_1\omega_2^3} \left(2(e^{I1} + e^{I2} + (k_2 + k_e^{I2})p_1 - e^{I2}q_1)\omega_2 - \omega_1 \left(e^{I12} + e^{I22} + (k_2 + k_e^{I22})p_2 + (u\rho a_1 - c_1 + c_2(2q_1 - 1))\omega_2 - q_2(e^{I22} + c_2\omega_2) \right) \right) \quad (3.2.10c)$$

Wyrażenia te, wraz z wcześniej wyprowadzonymi tożsamościami, umożliwiają jawne sformułowanie rozwiązań układu (3.1.1) o postaci (3.2.1). Uwzględniając wykazany wcześniej fakt, że $\omega_1 = \omega_2$, każde z trzech powyższych wyrażeń, opisuje tę samą zależność pomiędzy amplitudą drgań a ich częstotścią – można je więc uznać za równoważne i podczas wyprowadzania sprawności posługiwać się tylko jednym z nich. W dalszej części pracy będą to tożsamości (3.2.10a). Przywołując tożsamości (3.2.2) oraz (3.2.3), sprawność omawianego wariantu można wyrazić jako:

$$\begin{aligned}\eta^I &= \frac{\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \left(\frac{v_1^2(t)}{r} + \frac{v_2^2(t)}{r} \right) dt}{\rho u^3} = \\ &= A_{y2}^2 \frac{\left(e^{I1} + e^{I2} (p_1^2 + (q_1 - 1)^2) \right) \omega_1^2 + G_{y2}^2 \left(e^{I12} + e^{I22} (p_2^2 + (q_2 - 1)^2) \right) \omega_2^2}{2u^3 \rho} = \\ &= \frac{2\varepsilon^I (\varepsilon^I + \lambda^I - u \rho a_1)}{3u^2 \rho^2 a_3}\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

Gdzie:

$$\varepsilon^I = e^{I1} + e^{I2} (p_1^2 + (q_1 - 1)^2) = e^{I1} + e^{I2} \frac{M^2 \omega_1^4}{(e^{I2} + c_2)^2 \omega_1^2 + (k_2 + k_e^{I2} - M \omega_1^2)^2} \quad (3.2.12a)$$

$$\lambda^I = c_1 + c_2 \frac{M^2 \omega_1^4}{(e^{I2} + c_2)^2 \omega_1^2 + (k_2 + k_e^{I2} - M \omega_1^2)^2} \quad (3.2.12b)$$

Parametr ε^I nazywany będzie zredukowanym elektrycznym tłumieniem, natomiast λ^I zredukowanym tłumieniem strukturalnym. Na rys. 3.2.1 wykreślono zależność sprawności od prędkości przepływu reprezentowaną przez funkcję (3.2.11), zestawioną z analogiczną zależnością, uzyskaną poprzez numeryczne całkowanie modelu (3.1.1). Ponadto, na rysunku oznaczono wielkości charakteryzujące sprawność wariantu.

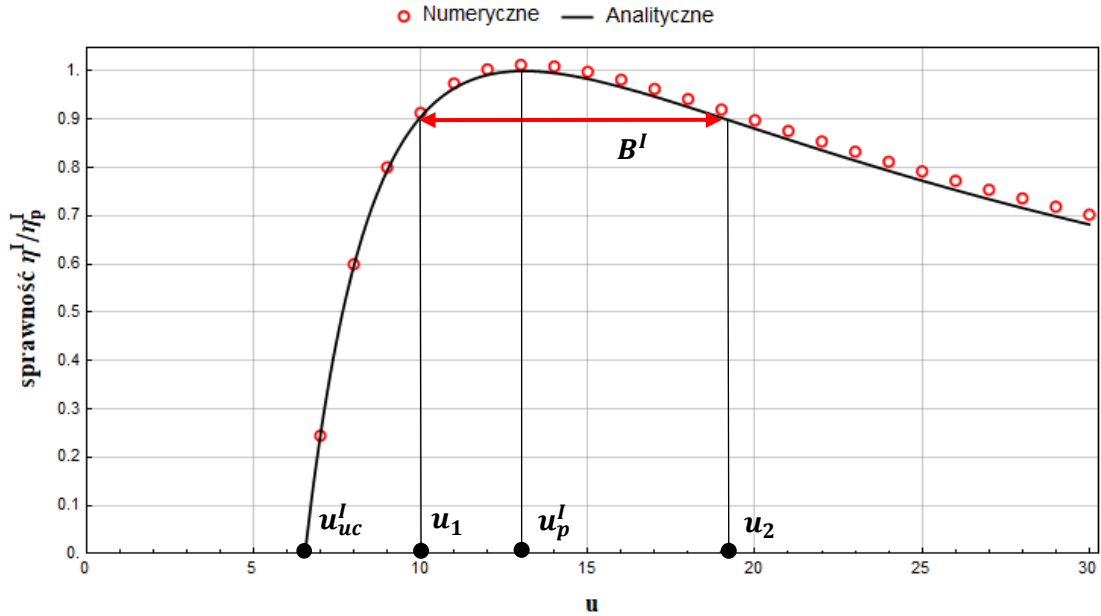
Prędkość krytyczna u_{cr}^I oraz prędkość nominalna u_p^I wynoszą odpowiednio:

$$\eta^I = 0 \Rightarrow u = u_{cr}^I = \frac{(\varepsilon^I + \lambda^I)}{\rho a_1} \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\delta \eta^I}{\delta u} = 0 \Rightarrow u = u_p^I = 2 \frac{2(\varepsilon^I + \lambda^I)}{\rho a_1} = 2u_{cr}^I \quad (3.2.14)$$

Możliwe jest teraz wyprowadzenie sprawności szczytowej η_p^I . Wynosi ona:

$$\eta_p^I = \eta^I(u_p^I) = \frac{-\varepsilon^I a_1^2}{6(\varepsilon^I + \lambda^I) a_3} \quad (3.2.15)$$



Rys. 3.2.1. Charakterystyka sprawności podwariantu I.

Aby odpowiedzieć na pytanie, czy sprawność szczytowa omawianego wariantu η_p^I może być większa od sprawności szczytowej układu liniowego η_p^L , należy porównać powyższe wyrażenie z tożsamością (2.16). Jak wskazują równania (2.15) i (2.16) oraz (3.2.14) i (3.2.15), sprawności szczytowe obydwu porównywanych układów są ściśle związane z ich prędkościami nominalnymi. W związku z tym, aby porównanie było zasadne, należy porównywać układy o jednakowych prędkościach nominalnych. Tłumienie elektryczne układu liniowego e^L zostanie więc dobrane w taki sposób, aby warunek ten był spełniony. W poniższym wyprowadzeniu założono, że tłumienie strukturalne układu liniowego c jest równe tłumieniu strukturalnemu c_1 elementu sprężysto – tłumiącego sprzęgającego dolną masę analizowanego układu z podłożem, tj.: $c = c_1$.

$$u_p^I = u_p^L \quad (3.2.16a)$$

$$2 \frac{\varepsilon^I + \lambda}{\rho a_1} = 2 \frac{e^L + c_1}{\rho a_1} \quad (3.2.16b)$$

$$e^L = \varepsilon^I + c_2 \frac{M^2 \omega_1^4}{(e^{I2} + c_2)^2 \omega_1^2 + (k_2 + k_e^{I2} - M \omega_1^2)^2} \quad (3.2.16c)$$

Zgodnie z równaniami (2.16) oraz (3.2.16c), sprawność układu o jednym stopniu swobody o prędkości nominalnej równej prędkości nominalnej analizowanego urządzenia wyniesie więc :

$$\eta^L(u_p^I) = \frac{-(\varepsilon^I + \lambda^I - c_1) a_1^2}{6(\varepsilon^I + \lambda^I) a_3} = \frac{-(\varepsilon^I + c_2 \frac{M^2 \omega_1^4}{(e^{I2} + c_2)^2 \omega_1^2 + (k_2 + k_e^{I2} - M \omega_1^2)^2}) a_1^2}{6(\varepsilon^I + \lambda^I) a_3}$$

Stosunek sprawności szczytowych porównywanych układów o jednakowej prędkości nominalnej wynosi zatem:

$$\frac{\eta^L(u_p^I)}{\eta^I(u_p^I)} = 1 + c_2 \frac{M^2 \omega_1^4}{\varepsilon^I \left((e^{I2} + c_2)^2 \omega_1^2 + (k_2 + k_e^{I2} - M \omega_1^2)^2 \right)} \quad (3.2.17)$$

Sprawność szczytowa układu o jednym stopniu swobody pozostanie więc większa od sprawności szczytowej analizowanego wariantu, dla każdego realizowanego technicznie zestawu parametrów.

Zjawisko to uzasadnić można większą wrażliwością na tłumienie badanego wariantu. Na podstawie równania (3.2.14) wskazać można nominalną wartość parametru ε^I , zatem taką, jaką osiąga przy prędkości nominalnej u_p^I :

$$u_p^I = 2 \frac{\varepsilon^I + \lambda^I}{\rho a_1} \Rightarrow \varepsilon^I(u_p^I) = \varepsilon_p^I = \frac{1}{2} \rho a_1 u_p^I - \lambda^I \quad (3.2.18)$$

Optymalna wartość parametru ε^I wyniesie natomiast:

$$\frac{\delta \eta^I}{\delta \varepsilon^I} = 0 \Rightarrow \varepsilon^I = \frac{1}{2} (\rho a_1 u_p^I - \lambda^I) = \varepsilon_{opt}^I \quad (3.2.19)$$

Podtrzymując wcześniej przyjęte założenie, że $c = c_1$ i odwołując się do tożsamości (2.22), wrażliwość na tłumienie układu to:

$$D_s^I = e_{opt}^I - e_p^I = \frac{1}{2} \lambda^I = D_s^L + \frac{1}{2} c_2 \frac{M^2 \omega_1^4}{(e^{I2} + c_2)^2 \omega_1^2 + (k_2 + k_e^{I2} - M \omega_1^2)^2} \quad (3.2.20)$$

Wrażliwość na tłumienie analizowanego układu D_s^I pozostanie więc większa od wrażliwości na tłumienie układu podstawowego D_s^L , tak długo, jak w układzie tym występuje większy od zera współczynnik tłumienia c_2 . Inherentną cechą badanej modyfikacji jest zatem jej negatywny wpływ na sprawność szczytową urządzenia.

Odniesienie sprawności szczytowej badanego układu (3.2.15) do sprawności szczytowej wariantu podstawowego (2.16) oraz uwzględnienie tożsamości (2.17) i (4.2.19) prowadzi do wyrażenia opisującego stosunek sprawności szczytowych porównywanych układu, w zależności od ich prędkości nominalnej. Funkcja ta nazywana będzie charakterystyką wzmocnienia η_{Δ}^I .

$$\eta_{\Delta}^I = \frac{\eta_p^I}{\eta_p^L} = \frac{\frac{-\varepsilon^I a_1^2}{6(\varepsilon^I + \lambda^I) a_3}}{\frac{-e^L a_1^2}{6(e^L + c_1) a_3}} = \frac{\frac{-\frac{1}{2}(u\rho a_1 - \lambda^I) a_1^2}{6\left(\frac{1}{2}(u\rho a_1 - \lambda^I) + \lambda^I\right) a_3}}{\frac{-\left(\frac{1}{2}u\rho a_1 - c\right) a_1^2}{6\left(\left(\frac{1}{2}u\rho a_1 - c\right) + c_1\right) a_3}} = 1 + \frac{2(c_1 - \lambda^I)}{u\rho a_1 - 2c_1} \quad (3.2.21)$$

Do pełnej oceny badanego wariantu, konieczne jest zdefiniowanie jego szerokości pasma wysokiej sprawności B^I . Wynosi ona:

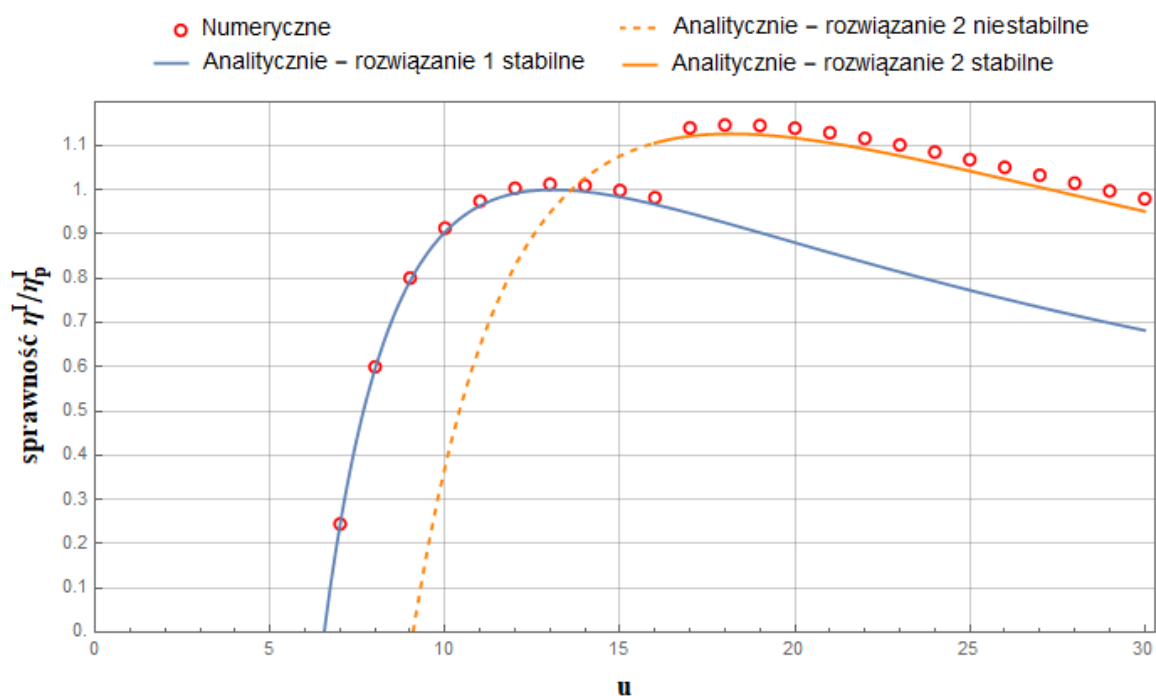
$$\eta^I = 0,9\eta_p^I \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{2}{0,9}\rho a_1(\varepsilon^I + \lambda^I) \pm \frac{\sqrt{0,4}}{0,9}\rho a_1(\varepsilon^I + \lambda^I)}{(\rho a_1)^2} \quad (3.2.22)$$

$$B^I = u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{160}{81} \frac{\varepsilon^I + \lambda^I}{\rho a_1}} \approx 1,4u_{cr}^I \approx 0,7u_p^I \quad (3.2.23)$$

Z powyższych równań wynika, że relacja wiążąca szerokość pasma wysokiej sprawności B^I z prędkością krytyczną u_{cr}^I oraz prędkością nominalną u_p^I jest tutaj identyczna, jak w przypadku układu o jednym stopniu swobody. Wraz z wnioskiem odnośnie zmniejszonej sprawności szczytowej omawianego wariantu, oznacza to, że jego sprawność pozostanie mniejsza od sprawności liniowego urządzenia o jednym stopniu swobody, w całym spektrum prędkości przepływu.

Możliwe jest wskazanie jeszcze jednej cechy układu, która nie jest objęta szeregiem wielkości zdefiniowanych dla układu o jednym stopniu swobody – mowa tu o wspomnianej wcześniej mnogości rozwiązań układu. Wysoki stopień wielomianów (3.2.8) uniemożliwia ściśle wykazanie charakteru poszczególnych rozwiązań, jednak na drodze numerycznego przeszukiwania, nie wykazano zestawu parametrów, dla których wielomiany te miałyby więcej niż trzy rzeczywiste rozwiązania ze względu na omega, przy czym maksymalnie dwa z nich odpowiadałyby stabilnym rozwiązaniom układu (3.1.1). Opisują one drgania mas układu w fazie i w przeciwfazie.

Co oczywiste, stabilność tych rozwiązań jest zależna od wartości wszystkich parametrów układu, w tym prędkości przepływu. W konsekwencji zaobserwować można zjawisko, w którym układ doznaje przeskoaku pomiędzy możliwymi rozwiązaniami, co znajduje odwzorowanie w charakterystyce jego sprawności. Przykład takiego zjawiska zilustrowano na rys. 3.2.2.



Rys. 3.2.2. Dwie charakterystyki układu oraz przeskok pomiędzy nimi zobrazowany przez rozwiązanie numeryczne.

Powyższy rysunek ukazuje układ, który powyżej prędkości przepływu $u \approx 6,6$ posiada dwa rozwiązania, z czego jedno pozostaje niestabilne. Przy prędkości $u \approx 16$ drugie z rozwiązań stabilizuje się, prowadząc w ten sposób do powstania alternatywnej stabilnej funkcji η^I , która opisuje sprawność układu o odpowiednio dobranych warunkach początkowych. Na rys. 3.2.2 zaobserwować więc można przeskok rozwiązania numerycznego przy prędkości przepływu bliskiej tej, przy której stabilizuje się drugie rozwiązanie. Odbywa to z korzyścią dla wydajności układu, ponieważ alternatywna charakterystyka zapewnia przy prędkości przeskoku znacznie wyższą sprawność niż charakterystyka pierwotna. Zjawisko to może w istotnej mierze ograniczyć zmniejszenie sprawności układu w wyniku rozstrojenia lub zostać wykorzystane do opracowania układu przeznaczonego do pracy przy dwóch różnych prędkościach przepływu.

Wartym uwagi faktem jest to, że na poprawność twierdzeń odnośnie omawianego urządzenia, nie wpływa umiejscowienie piezoelektryka – zarówno dla $\kappa_1 = 0$ (zatem $k_e^{I1} = 0$ oraz $e^{I1} = 0$), jak i dla $\kappa_2 = 0$ (zatem $k_e^{I2} = 0$ oraz $e^{I2} = 0$), wszystkie powyższe wnioski pozostają w mocy.

3.3. Podwariant II

Zgodnie z założeniami przedstawionymi w podrozdziale 3.1, model matematyczny badanego wariantu przyjmie postać (3.1.1), dla $f_1 = 0$. Przyjęto również, że rozwiązanie tego modelu będzie miało postać identyczną do tej jaką miało rozwiązanie wariantu I, tj. (3.2.1). W konsekwencji, z uwagi na niezmiennosc równań (3.1.1b) oraz (3.1.1d) w przypadku obydwu wariantów, należy przyjąć, że tożsamości (3.2.2) oraz (3.2.3) pozostaną prawdziwe również dla omawianej konfiguracji.

Podstawienie przyjętej postaci rozwiązań do modelu matematycznego urządzenia, a następnie zbilansowanie harmonicznym $\cos(\omega_1 t)$ i $\sin(\omega_1 t)$ równania (3.1.1a) umożliwia wyprowadzenie zależności:

$$A_1 = B_2 p_1 + A_2 q_1 \quad (3.3.1a)$$

$$B_1 = B_2 q_1 - A_2 p_1 \quad (3.3.1b)$$

Gdzie:

$$p_1 = \omega_1 \frac{(e^{II2} + c_2)(1 + k_2 + k_e^{II1} + k_e^{II2} - \omega_1^2) - (k_2 + k_e^{II2})((e^{II1} + e^{II2}) + (c_1 + c_2))}{(k_2 + k_e^{II2})^2 + (e^{II2} + c_2)^2 \omega_1^2},$$

$$q_1 = \frac{\omega_1^2 (e^{II2} + c_2)((e^{II1} + e^{II2}) + (c_1 + c_2)) + (k_2 + k_e^{II2})(1 + k_2 + k_e^{II1} + k_e^{II2} - \omega_1^2)}{(k_2 + k_e^{II2})^2 + (e^{II2} + c_2)^2 \omega_1^2}.$$

Współczynniki $e^{III} = \frac{r}{1+r^2\kappa_i^2\omega_1^2}$ i $k_e^{III} = \kappa_i \frac{r^2\omega_1^2}{1+r^2\kappa_i^2\omega_1^2}$ to odpowiednio tłumienie elektryczne i sprężystość i – tego piezoelektryka dla drgań z częstotliwością ω_1 .

Poprzez zbilansowanie harmonicznym $\cos(\omega_2 t)$ i $\sin(\omega_2 t)$ tego samego równania uzyskano:

$$G_1 = H_2 p_2 + G_2 q_2 \quad (3.3.2a)$$

$$H_1 = H_2 q_2 - G_2 p_2 \quad (3.3.2b)$$

Gdzie:

$$p_2 = \omega_2 \frac{(e^{II22} + c_2)(1 + k_2 + k_e^{II12} + k_e^{II22} - \omega_2^2) - (e^{II12} + e^{II22} + c_1 + c_2)(k_2 + k_e^{II22})}{(k_2 + k_e^{II22})^2 + (e^{II22} + c_2)^2 \omega_2^2},$$

$$q_2 = \frac{(e^{II22} + c_2)(e^{II12} + e^{II22} + c_1 + c_2)\omega_2^2 + (k_2 + k_e^{II22})(1 + k_2 + k_e^{II12} + k_e^{II22} - \omega_2^2)}{(k_2 + k_e^{II22})^2 + (e^{II22} + c_2)^2 \omega_2^2}.$$

Współczynniki $e^{IIi2} = \frac{r}{1+r^2\kappa_i^2\omega_2^2}$ i $k_e^{IIi2} = \kappa_i \frac{r^2\omega_2^2}{1+r^2\kappa_i^2\omega_2^2}$ to odpowiednio tłumienie elektryczne

i sprężystość i – tego piezoelektryka dla drgań z częstotliwością ω_2 .

Bilans harmonicznych $\cos(\omega_1 t)$ i $\sin(\omega_1 t)$ równania algebraicznego, powstałego poprzez podstawienie tożsamości (3.3.1), (3.2.2) i (3.2.3) do równania (3.1.1c) umożliwi sformułowanie układu równań:

$$A_2 g_1 + B_2 h_1 - (B_2 p_1 + A_2 q_1) d_1 = 0 \quad (3.3.3a)$$

$$A_2 h_1 - B_2 g_1 - (A_2 p_1 - B_2 q_1) d_1 = 0 \quad (3.3.3b)$$

Gdzie:

$$g_1 = (e^{II2} + c_2)(q_1 - 1)\omega_1 - p_1(k_2 + k_e^{II2} - M\omega_1^2),$$

$$h_1 = (k_2 + k_e^{II2})(q_1 - 1) + (e^{II2} + c_2)p_1\omega_1 - Mq_1\omega_1^2,$$

$$d_1 = \frac{\rho\omega_1 \left(4u^2 a_1 + 3a_3 \left((A_2^2 + B_2^2)(p_1^2 + q_1^2)\omega_1^2 + 2(p_2^2 + q_2^2)(G_2^2 + H_2^2)\omega_2^2 \right) \right)}{4u}.$$

Równania uzyskane poprzez bilans harmonicznych $\cos(\omega_2 t)$ i $\sin(\omega_2 t)$ tego samego równania mają postać:

$$G_2 g_2 + H_2 h_2 - (H_2 p_2 + G_2 q_2) d_2 \quad (3.3.4a)$$

$$G_2 h_2 - H_2 g_2 - (G_2 p_2 - H_2 q_2) d_2 \quad (3.3.4b)$$

Gdzie:

$$g_2 = (e^{II22} + c_2)(q_2 - 1)\omega_2 - p_2(k_2 + k_e^{II22} - M\omega_2^2),$$

$$h_2 = (k_2 + k_e^{II22})(q_2 - 1) + (e^{II22} + c_2)p_2\omega_2 - Mq_2\omega_2^2,$$

$$d_2 = \frac{\rho\omega_2 \left(4u^2 a_1 + 3a_3 \left(2(A_2^2 + B_2^2)(p_1^2 + q_1^2)\omega_1^2 + (G_2^2 + H_2^2)(p_2^2 + q_2^2)\omega_2^2 \right) \right)}{4u}.$$

Dodanie równania (3.3.3a) pomnożonego przez $(B_2 q_1 - A_2 p_1)$ do równania (3.3.3b) pomnożonego przez $(B_2 p_1 + A_2 q_1)$ skutkuje sformułowaniem równania umożliwiającego obliczenie częstotliwości drgań ω_1^2 :

$$(k_2 + k_e^{II2}) \left(1 - \frac{q_1}{p_1^2 + q_1^2} \right) + \frac{p_1 \omega_1 (e^{II2} + c_2)}{p_1^2 + q_1^2} - M\omega_1^2 = 0 \quad (3.3.5a)$$

Podobnie, poprzez dodanie równania (3.3.4a) pomnożonego przez $(H_2q_2 - G_2p_2)$ do równania (3.3.4b) pomnożonego przez $(H_2p_2 + G_2q_2)$ prowadzi do tożsamości:

$$(k_2 + k_e^{II22}) \left(1 - \frac{q_2}{p_2^2 + q_2^2} \right) + \frac{p_2\omega_2(e^{II22} + c_2)}{p_2^2 + q_2^2} - M\omega_2^2 = 0 \quad (3.3.5b)$$

Podobnie jak w przypadku analogicznych parametrów opisywanych w podrozdziale 3.2, można zauważyć, że parametrem różniącym wyrażenia w każdej parze (p_1, p_2) , (q_1, q_2) , (e^{I2}, e^{II22}) , (k_e^{I1}, k_e^{II12}) , (k_e^{I2}, k_e^{II22}) , jest częstość – ω_1 lub ω_2 . Uwzględniając podobieństwo funkcji (3.3.5), prowadzi to do wniosku, że częstości ω_1 i ω_2 są równe co do wartości, a to wyklucza możliwość wystąpienia drgań polimodalnych. Częstość $\omega_1 = \omega_2$ może więc zostać obliczona poprzez rozwiązanie tylko jednego z powyższych równań.

Do pełnego rozwiązania modelu matematycznego badanego urządzenia niezbędne są jeszcze dwa równania, które pozwolą na obliczenie amplitud drgań. Pierwsze z nich otrzymano poprzez dodanie pomnożonego przez B_2 równania (3.3.3a) do pomnożonego przez A_2 równania (3.3.3b). Drugie natomiast poprzez odjęcie iloczynu równania (3.3.3a) oraz A_2 od iloczynu B_2 i (3.3.3b):

$$h_1 - \frac{\rho p_1 \omega_1 \left(4u^2 a_1 + 3a_3 (A_{y2}^2 (p_1^2 + q_1^2) \omega_1^2 + 2G_{y2}^2 (p_2^2 + q_2^2) \omega_2^2) \right)}{4u} = 0 \quad (3.3.6a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3\rho a_3 q_2 \omega_2 (2A_{y2}^2 (p_1^2 + q_1^2) \omega_1^2 + G_{y2}^2 (p_2^2 + q_2^2) \omega_2^2)}{4u} + (e^{II22} + c_2)(1 - q_2)\omega_2 \\ & + \rho a_1 q_2 \omega_2 + p_2 (k_2 + k_e^{II22} - M\omega_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.6b)$$

Gdzie: $A_{y2}^2 = A_2^2 + B_2^2$ oraz $G_{y2}^2 = G_2^2 + H_2^2$. Powyższy układ równań posiada trzy rozwiązania ze względu na A_{y2}^2 i G_{y2}^2 , lecz, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, każde z nich będzie opisywać jednakową amplitudę oscylacji o postaci (3.1.1). Podczas dalszych wyprowadzeń może więc zostać użyte dowolne z nich. Będzie to:

$$A_{y2}^2 = \frac{4u \left((k_2 + k_e^{II22})(q_1 - 1) + \omega_1 \left((e^{II22} + c_2 - \rho a_1) p_1 - M q_1 \omega_1 \right) \right)}{3\rho a_3 p_1 (p_1^2 + q_1^2) \omega_1^3}, \quad G_{y2}^2 = 0 \quad (3.3.7)$$

Przywołując tożsamości (3.2.2), (3.2.3) oraz (3.3.5), sprawność omawianego wariantu można więc wyrazić jako:

$$\begin{aligned}
\eta^{II} &= \frac{\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \left(\frac{v_1^2(t)}{r} + \frac{v_2^2(t)}{r} \right) dt}{\rho u^3} = \\
&= \frac{A_{y2}^2 \left(e^{II1} + e^{II2} (p_2^2 + (q_2 - 1)^2) \right) \omega_1^2 + G_{y2}^2 \left(e^{II12} + e^{II22} (p_2^2 + (q_2 - 1)^2) \right) \omega_2^2}{2u^3 \rho} = \\
&= \frac{2\varepsilon^{II} (\varepsilon^{II} + \lambda^{II} - u \rho a_1)}{3u^2 \rho^2 a_3} \quad (3.3.8)
\end{aligned}$$

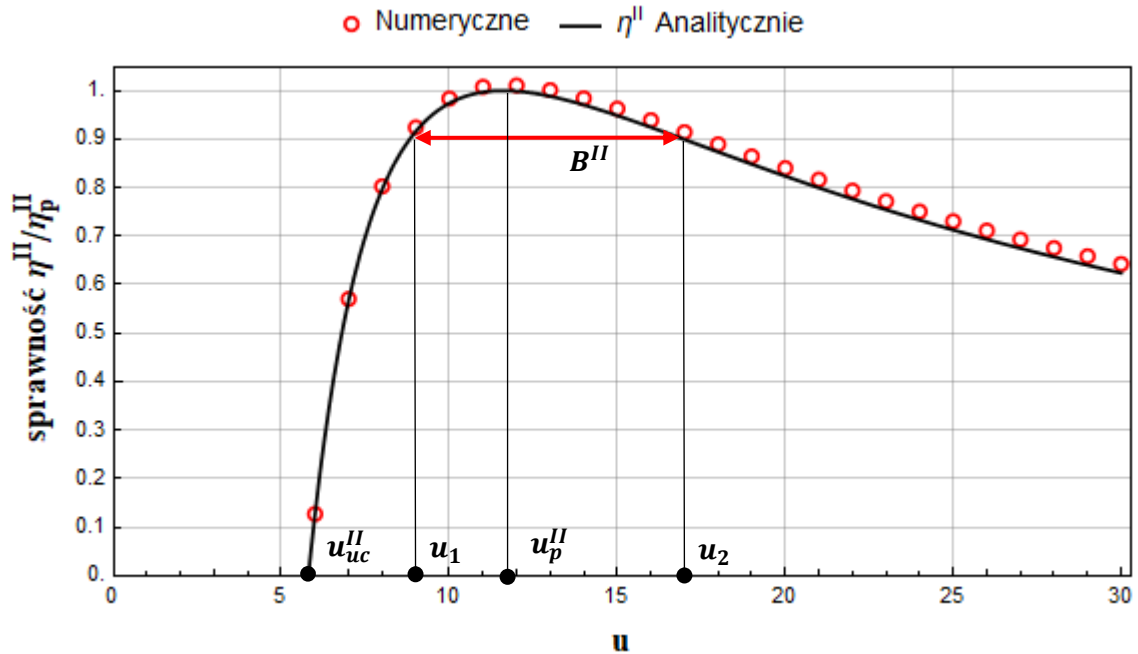
Gdzie:

$$\varepsilon^{II} = \frac{e^{II1} (c_{r2}^2 + k_{r1}^2) + e^{II2} (c_{r1}^2 + k_{r2}^2)}{((c_{r1} + c_{r2})^2 + (k_{r1} + k_{r2})^2)} \quad (3.3.9a)$$

$$\lambda^{II} = \frac{c_1 (c_{r2}^2 + k_{r1}^2) + c_2 (c_{r1}^2 + k_{r2}^2)}{(c_{r1} + c_{r2})^2 + (k_{r1} + k_{r2})^2} \quad (3.3.9b)$$

Oraz: $c_{r1} = (e^{II1} + c_1) \omega_1$, $c_{r2} = (e^{II2} + c_2) \omega_1$, $k_{r1} = 1 + k_e^{II1} - \omega_1^2$, $k_{r2} = k_2 + k_e^{II2}$.

Funkcję (3.3.8) zilustrowano na rysunku 3.3.1, gdzie widnieje również charakterystyka sprawności analizowanego urządzenia, uzyskana drogą całkowania numerycznego. Zaznaczono tam również parametry charakterystyczne układu.



Rys. 3.3.1. Charakterystyka sprawności podwariantu II.

Prędkość krytyczna u_{cr}^{II} oraz prędkość nominalna u_p^{II} wynoszą odpowiednio:

$$\eta^{II} = 0 \Rightarrow u = u_{cr}^{II} = \frac{\varepsilon^{II} + \lambda^{II}}{\rho a_1} \quad (3.3.10)$$

$$\frac{\delta\eta^{II}}{\delta u} = 0 \Rightarrow u = u_p^{II} = 2 \frac{\varepsilon^{II} + \lambda^{II}}{\rho a_1} = 2u_{cr}^{II} \quad (3.3.11)$$

Możliwe jest teraz wyprowadzenie sprawności szczytowej η_p^{II} . Wynosi ona:

$$\eta_p^{II} = \eta^{II}(u_p^{II}) = \frac{-a_1^2 \varepsilon^{II}}{6a_3(\varepsilon^{II} + \lambda^{II})} \quad (3.3.12)$$

W następnym kroku porównano sprawność szczytową η_p^{II} danej powyższym równaniem, ze sprawnością szczytową układu liniowego o jednym stopniu swobody η_p^L . Aby porównanie to było zasadne, należy zdefiniować warunki, dla których układy te będą miały jednakowe prędkości nominalne. Zakładając, że $c = c_1$, uzyskano zależności:

$$u_p^{II} = u_p^L \quad (3.3.13a)$$

$$2 \frac{\varepsilon^{II} + \lambda^{II}}{\rho a_1} = 2 \frac{e^L + c_1}{\rho a_1} \quad (3.3.13b)$$

$$e^L = \varepsilon^{II} + \lambda^{II} - c_1 \quad (3.3.13c)$$

Przywołując równania (2.16) oraz (3.3.13c), można wykazać, że sprawność układu o jednym stopniu swobody o prędkości nominalnej równej prędkości nominalnej analizowanego urządzenia wyniesie:

$$\eta^L(u_p^{II}) = \frac{(\varepsilon^{II} + \lambda^{II} - c_1)a_1^2}{6(\varepsilon^{II} + \lambda^{II})a_3}$$

Wzmocnienie można zbadać poprzez analizę stosunek sprawności szczytowych porównywanych układów o jednakowej prędkości nominalnej. W tym przypadku wygodnie jest analizować relację odwrotną do tej, jaką rozpatrywano w poprzednim rozdziale:

$$\frac{\eta^{II}(u_p^{II})}{\eta^L(u_p^{II})} = \frac{\varepsilon^{II}}{\varepsilon^{II} + \lambda^{II} - c_1} \quad (3.3.14)$$

Omawiana modyfikacja będzie więc prowadzić do zwiększenia sprawności szczytowej, jeśli powyższe równania przyjmie wartość większą od jednośc. Dla przyjętych domyślnych wartości parametrów układu, wartość powyższego stosunku wynosi $\sim 1,23$. Wzmocnienie będzie zachodzić zawsze jeśli spełniony zostanie warunek:

$$\lambda^{II} < c_1 \quad (3.3.15a)$$

$$c_2 > c_1 \left(1 + 2 \frac{c_{r1}c_{r2} + k_{r1}k_{r2}}{c_{r1}^2 + k_{r2}^2} \right) = c_1 \frac{c_{r1}^2 + k_{r2}(2k_{r1} + k_{r2}) + 2e^{I2}c_{r1}\omega_1}{c_{r1}^2 + k_{r2}^2 - 2c_{r1}c_1\omega_1} \quad (3.3.15b)$$

Możliwe jest zatem dobranie parametrów układu w taki sposób, aby był on sprawniejszy od alternatywnego wariantu o jednym stopniu swobody. Można wykazać, że jest tak dzięki możliwości ograniczenia wrażliwości na tłumienie wariantu II. Na podstawie równania (3.3.11) określić można, że nominalna wartość zredukowanego tłumienia elektrycznego ε^{II} wyniesie:

$$u_p^{II} = 2 \frac{\varepsilon^{II} + \lambda^{II}}{\rho a_1} \Rightarrow \varepsilon^{II}(u_p^{II}) = \varepsilon_p^{II} = \frac{1}{2} u \rho a_1 - \lambda^{II} \quad (3.3.16)$$

Z kolei jego optymalną wartość wyrazić można jako:

$$\frac{\delta \eta^{II}}{\delta \varepsilon^{II}} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{II} = \frac{1}{2} (u \rho a_1 - \lambda^{II}) = \varepsilon_{opt}^{II} \quad (3.3.17)$$

Podtrzymując wcześniej przyjęte założenie, że $c = c_1$ i odwołując się do tożsamości (2.22), wrażliwość na tłumienie układu to:

$$D_s^{II} = e_{opt}^{II} - e_p^{II} = \frac{1}{2} \lambda^{II} = \frac{1}{2} \frac{c_1 (c_{r2}^2 + k_{r1}^2) + c_2 (c_{r1}^2 + k_{r2}^2)}{(c_{r1} + c_{r2})^2 + (k_{r1} + k_{r2})^2} \quad (3.3.18)$$

Dla przyjętych domyślnych wartości parametrów $D_s^{II} \approx 0,032$, natomiast $D_s^L = 0,050$. W tym przypadku, za sprawą modyfikacji układ doświadcza zatem trzydziestosześciprocentowej redukcji wrażliwości na tłumienie.

Charakterystykę wzmocnienia η_{Δ}^{II} wyprowadzić można badając relację sprawności szczytowej badanego wariantu oraz wariantu podstawowego, uwzględniając przy tym tożsamości (2.16), (2.17), (3.3.12) i (3.3.16):

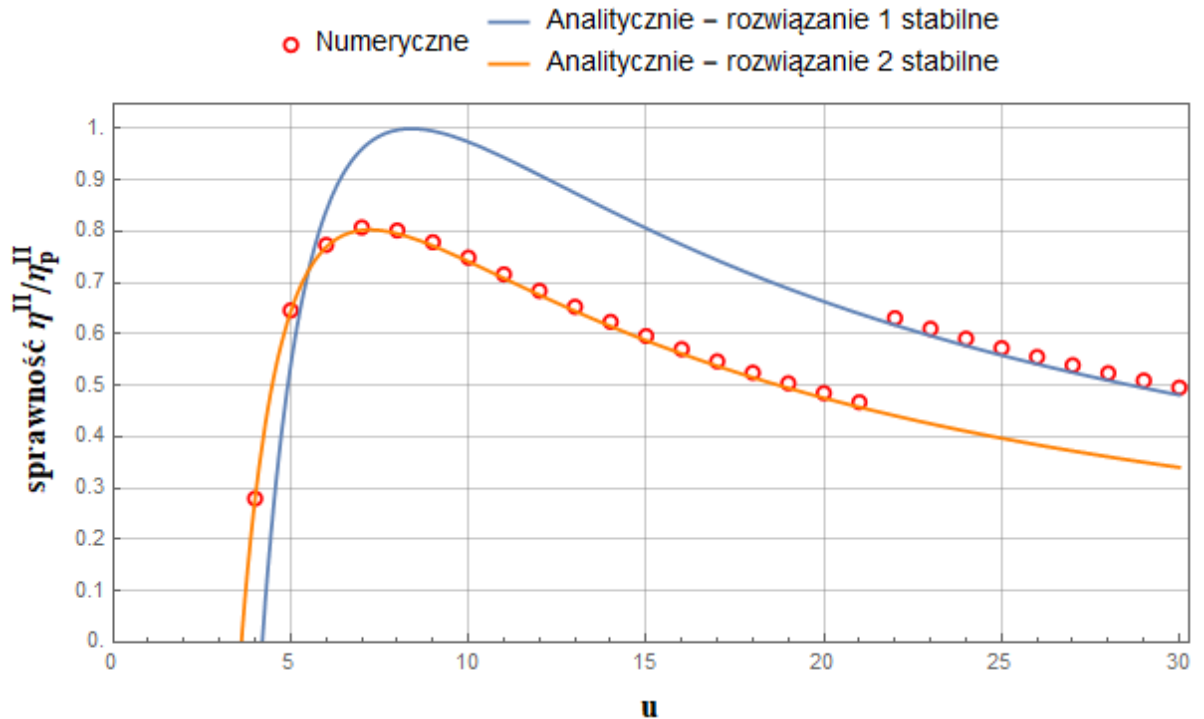
$$\eta_{\Delta}^{II} = \frac{\eta_p^{II}}{\eta_p^L} = \frac{\frac{-\varepsilon^{II} a_1^2}{6(\varepsilon^{II} + \lambda^{II}) a_3}}{\frac{-e^L a_1^2}{6(e^L + c_1) a_3}} = \frac{\frac{-\frac{1}{2}(u \rho a_1 - \lambda^{II}) a_1^2}{6\left(\frac{1}{2}(u \rho a_1 - \lambda^{II}) + \lambda^{II}\right) a_3}}{\frac{-\left(\frac{1}{2} u \rho a_1 - c\right) a_1^2}{6\left(\left(\frac{1}{2} u \rho a_1 - c\right) + c_1\right) a_3}} = 1 + \frac{2(c_1 - \lambda^{II})}{u \rho a_1 - 2c_1} \quad (3.3.19)$$

Ostatnim z parametrów, który należy zdefiniować, jest szerokości pasma wysokiej sprawności B^{II} , która wynosi:

$$\eta^{II} = 0,9 \eta_p^{II} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{2}{0,9} \rho a_1 (\varepsilon^{II} + \lambda^{II}) \pm \frac{\sqrt{0,4}}{0,9} \rho a_1 (\varepsilon^{II} + \lambda^{II})}{(\rho a_1)^2} \quad (3.3.20)$$

$$B^{II} = u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{160}{81} \frac{\varepsilon^{II} + \lambda^{II}}{\rho a_1}} \approx 1,4 u_{cr}^{II} \approx 0,7 u_p^{II} \quad (3.3.21)$$

Relacja pomiędzy szerokością pasma wysokiej sprawności B^{II} a prędkością nominalną pozostają więc taka sama, jak w przypadku analogicznych wielkości opisujących wcześniej analizowane warianty.



Rys. 3.3.2. Dwie nakładające się na siebie charakterystyki układu.

Wariant II wykazuje jeszcze jedno podobieństwo do wariantu I – mnogość rozwiązań równań (3.3.5) może prowadzić do współistnienia dwóch równoważnych charakterystyk sprawności układu. To, która z nich będzie reprezentowała faktyczne zachowanie układu zależeć będzie od prędkości przepływu u oraz przyjętych warunków początkowych. Może prowadzić to do omówionych w poprzednim rozdziale pożądanych skutków, takich jak rozszerzenie efektywnego pasma wysokiej sprawności. Z drugiej strony, efektem może być też niemal pełne nałożenie się dwóch charakterystyk, z których jedna zapewnia znacznie mniejszą sprawność od drugiej. W konsekwencji, układ może doświadczyć istotnego spadku sprawności w wyniku źle dobranych warunków początkowych. Charakterystykę sprawności urządzenia wykazującego tę cechę przedstawiono na rysunku 3.3.2. Należy jednak mieć na uwadze, że zjawiska tego można uniknąć poprzez odpowiedni dobór parametrów, zatem nie jest to wada o charakterze krytycznym.

Wszystkie powyższe wnioski pozostają prawdziwe zarówno dla $\kappa_1 = 0$ jak i dla $\kappa_2 = 0$. Klasy urządzeń przypisane do podwariantu II należy więc uznać za tożsame pod względem sprawności.

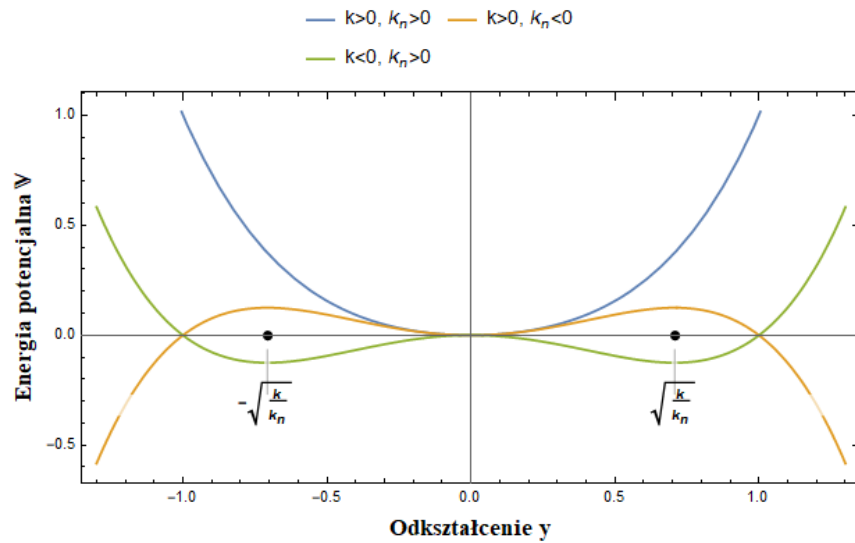
4. Układy nieliniowe

W rozdziale 2 przedstawiono analizę sprawności najprostszego wariantu GEH. Wśród alternatywnych, bardziej złożonych wariantów wskazać można układy cechujące się nieliniową charakterystyką sprężystości. W licznych, cytowanych w rozdziale pierwszym, pracach naukowych dowodzą, że nieliniowa sprężystość może mieć korzystny wpływ na sprawność urządzeń odzyskujących energię z drgań. Naturalnym krokiem jest więc eksplorowanie konsekwencji, zastosowania takiej modyfikacji w przypadku odzyskiwania energii z drgań wzbudzanych przepływem. Zaskakuje więc fakt, że wśród prac na ten temat, znaleźć można głównie badania typu case – study [58 – 62], które nie przedstawiają ogólnych wniosków na temat wpływu nieliniowości na sprawność urządzeń tego typu. Zgodnie z wiedzą autora, opublikowano jeden artykuł [63], którego celem jest ocena wpływu różnych typów nieliniowości na sprawność GEH, jednak należy zaznaczyć, że w pracy tej nie określono szerokości pasma wysokiej sprawności urządzeń nieliniowych oraz pominięto wpływ tłumienia strukturalnego na sprawność. A są to – jak zostanie wykazane w dalszej części pracy – kluczowe wyróżniki układów nieliniowych. Ponadto, w cytowanym opracowaniu, poczyniono pewne założenia, które w istotny sposób zaburzają dokładność wyników, czego dowód również znaleźć można w niniejszym rozdziale.

Nieskończony zbiór nieliniowych charakterystyk sprężystości, jakimi może cechować się układ fizyczny, zostanie tutaj ograniczony do rodziny nieliniowości typu Duffinga, tj. takich, dla których bezwymiarowa energia potencjalna układu opisana jest wyrażeniem $\mathbb{V} = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{4}k_n y^4$, gdzie $k_n = \widehat{k}_n \frac{\hbar^2}{m\omega_n^2}$ to bezwymiarowy współczynnik nieliniowej sprężystości.

W zależności od znaków parametrów k i k_n układ wykazywać może jedną z trzech charakterystyk: progresywną dla $k \geq 0$ oraz $k_n > 0$, gdzie siła potrzebna do odkształcenia układu o jednostkę przemieszczenia rośnie wraz z przemieszczeniem. W przypadku, kiedy $k = 0$ mówimy o układzie czysto nieliniowym.

Kiedy $k > 0$ i $k_n < 0$ siła potrzebna do odkształcenia układu o jednostkę przemieszczenia maleje wraz z przemieszczeniem i układ nazywamy degresywnym. Należy zaznaczyć, że tak zdefiniowany model sprężystości ma sens fizyczny tylko przy drganiach pomiędzy punktami siodłowymi $y = \pm\sqrt{-2k/k_n}$. Jeśli odkształcenie układu przekroczy położenie punktu siodłowego, stanie się on niestabilny dynamicznie i tym samym fizycznie nierealizowalny. Zjawisko to uzasadnia się faktem, że nieliniowości typu Duffinga uzyskuje się poprzez rozwinięcie w szereg Maclaurina rzeczywistych charakterystyk i jako takie mogą one pozostawać w zgodzie z rzeczywistością tylko dla małych odkształceń.



Rys. 4.1.1. Wykresy energii potencjalnej układów o różnych charakterystykach sprężystości.

Jeżeli $k < 0$ i $k_n > 0$ to układ ma bistabilną charakterystykę sprężystości i cechuje się on dwoma stabilnymi położeniami równowagi – dla odkształceń $y = \pm\sqrt{-2k/k_n}$ (punkty węzłowe) oraz jednym niestabilnym dla odkształcenia $y = 0$ (punkt siodłowy). Oznacza to, że układ bistabilny może wykazywać dwa różne jakościowo zachowania – drgania wokół jednego położenia równowagi (drgania wewnątrzdołkowe) lub drgania pomiędzy dwoma położeniami równowagi (drgania międzydołkowe). Poszczególne przypadki zilustrowano na rysunku 4.1.1.

4.1. Postać rozwiązań – eliptyczne funkcje Jacobiego

Bezwymiarowy model matematyczny urządzenia nieliniowego przyjmuje zatem postać:

$$\begin{cases} \dot{y} + c\dot{y} + ky + k_n y^3 - v = \rho \left(a_1 u \dot{y} + a_3 \frac{\dot{y}^3}{u} \right) \\ \kappa \dot{v} + \frac{v}{r} + \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Kierując się założeniami analogicznymi do tych, jakie pozwoliły na określenie postaci rozwiązania modelu matematycznego urządzenia liniowego, można wnioskować, że przebiegi drgań $y(t)$ i napięcia $v(t)$ układu nieliniowego opisane będą funkcją spełniającą równanie:

$$\ddot{y}^* + ky^* + k_n y^{*3} = 0 \quad (4.1.2)$$

z podobną jak poprzednio uwagą, że amplituda tych oscylacji nie będzie zdeterminowana wyłącznie przez warunki początkowe. Równanie (4.1.2) nie ma rozwiązania w postaci funkcji elementarnej, można jednak wskazać funkcje specjalne spełniające je w sposób ścisły, w zależności od charakterystyki sprężystości. Przyjmując warunki początkowe: $y(0) = A$, $\dot{y}(0) = 0$ oraz $k = \alpha^2$, $k_n = \beta$ (układ o progresywnej sprężystości) jego pierwsza całka wyniesie:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 y^2 + \frac{1}{4} \beta y^4 - \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 - \frac{1}{4} \beta A^4 = 0 \quad (4.1.3)$$

Poprzez podstawowe przekształcenia matematyczne, równanie (4.1.3) redukuje się do postaci:

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (A^2 - y^2) + \frac{\beta}{2\alpha^2} (A^2 - y^2)(A^2 + y^2) \quad (4.1.4)$$

Przyjmując, że $\frac{2\alpha^2}{\beta} + A^2 = a^2$, $A^2 = b^2$, a następnie rozwiązując równanie dla czasu t :

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_y^A \frac{dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)(b^2 - y^2)}} = t \quad (4.1.5)$$

Po lewej stronie równania (4.1.5) znajduje się całka eliptyczna, której wartość można odczytać w [70]:

$$\int_y^A \frac{dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)(b^2 - y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{cn}^{-1} \left(\frac{y}{b} \middle| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (4.1.6)$$

gdzie $\text{cn}^{-1} \left(\frac{y}{b} \middle| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ (zapis za [70]) to funkcja odwrotna do eliptycznej funkcji Jacobiego cn . Istota tej i kolejnych eliptycznych funkcji Jacobiego zostanie omówiona w dalszej części rozdziału. Podstawiając powyższą tożsamość do równania (4.1.5) i wracając do pierwotnych oznaczeń uzyskano:

$$\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{y}{A} \mid \frac{\beta A^2}{2\beta A^2 + 2\alpha^2}\right) = \sqrt{\alpha^2 + \beta A^2} t \quad (4.1.7)$$

zatem:

$$y = A \operatorname{cn}(\Omega t \mid m), \quad 0 \leq m \leq 0,5 \quad (4.1.8)$$

gdzie: $\Omega = \sqrt{2\alpha^2 + \beta A^2}$ jest częstością funkcji eliptycznej, a $m = \frac{\beta A^2}{2\beta A^2 + 2\alpha^2}$ modułem eliptycznym.

Poszukując rozwiązania układu o degresywnej sprężystości, tj. takiego, którego $k = \alpha^2$, $k_n = -\beta$, należy narzucić odpowiednie ograniczenie na zadane warunki początkowe, w taki sposób, aby wartość współrzędnej nie przekroczyła punktu siodłowego, np.: $y(0) = A$, $|A| < \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\beta}}$, $\dot{y}(0) = 0$.

Da tak przyjętych danych, pierwsza całka równania (4.1.2) wyniesie:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 y^2 - \beta \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 + \beta \frac{1}{4} A^4 = 0 \quad (4.1.9)$$

Wprowadzając oznaczenia $\frac{2\alpha^2}{\beta} - A^2 = a^2$ i $A^2 = b^2$ oraz rozwiązując to równanie dla t , uzyskano:

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)(b^2 - y^2)}} = t \quad (4.1.10)$$

Zgodnie z [70], całka występująca w równaniu (4.1.10) wynosi:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{y}{b} \mid \frac{b^2}{a^2}\right) \quad (4.1.11)$$

gdzie $\operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{y}{b} \mid \frac{b^2}{a^2}\right)$, to funkcja odwrotna do eliptycznej funkcji Jakobiego sn . Przejście do oznaczeń pierwotnych i sformułowanie relacji odwrotnej umożliwi wyrażenie położenia układu w funkcji czasu:

$$y = A \operatorname{sn}(\Omega t \mid m), \quad 0 \leq m < 1 \quad (4.1.12)$$

Gdzie: $\Omega = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}\beta A^2}$ oraz $m = \frac{\beta A^2}{2a^2 - \beta A^2}$.

Pierwsza całka układu o bistabilnej charakterystyce bistabilnej ($k = -\alpha^2$, $k_n = \beta$), dla warunków początkowych $y(0) = A$, $\dot{y}(0) = 0$ dana jest jako:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2 + \beta \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 - \beta \frac{1}{4} A^4 = 0 \quad (4.1.13)$$

Powyższe równanie przekształcono do postaci:

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - A^2) \left(\frac{2\alpha^2}{\beta} - A^2 - y^2 \right)}} = dt \quad (4.1.14)$$

Należy podkreślić, że w zależności od wartości wychylenia początkowego układu A , układ może doświadczać dwóch różnych jakościowo zachowań. Dla $A < \frac{2\alpha^2}{\beta}$, a więc w przypadku drgań wewnątrzdołkowych należy przyjąć, że $A^2 - \frac{2\alpha^2}{\beta} = a^2$ i $A^2 = b^2$. Będzie wtedy spełniona tożsamość:

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_y^a \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - b^2)(a^2 - y^2)}} = t \quad (4.1.15)$$

Zatem, zgodnie z [70], czas t dany jest funkcją:

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \frac{1}{a} \operatorname{dn}^{-1} \left(\frac{y}{a} \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) = t \quad (4.1.16)$$

Co po podstawieniu oznaczeń pierwotnych i inwersji prowadzi do zależności:

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\beta} - A^2} \operatorname{dn}(\Omega t | m), \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (4.1.17)$$

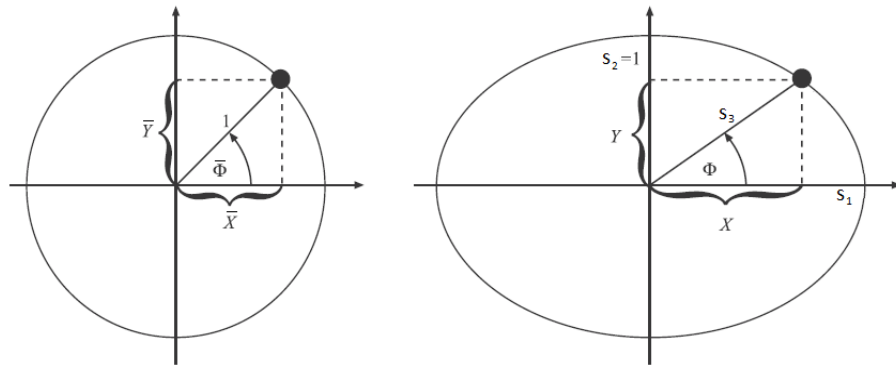
$$\Omega = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta A^2} \text{ oraz } m = \frac{2\beta A^2 - 2\alpha^2}{\beta A^2}.$$

W przypadku, kiedy wychylenie początkowe układu bistabilnego wynosi $A \geq \frac{2\alpha^2}{\beta}$, przyjmuje się, że $A^2 - \frac{2\alpha^2}{\beta} = -a^2$ oraz $A^2 = b^2$ i w takim wypadku, całka eliptyczna pojawiająca się w równaniu ma postać identyczną do (4.1.6), zatem:

$$y = A \operatorname{cn}(\Omega t | m), \quad 0,5 < m < 1 \quad (4.1.18)$$

$$\text{gdzie: } \Omega = \sqrt{\beta A^2 - 2\alpha^2} \text{ oraz } m = \frac{\beta A^2}{2\beta A^2 - 2\alpha^2}.$$

Wyprowadzone powyżej eliptyczne funkcje cn oraz sn można postrzegać jako uogólnienie funkcji sinus i cosinus trygonometrycznych – dlatego też powszechnie określa się je mianem eliptycznego sinusa oraz eliptycznego cosinusa.



Rys. 4.1.2. Współrzędne punktu poruszającego się po okręgu oraz po elipsie [72].

Posługując się interpretacją mechaniczną stwierdzić można, że tor ciała, którego współrzędne w płaskim kartezjańskim układzie współrzędnych dane są funkcjami sinus i cosinus, będzie miał kształt okręgu. Jeśli natomiast ruch punktu zadany będzie przy pomocy funkcji cn i sn , to jego tor przyjmie kształt figury bardziej ogólnej – elipsy (rys. 4.1.2). Kluczową cechą odróżniającą eliptyczne funkcje Jacobiego od funkcji trygonometrycznych jest fakt, że te pierwsze są opisane nie tylko kątem fazowym, ale również modułem eliptycznym, będącym bezwymiarowym parametrem opisującym wydłużenie (mimośród) elipsy, danym wzorem:

$$m = 1 - \frac{1}{s_1^2} \quad (4.1.19)$$

Istotnym faktem jest również to, że promień elipsy zmienia się wraz z kątem, a tempo tej zmiany zależy od mimośrodu elipsy. Zjawisko to odzwierciedlone jest poprzez eliptyczną funkcję delta dn . W nawiązaniu do rysunku 4.1.2, można zatem zapisać:

$$X = s_1 \operatorname{cn}(\phi|m) \quad (4.1.20a)$$

$$Y = \operatorname{sn}(\phi|m) \quad (4.1.20b)$$

$$s_3 = s_1 \operatorname{dn}(\phi|m) \quad (4.1.20c)$$

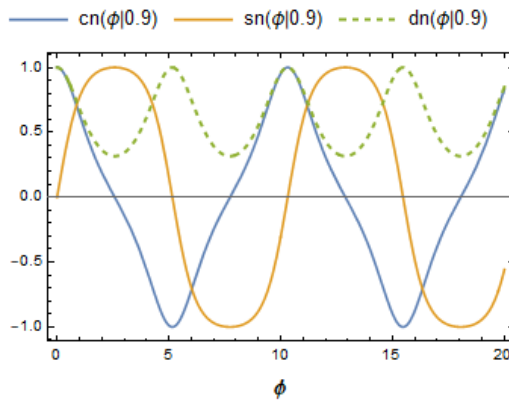
Ponadto, ze wzoru (4.1.19) wynika, że $\forall_{s_1=s_2} m = 0$ i prawdziwe są wtedy tożsamości:

$$\operatorname{cn}(\phi|0) = \cos(\phi) \quad (4.1.21a)$$

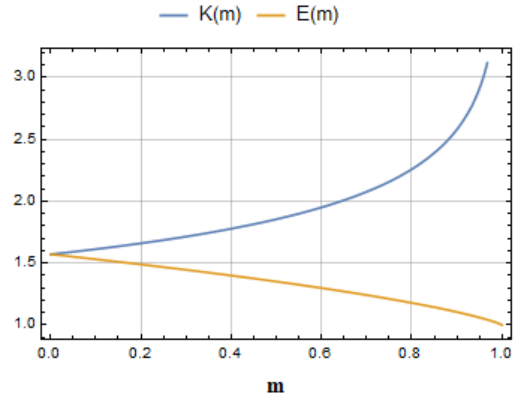
$$\operatorname{sn}(\phi|0) = \sin(\phi) \quad (4.1.21b)$$

$$\operatorname{dn}(\phi|0) = 1 \quad (4.1.21c)$$

Moduł eliptyczny można więc postrzegać jako miarę wpływu nieliniowej sprężystości na ruch układu. Wykresy funkcji cn , sn oraz dn dla modułu $m = 0,9$ przedstawiono na rysunku 4.1.3.



Rys. 4.1.3. Przebiegi funkcji cn, sn oraz dn.



Rys. 4.1.4. Wykresy eliptycznych całek zupełnych: Pierwszego rodzaju K oraz drugiego rodzaju E .

Analogicznie do funkcji sinus i cosinus, których okres utożsamiany jest z obwodem koła, tak okres $T_e = T$ funkcji cn i sn jest równy obwodowi elipsy, zatem zależy on od modułu eliptycznego. Zależność ta dana jest wzorem:

$$\frac{1}{4}T = K(m) = K \approx \frac{\pi}{2} + \frac{m\pi}{8} + \frac{9m^2\pi}{128} + \frac{25m^3\pi}{512} \quad (4.1.22)$$

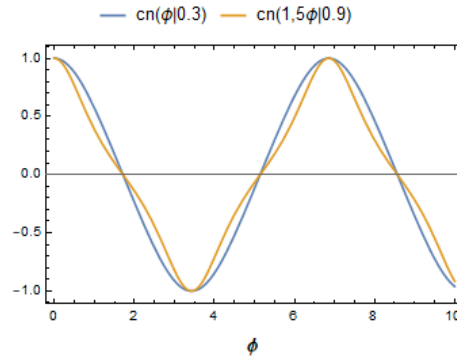
Gdzie K to zupełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju. Innym istotnym parametrem jest zupełna całka eliptyczna drugiego rodzaju $E(m)$, która opisuje długość ćwierci obwodu elipsy wziętego jako krotność wielkiej półosi s_1 (4.1.23). Wykresy $K(m)$ oraz $E(m)$ przedstawiono na rys. 4.1.4. Okres funkcji dn jest dwukrotnie mniejszy od okresu funkcji cn oraz sn.

$$\frac{1}{4a}T = E(m) = E \approx \frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{8} - \frac{3m^2\pi}{128} - \frac{5m^3\pi}{512} \quad (4.1.23)$$

Konsekwencją faktu, że okres funkcji eliptycznej zależy od jej modułu jest to, że aby dwie funkcje o różnych modułach miały jednakowy okres T , muszą mieć różne częstości eliptyczne $\Omega_i(m) = \Omega_i$. Zgodnie z definicją (4.1.22):

$$\Omega_2 = \frac{K_2}{K_1} \Omega_1 \quad (4.1.23)$$

Na rysunku 4.1.5 przedstawiono dwie funkcje: $\text{cn}(\phi|0,3)$ oraz $\text{cn}(1,5 \phi|0,9)$. Ich częstości oraz moduły dobrane zostały w taki sposób, aby w przybliżeniu spełniały równanie (4.1.23). Rysunek ten ukazuje również, że zgodnie z równaniami (4.1.8) i (4.1.18), funkcja cn w istocie może opisywać ruch układu z progresywną sprężystością oraz bistabilnego – jak wskazują wyprowadzenia, o charakterze przebiegu decydować będzie przedział z jakiego wybrana została wartość modułu.



Rys. 4.1.5. Przebiegi funkcji cn o module $m = 0,3$ oraz $m = 0,9$.

W dalszej części pracy wykorzystywana będzie jeszcze jedna funkcja eliptyczna, mianowicie amplituda Jakobiego, definiowana jako:

$$\text{am}(m) = \frac{d}{d\phi} \text{dn}(\phi|m) = \arcsin(\text{sn}(\phi|m)) = \arccos(\text{cn}(\phi|m)) = \Phi \quad (4.1.24)$$

Inne istotne tożsamości [70, 71]:

$$\begin{aligned} \text{sn}(\phi_1 + \phi_2|m) &= \frac{\text{sn}(\phi_1|m) \text{cn}(\phi_2|m) \text{dn}(\phi_2|m) + \text{sn}(\phi_2|m) \text{cn}(\phi_1|m) \text{dn}(\phi_1|m)}{1 - m \text{sn}(\phi_1|m)^2 \text{sn}(\phi_2|m)^2} \\ &\approx \text{sn}(\phi_1|m) + \text{cn}(\phi_1|m) \text{dn}(\phi_1|m) \approx \text{sn}(\phi_1|m) + \frac{\pi m}{4(E - (1 - m)K)} \text{cn}(\phi_1|m) \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} \text{cn}(\phi_1 + \phi_2|m) &= \frac{\text{cn}(\phi_1|m) \text{sn}(\phi_2|m) + \text{sn}(\phi_1|m) \text{sn}(\phi_2|m) \text{dn}(\phi_1|m) \text{dn}(\phi_2|m)}{1 - m \text{sn}(\phi_1|m)^2 \text{sn}(\phi_2|m)^2} \\ &\approx \text{cn}(\phi_1|m) - \text{sn}(\phi_1|m) \text{dn}(\phi_1|m) \approx \text{cn}(\phi_1|m) - \frac{\pi m}{4(K - E)} \text{sn}(\phi_1|m) \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

$$\text{sn}(\phi|m)^2 + \text{cn}(\phi|m)^2 = 1 \quad (4.1.27)$$

$$\text{sn}(\phi|m)^2 + m \text{dn}(\phi|m)^2 = 1 \quad (4.1.27)$$

$$\int_0^T \text{sn}(\phi|m)^2 d\phi = \frac{4(K - E)}{m} \quad (4.1.28)$$

$$\int_0^T \text{cn}(\phi|m)^2 d\phi = \frac{4(E + (m - 1)K)}{m} \quad (4.1.29)$$

W dalszej części pracy rozpatrywane będą funkcje eliptyczne o jednakowej postaci analitycznej argumentu $\phi = \Omega t$ oraz module m . Celem zwiększenia czytelności, przyjęto więc zapis $\text{sn}(\phi|m) = \text{sn}$, $\text{cn}(\phi|m) = \text{cn}$ oraz $\text{dn}(\phi|m) = \text{dn}$.

4.2. Progresywna charakterystyka sprężystości

Zgodnie z informacjami zawartymi w rozdziale 4.1, zasadne jest założenie, że przybliżone rozwiązanie modelu (4.1.1) dla $k \geq 0$ oraz $k_n > 0$ będzie miało postać:

$$y = A_y \text{cn} \quad (4.2.1a)$$

$$v = A_v \text{cn} + B_v \text{sn} \quad (4.2.1b)$$

Podstawienie powyższych założeń do modelu (4.1.1) prowadzi do jego przekształcenia do układu równań algebraicznych o postaci:

$$A_y^3 \frac{\rho \Omega^3 a_3}{u} \text{dn}^3 \text{sn}^3 + (A_y k + A_y (2m - 1) \Omega^2 - A_v \kappa) \text{cn} + A_y \Omega (u \rho a_1 - c) \text{dncn} - B_v \text{sn} + (A_y^3 k_n - 2m \Omega^2 A_y) \text{cn}^3 \quad (4.2.2a)$$

$$A_v \frac{1}{r} \text{cn} - \Omega (A_v \kappa + A_y) \text{dncn} + B_v \frac{1}{r} \text{sn} + B_v \Omega \kappa \text{cndn} = 0 \quad (4.2.2b)$$

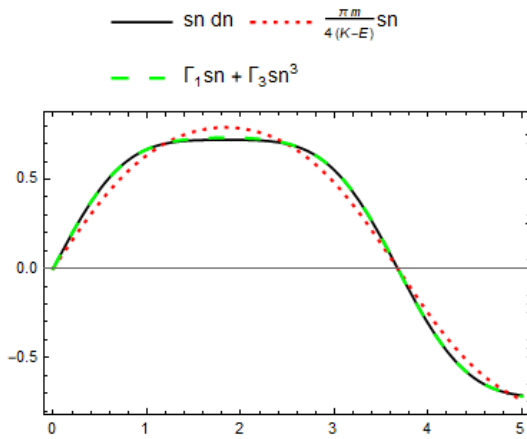
W układzie tym występuje pięć niewiadomych wielkości: A_y , A_v , B_v , Ω oraz m . Mogą być one wyznaczone na drodze bilansu harmonicznym eliptycznym, jednakże implementacja tej procedury bezpośrednio do układu równań (4.1.1) nie da pożądanego efektu. Będzie tak ponieważ znaczna liczba harmonicznym (cn , sn , cn dn , sn dn , cn^3 , $\text{dn}^3 \text{sn}^3$) spowoduje, że poszczególne parametry będą rozdystrybuowane w dużej liczbie równań bilansu, skutkiem czego doprowadzą one jedynie do rozwiązań trywialnych. Fakt ten zobrazowano w tabeli 4.2.1.

Tabela 4.2.1. Zestawienie harmonicznym eliptycznym.		
harmoniczna	Równanie 1	Równanie 2
cn	$(k + (2m - 1)\omega^2)A_y - A_v = 0$	$\frac{A_v}{r} = 0$
sn	$B_v = 0$	$\frac{B_v}{r} = 0$
cn dn	-	$\omega \kappa B_v = 0$
sn dn	$\omega (u \rho a_1 - c) A_y = 0$	$\omega (A_v \kappa + A_y) = 0$
cn ³	$k_n A_y^3 - 2m \omega^2 A_y = 0$	-
sn ³ dn ³	$\frac{\rho \omega^3 a_3 A_y^3}{u} = 0$	-

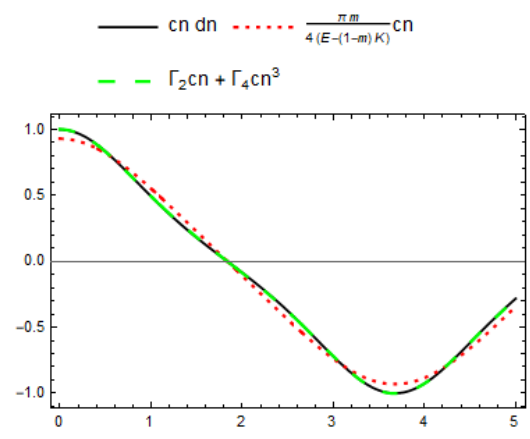
Jest to częsty problem występujący podczas bilansu harmonicznych eliptycznych, a jego częściowe rozwiązanie przedstawiono w [71]. Autorzy pracy wskazują, że iloczyny $cn dn$ oraz $sn dn$ można aproksymować przy pomocy funkcji:

$$sn dn \approx \frac{\pi m}{4(K-E)} sn \quad (4.2.3a)$$

$$cn dn \approx \frac{\pi m}{4(E-(1-m)K)} cn \quad (4.2.3b)$$



Rys. 4.2.1a. Przebieg funkcji $sn dn$ oraz dwóch wariantów jej aproksymacji dla modułu $m = 0,4$.



Rys. 4.2.1b. Przebieg funkcji $cn dn$ oraz dwóch wariantów jej aproksymacji dla modułu $m = 0,4$.

Z aproksymacji tych skorzystano również w [63]. Należy jednak zauważyć, że dla modułu o wartości $m > 0,4$ powyższe przybliżenia stają się niedokładne (rys. 4.2.1). Zastosowano więc, niezaproponowane w literaturze nigdy wcześniej, przybliżenia wyższego rzędu, tj. o postaci:

$$sn dn \approx \Gamma_1 sn + \Gamma_3 sn^3 \quad (4.2.4a)$$

$$cn dn \approx \Gamma_2 cn + \Gamma_4 cn^3 \quad (4.2.4b)$$

gdzie współczynniki $\Gamma_i, i = 1,2,3,4$ wyznaczono drogą aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów. Ich wartości wynoszą:

$$\Gamma_1 = \frac{3m\pi(2(16 + (m-1)m)E + (m-16)(m-2)K)}{16((4 + m(4m-19))E^2 - 2(4 + m(8m-15))EK + (m-1)(7m-4)K^2)} \approx 1 + \frac{5m^2}{128} + \frac{31m^3}{1024} \quad (4.2.5a)$$

$$\Gamma_2 = \frac{-3m\pi((32 - 62m + 32m^2)E + (m-2)(m-1)(15m-16)K)}{16((11m(m^2-1) - 4)E^2 + 2(m-1)(m(3m-7) - 4)EK - (m-1)^2(4 + 3m)K^2)} \approx 1 - \frac{m}{2} - \frac{11m^2}{128} - \frac{35m^3}{1024} \quad (4.2.5b)$$

$$\Gamma_3 = \frac{-15m^2\pi((m-8)E + (8-5m)K)}{16\left((4+m(4m-19))E^2 - 2(4+m(8m-15))EK + (m-1)(7m-4)K^2\right)}$$

$$\approx -\frac{m}{2} - \frac{5m^2}{32} - \frac{11m^3}{128} \quad (4.2.5c)$$

$$\Gamma_4 = \frac{15m^2\pi((7m-8)E + (m-1)(3m-8)K)}{16\left((11(m-1)m-4)E^2 + 2(m-1)(m(-7+3m)-4)EK - (m-1)^2(4+3m)K^2\right)}$$

$$\approx \frac{m}{2} + \frac{3m^2}{32} + \frac{5m^3}{128} \quad (4.2.5d)$$

Zastosowanie przybliżeń (4.2.4) przekształca układ równań (4.2.2) do postaci (4.2.6). W Tabeli 3.2 zestawiono równia bilansu harmonicznycch eliptycznych układu (4.2.6).

$$A_y^3 \frac{3\Gamma_1^2 \Gamma_3 \rho \Omega^3 a_3}{u} \text{sn}^5 + A_y^3 \frac{3\Gamma_1 \Gamma_3^2 \rho \Omega^3 a_3}{u} \text{sn}^7 + A_y^3 \frac{\Gamma_3^3 \rho \Omega^3 a_3}{u} \text{sn}^9$$

$$+ (A_y(k + (2m-1)\Omega^2) - A_v) \text{cn} + \Omega \left(A_y \Gamma_3 (u\rho a_1 - c) + A_y^3 \frac{\Gamma_1^3 \rho \Omega^2 a_3}{u} \right) \text{sn}^3$$

$$+ (A_y \Gamma_1 \Omega (u\rho a_1 - c) - B_v) \text{sn} + (A_y^3 k_n - A_y 2m\Omega^2) \text{cn}^3 = 0 \quad (4.2.6a)$$

$$B_v \Gamma_4 \Omega \kappa \text{cn}^3 - \Gamma_3 \Omega (\kappa A_v + A_y) \text{sn}^3 + \left(-\Gamma_1 \Omega (\kappa A_v + A_y) + \frac{B_v}{r} \right) \text{sn} + \left(\frac{A_v}{r} + \Gamma_2 \Omega \kappa B_v \right) \text{cn} = 0 \quad (4.2.6b)$$

Tabela 4.2.2. Zestawienie harmonicznycch eliptycznych po zastosowaniu aproksymacji (4.2.4).		
harmoniczna	równanie 1	równanie 2
cn	$A_y(k + (2m-1)\omega^2) - A_v = 0$	$\frac{A_v}{r} + \Gamma_2 \omega \kappa B_v$
sn	$\Gamma_1 \omega (u\rho a_1 - c) A_y - B_v = 0$	$\Gamma_1 \omega (\kappa A_v + A_y) - \frac{B_v}{r} = 0$
cn ³	$A_y^3 k_n - 2A_y m \omega^2 = 0$	$B_v \Gamma_4 \kappa \omega = 0$
sn ³	$A_y \omega (\Gamma_3 (u\rho a_1 - c) + A_y^2 \frac{\Gamma_1^3 \rho \omega^2 a_3}{u}) = 0$	$\Gamma_3 \omega (\kappa A_v + A_y) = 0$
sn ⁵	$3A_y^3 \frac{\Gamma_1^2 \Gamma_3 \rho \omega^3 a_3}{u} = 0$	-
sn ⁷	$3A_y^3 \frac{\Gamma_1 \Gamma_3^2 \rho \omega^3 a_3}{u} = 0$	-
sn ⁹	$A_y^3 \frac{\Gamma_3^3 \rho \omega^3 a_3}{u} = 0$	-

Powyższe zestawienie sugeruje, że implementacja opisanej procedury skutkuje zwiększeniem liczby równań bilansu mających nietrywialne rozwiązanie, ale nie zapewnia im odpowiedniej złożoności –

występują w nich nie wszystkie parametry, zatem nietrywialne rozwiązania nie będą zawierały wszystkich parametrów układu i tym samym nie mogą być uznane za poprawne. Problem ten można rozwiązać odwołując się do tożsamości (4.1.24) – uzasadnione jest aby za funkcje cn i sn podstawić funkcje $\cos(\phi)$ i $\sin(\phi)$, gdzie ϕ to amplituda Jacobiego. Umożliwi to rozłożenie funkcji wyższego rzędu do postaci harmoniczej, zgodnie ze znanymi tożsamościami trygonometrycznymi, np.:

$$\text{cn}^3 = \cos^3(\phi) = \frac{1}{4}(3\cos(\Phi) + \cos(3\Phi)) \quad (4.2.7a)$$

$$\text{sn}^3 = \sin^3(\phi) = \frac{1}{4}(3\sin(\Phi) - \sin(3\Phi)) \quad (4.2.7b)$$

Bilans harmoniczných układu równań powstałego poprzez podstawienie tożsamości (2.27) do (2.2.6) prowadzi do uzyskania równań bilansu, które zestawiono w tabeli 4.2.3.

Tabela 4.2.3. Zestawienie harmoniczných eliptycznych po zastosowaniu aproksymacji (4.2.4) oraz uwzględnieniu tożsamości (4.2.7).		
harmoniczna	równanie 1	równanie 2
$\cos(\Phi)$	$(k + (2m - 1)\omega^2)A_y - A_v = 0$	$\frac{A_v}{r} + \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4}\Gamma_4\right)\Omega\kappa B_v = 0$
$\sin(\Phi)$	$\frac{1}{128u} \left((4\Gamma_1 + 3\Gamma_3)\Omega A_y (32u(u\rho a_1 - c) + 3(8\Gamma_1^2 + 14\Gamma_1\Gamma_3 + 7\Gamma_3^2)\rho\Omega^2 a_3 A_y^2) \right) - B_v = 0$	$\frac{B_v}{r} - \Omega \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3 \right) \cdot (\kappa A_v + A_y) = 0$
$\cos(3\Phi)$	$A_y^3 \frac{k_n}{4} - \frac{1}{2} A_y m \Omega^2 = 0$	$\frac{1}{4} \Gamma_4 \Omega \kappa B_v = 0$
$\sin(3\Phi)$	$\frac{1}{4} \Gamma_3 \Omega (c - u\rho a_1) A_y - \frac{(16\Gamma_1 + 60\Gamma_1^2 \Gamma_3 + 63\Gamma_1 \Gamma_3^2 + 21\Gamma_3^3) \rho \Omega^3 a_3 A_y^3}{64u} = 0$	$\frac{\kappa A_v + A_y}{4} \Gamma_3 \Omega = 0$
$\sin(5\Phi)$	$A_y^3 \frac{3\Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_3)(\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3)\rho\Omega^3 a_3}{8u} = 0$	-
$\sin(7\Phi)$	$A_y^3 \frac{3\Gamma_3^2(\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3)\rho\Omega^3 a_3}{64u} = 0$	-
$\sin(9\Phi)$	$A_y^3 \frac{\Gamma_3^3 \rho \Omega^3 a_3}{256u} = 0$	-

Podobnie jak w przypadku układu liniowego o jednym stopniu swobody, cztery zależności niezbędne do obliczenia niewiadomych wielkości uzyskać można poprzez bilans współczynników stojących przy funkcjach $\cos(\Phi)$ i $\sin(\Phi)$, natomiast piąte to bilans współczynników stojących przy $\cos(3\Phi)$ w równaniu pierwszym. Wskazane równania skomponowano w poniższy układ:

$$\frac{A_v}{r} + \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \Omega \kappa B_v = 0 \quad (4.2.8a)$$

$$\frac{B_v}{r} - \Omega \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) (\kappa A_v + A_y) = 0 \quad (4.2.8b)$$

$$\frac{1}{4} A_y \Omega^2 (4k + 2(m-2) + 3A_y^2 k_n) - A_v \quad (4.2.8c)$$

$$\frac{A_y \Omega \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) (32u(u\rho a_1 - c) + 3A_y^2 (8\Gamma_1^2 + 14\Gamma_1 \Gamma_3 + 7\Gamma_3^2) \rho \Omega^2 a_3)}{32u} - B_v = 0 \quad (4.2.8d)$$

$$A_y^3 \frac{k_n}{4} - \frac{1}{2} m \Omega^2 A_y = 0 \quad (4.2.8e)$$

Korzystając z równań (4.2.8a) oraz (4.2.8b) wyprowadzić można zależności pomiędzy amplitudą drgań A_y a amplitudami napięcia A_v i B_v .

$$A_v = - \frac{r^2 \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \kappa \Omega^2}{1 + r^2 \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \kappa^2 \Omega^2} A_y \quad (4.2.9a)$$

$$B_v = \frac{r \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) \Omega}{1 + r^2 \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \kappa^2 \Omega^2} A_y \quad (4.2.9b)$$

Równanie (4.2.8e) wiąże moduł z amplitudą i częstotliwością drgań. Wynika z niego że:

$$A_y^2 = 2 \frac{m \Omega^2}{k_n} \quad (4.2.10)$$

Podstawiając tożsamość (4.2.9a) oraz (4.2.10) do równania (4.2.8d) i rozwiązując je dla Ω^2 uzyskano:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{2m + \Gamma_c r^2 \kappa + \Gamma_c k r^2 \kappa^2 - 1 + \sqrt{4\Gamma_c k (1-2m) r^2 \kappa^2 + (2m + \Gamma_c r^2 \kappa (1+k\kappa) - 1)^2}}{2\Gamma_c (2m-1) r^2 \kappa^2} \\ &\approx \frac{r^2 \kappa (1+k\kappa) - 1 + \sqrt{1 + 2r^2 \kappa (k\kappa - 1) + r^4 \kappa^2 (1+k\kappa)^2}}{2r^2 \kappa^2 (1-2m)} = \frac{\omega^2}{(1-2m)} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Gdzie $\Gamma_c = \left(\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3 \right) \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \approx 1 - \frac{m}{2}$. Powyższa tożsamość dowodzi, że moduł eliptyczny m stanowi czynnik modyfikujący częstotliwość eliptyczną układu nieliniowego względem częstotliwości kołowej ω

układu liniowego. Zależność ta, wraz z równaniem (4.2.10) pozwalają określić zależność pomiędzy modulem eliptycznym m a amplitudą drgań A_y :

$$m = \frac{A_y^2 k_n}{2(A_y^2 k_N - 2\omega^2)} \quad (4.2.12)$$

Zgodnie z równaniem (4.2.8d), amplitudę drgań A_y wyrazić można więc jako:

$$A_y^2 = \frac{4u(c + e^H - u\rho a_1)}{3\Gamma_g \rho \Omega^2 a_3} \quad (4.2.13)$$

Gdzie $\Gamma_g = \Gamma_1^2 + \frac{14}{8}\Gamma_1\Gamma_3 + \frac{7}{8}\Gamma_3^2$, a tłumienie elektryczne e^H wynosi:

$$e^H = \frac{r}{1 + r^2 \kappa^2 \Omega^2 \Gamma_c} \approx \frac{r\kappa}{1 + \frac{(m-2)r^2 \kappa^2 \omega^2}{4m-2}} = \frac{r}{1 + \left(\omega^2 + \frac{3}{4}k_n A_y^2\right) \kappa^2 r^2} \quad (4.2.14)$$

Należy zaznaczyć, że dla $e^H|_{m=0} = e^L$. Trzy ostatnie wyrażenia umożliwiają wyprowadzenie wielomianu trzeciego stopnia ze względu na $A_{ys} = A_y^2$. Uwzględniając, że przyjmie on postać:

$$A_{ys}^3 + \chi_2 A_{ys}^2 + \chi_1 A_{ys} + \chi_0 = 0 \quad (4.2.15)$$

Gdzie:

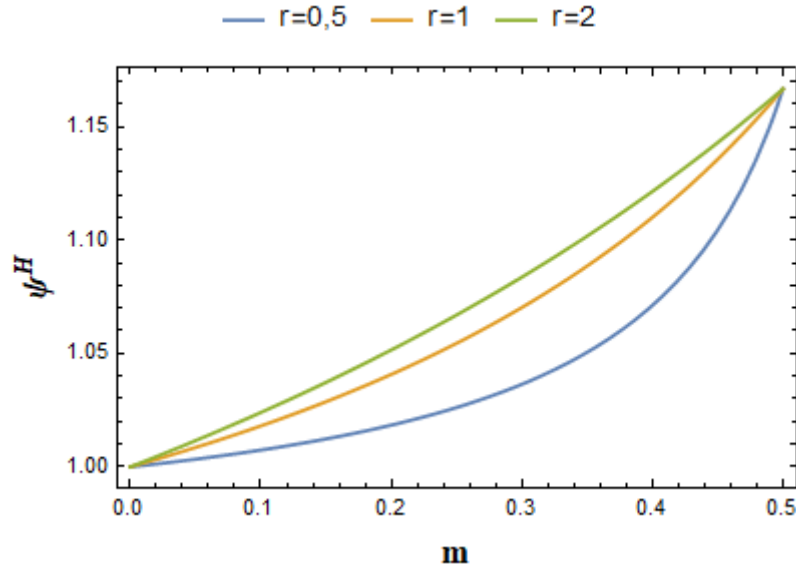
$$\begin{aligned} \chi_0 &= -\frac{256u(c(1 + r^2 \kappa^2 \beta) + r\kappa - u(1 + r^2 \kappa^2 \omega^2)\rho a_1)}{81k_n^2 r^2 \rho a_3} \\ \chi_1 &= \frac{64(k_N r^2 \kappa^2 u(u\rho a_1 - c) + \omega^2(1 + r^2 \kappa^2 \omega^2)\rho a_3)}{27k_n^2 r^2 \kappa^2 \rho a_3} \\ \chi_2 &= \frac{4(3 + 7r^2 \kappa^2 \omega^2)}{9k_n r^2} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Rozwiązanie równania (4.2.16) umożliwia więc określenie amplitudy drgań A_y jako funkcji znanych parametrów układu. Jawne sformułowanie amplitudy drgań A_y umożliwia kaskadowe wyprowadzenie pozostałych niewiadomych wielkości poprzez skorzystanie kolejno z zależności (4.2.13 – 4.2.9).

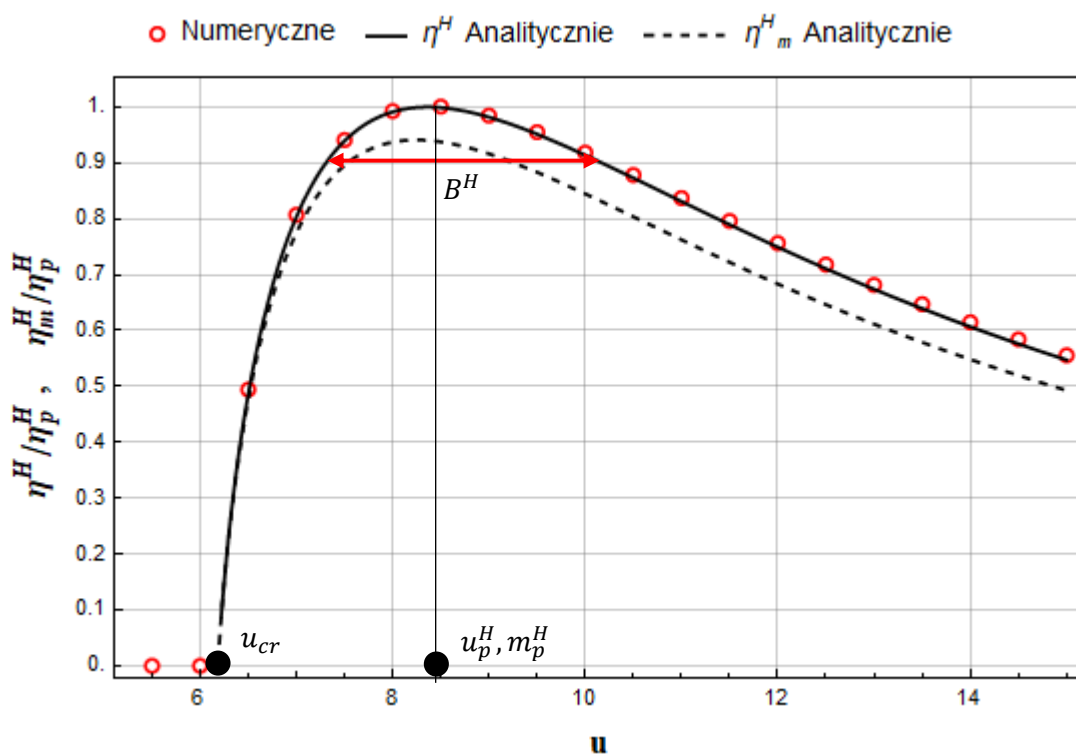
Przywołując zależność (4.1.26) oraz fakt, że okres funkcji cn i sn wynosi $T = \frac{4K}{\Omega}$, a także wykorzystując tożsamości (4.1.29), sprawność urządzenia wynosi:

$$\begin{aligned}
\eta^H &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{r} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(A_v \cos t + B_v \sin t)^2}{r} dt \approx \frac{1}{T} (A_v^2 + B_v^2) \frac{\int_0^T \frac{\cos^2 t}{r} dt}{\rho u^3} \\
&= \frac{2e^H(c + e^H - u\rho a_1)}{3u^2 \rho^2 a_3} \frac{16\Gamma_l \Gamma_o^2}{\Gamma_g} \frac{1 + r^2 \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_o^2} \frac{\omega^2}{1-2m}}{1 + r^2 \Gamma_c \frac{\omega^2}{1-2m}}
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Gdzie $\Gamma_l = \frac{E+(m-1)K}{mK}$. Sprawność układu z progresywną sprężystością została opisana przy pomocy iloczynu trzech funkcji. Pierwsza z nich, $\frac{2e^H(c+e^H-u\rho a_1)}{3u^2 \rho^2 a_3} = \eta_m^H$, nazywana dalej pierwotną funkcją sprawności, ma postać identyczną do funkcji sprawności układu liniowego η^L , przy czym występujące w niej tłumienie elektryczne jest zdefiniowane w odmienny sposób. Czynniki $\frac{16\Gamma_l \Gamma_o^2}{\Gamma_g} \approx 1$, zatem jego wpływ na sprawność może zostać pominięty. Funkcja $\frac{(1+r^2 \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_o^2} \frac{\omega^2}{1-2m})}{(1+r^2 \Gamma_c \frac{\omega^2}{1-2m})} \approx \frac{8m+(m-4)r^2 \omega^2 - 4}{8m+2(m-2)r^2 \omega^2 - 4} = \psi^H$ będzie nazywana funkcją wzmocnienia nieliniowością.



Rys. 4.2.3. Przykładowe wykresy funkcji ψ^H .



Rys. 4.2.4. Charakterystyka sprawności układu o progresywnej sprężystości, wraz z zaznaczonymi parametrami charakterystycznymi.

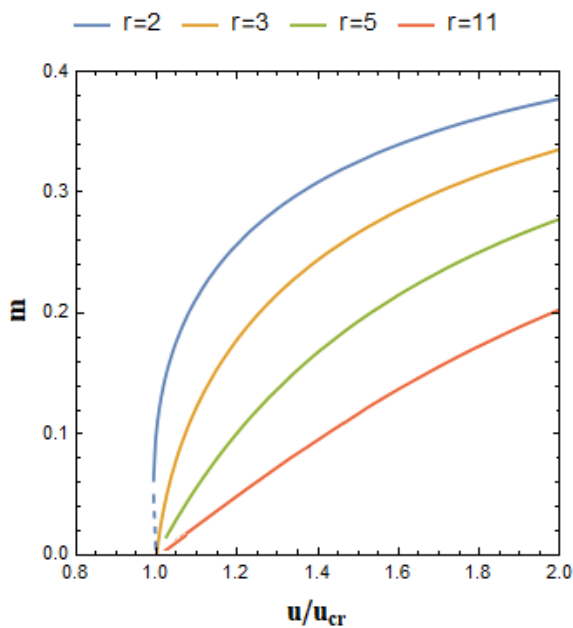
Łatwo wykazać, że w dopuszczalnym przedziale modułu $0 \leq m < 0,5$ (4.1.8) funkcja ta przyjmuje wartości z przedziału $\psi^H \in \left(0; \frac{7}{6}\right)$ niezależnie od parametrów układu, zatem jej wartość będzie współczynnikiem zwiększającym sprawność o osiągalne asymptotycznie niespełna 17% (4.2.3). W dalszej części pracy zakłada się, że:

$$\eta^H = \eta_m^H \psi^H \quad (4.2.18)$$

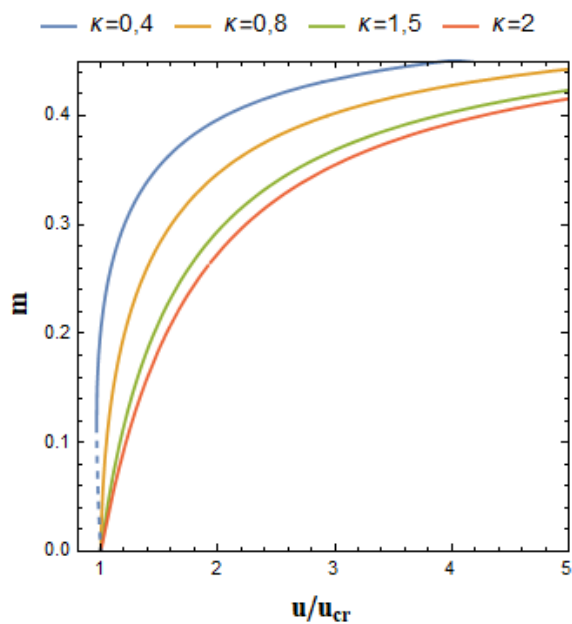
Wartość funkcji η^H oraz η_m^H w zależności od prędkości przepływu, uzyskana na drodze powyższych rozważań analitycznych oraz metodą numeryczną przedstawiono na rys. 4.2.4.

Parametrem odróżniającym układ nieliniowy od liniowego jest moduł eliptyczny m . Zgodnie z tożsamością (4.2.12) jego wartość wzrasta wraz z amplitudą drgań, a więc również z prędkością przepływu. Wpływ poszczególnych parametrów układu na tempo tego wzrostu zaprezentowano na wykresach $\frac{u}{u_{cr}} \times m$ (rys. 4.2.5 – 4.2.11).

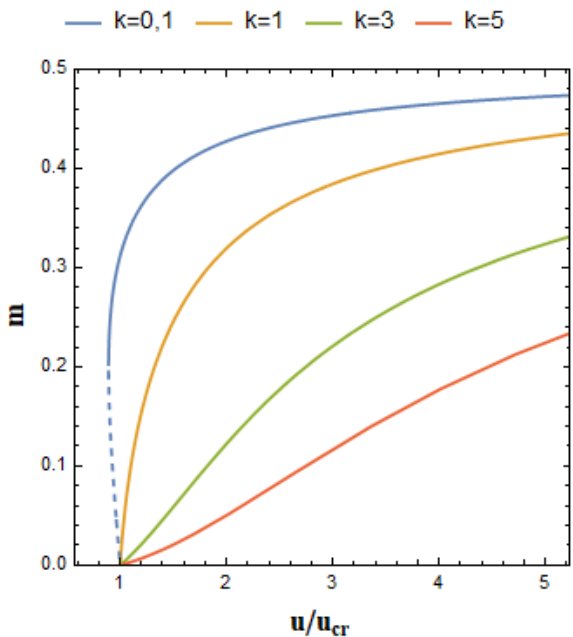
Jak wskazują rysunki 4.2.5 – 4.2.12, jedynym parametrem, którego zwiększenie przyspiesza tempo wzrostu modułu eliptycznego jest współczynnik sztywności nieliniowej k_N . Ponadto, można zauważyć, że dla zestawów parametrów, dla których tempo wzrostu modułu jest wystarczająco duże, moduł eliptyczny może przyjmować wartości dodatnie dla prędkości przepływu $u < u_{cr}$.



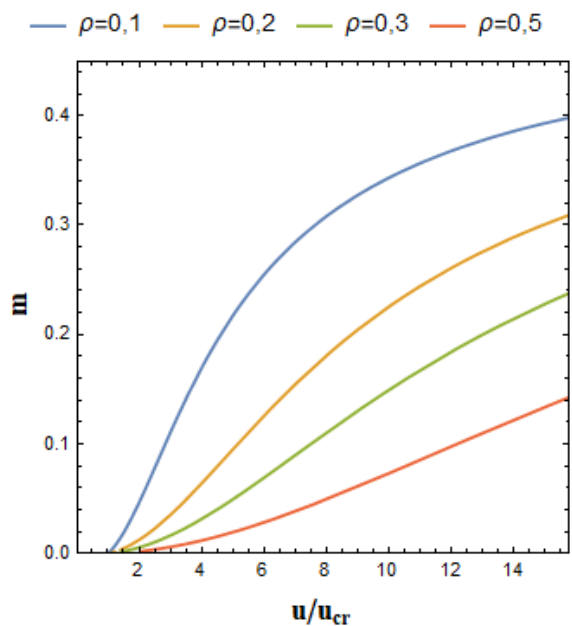
Rys. 4.2.5. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości oporu elektrycznego r .



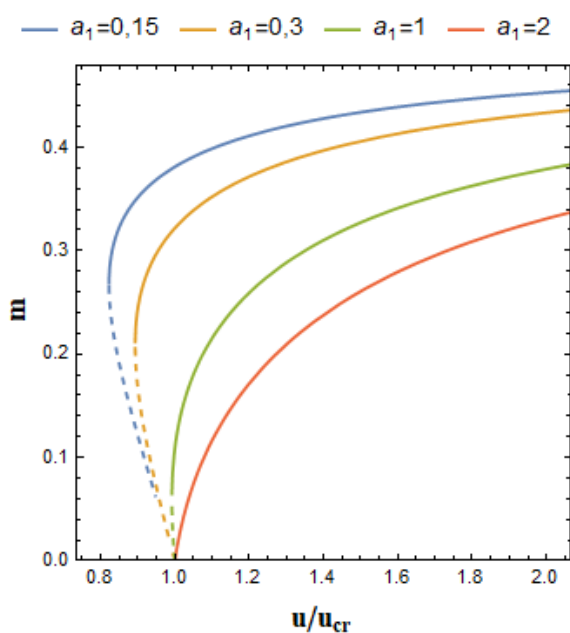
Rys. 4.2.6. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych współczynnika piezoelektrycznego κ .



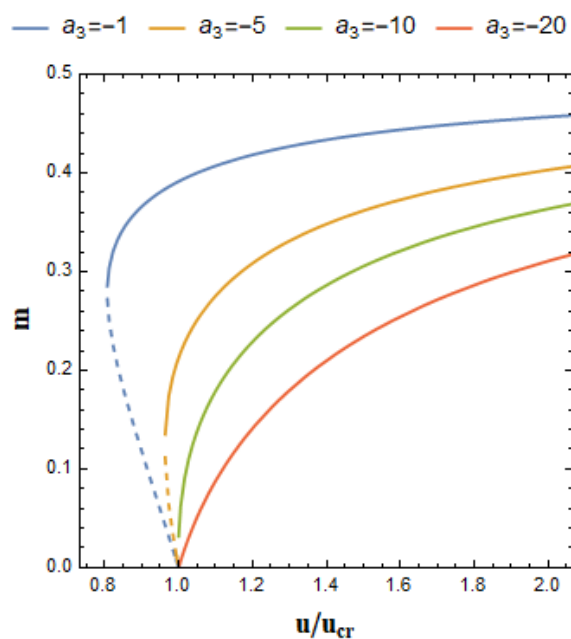
Rys. 4.2.7. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika sztywności liniowej k .



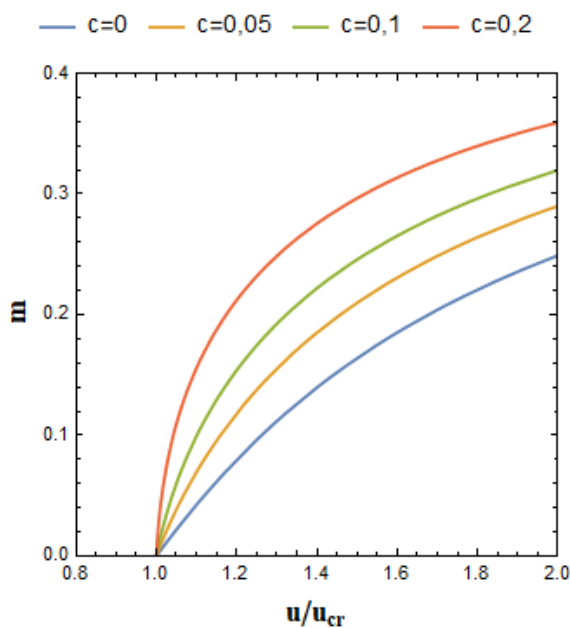
Rys. 4.2.8. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych gęstości płynu ρ .



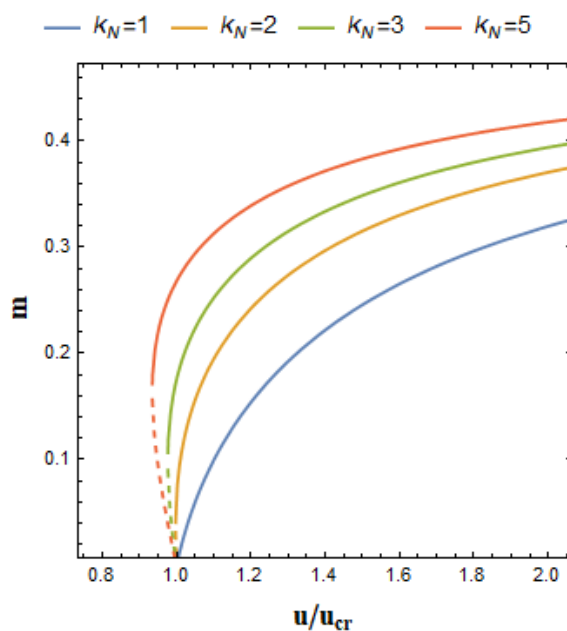
Rys. 4.2.9. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika a_1 .



Rys. 4.2.10. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika a_3 .



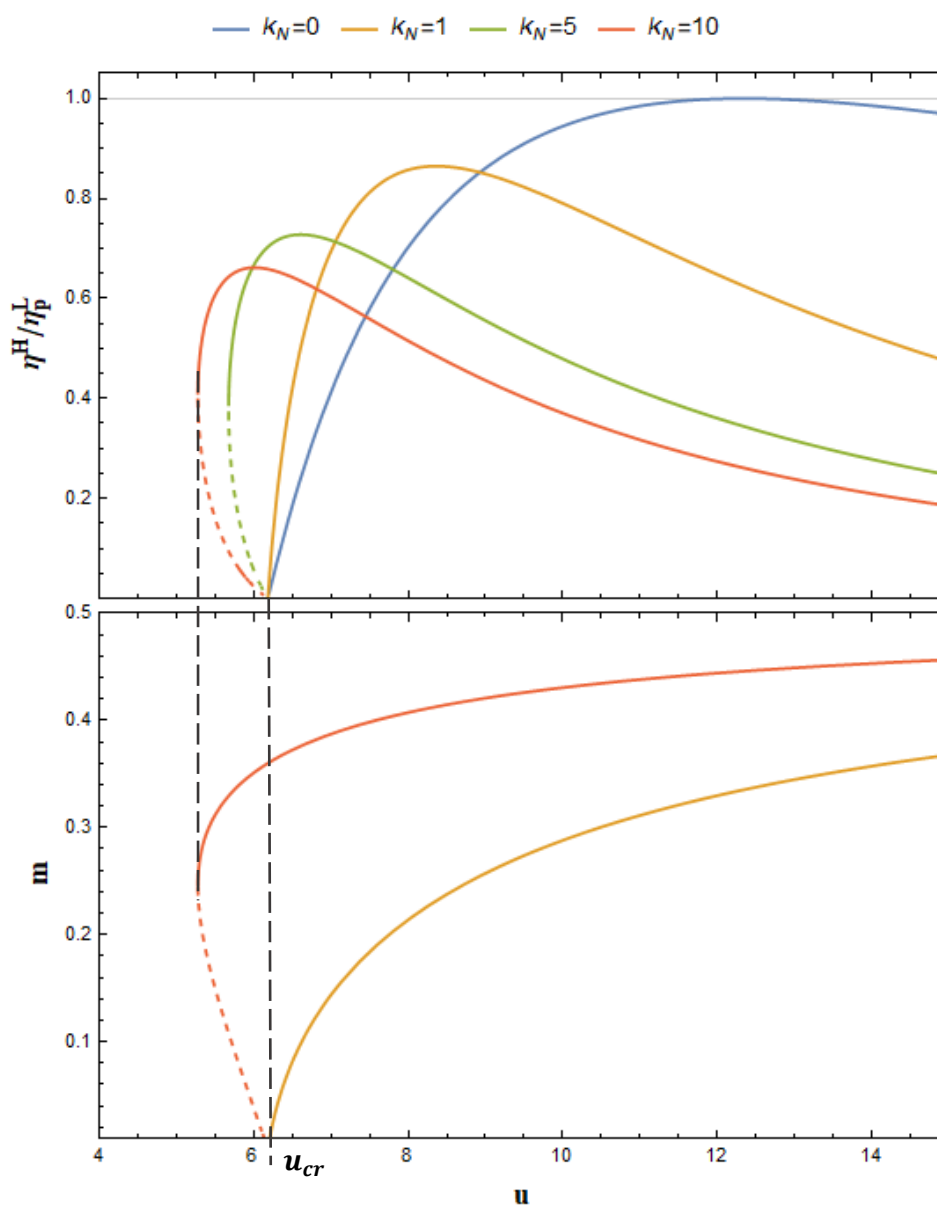
Rys. 4.2.11. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika tłumienia c .



Rys. 4.2.12. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika sztywności nieliniowej k_n .

Analizę tego zjawiska należy zacząć od spostrzeżenia, że wielomian (4.2.15), w zależności od parametrów urządzenia, może mieć jedno lub dwa rzeczywiste dodatnie rozwiązania ze względu na A_{ys} . W drugim przypadku, jedno z rozwiązań będzie niestabilne, zatem nierealizowalne technicznie.

Nie oznacza to jednak, że zjawisko to pozostanie bez wpływu na właściwości urządzenia. Na rysunku 4.2.13 przedstawiono rodzinę charakterystyk sprawności układów różniących się wyłącznie współczynnikiem sztywności nieliniowej k_N . Choć nieliniowość nie może wpływać na stabilność układu – a więc i na prędkość krytyczną – w rozumieniu dosłownym, to jednak pojawienie się niestabilnej gałęzi rozwiązań spowoduje, że układ będzie tracił stabilność na drodze podkrytycznej bifurkacji Hopfa dla prędkości przepływu $u < u_{cr}$, czemu towarzyszyć będzie nagły przeskok do drgań wysokoamplitudowych. Oznacza to również omawiany układ może pracować ze szczytową sprawnością poniżej minimalnej prędkości pracy zdefiniowanej dla wariantu podstawowego (2.23).



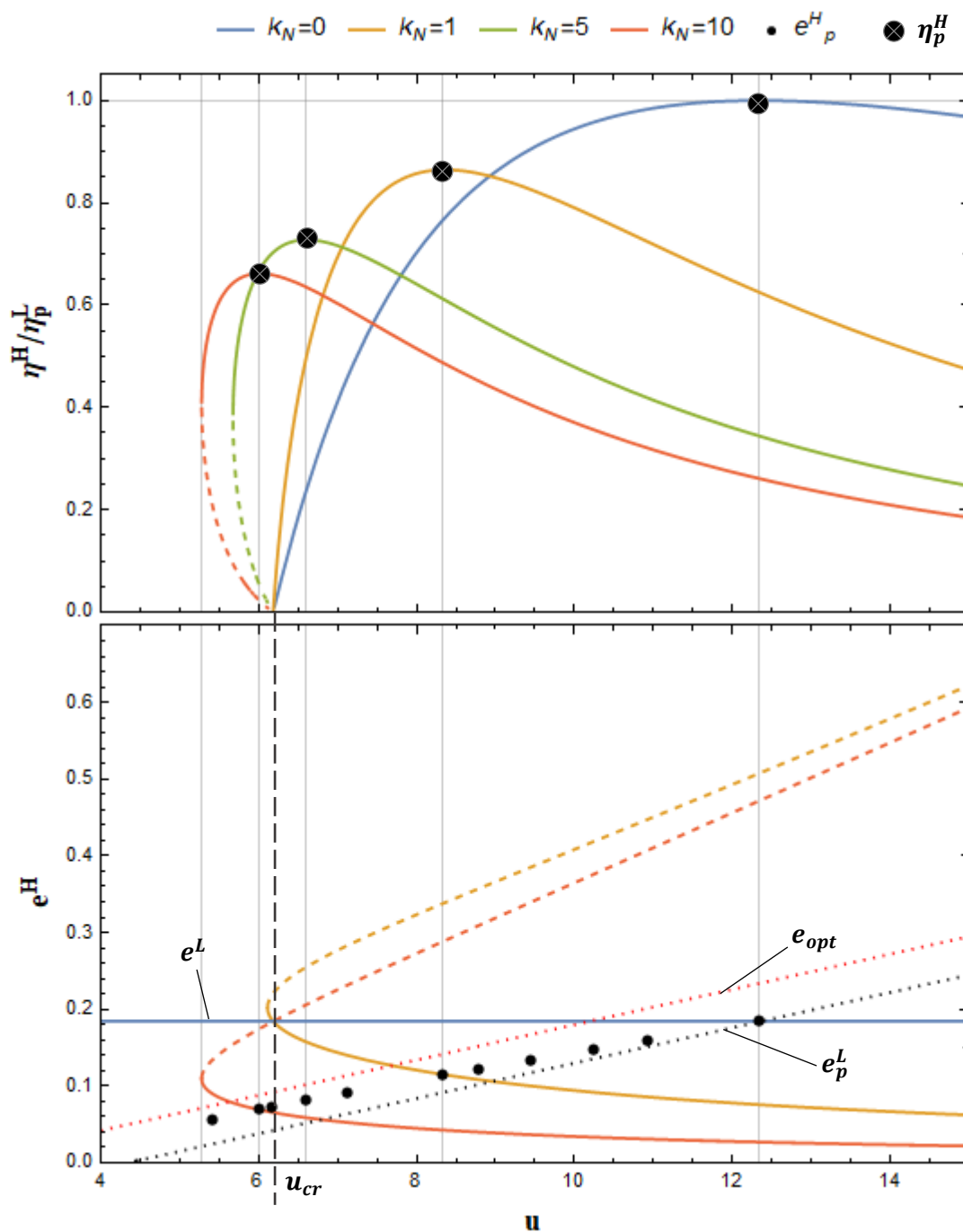
Rys. 4.2.13. Charakterystyki sprawności układów o różnych współczynnikach sztywności nieliniowej k_n zestawione z przebiegami zmian wartości modułu eliptycznego $m(u)$ z prędkością przepływu u .

Zjawisko to wygodnie jest analizować obserwując jednocześnie wykresy zależności modułu eliptycznego m , oraz sprawności η^H od prędkości przepływu u (4.2.13). Moduł eliptyczny m , będący miarą wpływu nieliniowej sprężystości na zachowanie układu, dla prędkości krytycznej u_{cr} musi przyjmować wartość $m = 0$ i będzie on rosł wraz ze wzrostem prędkości przepływu. Znajduje to odzwierciedlenie na wykresie na rys. 4.4.13 – dla $k_N = 1$, część gałęzi stabilnej oraz cała gałąź niestabilna funkcji modułu eliptycznego przyjmuje wartości $m < 0$. Większa wartość współczynnika k_N spowoduje szybszy wzrost modułu eliptycznego z prędkością przepływu i przy odpowiednio silnej nieliniowości cała gałąź stabilna modułu będzie przyjmować wartości dodatnie, a moduł $m = 0$ dla prędkości krytycznej osiągnąony będzie przez gałąź niestabilną. W konsekwencji część gałęzi stabilnej znajdzie się w obszarze prędkości przepływu mniejszych od prędkości krytycznej.

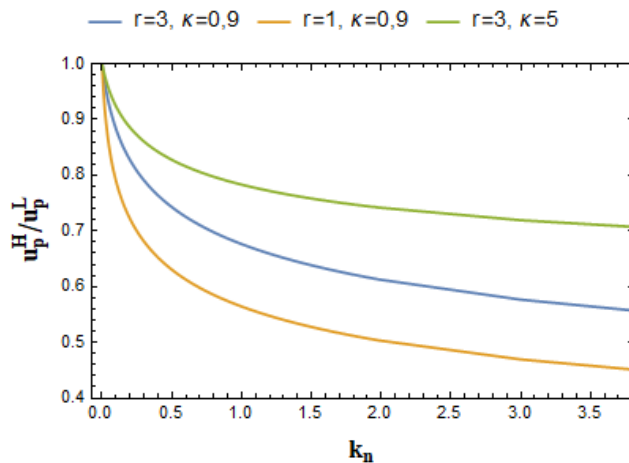
Jak dotąd, wykazano dwa skutki występowania w układzie nieliniowej sprężystości: niewielkie wzmocnienie pierwotnej funkcji sprawności konstituowane przez zawsze dodatnią funkcję ψ^H oraz możliwość podkrytycznego przejścia układu do niestabilności dynamicznej. Na podstawie rys. 4.2.13, poczynić można kolejną ważną obserwację – wraz z rosnącym współczynnikiem sztywności nieliniowej k_N maleje sprawność szczytowa układu, jego szerokość pasma wysokiej sprawności oraz prędkość nominalna. Przyczyny tych efektów należy dopatrywać się w fakcie, że – zgodnie z tożsamością (4.2.14) – tłumienie elektryczne e^H analizowanego wariantu zależne jest od amplitudy drgań, a zatem również od prędkości przepływu. Relację tę dla różnych współczynników sztywności nieliniowej k_N , zestawione z odpowiednimi charakterystykami sprawności, przedstawiono na rys. 4.2.14.

Mając na uwadze zależność tłumienia elektrycznego e^H od prędkości przepływu u należy stwierdzić, że wyrażenia (1.15) oraz (1.17), opisujące prędkość nominalną u_p^L oraz nominalne tłumienie elektryczne e_p^L układu liniowego, nie mogą opisywać również analogicznych wielkości układu nieliniowego. Ponadto, ze względu na złożoność funkcji $e^H(u)$, analityczne rozwiązanie równania $\frac{d\eta^H}{du} = 0$ dla u , celem obliczenia u_p^H oraz $e^H(u_p^H) = e_p^H$ nie jest możliwe. W związku z powyższym, wielkości te zostały obliczone metodą numeryczną dla kolejnych wartości współczynnika k_N . Tak uzyskane punkty $\{u_p^H, e_p^H\}$ naniesiono na wykres (4.2.13). Na rysunku widnieje również referencyjna prosta $e^L(u_p^L) = e_p^L$ (2.17), uzyskana dla układu o $k_N = 0$ oraz jednakowych wartości pozostałych parametrów, a także prosta e_{opt} (2.20). Jak wskazywano we wcześniejszej części pracy, moduł eliptyczny dla prędkości krytycznej musi przyjmować wartość $m = 0$, zatem $e^H(u_{cr}) = e^L$, natomiast tożsamość (4.2.14) wskazuje, że tłumienie elektryczne e^H musi maleć wraz z prędkością przepływu. W konsekwencji równość $e^H = e_p^H$ zachodzi dla prędkości przepływu niższej niż równość $e^L = e_p^L$,

co tłumaczy zmniejszenie prędkości nominalnej w układzie nieliniowym. Wpływ współczynnika nieliniowej sztywności na nominalną prędkość przedstawiono na płaszczyźnie $\frac{u_p^H}{u_p^L} \times k_N$ na rys. 4.2.15.

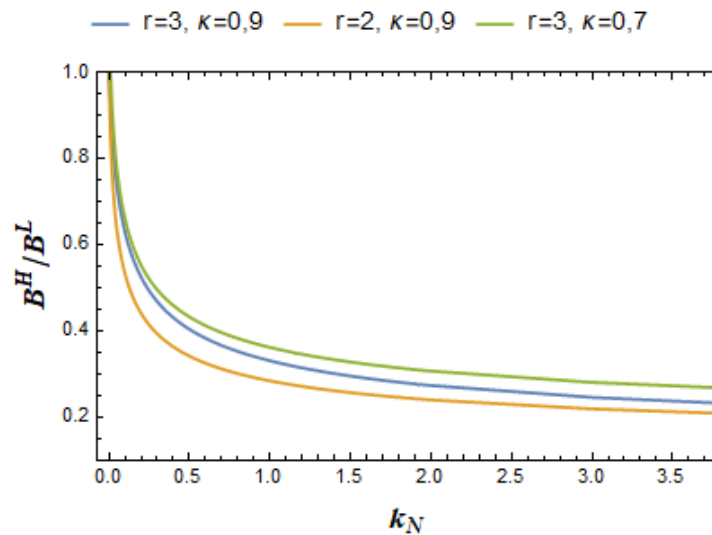


Rys. 4.2.14. Charakterystyki sprawności układów o różnych współczynnikach sztywności nieliniowej k_n zestawione z przebiegami zmian wartości tłumienia elektrycznego $e^H(u)$ z prędkością przepływu u .



Rys. 4.2.15. Wykresy zmian wartości u_p^H/u_p^L wraz ze wzrostem współczynnika nieliniowej sztywności k_N , dla różnych zestawów parametrów r i κ .

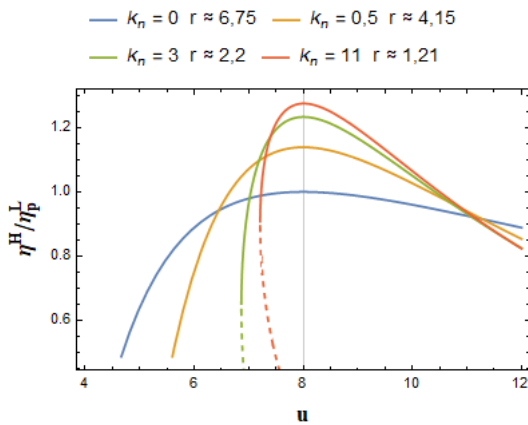
Można też zauważyć, że tempo z jakim wartość funkcji e^H zbliża się do e_p^H , a po jej przekroczeniu od niej oddala, zawsze będzie większe od analogicznego procesu dla funkcji e_p^L i e^L , co dowodzi nieuniknioności zwężenia pasma wysokiej sprawności. Wykres ilustrujący skalę tego zjawiska przedstawiono na rys (4.2.16).



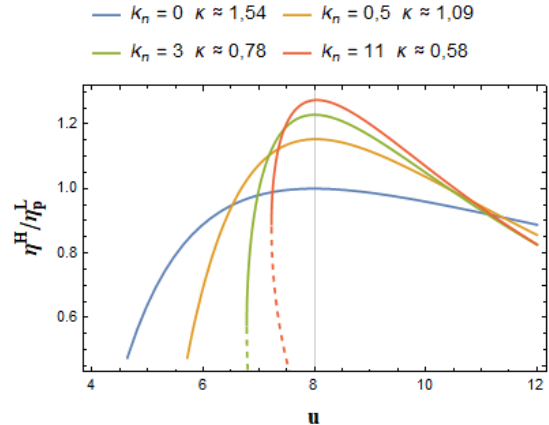
Rys. 4.2.16. Wykresy zmian wartości B^H/B^L wraz ze wzrostem współczynnika nieliniowej sztywności k_N , dla różnych zestawów parametrów r i κ .

Powyższe wnioski sugerują, że silniejsza nieliniowość w układzie prowadzić będzie do zmniejszenia pasma wysokiej sprawności oraz zmniejszenia prędkości nominalnej. Należy mieć na uwadze, że zależność pomiędzy szerokością pasma wysokiej sprawności oraz prędkością optymalną wykazano również dla układu liniowego (2.19), a powyższe wykresy nie dowodzą, że współczynnik nieliniowej sztywności ma wpływ na tę relację. Tezę tę zweryfikować można analizując wykresy η^H układów

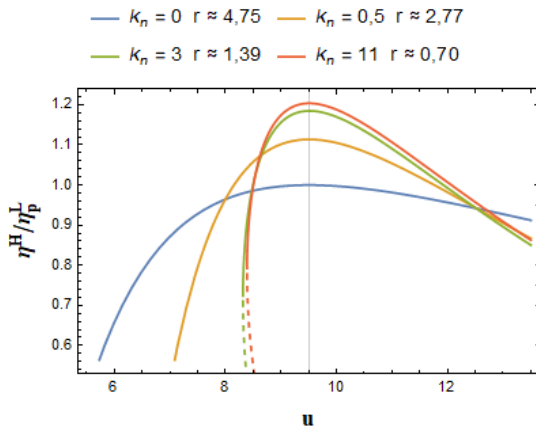
o różnych współczynnikach sztywności nieliniowej oraz pozostałych parametrach dobranych w taki sposób, aby prędkości nominalne wszystkich charakterystyk były równe. Porównanie takie dla trzech różnych nominalnych prędkości przepływu, przedstawiono na rysunkach 4.2.17 – 4.2.23. Każda z prędkości nominalnych uzyskana została na dwa sposoby – poprzez dobór wartości oporu elektrycznego r (lewa kolumna) oraz współczynnika piezoelektrycznego κ (prawa kolumna).



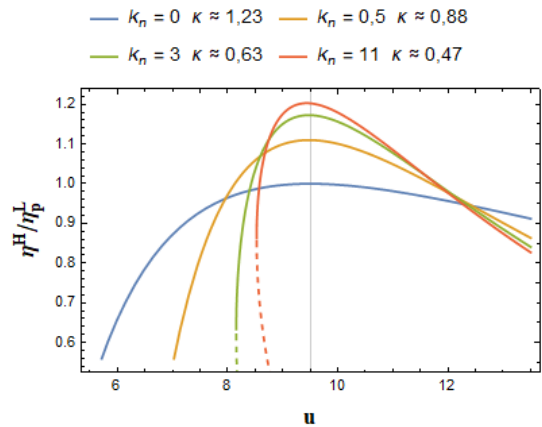
Rys. 4.2.17. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 8$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .



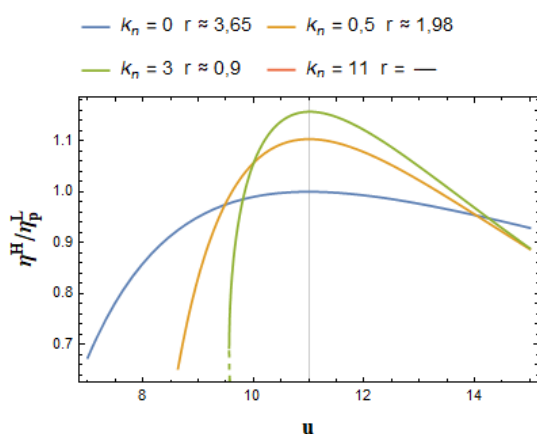
Rys. 4.2.18. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 8$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .



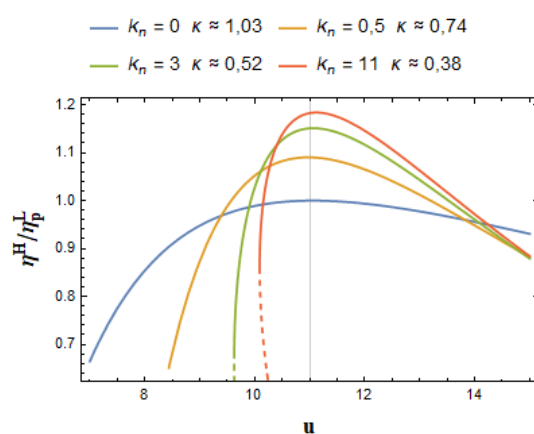
Rys. 4.2.19. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 9,5$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .



Rys. 4.2.20. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 9,5$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .

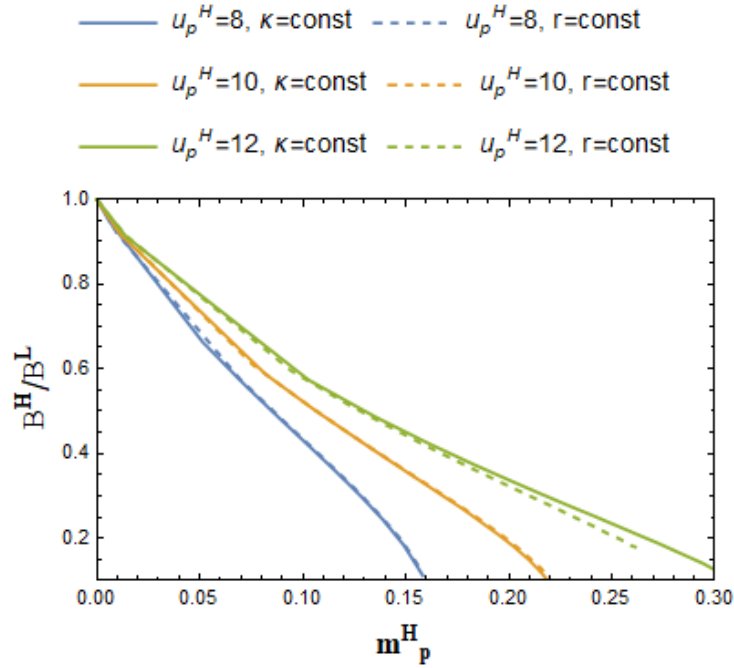


Rys. 4.2.22. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 11$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r . Brak krzywej dla $k_n=11$, wskazuje na niemożność uzyskania charakterystyki sprawności układu o wskazanych parametrach oraz zdanej prędkości nominalnej u_p^H .



Rys. 4.2.23. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 11$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .

Powyższe wykresy ukazują, że w istocie progresywna sprężystość prowadzi do zwężenia pasma wysokiej sprawności, jednak skala tego zjawiska nie jest zależna wyłącznie od współczynnika nieliniowej sztywności oraz prędkości nominalnej – wskazują na to różnice w charakterystykach o tej samej prędkości nominalnej uzyskanej na drodze manipulacji różnymi parametrami. Jest to następstwem faktu, że pomimo, że pomiędzy charakterystykami wymuszone zostało pewne podobieństwo (w postaci jednakowych współczynników sztywności nieliniowych k_N oraz prędkości nominalnych u_p^H), to jednak różnią się one innymi parametrami, a to wpływa na zmianę wartości modułu eliptycznego z prędkością przepływu, który – jak już ustalono – jest miarą wpływu nieliniowości na cechy układu. Dla bardziej szczegółowej analizy, wygodnie jest przedstawić pasmo wysokiej sprawności B^H w zależności od modułu eliptycznego. Jako że moduł eliptyczny jest inny w każdym punkcie pasma wysokiej sprawności, przyjęto moduł eliptyczny przy prędkości nominalnej – moduł nominalny $m = m(u_p^H) = m_p^H$ jako jego wartość referencyjną. Wykresy $\frac{B^H}{B^L} \times m_p^H$ przedstawiono na rys. 4.2.24. Poniższy wykres pozwala wyciągnąć wniosek, że pasmo wysokiej sprawności B^H spada wraz ze wzrostem modułu eliptycznego m_p^H , a spadek ten jest tym szybszy, im mniejsza jest prędkość nominalna u_p^H danego układu. Potwierdza się również wcześniej poczyniona obserwacja, że relacja ta nie jest ściśle jednakowa dla różnych zestawów parametrów, nawet jeśli zapewniają one jednakową prędkość nominalną układu, przy czym różnice te są marginalne oraz rosną wraz z wartością m_p^H .



Rys. 4.2.24. Zależność wartości stosunku B^H/B^L od modułu nominalnego m_p^H dla różnych prędkości nominalnych u_p^H .

Ostatnim, zjawiskiem które zostanie przeanalizowane, jest wpływ nieliniowości na sprawność szczytową η_p^H . Jak już wskazano we wcześniej części pracy, wykresy na rys. 4.2.13 – 4.2.14 sugerują, że wzrost współczynnika sztywności nieliniowej prowadzi do spadku sprawności szczytowej oraz zmniejszenia prędkości nominalnej. Można zatem stwierdzić, że istnieje korelacja pomiędzy spadkiem sprawności szczytowej oraz zmniejszeniem prędkości nominalnej, tak jak to miało miejsce w przypadku układu liniowego (2.15). W związku z powyższym, zasadne jest aby oceniać wpływ nieliniowości na sprawność szczytową, porównując układy o jednakowych prędkościach nominalnych, tak jak to miało miejsce podczas badania zmian pasma szerokości wysokiej sprawności. Analiza wykresów przedstawionych na rys. 4.2.17 – 4.2.23 każe stwierdzić, że spadek sprawności szczytowej w wyniku obniżenia prędkości nominalnej jest tym mniejszy, im silniejsza jest nieliniowość.

Efekt ten wywołany jest częściowo przez wpływ funkcji ψ^H , ale znaczenie ma również fakt, który zaobserwować można już na rys. 4.2.14. Istotne jest tutaj spostrzeżenie, że:

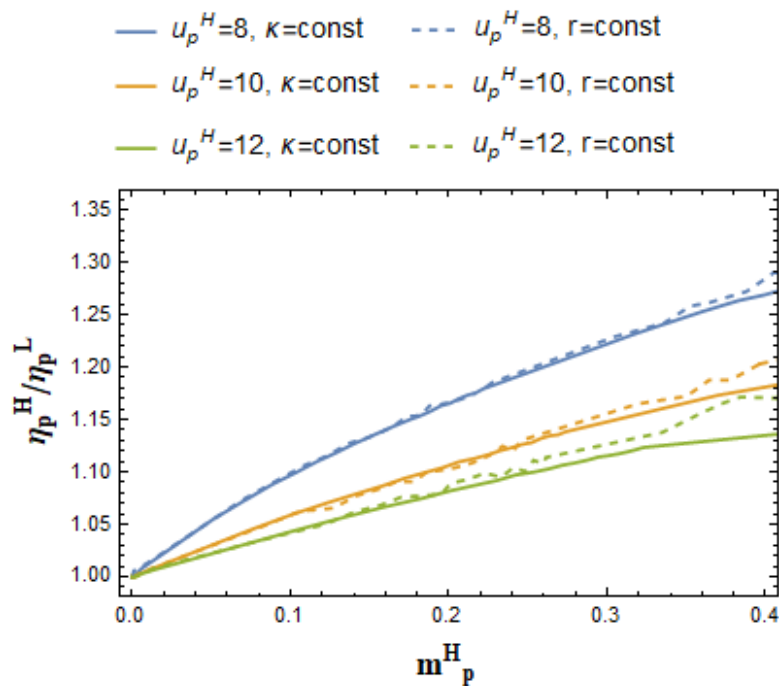
$$\frac{\delta \eta^H}{\delta e^H} = 0 \Rightarrow e^H = e_{opt}^H = \frac{1}{2}(u_p a_1 - c) = e_{opt}^L = e_{opt} \quad (4.2.19)$$

Nieliniowość nie wpływa więc na funkcję tłumienia optymalnego e_{opt} . Zarówno ta prosta, jak i $e_p^L(u)$ opisująca tłumienie nominalne układu liniowego (2.17) widnieją na wykresie 4.2.14. Sprawność szczytowa dowolnego układu będzie tym większa, im bliższe będą wartości obydwu tych parametrów. Różnicę pomiędzy ich wartościami nazwano wrażliwością na tłumienie D_S^L ,

która dla układu liniowego wynosi $D_s^L = \frac{1}{2}c$ (2.22). Analizując zmianę położenia punktu $\{u_p^H, e_p^H\}$ w skutek zwiększania współczynnika nieliniowej sztywności k_n zauważyć można, że wartość tłumienia nominalnego układu o progresywnej sprężystości zbliża się do wartości e_{opt} . Można więc zapisać, że:

$$e_{opt} - e_p^H < e_{opt} - e_p^L \quad (4.2.20)$$

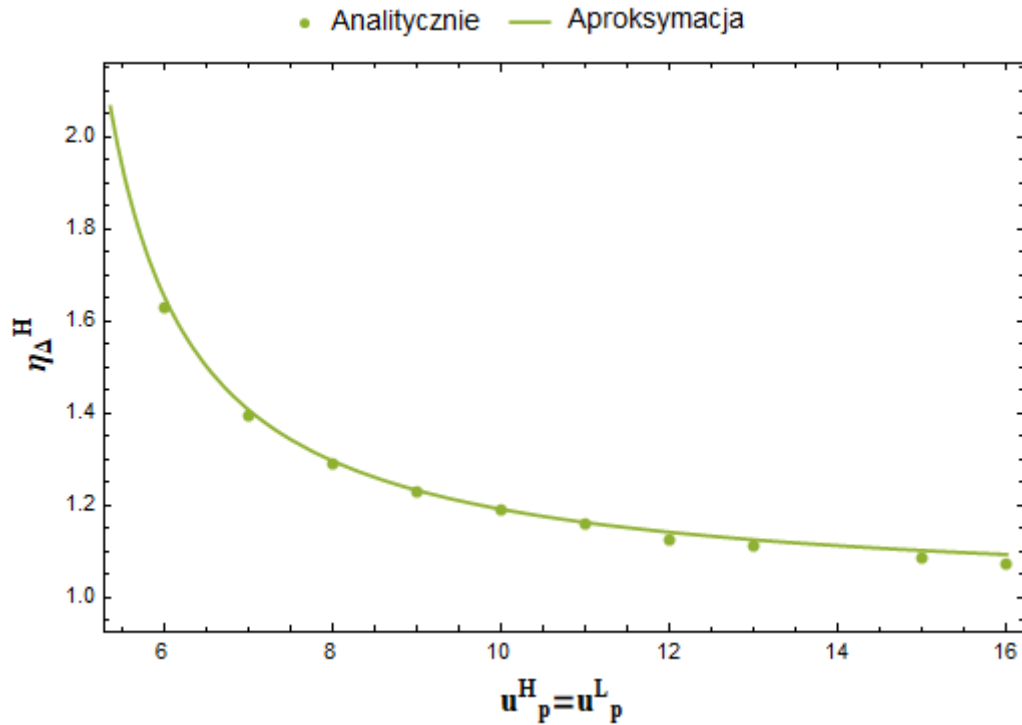
Zatem tłumienie elektryczne przy prędkości nominalnej e_p^H jest bliższe optymalnemu tłumieniu elektrycznemu e_{opt} w przypadku wystąpienia w układzie progresywnej sprężystości, co z kolei przyczynia się do zwiększenia sprawności szczytowej η_p^H . Relację ukazującą wzrost η_p^H względem η_p^L w zależności od wartości modułu eliptycznego przy prędkości nominalnej m_p^H dla różnych prędkości nominalnych, przedstawiono na rys. 4.2.25.



Rys. 4.2.25. Zależność wartości stosunku η_p^H/η_p^L od modułu nominalnego m_p^H dla różnych prędkości nominalnych u_p^H .

Powyższy rysunek jednoznacznie wskazuje, że wzmocnienie zapewniane przez progresywną sprężystość rośnie wraz z malejącą prędkością nominalną u_p^H , a wzmocnienie to jest tym silniejsze, im wyższa jest wartość modułu nominalnego m_p^H . Zasadne jest więc aby określić zależność pomiędzy wzmocnieniem η_p^H/η_p^L a prędkością nominalną, przy optymalnym module nominalnym m_p^H . Graniczna wartość tego ostatniego wynosi $m_p^H = 0,5$ (4.2.12). Jej osiągnięcie byłoby możliwe tylko w wypadku, w którym liniowa składowa sprężystości układu byłaby równa zero. Jest to warunek technicznie nieosiągalny, ze względu na nieuniknioną obecność liniowej sprężystości piezoelektryka.

Wzmocnienie zostało więc określone przy module o arbitralnie wybranej, suboptymalnej wartości, tj. $m_p^H = 0,45$. Suboptymalne wzmocnienia $\eta_p^H/\eta_p^L = \eta_\Delta^H$ dla kolejnych prędkości nominalnych u_p^H przedstawiono na rys. 4.2.26.



Rys. 4.2.26. Punkty opisujące suboptymalne wzmocnienie dla kolejnych prędkości nominalnych oraz funkcja aproksymowana na podstawie tych punktów.

Jak wykazano we wcześniejszej części rozdziału (rys. 4.2.13), omawiany układ może pracować ze sprawnością szczytową przy prędkości niższej niż minimalna prędkość nominalna zdefiniowana dla wariantu podstawowego (2.23). Należy więc oczekiwać, że funkcja $\eta_\Delta^H(u_p^H)$ będzie miała asymptotę pionową $u_p^H = u_p^L = \frac{2c}{\rho a_1}$. Ponadto, założyć można, że $\forall_{u_p^H > \frac{2c}{\rho a_1}} \eta_\Delta^H > 1$, co z kolei implikuje istnienie asymptoty poziomej $\eta_\Delta^H = 1$. Uwzględniając powyższe fakty, zależność $\eta_\Delta^H(u_p^H)$ zaproksymować można funkcją o postaci $1 + \frac{\beta_1}{u_p^H - \frac{2c}{\rho a_1}}$, gdzie $\beta_1 \approx 1,08$ jest współczynnikiem wyznaczonym na drodze aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów. Funkcję suboptymalnego wzmocnienia układu o progresywnej sprężystości wyrazić więc można jako:

$$\eta_\Delta^H(u_p^H) = \eta_\Delta^H \approx 1 + \frac{1,08}{u_p^H - \frac{2c}{\rho a_1}} \quad (4.2.21)$$

4.3. Degresywna charakterystyka sprężystości

W niniejszej części pracy analizie poddany zostanie układ, którego przyrost sztywności maleje wraz z odkształceniem. Jego model matematyczny dany jest poniższym wyrażeniem:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + c\dot{y} + ky - k_n y^3 - v &= \rho \left(a_1 u \dot{y} + a_3 \frac{\dot{y}^3}{u} \right) \\ \kappa \dot{v} + \frac{v}{r} + \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Odwołując się do rozdziału 4.1, można założyć, że w takim przypadku przybliżone rozwiązanie modelu przyjmie postać:

$$y = A_y \text{sn} \quad (4.3.2a)$$

$$v = A_v \text{cn} + B_v \text{sn} \quad (4.3.2b)$$

Poprzez podstawienie powyższych tożsamości do modelu (4.3.1) uzyskano układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} A_y \Omega (c - u \rho a_1) \text{cndn} + (A_y (k - \Omega^2 (1 - m)) - B_v) \text{sn} \\ + (2m \Omega^2 A_y - A_y^3 k_n) \text{sn}^3 - A_v \text{cn} - A_y^3 \frac{\rho \Omega^3 a_3}{u} \text{cn}^3 \text{dn}^3 \end{aligned} \quad (4.3.3a)$$

$$\frac{A_v}{r} \text{cn} - A_v \Omega \kappa \text{dncn} + \frac{B_v}{r} \text{sn} + \Omega (A_y + \kappa B_v) \text{cndn} = 0 \quad (4.3.3b)$$

Podobnie jak w rozdziale 4.2, celem wyrugowania iloczynów funkcji sn i cn z funkcją dn, a także funkcji eliptycznych wyższego rzędu, wprowadza się przybliżenia (4.2.5) i podstawienie (4.2.24), co prowadzi do przetransformowania układu (4.3.1) do układu równań, których poszczególne harmoniczne zestawiono w tabeli (4.3.1)

Tabela 4.3.1. Zestawienie harmoniczných eliptycznych.		
harmoniczna	Równanie 1	Równanie 2
cos(Φ)	$\frac{1}{2}(2k + (m - 2)\Omega^2)A_y - \frac{3k_N A_y^3}{4} - \kappa B_v$	$\frac{A_v}{r} + \Omega(\Gamma_2 + \frac{3}{4}\Gamma_4)(A_y + \kappa B_v) = 0$
sin(Φ)	$(\Gamma_2 + \frac{3}{4}\Gamma_4)\Omega A_y (u \rho a_1 - c) + (\Gamma_2 + \frac{3}{4}\Gamma_4)\Omega A_y \\ (96(8\Gamma_2 + 14\Gamma_2\Gamma_4 + 7\Gamma_4^2)\rho u \Omega^2 a_3 A_y^2) + \\ \kappa A_v = 0$	$\frac{B_v}{r} - (\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3)\Omega \kappa A_v = 0$

$\cos(3\Phi)$	$\frac{k_N A_y^3}{4} - \frac{1}{2} m \Omega^2 A_y = 0$	$\frac{1}{4} \Gamma_3 \kappa \Omega A_v = 0$
$\sin(3\Phi)$	$\frac{\Omega A_y}{64u} (16\Gamma_4 (u^2 \rho a_1 - cu) + (16\Gamma_2^3 + 60\Gamma_2^2 \Gamma_4 + 63\Gamma_2 \Gamma_4^2 + 21\Gamma_4^3) \rho \Omega^2 a_3 A_y^2) = 0$	$\frac{1}{4} \Gamma_4 \Omega (A_y + \kappa B_v) = 0$
$\sin(5\Phi)$	$-\frac{3\Gamma_4 (4\Gamma_2^2 + 7\Gamma_2 \Gamma_4 + 3\Gamma_4^2) \rho \Omega^3 a_3 A_y^3}{64u} = 0$	-
$\sin(7\Phi)$	$\frac{3\Gamma_4^2 (\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4) \rho \Omega^3 a_3 A_y^3}{64u} = 0$	-
$\sin(9\Phi)$	$-\frac{\Gamma_4^3 \rho \Omega^3 a_3 A_y^3}{256u} = 0$	-

Z powyższej tabeli wyselekcjonowano pięć równań, które po skomponowaniu w układ, umożliwiają obliczenie pięciu niewiadomych wielkości występujących w założonej postaci rozwiązań:

$$\frac{A_v}{r} + \Omega (\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4) (A_y + \kappa B_v) = 0 \quad (4.3.4a)$$

$$\frac{B_v}{r} - (\Gamma_1 + \frac{3}{4} \Gamma_3) \Omega \kappa A_v = 0 \quad (4.3.4b)$$

$$\frac{1}{2} (2k + (m-2)\Omega^2) A_y - \frac{3}{4} k_N A_y^3 - \kappa B_v \quad (4.3.4c)$$

$$\left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \Omega A_y (u \rho a_1 - c) + \left(\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4 \right) \Omega A_y (96(8\Gamma_2 + 14\Gamma_2 \Gamma_4 + 7\Gamma_4^2) \rho u \Omega^2 a_3 A_y^2) + A_v = 0 \quad (4.3.4d)$$

$$\frac{k_N A_y^3}{4} - \frac{1}{2} m \Omega^2 A_y = 0 \quad (4.3.4e)$$

Zależności pomiędzy amplitudami napięcia A_v i B_v a amplitudą drgań A_y obliczono korzystając z równań (4.3.4a) oraz (4.3.4b):

$$A_v = -\frac{r \Gamma_e \Omega}{1 + r^2 \Omega^2 \Gamma_c} A_y \quad (4.3.5a)$$

$$B_v = -\frac{r^2 \kappa \Omega^2 \Gamma_c}{1 + r^2 \kappa^2 \Omega^2 \Gamma_c} A_y \quad (4.3.5b)$$

Gdzie $\Gamma_e = (\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4)$. Na podstawie równania (4.3.4e) obliczono, że:

$$A_y^2 = 2 \frac{m \Omega^2}{k_n} \quad (4.3.6)$$

Rozwiązanie równania (4.3.4c) dla Ω^2 , po uwzględnieniu tożsamości (4.3.5b) oraz (4.3.6) prowadzi do wyrażenia:

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{\Gamma_c r^2 \kappa + \Gamma_c k r^2 \kappa^2 - 1 - m + \sqrt{4\Gamma_c k(1+m)r^2 \kappa^2 + (1+m - \Gamma_c r^2 \kappa(1+k\kappa))^2}}{2\Gamma_c(1+m)r^2 \kappa^2} \\ &\approx \frac{r^2 \kappa(1+k\kappa) - 1 + \sqrt{1 + 2r^2 \kappa(-1+k\kappa) + r^4 \kappa^2(1+k\kappa)^2}}{2r^2 \kappa^2(1+m)} = \frac{\omega^2}{(1+m)}\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

Podobnie jak przy analizie wariantu o sprężystości progresywnej, wykazano, że wartość modułu eliptycznego m będzie nośnikiem informacji o skali zmiany okresu drgań układu nieliniowego względem liniowego, jednak w tym przypadku, dochodzić będzie do jego wydłużenia. Powyższa tożsamość, wraz z (4.3.6) umożliwia określenie zależności pomiędzy modułem eliptycznym m a amplitudą drgań A_y :

$$m = \frac{A_y^2 k_n}{2\omega^2 - A_y^2 k_n} \quad (4.3.8)$$

Rozwiązanie równania (4.3.5d) dla A_y^2 , umożliwia wyrażenie amplitudy drgań jako:

$$A_y^2 = \frac{4u(c + e^S - u\rho a_1)}{3\Gamma_k \rho \Omega^2 a_3} \quad (4.3.9)$$

Gdzie $\Gamma_k = \Gamma_2^2 + \frac{7}{4}\Gamma_2\Gamma_4 + \frac{7}{8}\Gamma_4^2$, a tłumienie elektryczne e^S wynosi:

$$e^S = \frac{r}{1 + r^2 \kappa^2 \Omega^2 \Gamma_c} \approx \frac{r}{1 - \frac{(m-2)r^2 \kappa^2 \omega^2}{2(1+m)}} = \frac{r}{1 + \left(\omega^2 - \frac{3}{4}k_N A_y^2\right) \kappa^2 r^2} \quad (4.3.10)$$

Ponownie podkreślić należy fakt, że $e^S|_{m=0} = e^L$. Korzystając z równań (2.3.7 – 2.3.9) oraz przyjmując $A_{ys} = A_y^2$, wyprowadzić można wielomian:

$$A_{ys}^3 + \chi_2 A_{ys}^2 + \chi_1 A_{ys} + \chi_0 = 0 \quad (4.3.11)$$

Gdzie:

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \frac{256u(c(1 - r^2 \kappa^2 \omega^2) - r\kappa + u(1 + r^2 \kappa^2 \omega^2)\rho a_1)}{81k_n^2 r^2 \kappa^2 \rho a_3} \\ \chi_1 &= \frac{64(k_n r^2 u(c - u\rho a_1) + \omega^2(1 + r^2 \kappa^2 \omega^2)\rho a_3)}{27k_n^2 \kappa^2 r^2 \rho a_3} \\ \chi_2 &= \frac{4(7r^2 \omega^2 - 3)}{9k_n r^2 \kappa^2}\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

Rozwiązanie powyższego równania prowadzi do wyrażenia opisującego A_y w sposób jawny. Uzyskany wynik podstawić można kolejno do (4.3.8), (4.3.7) oraz (4.3.5), w celu wyprowadzenia pozostałych niewiadomych.

Sprawność układu o degresywnej sprężystości można wyrazić jako:

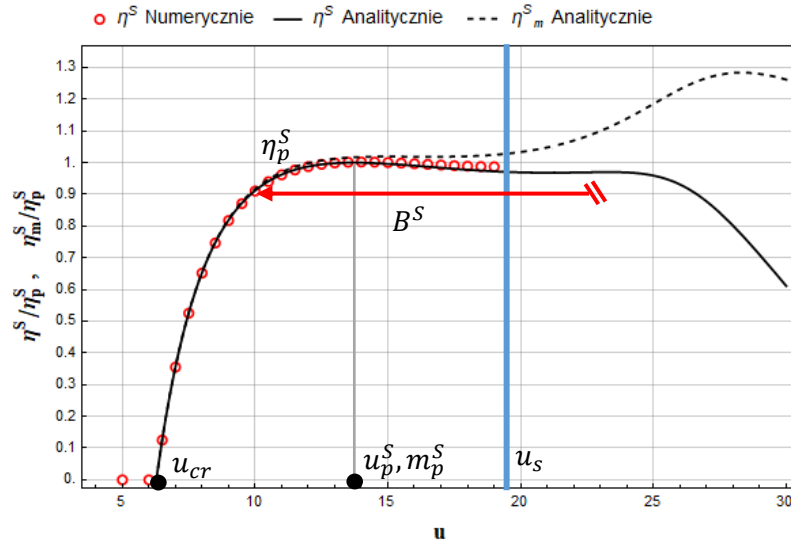
$$\begin{aligned} \eta^S &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{r} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(A_v \cos t + B_v \sin t)^2}{r} dt \approx \frac{1}{T} (A_v^2 + B_v^2) \int_0^T \frac{\sin^2 t}{r} dt \\ &= \frac{2e^S(c + e^S - u\rho a_1)}{3u^2\rho^2 a_3} \frac{2\Gamma_j \Gamma_p^2}{\Gamma_k} \frac{1 + r^2 \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_e^2} \frac{\omega^2}{1+m}}{1 + r^2 \Gamma_c \frac{\omega^2}{1+m}} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Gdzie $\Gamma_j = \frac{K-E}{mK}$, przy czym można wykazać, że $\frac{2\Gamma_j \Gamma_e^2}{\Gamma_k} \approx 1$. Przyjmując, że $\frac{2e^S(c+e^S-u\rho a_1)}{3u^2\rho^2 a_3} = \eta_m^S$

oraz $\frac{1+r^2 \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_e^2} \frac{\omega^2}{1+m}}{1+r^2 \Gamma_c \frac{\omega^2}{1+m}} = \psi^S$ można zapisać, że:

$$\eta^S = \eta_m^S \psi^S \quad (4.3.14)$$

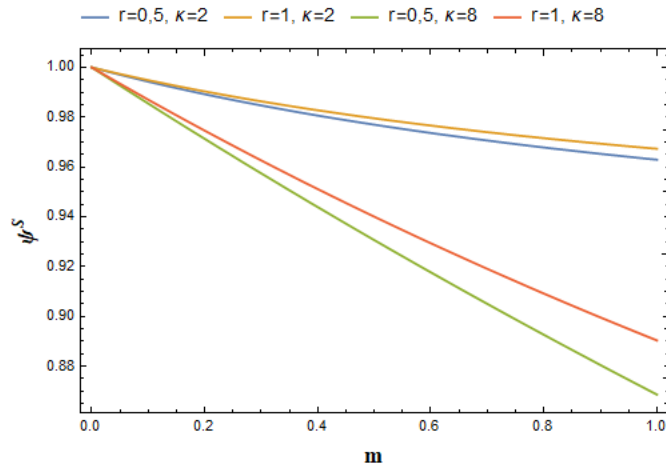
Przykładowe wykresy funkcji η^S oraz η_m^S przedstawiono na rys. 4.3.1, a funkcji ψ^S na rys. 4.3.2.



Rys. 4.3.1. Charakterystyka sprawności układu o degresywnej sprężystości, wraz z zaznaczonymi parametrami charakterystycznymi.

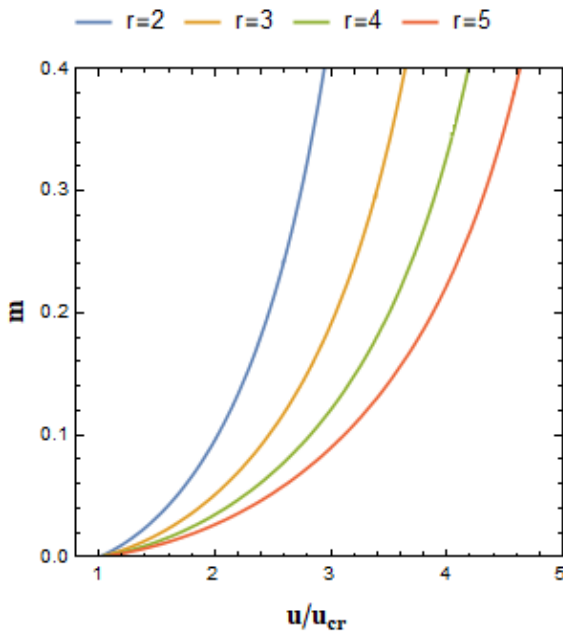
Powyższy wykres uwypukla konsekwencję zamodelowania degresywnej sprężystości w taki sposób, że energia potencjalna układu posiada dwa lokalne maksima – punkty siodłowe $A_y = \pm\sqrt{2\omega/k_n}$, gdzie układ doznaje bifurkacji węzeł – siodło. Po ich przekroczeniu, amplituda układu zmierza do nieskończoności. Punkty te stanowią więc granicę poprawności modelu oraz, tym samym, granicę poprawności uzyskanych rozwiązań. Prędkość przepływu, przy której układ osiąga punkty siodłowe

$A_y = \pm\sqrt{2\omega/k_n}$ nazywana będzie prędkością siodłową u_s . W rezultacie zasadne jest określenie szerokości pasma wysokiej sprawności B^S tylko w przypadkach, w których obydwa rozwiązania równania $\eta^S = 0,9\eta_p^S$ dla u , spełniają nierówność $u_{1,2} < u_s$. Ważną cechą analizowanego wariantu jest też to, że jego funkcja wzmocnienia nieliniowością ψ^S maleje wraz z modułem eliptycznym m , będzie więc ona przyczyniać się do zmniejszenia sprawności (rys. 4.3.2).

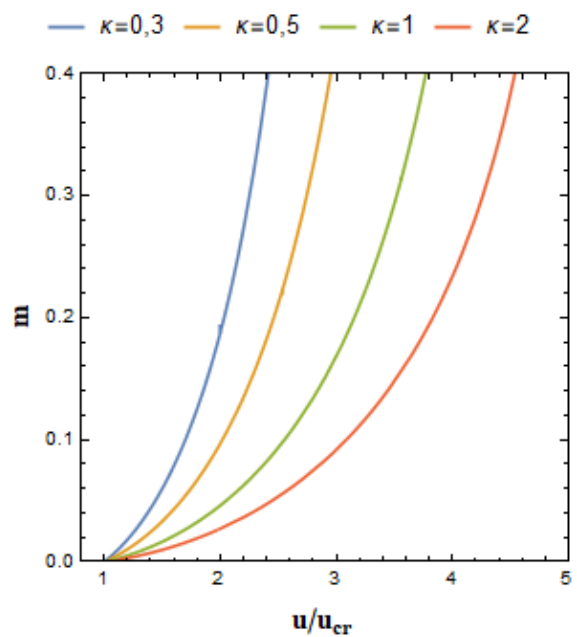


Rys. 4.3.2. Przykładowe wykresy funkcji ψ^S .

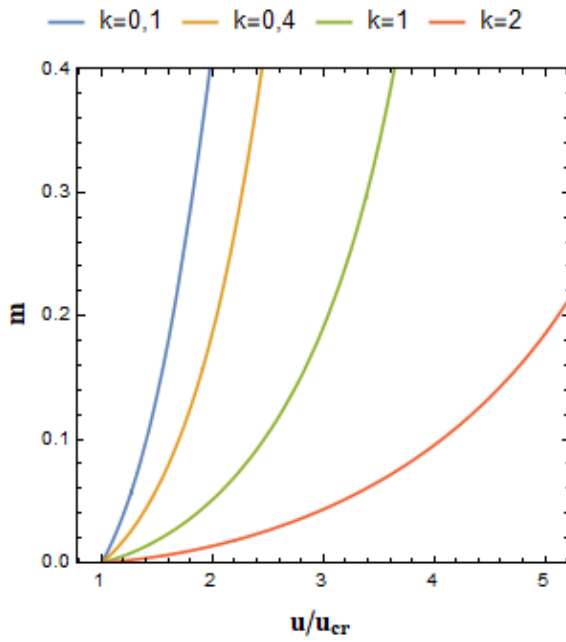
Analizę sprawności układu o degresywnej sprężystości rozpocząć należy od zbadania wpływu poszczególnych parametrów na wartość modułu eliptycznego m – wykresy zmian tej wielkości wraz z prędkością przepływu dla różnych parametrów przedstawiono na rys. 4.3.3 – 4.3.10.



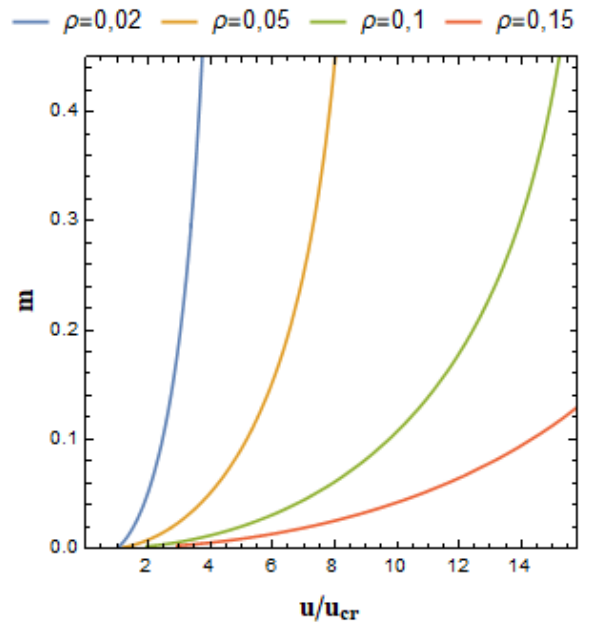
Rys. 4.3.3. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości oporu elektrycznego r .



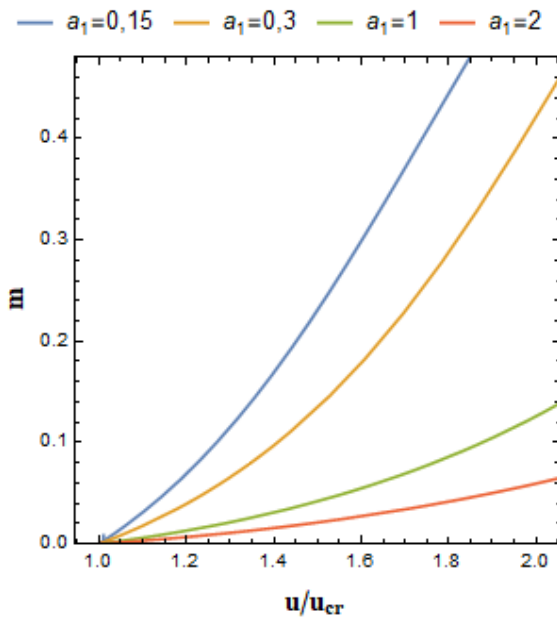
Rys. 4.3.4. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika κ .



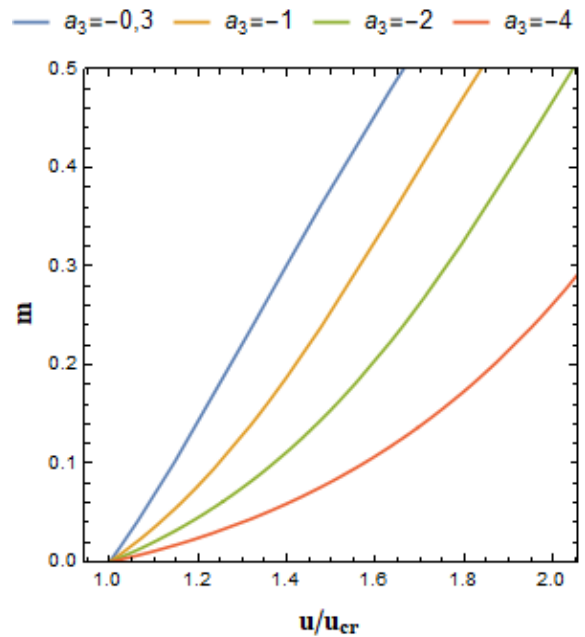
Rys. 4.3.5. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika sztywności liniowej k .



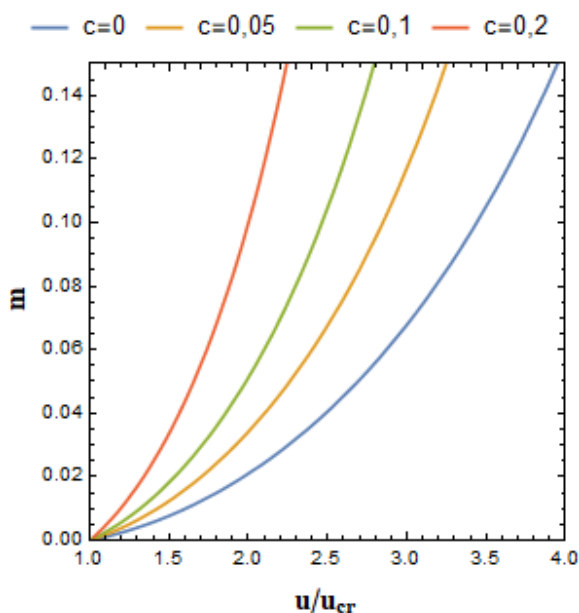
Rys. 4.3.6. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych gęstości ρ .



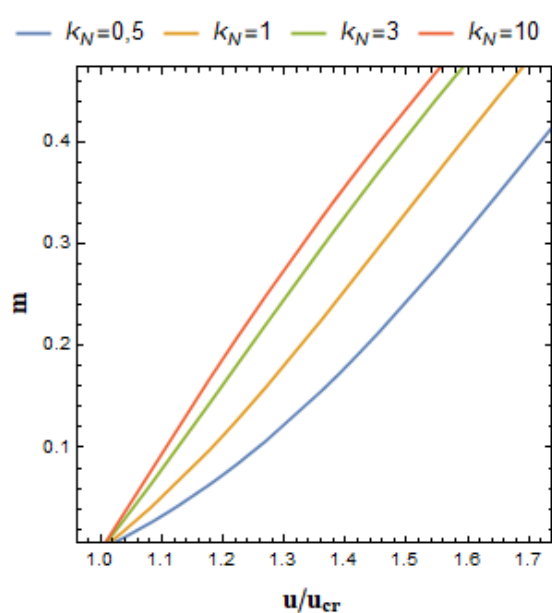
Rys. 4.3.7. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika a_1 .



Rys. 4.3.8. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika a_1 .



Rys. 4.3.9. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika tłumienia strukturalnego c .

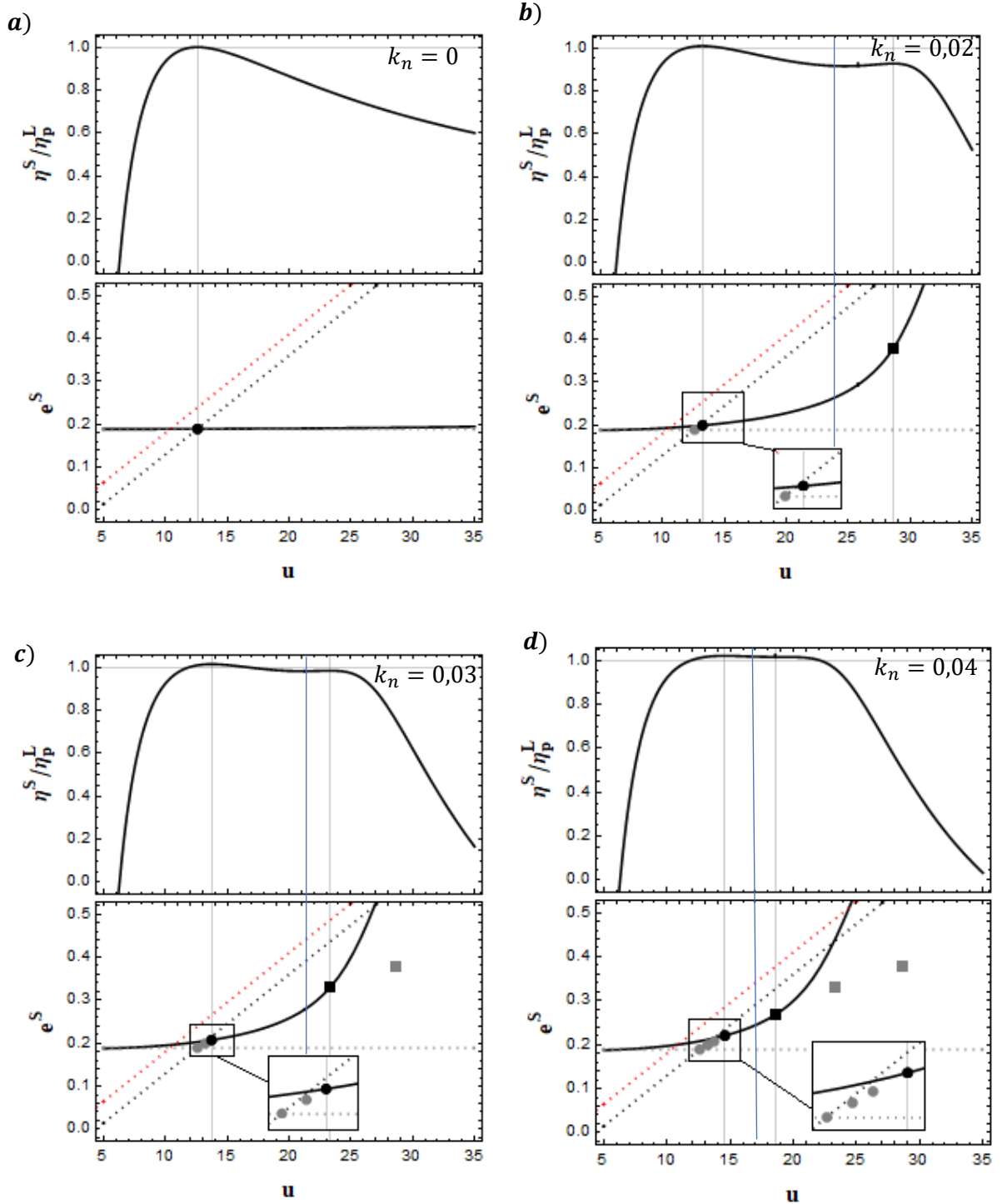


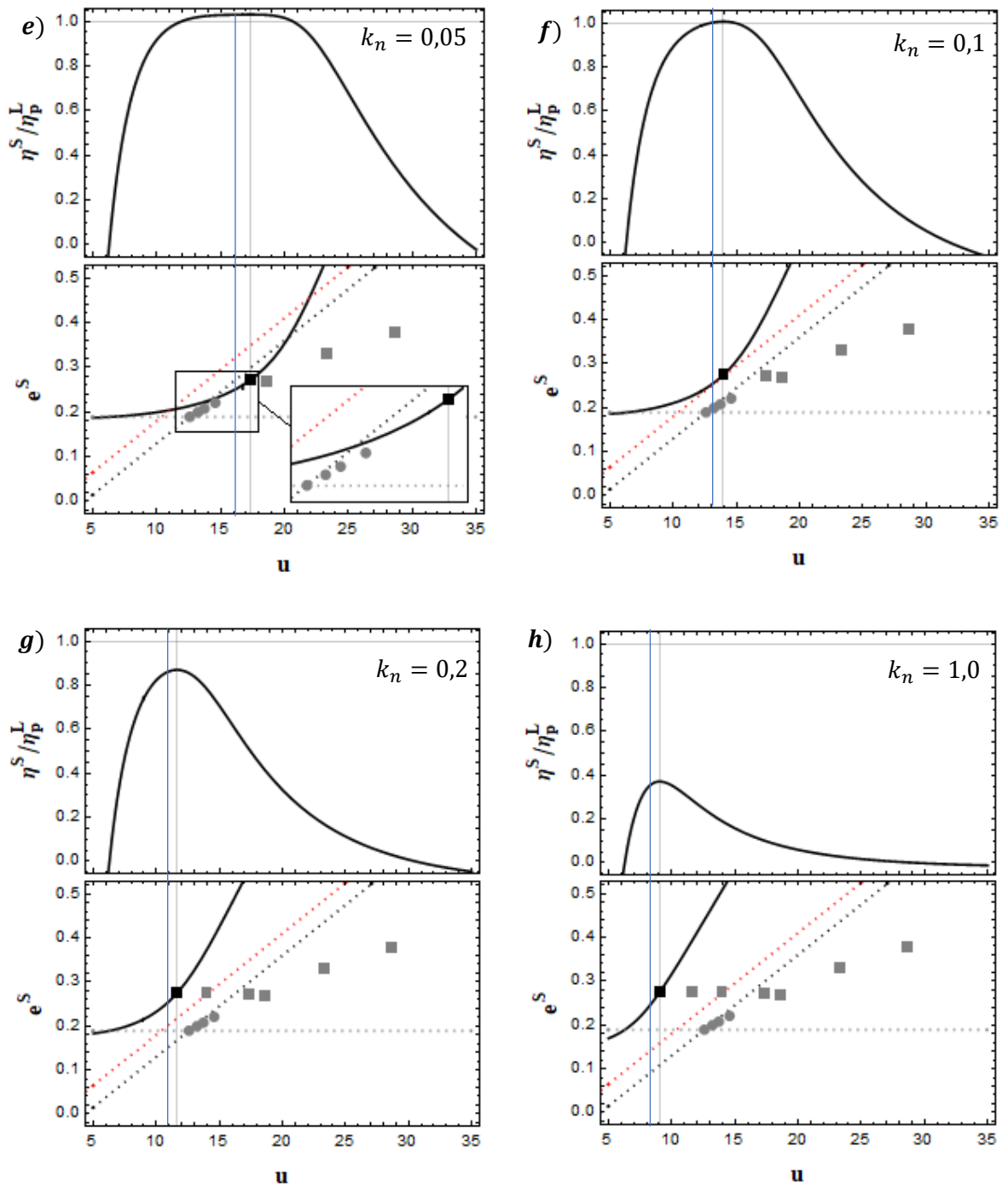
Rys. 4.3.10. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika sztywności nieliniowej k_n .

Analiza powyższych wykresów, pozwala zauważyć, że – podobnie jak w przypadku układu o sprężystości progresywnej – jedynymi parametrami, których wyższa wartość sprzyja szybszemu wzrostowi modułu m wraz z prędkością przepływu u są: współczynnik sztywności nieliniowej k_N oraz tłumienie strukturalne c . Należy jednak podkreślić, że charakter tego wzrostu jest inny. Istotną różnicą jest też to, że w przypadku układu o degresywnej sprężystości, nie odnotowano zestawu parametrów, dla których tracił by on stabilność na drodze bifurkacji podkrytycznej.

Kolejne cechy charakterystyczne wariantu zaobserwować można na rys. 4.3.11a – h, gdzie zaprezentowano rodzinę charakterystyk sprawności, różniących się między sobą jedynie współczynnikiem sztywności nieliniowej k_N . Każdą z charakterystyk zestawiono z odpowiednim wykresem wartości tłumienia elektrycznego $e^S(u)$. Czarnymi punktami oznaczono wartości tłumienia elektrycznego przy prędkości nominalnej $e^S(u_p^S)$. Jako, że w pewnym przedziale wartości współczynnika nieliniowej sztywności k_N , funkcja $\eta^S(u)$ posiada dwa lokalne ekstrema, wskazać należy dwa różne punkty $e^S(u_p)$ – oznaczono je znacznikami o różnym kształcie. Aby umożliwić obserwację ewolucji wartości $e^S(u_p)$ wraz ze zmianą wartości k_N , na kolejnych wykresach kolorem szarym zaznaczono również wcześniejsze punkty $\{u_{p(i)}^S, e^S(u_{p(i)}^S)\}$. Ponadto, na każdym z rysunków wykreślono proste referencyjne: wartość tłumienia elektrycznego układu liniowego e^L ($k_N = 0$), funkcję tłumienia elektrycznego nominalnego dla układu liniowego

$e_p^L = e_p^L(u)$ (2.17) oraz funkcję optymalnego tłumienia elektrycznego $e_{opt} = e_{opt}(u)$ (2.20). Niebieskimi liniami zaznaczono prędkość siodłową u_s .



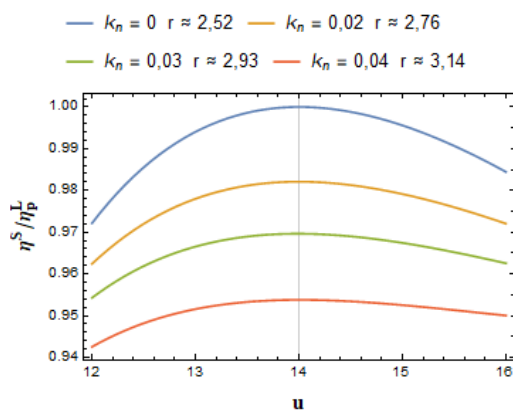


Rys. 4.3.11. Ewolucja charakterystyki sprawności oraz funkcji tłumienia elektrycznego dla rosnącego współczynnika nieliniowej sztywności k_n .

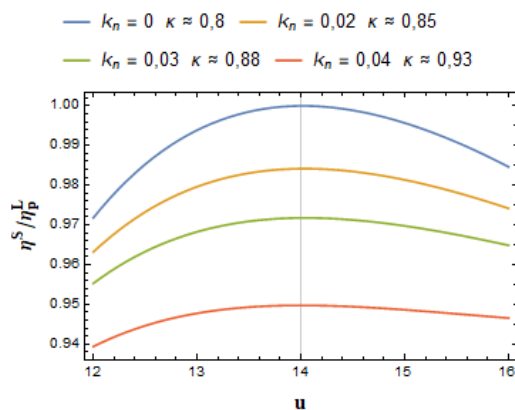
Analiza powyższych wykresów pozwala wysnuć szereg wniosków na temat właściwości badanego układu. Cechą najwyraźniej wyróżniającą badany wariant na tle innych, zadbanych dotychczas, jest fakt, że dla bardzo małych wartości współczynnika nieliniowej sztywności k_N , jego charakterystyka sprawności może posiadać dwa lokalne maksima $\eta^S(u_{p1}^S) = \eta_{p1}^S$ oraz $\eta^S(u_{p2}^S) = \eta_{p2}^S$. Należy jednak podkreślić, że nie znaleziono zestawu parametrów układu, dla których $u_{p2}^S \leq u_s$, zatem założono,

że dla prędkości przepływu mniejszych od prędkości siodłowej, istnieć może co najwyżej jedno maksimum, i przyjmuje się, że $\eta_{p1}^S = \eta_p^S$. Co więcej, po przekroczeniu pewnej wartości współczynnika k_N (rys. 4.3.11d – e), dochodzi do zaniku maksimum η_p^S , w skutek czego układ staje się niestabilny przed osiągnięciem sprawności szczytowej (rys. 4.3.11e). Zjawisko to, w oczywisty sposób, ogranicza zarówno sprawność η^S z jaką może pracować układ, jak i szerokość pasma wysokiej sprawności B^S . Powyższe wnioski każą stwierdzić, że układ o silnie degresywnej sprężystości o zaproponowanym modelu matematycznym nie może mieć zalet względem wariantu liniowego, zatem bardziej szczegółowa analiza tego przypadku zostanie pominięta. Należy podkreślić, że wskazane wady, w istocie rzeczy, nie dotyczą samego wariantu urządzenia, a jedynie modelu matematycznego degresywnej sprężystości, który nie pozwala na analizę właściwości układu drgającego z wysoką amplitudą. Nie jest wykluczone, że zaadaptowanie modelu bardziej złożonego, pozbawionego punktów siodłowych, umożliwiłoby wykazanie zjawisk wpływających korzystnie na sprawność.

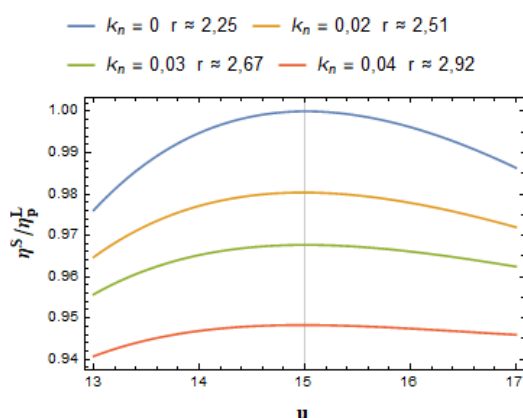
Pomimo ograniczeń, możliwe jest zbadanie cech układ, kiedy wartości współczynnika nieliniowej sztywności k_N są niewielkie. Obserwując ewolucję położenia punktów $\{u_{p1}, e^S(u_p^S)\}$, można zauważyć, że wraz z rosnącą wartością współczynnika k_N , zwiększa się prędkość nominalna u_p^S układu oraz, że rośnie różnica pomiędzy wartością tłumienia elektrycznego nominalnego $e^S(u_p^S) = e_p^S$ a wartością optymalnego tłumienia elektrycznego e_{opt}^S . Druga ze wspomnianych własności oznacza wzrost wrażliwości układu na tłumienie, co w zestawieniu z własnością funkcją ψ^S mówiącej, że jej wartość dla $m > 0$ jest mniejsza od jedności oznacza, że sprawność szczytowa układu o degresywnej sprężystości η_p^S zawsze będzie mniejsza od sprawności szczytowej układu liniowego η_p^L analogicznych parametrach.



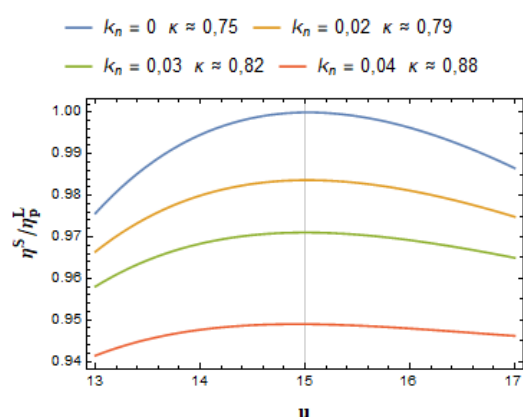
Rys. 4.3.12. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 14$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .



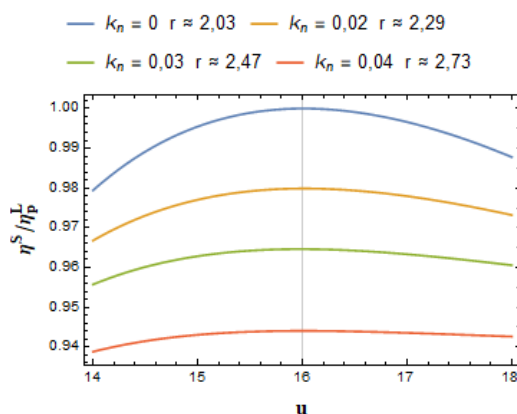
Rys. 4.3.13. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 14$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .



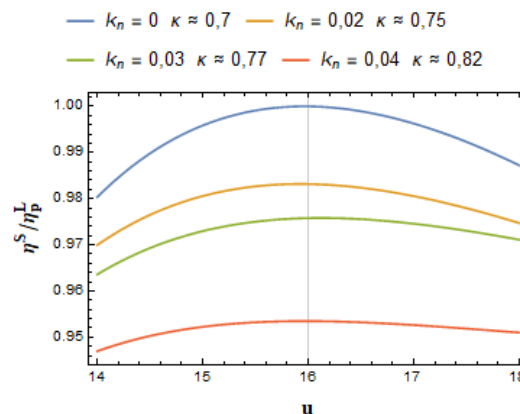
Rys. 4.3.14. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 15$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .



Rys. 4.3.15. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 15$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .



Rys. 4.3.16. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 16$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .

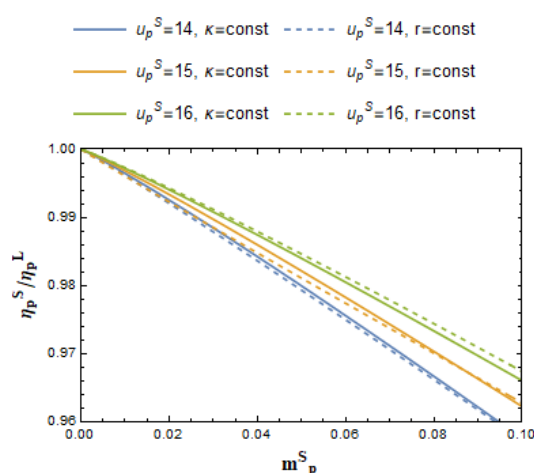


Rys. 4.3.17. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^H = 16$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .

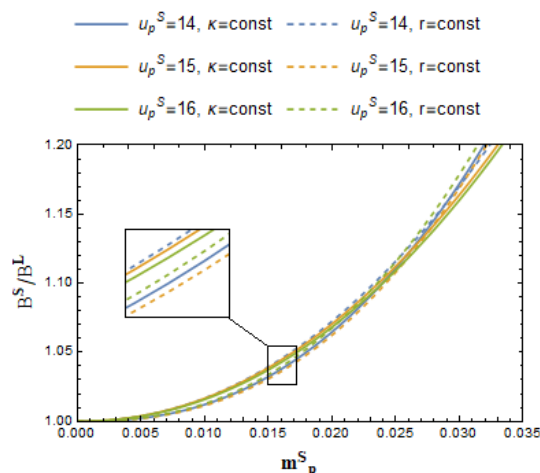
Podobnie jak w rozdziale 4.2, wpływ nieliniowości na sprawność szczytową został zilustrowany poprzez zestawienie charakterystyk sprawności o różnych współczynnikach k_N , lecz jednakowej prędkości nominalnej u_p^S (rys. 4.3.12 – 4.3.17). Z uwagi na wskazaną wcześniej zależność u_p^S od k_N , w celu zachowania jednakowych prędkości nominalnych u_p^S porównywanych charakterystyk, niezbędne jest dostosowanie wartości któregoś z pozostałych parametrów – na powyższych wykresach są to wartości oporu elektrycznego r oraz współczynnika piezoelektrycznego κ .

Wykresy te potwierdzają, że wzrost współczynnika nieliniowej sztywności k_N prowadzi do spadku sprawności szczytowej η_p^S urządzenia o degresywnej sprężystości. Sugerują one również, że wpływ na to zjawisko ma prędkość nominalna u_p^S , jak również wartości poszczególnych parametrów.

Można przewidywać, że jest to skutek efektu, który omówiono już w rozdziale 4.2 – należy mieć na uwadze, że stopień w jakim wpływ nieliniowej sztywności rzutuje na zachowanie układu, nie jest definiowany wyłącznie poprzez wartość współczynnika nieliniowej sztywności k_N , lecz również pozostałych parametrów, w tym prędkości przepływu (patrz rys. 4.3.3 – 4.3.10). Za właściwą miarę wpływu nieliniowości należy uznać wartość modułu eliptycznego m i dlatego też to właśnie w funkcji tego parametru najwygodniej jest rozpatrywać cechy układów nieliniowych. Zależność sprawności szczytowej układu o degresywnej sprężystości η_p^S odniesiony do sprawności szczytowej układu liniowego η_p^L w zależności od nominalnego modułu eliptycznego m_p^S dla różnych prędkości nominalnych u_p^S przedstawiono na rysunku 4.3.18. Wynika z niego, że negatywny wpływ nieliniowości na sprawność jest tym silniejszy, im niższa jest prędkość nominalna u_p^S układu. Można również zaobserwować, że wartości parametrów układu w istocie mają wpływ na tempo spadku sprawności, ale wpływ ten jest marginalny.



Rys. 4.3.18. Zależność wartości stosunku η_p^S/η_p^L od modułu nominalnego m_p^S dla różnych prędkości nominalnych u_p^S .



Rys. 4.3.19. Zależność wartości stosunku B^S/B^L od modułu nominalnego m_p^S dla różnych prędkości nominalnych u_p^S .

Ostatnią cechą badanego wariantu, którą należy przeanalizować jest wpływ nieliniowości na szerokość pasma wysokiej sprawności B^S . Zastosowany model urządzenia pozwala na wskazanie tego parametru tylko dla bardzo małych wartości współczynnika nieliniowej sprężystości – dla badanych wartości prędkości nominalnych $u_p^S = \{14, 15, 16\}$, przy $k_N > 0,015$ część pasma wysokiej sprawności przebiega już powyżej prędkości siodłowej u_s . Skutkiem tego jest możliwość obserwacji wpływu nieliniowości na wartość stosunku B^S/B^L dla wartości nominalnego modułu eliptycznego $m_p^S \leq 0,035$ – wykresy przedstawiono na rys. 4.3.19. Widoczne tam fluktuacje wartości B^S/B^L są następstwem arbitralnego wyboru m_p^S jako wartości odniesienia, podczas gdy wartość modułu eliptycznego zmienia się wzdłuż pasma wysokiej sprawności B^S . Jak dowodzi analogiczna analiza układu o progresywnej

sprężystości (rys. 4.2.24), jest to wybór zasadny, lecz przy tak wąskiej dziedzinie obserwacji uniemożliwia on wyciągnięcie wniosków odnośnie wpływu prędkości nominalnej oraz parametrów na B^S . Zauważyć jednak można, że nawet tak słaba nieliniowość może rozszerzyć pasmo wysokiej sprawności o ponad 20%.

4.4. Bistabilna charakterystyka sprężystości

Model urządzenia o dwóch minimach energii potencjalnej dany jest układem równań:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + c\dot{y} - ky + k_n y^3 - v &= \rho \left(a_1 u \dot{y} + a_3 \frac{\dot{y}^3}{u} \right) \\ \kappa \dot{v} + \frac{v}{r} + \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

W tej części pracy rozpatrywane będą tylko drgania pomiędzy obydwooma położeniami równowagi – drgania międzydołkowe. Zgodnie z wyprowadzeniami zawartymi w rozdziale 4.1, zasadne jest więc przyjęcie założenia, że rozwiązania powyższego układu będą miały postać:

$$y = A_y \text{sn} \quad (4.4.2a)$$

$$v = A_v \text{cn} + B_v \text{sn} \quad (4.4.2b)$$

Dynamikę układu można więc opisać dwoma poniższymi równaniami algebraicznymi:

$$\begin{aligned} (A_y \Omega^2 (2m - 1) - A_v - A_y k) \text{cn} + (A_y \Omega (u \rho a_1 - c)) \text{dnsn} \\ + (A_y^3 k_n - 2A_y \Omega^2 m) \text{cn}^3 - B_v \text{sn} + A_y^3 \frac{\rho \Omega^3 a_3}{u} \text{dn}^3 \text{sn}^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.3a)$$

$$\frac{A_v}{r} \text{cn} - \Omega (\kappa A_v + A_y) \text{dnsn} + \frac{B_v}{r} \text{sn} + B_v \kappa \Omega \text{cndn} = 0 \quad (4.4.3b)$$

Kolejnym krokiem, niezbędnym do prawidłowego przeprowadzenia bilansu harmonicznych eliptycznych jest aproksymacja iloczynów funkcji sn i cn z funkcją dn przy pomocy szeregu potęgowego funkcji sn i cn, jednak istnieje przeciwskazanie do zrealizowania tego w sposób identyczny jak to miało miejsce w rozdziałach 4.2 oraz 4.3.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że – zgodnie z tożsamością 4.1.18 – moduł eliptyczny omawianego układu będzie malał wraz amplitudą. Oznacza to, że maksymalna jego wartość, mogąca wynosić nawet $m = 1$, będzie osiągnięta zaraz po bifurkacji homoklinicznej, zatem przy najniższej prędkości przepływu, przy której obserwować można drgania międzydołkowe. W tym istotnym dla analizy obszarze, kluczowe jest zachowanie odpowiedniej dokładności obliczeń, podczas gdy zaproponowane wcześniej przybliżenie 4.2.4a wyraźnie różni się od funkcji aproksymowanej dla wartości modułu eliptycznego $m > 0,6$. Problem ten nie występował podczas analizy układów omawianych w rozdziałach 4.2 oraz 4.3, ponieważ moduły eliptyczne tych układów osiągały mniejsze wartości.

Kwestię tę można rozwiązać poprzez zastosowanie aproksymacji wyższego rzędu, tj.:

$$\text{sn dn} \approx \Gamma_1^B \text{sn} + \Gamma_3^B \text{sn}^3 + \Gamma_5^B \text{sn}^5 \quad (4.4.4)$$

Gdzie współczynniki $\Gamma_i^B, i = 1,3,5$ dane są poniższymi tożsamościami:

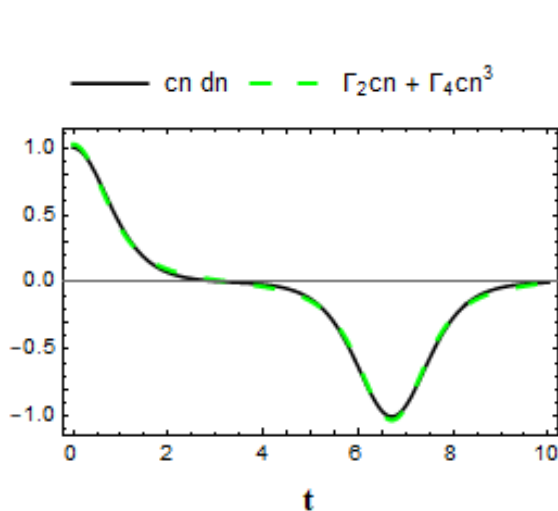
$$\begin{aligned} \Gamma_1^B = & -(15m(K^2(2048 - 2816m + 1504m^2 - 3812m^3 + 4039m^4 - 971m^5 + 8m^6) - \\ & 2EK(2048 - 1792m + 736m^2 - 5172m^3 + 5054m^4 - 995m^5 + 16m^6) + E^2(2048 - \\ & 768m + 480m^2 - 6596m^3 + 4533m^4 - 96m^5 + 32m^6))\pi)/(128(K^3(1 - m)^2(64 - \\ & 520m + 609m^2 - 251m^3 + 128m^4) + E^3(64 - 1032m + 1989m^2 - 1768m^3 + \\ & 1989m^4 - 1032m^5 + 64m^6) + 3 E K^2(64 - 776m + 1949m^2 - 2176m^3 + \\ & 1505m^4 - 742m^5 + 176m^6) - 3E^2 K (64 - 904m + 2041m^2 - 2065m^3 + \\ & 1692m^4 - 980m^5 + 192m^6))) \end{aligned} \quad (4.4.5a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3^B = & -(105m^2(E^2(-512 + 320m + 112m^2 + 367m^3 - 409m^4 + 16m^5) + \\ & K^2(832m - 272m^2 + 175m^3 - 317m^4 + 94m^5 - 512) - 2 E K(-512 + \\ & 576m - 16m^2 + 247m^3 - 408m^4 + 98m^5))\pi)/(64(-K^3(-1 + m)^2(64 - \\ & 520m + 609m^2 - 251m^3 + 128m^4) + E^3(64 - 1032m + 1989m^2 - \\ & 1768m^3 + 1989m^4 - 1032m^5 + 64m^6) + 3 E K^2(64 - 776m + 1949m^2 - \\ & 2176m^3 + 1505m^4 - 742m^5 + 176m^6) - 3E^2 K (64 - 904m + 2041m^2 - \\ & 2065m^3 + 1692m^4 - 980m^5 + 192m^6))) \end{aligned} \quad (4.4.5b)$$

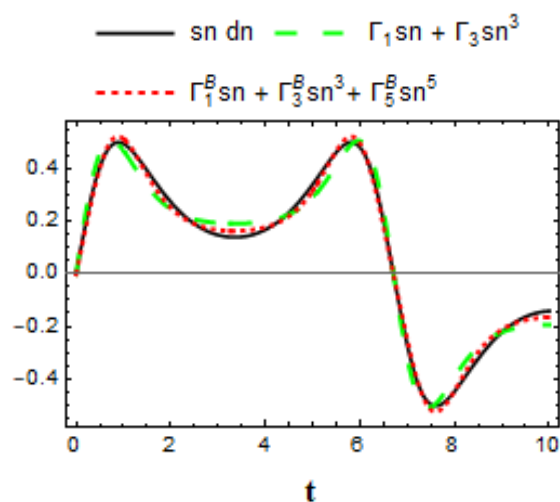
$$\begin{aligned} \Gamma_5^B = & -315m^3(E^2(+256 - 192m - 112m^2 + 143m^3 - 4m^4) + K^2(-256 + \\ & 448m - 112m^2 - 111m^3 + 31m^4) + 2EK(256 - 320m - 32m^2 + 143m^3 - \\ & 32m^4))\pi/128(K^3(1 - m)^2(64 - 520m + 609m^2 - 251m^3 + 128m^4) + \\ & E^3(64 - 1032m + 1989m^2 - 1768m^3 + 1989m^4 - 1032m^5 + 64m^6) + \\ & 3 E K^2(64 - 776m + 1949m^2 - 2176m^3 + 1505m^4 - 742m^5 + 176m^6) - \\ & 3E^2 K (64 - 904m + 2041m^2 - 2065m^3 + 1692m^4 - 980m^5 + 192m^6)) \end{aligned} \quad (4.4.5c)$$

Należy zaznaczyć, że przybliżenie $cn \, dn \approx \Gamma_2 cn + \Gamma_4 cn^3$ pozostaje wystarczająco dokładna w zakresie wartości modułu $0 < m < 1$ (rys. 4.4.1).

Implementacja przybliżeń (4.4.5) i (4.2.5), a następnie zastosowanie podstawienia (4.1.24) przekształca układ równań (4.4.1) do postaci, której harmoniczne zestawiono w tabeli 4.4.1.



4.4.1a Przebieg funkcji $cn\ dn$ oraz jej aproksymacji dla modułu $m = 0,9$.



4.4.1b. Przebieg funkcji $sn\ dn$ dwóch wariantów oraz jej aproksymacji dla modułu $m = 0,9$.

Tabela 4.4.1. Zestawienie harmonicznych eliptycznych.		
harmoniczna	równanie 1	równanie 2
$\cos(\Phi)$	$A_v + A_y(k - \frac{1}{2}(2 - m)\Omega^2 - \frac{3}{4}k_n A_y^2) = 0$	$\frac{A_v}{r} + B_v \kappa \Omega (\Gamma_2 + \frac{3}{4} \Gamma_4) = 0$
$\sin(\Phi)$	$(\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3 + \frac{5}{8}\Gamma_5)\Omega(upa_1 - c)A_y +$ $(3(512(\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3)(8\Gamma_1^2 + 14\Gamma_1\Gamma_3 + 7\Gamma_3^2) +$ $224(40\Gamma_1^2 + 72\Gamma_1\Gamma_3 + 33\Gamma_3^2)\Gamma_5 +$ $528(14\Gamma_1 + 13\Gamma_3)\Gamma_5^2 + 2145\Gamma_5^3)\rho\Omega^3 a_3 A_y^3) /$ $16384u - B_v = 0$	$(\Gamma_1 + \frac{3}{4}\Gamma_3 + \frac{5}{8}\Gamma_5)(\kappa A_v + A_y)\Omega$ $-\frac{B_v}{r} = 0$
$\cos(3\Phi)$	$\frac{1}{4}(k_n A_y^3 - 2m\Omega^2 A_y) = 0$	$\frac{1}{4}\Gamma_4 \Omega \kappa B_v = 0$
$\sin(3\Phi)$	$\frac{1}{4}(\Gamma_3 + \frac{5}{4}\Gamma_5)\Omega(upa_1 - c)A_y -$ $((256(16\Gamma_1^3 + 60\Gamma_1^2\Gamma_3 + 63\Gamma_1\Gamma_3^2 +$ $21\Gamma_3^3) + 288(56\Gamma_1^2 + 112\Gamma_1\Gamma_3 + 55\Gamma_3^2)\Gamma_5 +$ $396(40\Gamma_1 + 39\Gamma_3)\Gamma_5^2 + 5005\Gamma_5^3)\rho\Omega^3 a_3 A_y^3) /$ $16384u = 0$	$\frac{1}{4}(\Gamma_3 + \frac{5}{4}\Gamma_5)\Omega(\kappa A_v + A_y) = 0$

$\sin(5\Phi)$	$\frac{1}{16}\Gamma_5\Omega(upa_1 - c)A_y + (3(256\Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_3)(4\Gamma_1 + 3\Gamma_3) + 16(112\Gamma_1^2 + 288\Gamma_1\Gamma_3 + 165\Gamma_3^2)\Gamma_5 + 220(12\Gamma_1 + 13\Gamma_3)\Gamma_5^2 + 1001\Gamma_5^3)\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)/16384u = 0$	$\frac{1}{16}\Gamma_5\Omega(\kappa A_y - A_v) = 0$
$\sin(7\Phi)$	$-(3(64\Gamma_3^2(4\Gamma_1 + 3\Gamma_3) + 16(16\Gamma_1^2 + 72\Gamma_1\Gamma_3 + 55\Gamma_3^2)\Gamma_5 + 88(10\Gamma_1 + 13\Gamma_3)\Gamma_5^2 + 455\Gamma_5^3)\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)/16384u = 0$	-
$\sin(9\Phi)$	$((64\Gamma_3^3 + 48\Gamma_3(8\Gamma_1 + 11\Gamma_3)\Gamma_5 + 24(22\Gamma_1 + 39\Gamma_3)\Gamma_5^2 + 455\Gamma_5^3)\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)/16384u = 0$	-
$\sin(11\Phi)$	$-(3\Gamma_5(16\Gamma_3^2 + 52\Gamma_3\Gamma_5 + \Gamma_5(16\Gamma_1 + 35\Gamma_3))\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)/16384u = 0$	-
$\sin(13\Phi)$	$-(3\Gamma_5^2(4\Gamma_3 + 5\Gamma_5)\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)/16384u = 0$	-
$\sin(15\Phi)$	$-(\Gamma_5^3\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)/16384u = 0$	-

Z powyższej tabeli wyselekcjonowano równania, z których utworzyć można układ równań umożliwiającą obliczenie nieznanymi wielkościami: A_y , A_v , B_v , Ω oraz m :

$$\frac{A_v}{r} + \frac{1}{4}(4\Gamma_2 + 3\Gamma_4)\Omega\kappa B_v = 0 \quad (4.4.8a)$$

$$\Gamma_o^B(\kappa A_v + A_y)\Omega - \frac{B_v}{r} = 0 \quad (4.4.8b)$$

$$A_v + \frac{1}{4}A_y(4k - 2(2 - m)\Omega^2 - 3k_n A_y^2) = 0 \quad (4.4.8c)$$

$$\Gamma_o^B\Omega(upa_1 - c)A_y + \frac{(\Gamma_g^B\Gamma_o^B\rho\Omega^3 a_3 A_y^3)}{u} - B_v = 0 \quad (4.4.8d)$$

$$\frac{1}{4}(k_n A_y^3 - 2m\Omega^2 A_y) = 0 \quad (4.4.8e)$$

Gdzie $\Gamma_g^B = \frac{3}{16384\left(\Gamma_1^B + \frac{3\Gamma_3^B}{4} + \frac{5\Gamma_5^B}{8}\right)}\Gamma_L^B \approx \frac{0.32-0.22m}{1+0.99m}$, $\Gamma_o^B = \Gamma_1^B + \frac{3\Gamma_3^B}{4} + \frac{5\Gamma_5^B}{8} \approx \frac{1.76-1.38m}{1.87-m}$ oraz

$$\Gamma_L^B = 512\left(\Gamma_1^B + \frac{3}{4}\Gamma_3^B\right)\left(8\Gamma_1^{B^2} + 14\Gamma_1^B\Gamma_3^B + 7\Gamma_3^{B^2}\right) + 224\left(40\Gamma_1^{B^2} + 72\Gamma_1^B\Gamma_3^B + 33\Gamma_3^{B^2}\right)\Gamma_5^B + 528(14\Gamma_1^B + 13\Gamma_3^B)\Gamma_5^{B^2} + 2145\Gamma_5^{B^3}.$$

Przybliżenia zostały uzyskane poprzez aproksymacje funkcji Γ_g^B oraz Γ_o^B funkcjami o postaci $\frac{\gamma_1 + \gamma_2 m}{\gamma_3 + \gamma_4 m}$. Rozwinięcie w szereg Maclaurina, zastosowane w poprzednich rozdziałach, nie zapewniało odpowiedniej dokładności dla wartości modułów eliptycznych $m > 0,5$.

Na podstawie równań (4.4.8a) oraz (4.4.8b) wykazać można, że:

$$A_v = -\frac{\Gamma_c^B r^2 \kappa \Omega^2}{1 + \Gamma_c^B r^2 \kappa^2 \Omega^2} A_y \quad (4.4.9a)$$

$$B_v = \frac{\Gamma_o^B r \Omega}{1 + \Gamma_c^B r^2 \kappa^2 \Omega^2} A_y \quad (4.4.9b)$$

gdzie: $\Gamma_c^B = (\Gamma_2 + \frac{3\Gamma_4}{4})(\Gamma_1^B + \frac{3\Gamma_3^B}{4} + \frac{5\Gamma_5^B}{8}) \approx \frac{0,99 - 0,72m}{1 - 0,28m}$

Równanie (4.4.8e) prowadzi do zależności:

$$A_y^2 = 2 \frac{m \Omega^2}{k_n} \quad (4.4.10)$$

Podstawienie tożsamości (4.4.9) oraz (4.4.10) do równania (4.4.8c) umożliwia wyprowadzenie wyrażenia opisującego częstość eliptyczną układu Ω :

$$\Omega^2 = \frac{2k}{2m - 1 + \Gamma_c^B r^2 \kappa - \Gamma_c^B k r^2 \kappa^2 + \sqrt{4\Gamma_c^B k (2m - 1) r^2 \kappa^2 + (2m - 1 + \Gamma_c^B r^2 \kappa (1 - k\kappa))^2}} \approx \frac{\omega_B^2}{(2m - 1)} \quad (4.4.11)$$

gdzie $\omega_B^2 = \frac{2k}{1 + r^2 \kappa (k\kappa - 1) - \sqrt{1 + 2r^2 \kappa (1 + k\kappa) + r^4 \kappa^2 (1 - 2k\kappa + k^2 \kappa^2)}}$. Należy zaznaczyć, że $\omega_B^2 \neq \omega^2$, zatem prawdziwe dla wcześniejszych wariantów stwierdzenie, że moduł eliptyczny jest modyfikatorem sprzęgającym częstości układu liniowego i nieliniowego, nie obowiązuje dla urządzenia bistabilnego.

Tożsamości (4.4.10 – 4.4.11) pozwalają opisać zależność pomiędzy modułem eliptycznym m a amplitudą drgań A_y :

$$m = \frac{A_y^2 k_n}{2(A_y^2 k_n - \omega_B^2)} \quad (4.4.12)$$

Rozwiązanie równania (4.3.5d) dla A_y^2 , umożliwia wyrażenie amplitudy drgań jako:

$$A_y^2 = \frac{u(c + e^B - u\rho a_1)}{3\Gamma_g^B \rho \Omega^2 a_3} \quad (4.4.13)$$

Gdzie tłumienie elektryczne e^B dane jest wzorem:

$$e^B = \frac{r}{1 + r^2 \kappa^2 \Omega^2 \Gamma_c^B} \approx \frac{r}{1 + \frac{(1 - \frac{6}{10}m)r^2 \kappa^2 \omega_B^2}{2m - 1}} = \frac{r\kappa}{1 + \left(\frac{7}{10}k_N A_y^2 - \omega_B^2\right) \kappa^2 r^2} \quad (4.4.14)$$

Z powyższej tożsamości wynika, że dla dopuszczalnych wartości modułu $0 < m < 1$, zawsze prawdziwa jest nierówność $e^B < e^L$. Przy założeniu, że $A_{ys} = A_y^2$, równania (2.4.9 – 2.4.11, 2.4.13) umożliwiają sformułowanie wielomianu:

$$A_{ys}^4 + \chi_3 A_{ys}^3 + \chi_2 A_{ys}^2 + \chi_1 A_{ys} + \chi_0 = 0 \quad (4.4.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{2,2u\omega_B^2((1 - r^2\kappa^2\omega_B^2)c + r\kappa + u\rho a_1(r^2\kappa^2\omega_B^2 - 1))}{r^2\kappa^2\rho a_3 k_n^3} \\ \chi_1 &= \frac{2,1\rho a_3\omega_B^4(1 - r^2\kappa^2\omega_B^2) + uk_n(4,8cr^2\kappa^2\omega_B^2 - 3,3c - 3,3r\kappa + u\rho a_1(3,3 - 4,8r^2\kappa^2\omega_B^2))}{r^2\kappa^2\rho a_3 k_n^3} \\ \chi_2 &= \frac{1}{k_n^2} \left(\frac{2,3u(u\rho a_1 - c)k_n}{\rho a_3} - \frac{3,6\omega_B^2}{r^2\kappa^2} + 5,1\omega_B^4 \right) \\ \chi_3 &= \frac{1,4 - 3,9r^2\omega_B^2}{r^2\kappa^2 k_n} \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

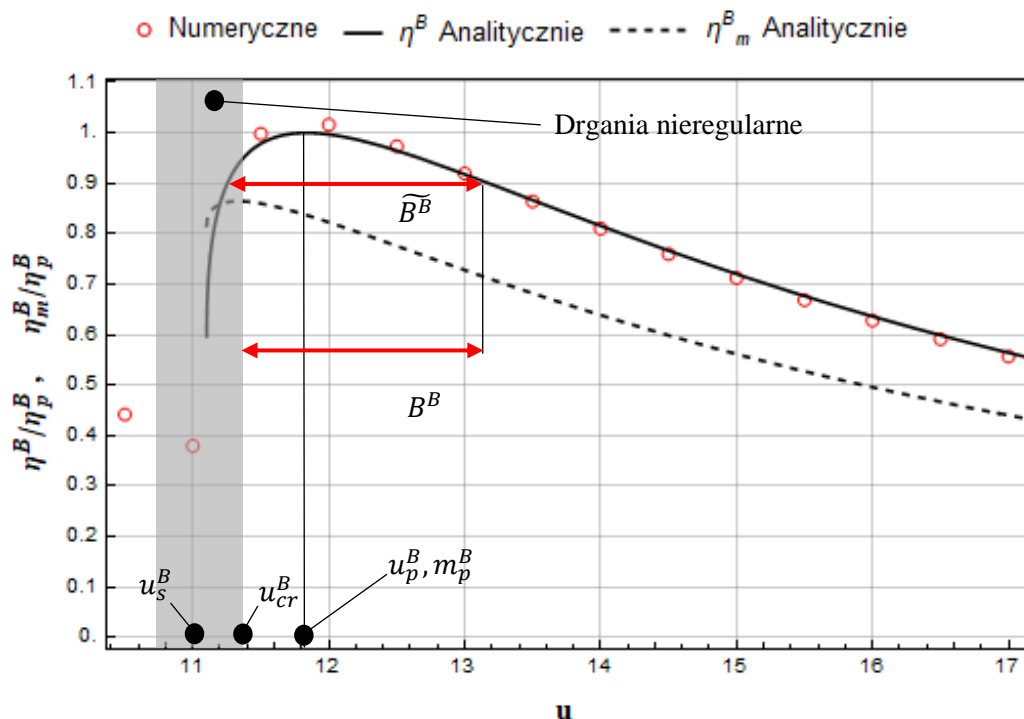
Rozwiązanie powyższego równania prowadzi do wyrażenia opisującego A_y w sposób jawny. Uzyskany wynik podstawić można kolejno do (2.4.12, 2.4.11, 2.4.9) w celu wyprowadzenia pozostałych niewiadomych. Umożliwia to wyprowadzenie funkcji sprawności:

$$\begin{aligned} \eta^B &= \frac{\frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \frac{v^2(t)}{r} dt}{\rho u^3} = \frac{\frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \frac{(A_v \text{cn} + B_v \text{sn})^2}{r} dt}{\rho u^3} \approx \frac{1}{T} (A_v^2 + B_v^2) \frac{\int_0^T \frac{\text{cn}^2}{r} dt}{\rho u^3} \\ &= \frac{2e^S(c + e^B - u\rho a_1)}{3u^2\rho^2 a_3} \frac{\Gamma_l^B \Gamma_0^B \left(1 + \left(\frac{\Gamma_c^B}{\Gamma_0^B}\right)^2 r^2 \frac{\omega_B^2}{2m-1}\right)}{2\Gamma_g^B \left(1 + \Gamma_c^B r^2 \frac{\omega_B^2}{2m-1}\right)} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Przyjmując, że $\frac{2e^B(c + e^B - u\rho a_1)}{3u^2\rho^2 a_3} = \eta_m^B$ oraz $\frac{\Gamma_l^B \Gamma_0^B \left(1 + \left(\frac{\Gamma_c^B}{\Gamma_0^B}\right)^2 r^2 \frac{\omega_B^2}{2m-1}\right)}{2\Gamma_g^B \left(1 + \Gamma_c^B r^2 \frac{\omega_B^2}{2m-1}\right)} = \psi^B$ można zapisać, że:

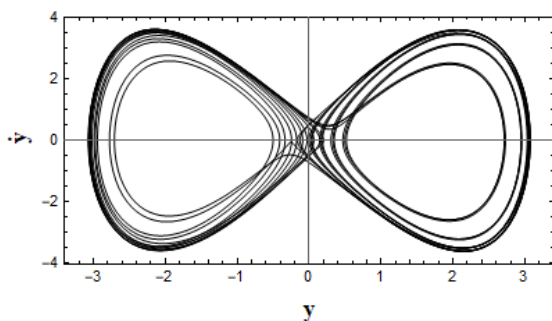
$$\eta^B = \eta_m^B \psi^B \quad (4.4.15)$$

Wykresy funkcji η^B , η_m^B oraz ψ^B zaprezentowano na rysunkach 4.4.2 i 4.3.4. Do sporządzenia tych wykresów oraz w dalszej części pracy, przyjęto domyślne wartości współczynników sztywności $k_N = 1$, $k = 5$.

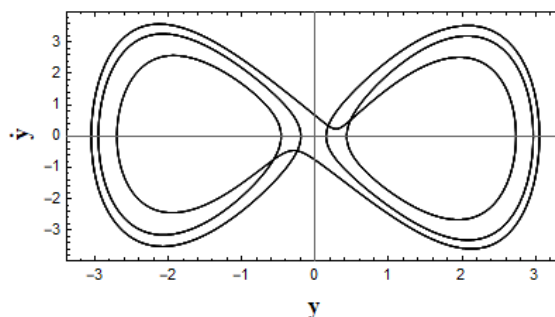


Rys. 4.4.2. Charakterystyka sprawności układu o degresywnej sprężystości, wraz z zaznaczonymi parametrami charakterystycznymi.

Istotną cechą, odróżniającą układ bistabilny od pozostałych wariantów, jest to, że utworzenie się jego stabilnego cyklu granicznego poprzedzone jest bifurkacją homokliczniczną, a nie bifurkacją Hopfa. Znany fakt jest, że bifurkacjom tego typu mogą towarzyszyć kaskady podwajania okresu oraz tworzenie się atraktorów quasiperiodycznych oraz chaotycznych [73]. Zjawiska te zaobserwować można również w przypadku omawianego układu – spektrum ich występowania oznaczono na rys. 4.4.2 kolorem szarym. Przykładowe przebiegi czasowe amplitudy drgań z tego zakresu zaprezentowano na rys. 4.4.3.



Rys. 4.4.3a. Wykres fazowy układu bistabilnego dla prędkości przepływu $u = 10,95$.



Rys. 4.4.3b. Wykres fazowy układu bistabilnego dla prędkości przepływu $u = 11,25$.

Konsekwencją nieregularnego ruchu układu w pewnym zakresie prędkości jest niemożność analitycznego przewidzenia jego zachowania i tym samym, precyzyjnego określenia jego sprawności. W związku z powyższym, podczas analizy bistabilnego wariantu urządzenia, przyjęto założenie, że jego prędkość krytyczna u_{cr}^B utożsamiana będzie z najmniejszą prędkością przepływu, przy której układ posiada stabilny cykl graniczny (rys. 4.4.2).

Założenie to wpływa również na definicję pasma wysokiej sprawności B^B – zgodnie z rysunkiem 4.4.2, za jego lewą granicę należy uznać prędkość krytyczną u_{cr}^B . Powyższe założenia wymagają określenia przedziału prędkości przepływu, w którym obserwowane jest nieregularne zachowanie układu, w zależności od jego parametrów. W ramach niniejszego badania, zostało to zrealizowane w sposób przybliżony: wygenerowano 6561 zestawów parametrów układu, z których każdy był jedną z kombinacji parametrów o wartościach: $r = \{1; 2; 3\}$, $\kappa = \{0,5; 1; 2\}$, $k = \{3; 5; 7\}$, $k_N = \{1; 3; 5\}$, $c = \{0,1; 0,2; 0,3\}$, $\rho = \{0,01; 0,02; 0,03\}$, $a_1 = \{1; 2; 3\}$, $a_3 = \{-1; -5; -10\}$.

Dla wybranego zestawu parametrów obliczano prędkość siodłową u_s^B , zatem taką, dla której $A_y = \sqrt{2\omega_B^2/k_N}$ – jest to prędkość przy której należy spodziewać się zachowań nieregularnych. W kolejnym kroku, metodą numeryczną rozwiązywany był model matematyczny urządzenia dla prędkości siodłowej u_s^B , po czym określano powtarzalność okresu rozwiązania. Jeżeli na przestrzeni 100 okresów funkcji $y(t)$ wykazano różnicę okresów drgań $\Delta T > 0,02$, obliczenia powtarzano dla prędkości zwiększonej o 0,01, tak długo, aż powyższy warunek nie był spełniony. Najmniejszą prędkość przepływu, przy której $\Delta T \leq 0,02$ uznawano za prędkość krytyczną u_{cr}^B i tym samym, lewą granicę pasma wysokiej sprawności B^B układu o wybranych parametrach. Prawą granicę natomiast, obliczano analitycznie. Procedura została powtórzona dla każdego z 6561 zestawów parametrów. Na podstawie zebranych danych określono uśrednioną relację wiążącą analityczną szerokość pasma wysokiej sprawności \widetilde{B}^B , zatem taką, przy której definiowaniu nie uwzględnia się zjawiska drgań nieregularnych, z efektywną szerokością pasma wysokiej sprawności B^B :

$$B^B \approx 0,84\widetilde{B}^B \pm 6,6\% \quad (4.4.16)$$

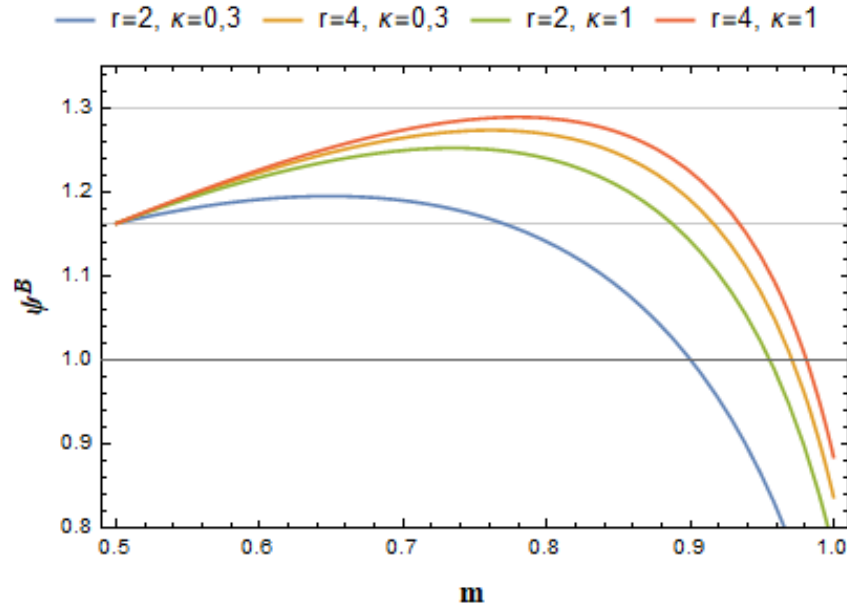
Opisana procedura umożliwia więc oszacowanie wielkości B^B oraz u_{cr}^B , które definiowane są przez niewyznaczalną analitycznie granicę występowania drgań nieregularnych, na podstawie obliczalnej analitycznie wielkości \widetilde{B}^B . Należy podkreślić, że nie znaleziono zestawu parametrów, przy którym wyznaczona analitycznie sprawność szczytowa η_p^B , leżałaby w obszarze drgań nieregularnych.

Ważnym wyróżnikiem układu bistabilnego jest też odmienna własność jego funkcji wzmocnienia nieliniowością ψ^B (rys. 4.4.4) – posiada ona maksimum ψ_{max}^B :

$$\frac{\partial \psi^B}{\partial m} = 0 \Rightarrow m = m_{\psi}^B \quad (4.4.17)$$

$$\psi^B(m_{\psi}^B) = \psi_{max}^B \approx \frac{2,3 + 1,3 r^2 \kappa^2 \omega_B^2}{2 + r^2 \kappa^2 \omega_B^2} \quad (4.4.18)$$

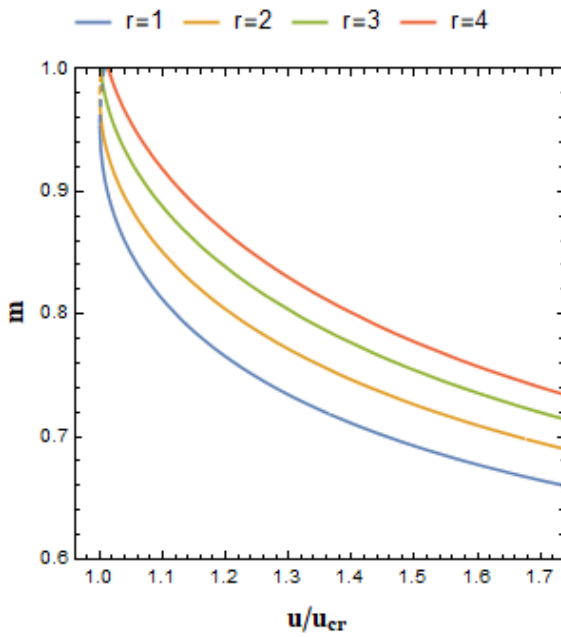
$$\lim_{r^2 \kappa^2 \omega_B^2 \rightarrow \infty} \psi_{max}^B = 1,3 \quad (4.4.19)$$



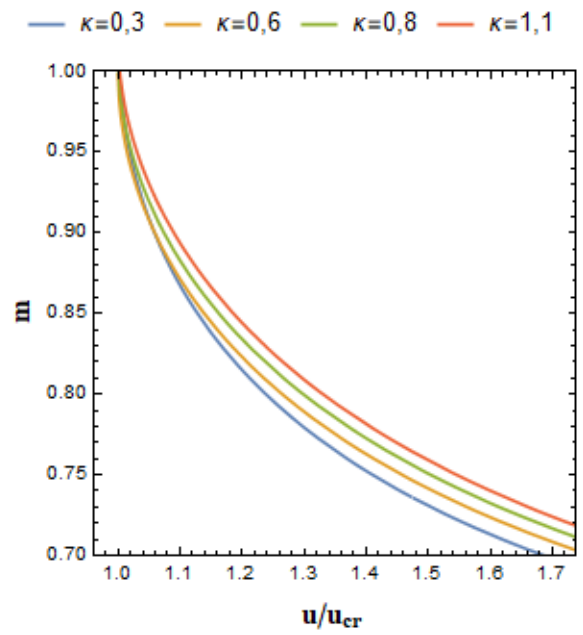
Rys. 4.4.4. Przykładowe wykresy funkcji ψ^B .

Wpływ funkcji ψ^B może więc spowodować maksymalnie trzydziestoprocentowy wzrost sprawności. Dla modułu o wartości bliskiej jedności funkcja ψ^B przyjmuje wartości $\psi^B < 1$ – bistabilność może więc zmniejszać sprawność układu. Można też odnotować, że zachodzi równość $\psi^B|_{m=0,5} = \psi^H|_{m=0,5} \approx 1,17$, co jest zasadne z uwagi na to, że rozwiązania układu o progresywnej charakterystyce (4.1.1) i bistabilnego (4.4.2) mają tę samą postać – funkcje ψ^H oraz ψ^B to w istocie jedna funkcja obserwowana w dwóch różnych zakresach modułu eliptycznego.

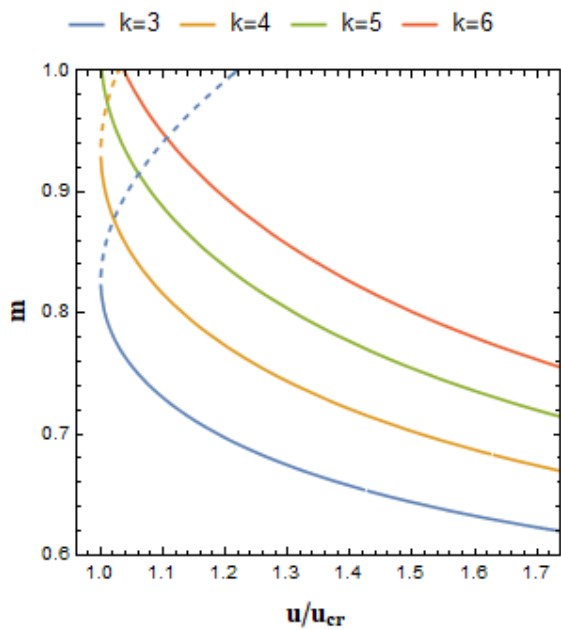
W dalszej części pracy przedstawiono wykresy (rys. 4.4.5 – 4.4.12) obrazujące wpływ poszczególnych parametrów układu na tempo zmiany modułu eliptycznego m wraz z prędkością przepływu. Linia przerywaną oznaczono części wykresów, które odpowiadają rozwiązaniu niestabilnemu.



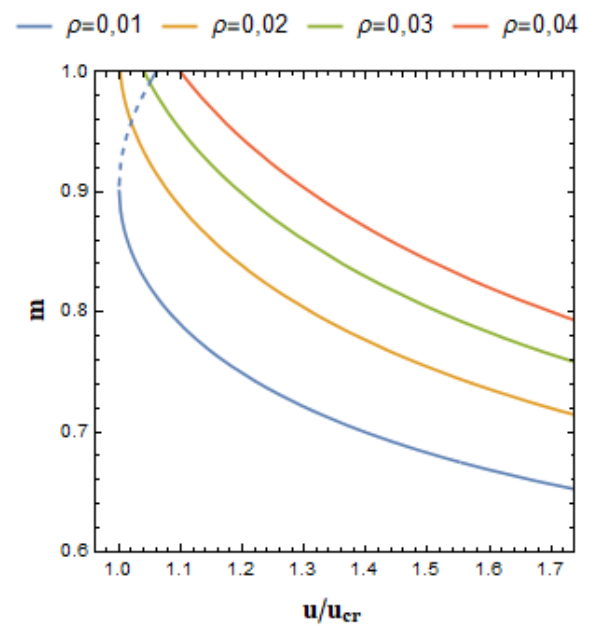
Rys 4.4.5. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości oporu elektrycznego r .



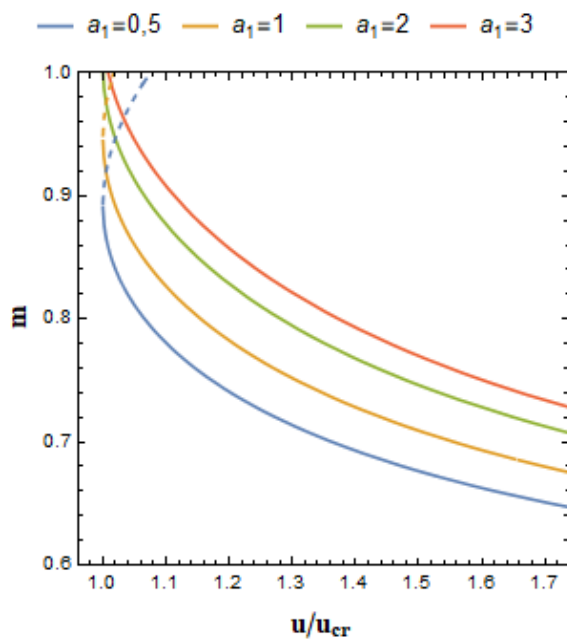
Rys 4.4.6. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika κ .



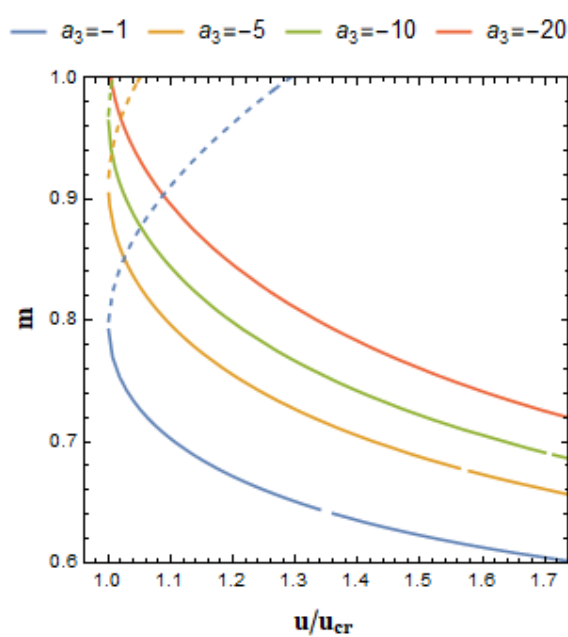
Rys 4.4.7. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika liniowej sztywności k .



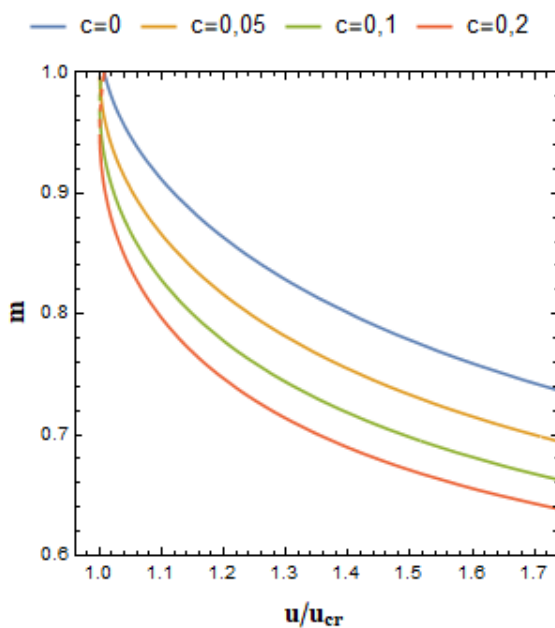
Rys 4.4.8. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych gęstości ρ .



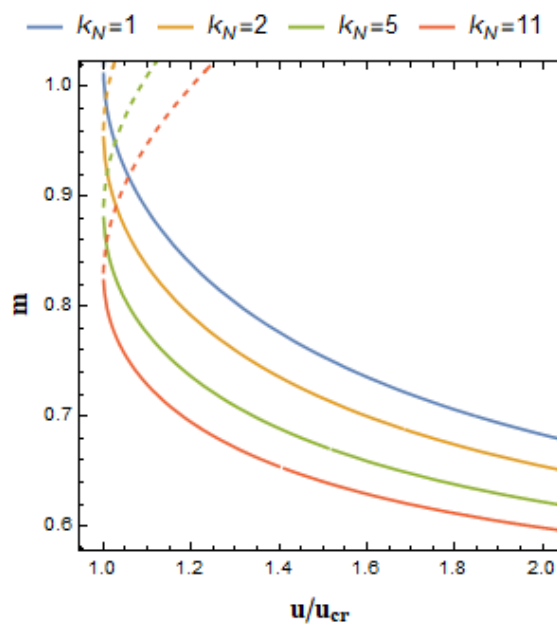
Rys 4.4.9. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika a_1 .



Rys 4.4.10. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika a_3 .



Rys 4.4.11. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika tłumienia strukturalnego c .

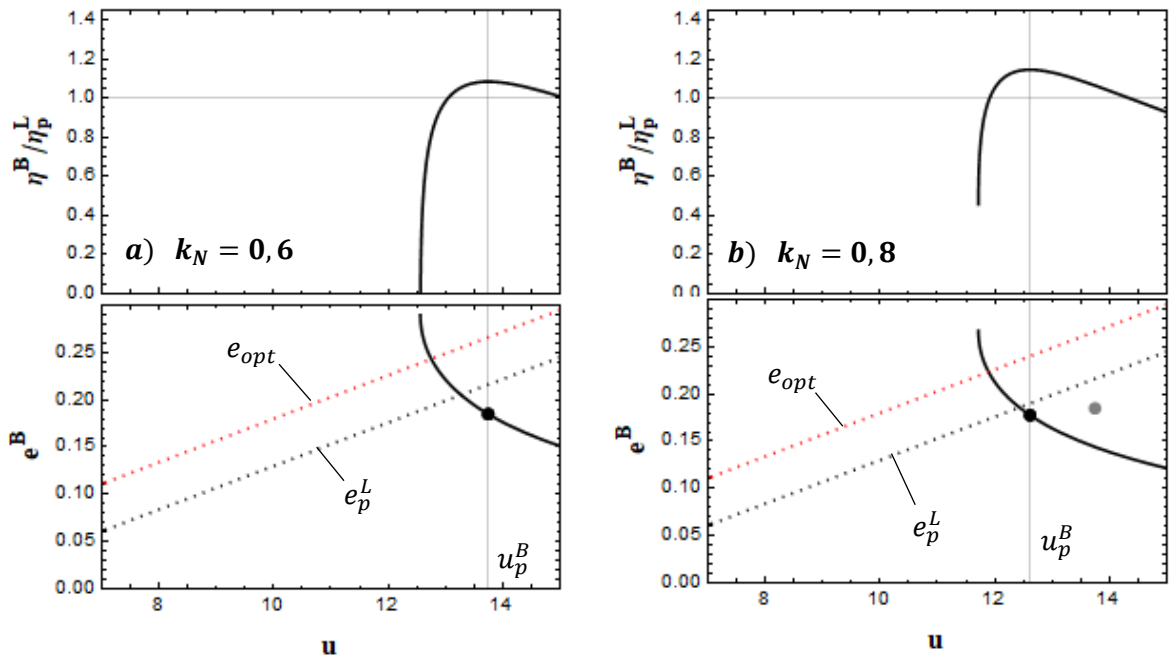


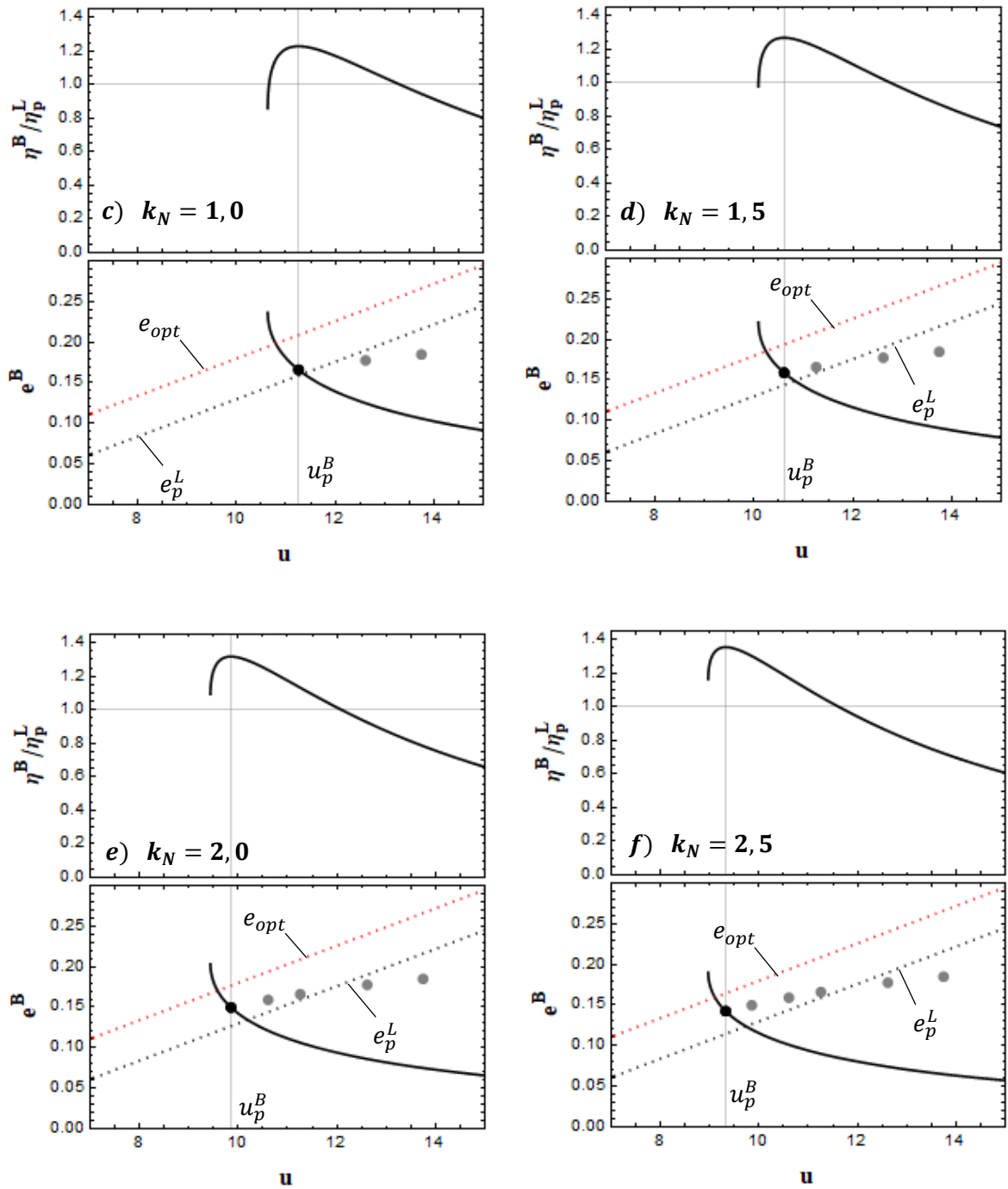
Rys 4.4.12. Zależność wartości modułu eliptycznego m od prędkości przepływu u dla różnych wartości współczynnika liniowej sztywności k_n .

W przeciwieństwie do przeanalizowanych wcześniej nieliniowych wariantów urządzenia, obserwujemy tutaj zmniejszanie wartości modułu w skutek wzrostu prędkości przepływu. Wzrost wartości tłumienia strukturalnego oraz współczynnika nieliniowej sztywności powoduje zmniejszenie wartości modułu,

co rozumiane jest zarówno jako zmniejszenie jego wartości początkowej jak i przyspieszenie jego spadku wraz z prędkością przepływu.

Ocenę wrażliwości układu na tłumienie przeprowadzić można, podobnie jak w przypadku wariantów poprzednich, analizując wpływ wartości współczynnika nieliniowej sztywności k_N na zależność tłumienia elektrycznego $e^B(u)$ od prędkości przepływu u , ze szczególnym uwzględnieniem zmian wartości prędkości nominalnej u_p^B oraz nominalnego tłumienia elektrycznego $e^B(u_p^B) = e_p^B$. Na rysunkach 4.3.13a – f przedstawiono zestawienia wykresów sprawności $\eta^S(u)$ z wykresami tłumienia elektrycznego $e_p^B(u)$ dla różnych współczynników nieliniowej sztywności k_N . Na każdym z wykresów $e^B(u)$, kolorem czarnym, zaznaczono punkty $\{u_p^B, e_p^B\}$ dla współczynnika k_N , którego dany wykres dotyczy, natomiast kolorem szarym punkty $\{u_p^B, e_p^B\}$ odpowiadające wcześniej badanym wartościom współczynnika k_N . Zabieg ten ma umożliwić śledzenie zmian położenia tych punktów, wraz ze zmianą współczynnika k_N . Na wykresach znalazły się również referencyjne funkcje nominalnego tłumienia elektrycznego układu liniowego e_p^L oraz optymalnego tłumienia elektrycznego e_{opt} . Należy wziąć pod uwagę, że w omawianym wariantcie urządzenia, liniowa składowa sztywności musi być mniejsza od zera – jest to warunek konieczny do osiągnięcia bistabilności. W związku z tym, układ bistabilny różni się od liniowego nie tylko obecnością dodatniego współczynnika k_N , ale również znakiem współczynnika sztywności liniowej k , zatem $e^B|_{k_N=0} \neq e^L$. Prosta e^L nie może więc być uznana za funkcję referencyjną przy analizie tłumienia elektrycznego e^B i dlatego też nie została zamieszczona na poniższych wykresach.

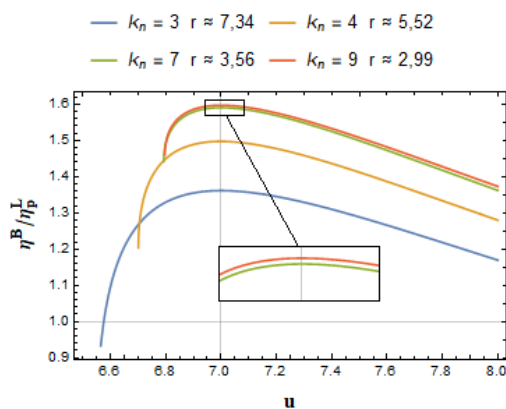




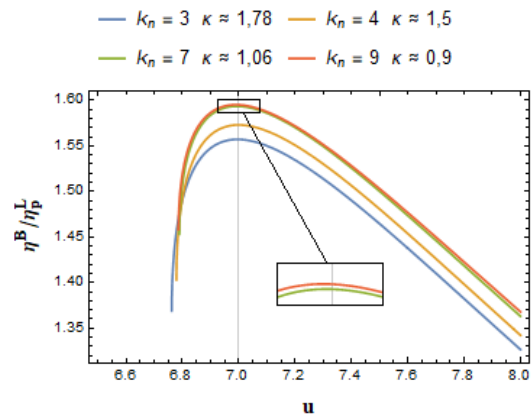
Rys. 4.4.13. Ewolucja charakterystyki sprawności oraz funkcji tłumienia elektrycznego dla rosnącego współczynnika nieliniowej sztywności k_n .

Na podstawie powyższych wykresów wyciągnąć można wniosek, że układ bistabilny ma właściwości zbliżone to układu o progresywnej sprężystości. W przypadku obydwu wariantów zaobserwować można, że wzrost współczynnika k_N prowadzi do zmniejszenia prędkości krytycznej u_{cr}^B oraz prędkości nominalnej u_p^B . Wyraźne jest też, że dla większych wartości k_N nominalne tłumienie elektryczne e_p^B ma wartość bliższą optymalnemu tłumieniu elektrycznemu e_{opt} , co oznacza zmniejszenie wrażliwości na tłumienie względem układu liniowego. Wyraźne jest też, że nawet niewielkie odchylenie prędkości pracy u układu od prędkości u_p^B prowadzi do istotnego uchybu wartości tłumienia elektrycznego e^B względem nominalnego tłumienia elektrycznego e_p^B . W konsekwencji, układ musi cechować się wąskim pasmem wysokiej sprawności B^B .

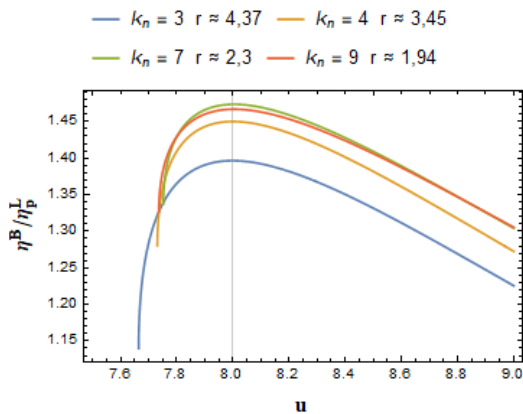
Konsekwencje wskazanych powyżej efektów zaobserwować można porównując charakterystyki sprawności urządzeń o różnych współczynnikach k_N oraz jednakowych prędkościach nominalnych u_p^S . Jak wykazano na rys. 4.4.13, prędkość u zależy od k_N , zatem aby zachować jednakową prędkość nominalną u_p^B dla układów o różnych współczynnikach k_N , niezbędne jest dostosowanie wartości innego z parametrów. W celu określenia wpływu wyboru dostosowywanego parametru na wyniki, niezależnie dostosowano wartości dwóch parametrów – oporu elektrycznego r oraz współczynnika piezoelektrycznego κ . Rezultat dla różnych prędkości nominalnych u_p^B zaprezentowano na rys. 4.4.14 – 4.4.19.



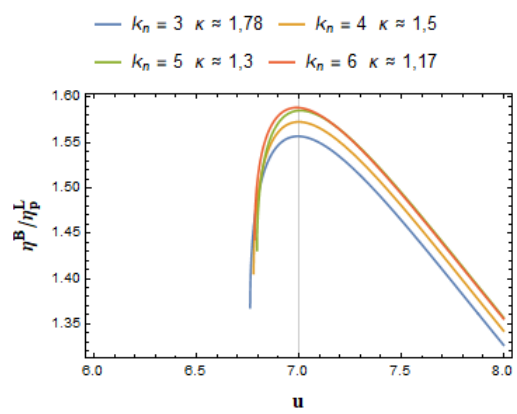
Rys. 4.4.12. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^B = 7$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .



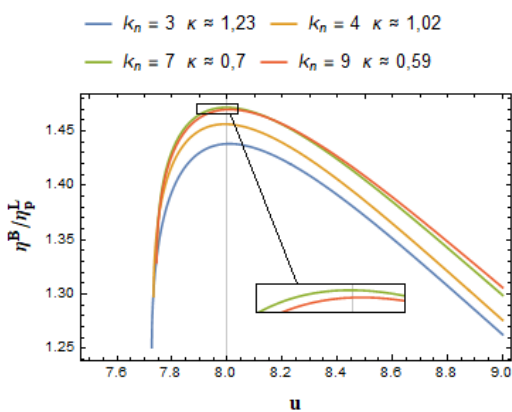
Rys. 4.4.13. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^B = 7$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .



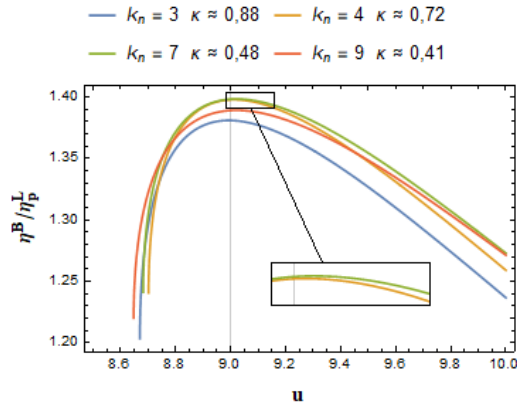
Rys. 4.4.14. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^B = 80$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .



Rys. 4.4.15. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^B = 8$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .

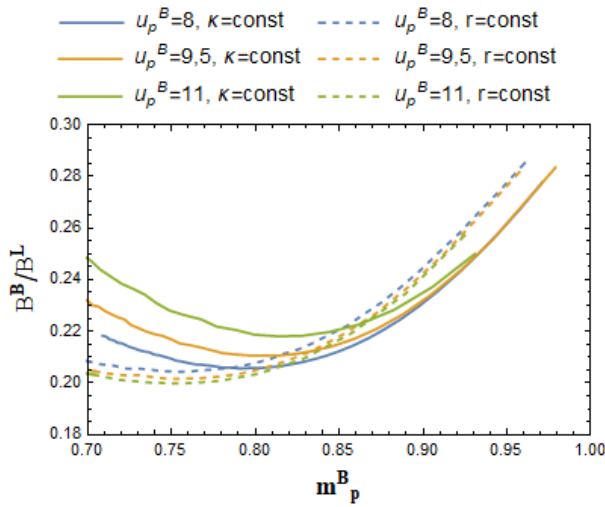


Rys. 4.4.16. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^B = 9$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości r .

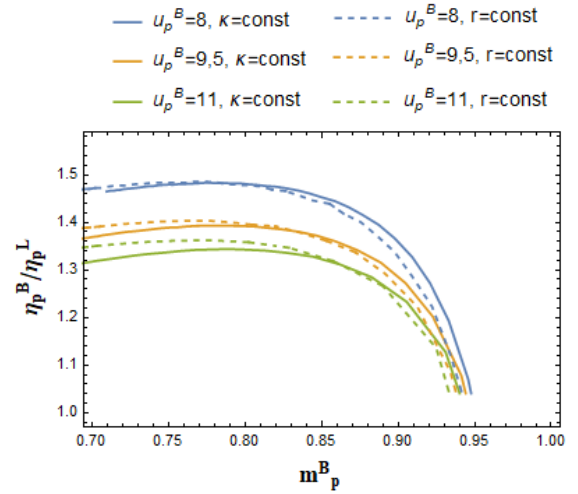


Rys. 4.4.17. Charakterystyki sprawności układów o różnych wartościach k_N oraz jednakowych $u_p^B = 9$ uzyskanych poprzez dostosowanie wartości κ .

Na wykresach możliwe jest zaobserwowanie, że wzrost współczynnika k_N może prowadzić do zwiększenia sprawności szczytowej oraz zwężenia pasma wysokiej sprawności (rys. 4.4.12 – 13), ale po przekroczeniu pewnej granicznej siły nieliniowości dalsze jego zwiększanie przynosi odwrotny efekt (rys. 4.4.14 – 17). Zjawiska te dokładniej zobrazowano na wykresach zależności szerokości pasma wysokiej sprawności B^B od modułu nominalnego m_p^B (rys. 4.3.18) oraz zależności sprawności szczytowej η_p^B od modułu nominalnego m_p^B (rys. 4.3.19).



Rys. 4.4.18. Zależność wartości stosunku B^B/B^L od modułu nominalnego m_p^B dla różnych prędkości nominalnych u_p^B .



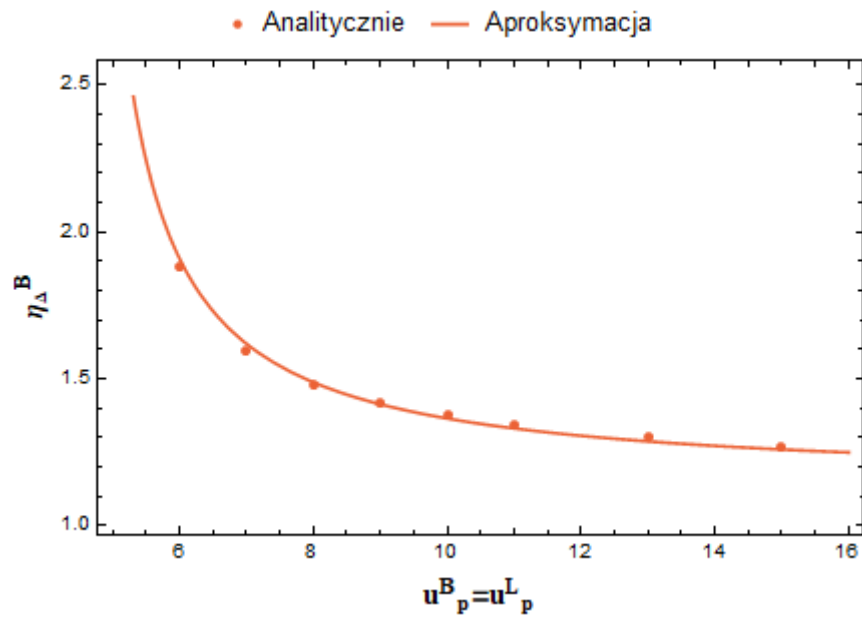
Rys. 4.4.19. Zależność wartości stosunku η_p^B/η_p^L od modułu nominalnego m_p^B dla różnych prędkości nominalnych u_p^B .

Jak wskazują powyższe wykresy, dla każdego zestawu parametrów istnieje pewna wartość modułu eliptycznego m , dla której układ wykazuje właściwości ekstremalne – minimalną szerokość pasma wysokiej sprawności B^B oraz maksymalną sprawność szczytową η_p^B . Przyczynę istnienia tych ekstremów należy powiązać z faktem, iż we współczynnikach aproksymacyjnych Γ_i , $i = 1,2,3,4$ oraz Γ_j^B , $j = 1,3,5$ występuje całka eliptyczna pierwszego rodzaju K , dla której $\lim_{m \rightarrow 1} K = \infty$. Należy więc spodziewać się, że funkcje, w których występuje K^σ , gdzie $\sigma < 0$, doświadczają będą silnego spadku wartości dla wysokich wartości modułu eliptycznego m .

Ważnym spostrzeżeniem jest, że optymalna wartość nominalnego modułu eliptycznego układu bistabilnego m_p^B zmienia się w zależności od parametrów urządzenia (rys. 4.3.19). Można jednak zauważyć, że fluktuuje ona wokół wartości $m_p^B = 0,8$, w związku z tym, wybrano ją jako uniwersalną suboptymalną wartość m_p^B . Suboptymalne wzmocnienia $\eta_p^B/\eta_p^L = \eta_\Delta^B$ dla kolejnych prędkości nominalnych u_p^B przedstawiono na rys. 4.3.20.

Rozkład punktów $\{\eta_\Delta^B, u_p^B\}$ zaproksymować można funkcją:

$$\eta_\Delta^B(u_p^B) = \eta_\Delta^H \approx 1,14 + \frac{1,27}{u_p^L - \frac{2c}{\rho a_1}} \quad (4.4.20)$$



Rys. 4.3.20. Punkty opisujące suboptymalne wzmocnienie dla kolejnych prędkości nominalnych oraz funkcja aproksymowana na podstawie tych punktów.

Ważnym spostrzeżeniem jest, że prędkość nominalna u_p^B ma kluczowy wpływ na sprawność szczytową η_p^B – zmianie u_p^B z wartości 8 na 9,5 towarzyszy zwiększenie sprawności szczytowej η_p^B ze 140% do 150% sprawności szczytowej η_p^L układu liniowego. Efekt ten jest tym silniejszy, im mniejsza jest prędkość nominalna u_p^B .

Szerokość pasma wysokiej sprawności B^B natomiast jest silniej determinowana przez wybrany zestaw parametrów, lecz mimo tego, wpływ ten pozostaje niewielki – dla przeanalizowanych zestawów parametrów, wartość tej wielkości wynosi od 20% do 30% szerokości pasma wysokiej sprawności B^L układu liniowego.

5. Podsumowanie i wnioski

Praca rozpoczęła się wprowadzeniem do zagadnienia odzyskiwania energii z drgań, ze szczególnym uwzględnieniem drgań wzbudzanych galopowaniem poprzecznym. W przeglądzie literatury na ten temat wykazano istotną lukę badawczą – jak dotąd, nie przeprowadzono ogólnej oceny sprawności elementarnych wariantów urządzenia, w tym: układów o dwóch stopniach swobody oraz układów z nieliniową charakterystyką sprężystości. Jej wypełnienie wskazano jako cel pracy.

Realizację wyznaczonego celu rozpoczęto od analizy liniowego urządzenia od jednym stopniu swobody. Przy użyciu metody bilansu harmonicznego wyprowadzono przybliżone rozwiązanie modelu matematycznego układu, a następnie sformułowano wyrażenie opisujące sprawność wariantu. Na tej podstawie zdefiniowano kluczowe parametry kryterialne niosące wyczerpującą informację o sprawności wariantu: sprawność szczytową i szerokość pasma wysokiej sprawności oraz wielkości pomocnicze: prędkość krytyczną, prędkość nominalną i wrażliwość na tłumienie. Zgodnie z wiedzą autora, szerokość pasma wysokiej sprawności i wrażliwość na tłumienie to wielkości, które nie zostały wskazane w literaturze nigdy wcześniej.

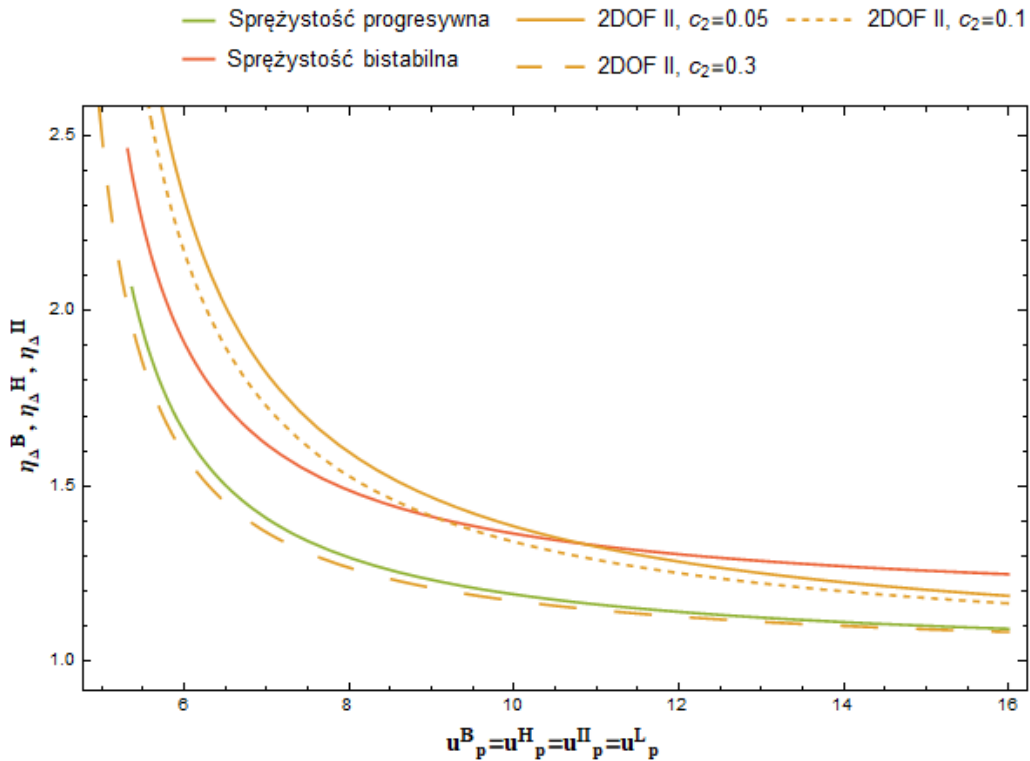
W dalszej części pracy wykazano mnogość konfiguracji jakie może przyjąć układ o dwóch stopniach swobody. Na tej podstawie, scharakteryzowano sześć podwariantów urządzenia, różniących się od siebie miejscem implementacji przetwornika elektromechanicznego oraz pozycją opływanej masy. Wyprowadzono parametry charakteryzujące sprawność wszystkich podwariantów i przy ich użyciu wykazano, że te z nich, których to dolna masa jest opływana, mają mniejszą sprawność szczytową od układu podstawowego, natomiast sprawność szczytowa podwariantów, których to górna masa wystawiona jest na przepływ, po spełnieniu wyznaczonego warunku, może być większa od sprawności szczytowej wariantu podstawowego. Dowiedziono także, że umiejscowienie oraz liczba przetworników elektromechanicznych nie ma wpływu na te wnioski. Ponadto, przedstawiono charakterystyczną cechę układów o dwóch stopniach swobody – możliwość posiadania przez nie dwóch charakterystyk sprawności. W zależności od stopnia w jakim charakterystyki się pokrywają, właściwości ta może stanowić wadę lub zaletę. Choć niektóre z podwariantów o dwóch stopniach swobody były studiowane w cytowanej literaturze, to ściśle wykazanie ich cech oraz kompleksowe porównanie, po raz pierwszy przeprowadzono w niniejszej pracy. Wielkością wpływającą na skalę różnic sprawności pomiędzy układami o dwóch stopniach swobody a wariantem podstawowym, jest prędkość nominalna oraz wartości współczynników tłumienia strukturalnego.

Ostatnią z analitycznych części pracy, jest badanie sprawności układów o nieliniowej charakterystyce sprężystości, w tym: układ o progresywnej sprężystości, układ o degresywnej sprężystości oraz układ o bistabilnej sprężystości. Analizę rozpoczęto od wykazania zasadności założenia rozwiązań modeli

tych układów w postaci eliptycznych funkcji Jakobiego. Wybór ten wymusił zastosowanie, innej niż dotychczas, metody wyprowadzenia rozwiązań modeli – metody bilansu harmonicznych eliptycznych. Procedura rozwiązywania modeli każdego z podwariantów została dokładnie omówiona, ze szczególnym uwzględnieniem zaproponowanych przez autora modyfikacji metody, umożliwiających uzyskanie znacznie dokładniejszych wyników. Rozwiązania wykorzystano do opisu sprawności układów. Ze względu na analityczną złożoność funkcji sprawności, wpływ nieliniowości na sprawność określono graficznie, badając wpływ nieliniowości na cechy układu. Tak wykazano, że sprawność szczytowa układu o progresywnej sprężystości jak i bistabilnego jest większa od sprawności szczytowej wariantu podstawowego. Cechują się one jednak węższym pasmem wysokiej sprawności. W przypadku układu o degresywnej sprężystości, wzrost siły nieliniowości prowadzi do zmniejszenia sprawności szczytowej i rozszerzenia pasma wysokiej sprawności. Trzeba jednak zaznaczyć, że ścisłą prawdziwość wniosków odnośnie tego podwariantu, wykazano tylko dla słabo nieliniowych urządzeń. Zostało to spowodowane ograniczeniami modelu matematycznego degresywnej sprężystości. Wskazano jednak mechanizmy wywołujące charakterystyczne cechy tego układu i na podstawie ich analizy zasugerowano zasadność ekstrapolowania uzyskanych wniosków dla układów silnie nieliniowych. Odnośnie wszystkich trzech podwariantów wykazano, że istotny wpływ na różnice pomiędzy ich sprawnościami szczytowymi a sprawnością szczytową wariantu podstawowego ma siła nieliniowości oraz prędkość nominalna. Siła nieliniowości reprezentuje wartość modułu eliptycznego. Optymalne jego wartości wynoszą 0,5 (osiągalne asymptotycznie) dla układu o progresywnej sprężystości oraz, w zależności od zestawu parametrów układu, $\sim 0,8$ dla układu bistabilnego. Sprawność szczytowa układu o degresywnej charakterystyce sprężystości maleje wraz z modułem nominalnym. Znaczenie marginalne ma dana kombinacja parametrów układu. Analizy sprawności nieliniowych wariantów urządzenia nie opublikowano nigdy wcześniej.

Wykazano więc trzy warianty GEH charakteryzujące się sprawnością szczytową wyższą niż wariant podstawowy: podwariant II układu o dwóch stopniach swobody, układ o progresywnej sprężystości oraz układ bistabilny. Różnice pomiędzy nimi determinowane są w głównej mierze przez prędkość nominalną. Z drugiej strony, na różnice te wpływają też cechy indywidualne dla poszczególnych wariantów – siła nieliniowości w przypadku układów nieliniowych oraz wielkości dynamiczne opisujące cechy dodatkowego (górnego) podukładu dla wariantów o dwóch stopniach swobody. Ostatni fakt istotnie utrudnia ustalenie płaszczyzny porównawczej.

W zestawieniu na rys. 5.1 ujęte zostały więc charakterystyki wzmocnienia układu o progresywnej sprężystości (4.2.21), bistabilnego (4.4.20) oraz drugiego podwariantu układu o dwóch stopniach swobody (3.3.19) dla różnych wartości współczynnika tłumienia górnego elementu sprężysto – tłumiącego.



Rys. 5.1. Zestawienie charakterystyk wzmocnienia układu bistabilnego, układu o progresywnej sprężystości oraz wariantu II układu o dwóch stopniach swobody.

Powyższy wykres jednoznacznie wskazuje, że układ o bistabilnej charakterystyce sprężystości cechuje się wyższą sprawnością szczytową od układu o progresywnej charakterystyce sprężystości. Wzmocnienie wariantu II układu o dwóch stopniach swobody jest natomiast silnie zależne od wartości drugiego współczynnika tłumienia i w zależności od jego wartości układ może mieć sprawność niższą od układu o progresywnej sprężystości (dla $c_2 = 0,3$), jak i wyższą od układu bistabilnego (dla $c_2 = c_1 = 0,1$ oraz $c_2 = 0,05$). Drugie stwierdzenie pozostaje prawdziwe tylko dla odpowiednio niskich prędkości nominalnych – po przekroczeniu pewnej granicznej prędkości nominalnej to układ bistabilny zawsze zapewniłby wyższą sprawność. Jest to nieuniknione z uwagi na fakt, że funkcja η_{Δ}^B posiada asymptotę poziomą o rzędnej większej niż funkcja η_{Δ}^H (patrz 3.3.19 i 4.4.20).

Do wad wskazanych powyżej układów nieliniowych trzeba zaliczyć wąskie pasmo wysokiej sprawności. Należy zaznaczyć, że choć układy te charakteryzują się wyższą sprawnością szczytową od wariantu podstawowego, to jednak doznają intensywnego spadku sprawności w wyniku odchylenia prędkości przepływu od jej optymalnej – nominalnej wartości. Miarą tego zjawiska jest właśnie szerokość pasma wysokiej sprawności. Zgodnie z wykresami na rys. 4.2.24 oraz rys. 4.4.18,

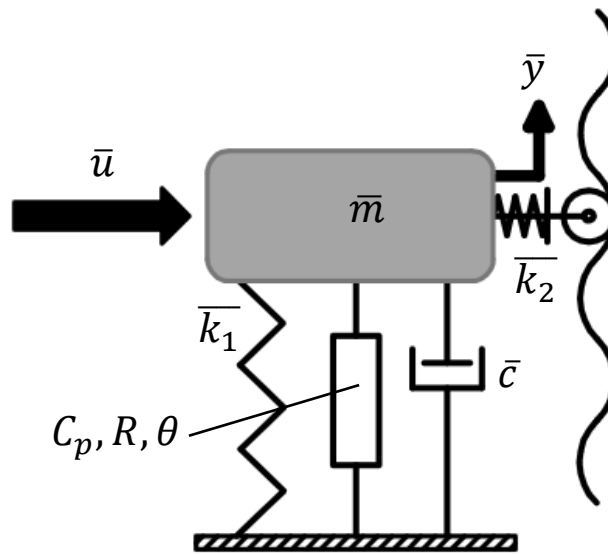
w przypadku omawianych wariantów, nieliniowość powoduje kilkukrotne zmniejszenie wartości tego parametru. Oznacza to, że układy te pozostaną bardziej sprawne od wariantu podstawowego tylko w wąskim zakresie prędkości przepływu. Stoi to w sprzeczności z przedstawionym w rozdziale 1. postulatem, jakoby zastosowanie galopowania jako mechanizmu wzbudzenia generatorów energii, ograniczało konieczność projektowania urządzeń dedykowanych do pracy przy ściśle zdefiniowanym zakresie prędkości przepływu. Trzeba jednak podkreślić, że choć w skutek odchylenia prędkości przepływu od wartości szczytowej omawiane warianty GEH doznawać będą spadku sprawności, to jednak nigdy nie doprowadzi to do całkowitego zaprzestania generowania energii przez urządzenia, tak jak ma to miejsce w przypadku generatorów wzbudzanych wirami von Karamana.

Pozbawiony omówionej powyżej wady jest wariant II układu o dwóch stopniach swobody. Zgodnie z (3.3.21), jego szerokość pasma wysokiej sprawności jest taka sama, jak wariantu podstawowego. Degresywna sprężystość z kolei, prowadzi do zwiększenia wartości tego parametru, jednakże odbywa się to kosztem sprawności szczytowej. Zgodnie z wykresami 4.3.18 i 4.3.19, dla słabych nieliniowości ($m \approx 0,03$) zaobserwować można blisko siedemnastoprocentowy przyrost szerokości pasma wysokiej sprawności, kosztem spadku sprawności o zaledwie jeden procent, względem sprawności wariantu podstawowego. Znaczenie tego efektu ustępuje jednak jednej z cech układów o dwóch stopniach swobody – mnogości rozwiązań i w konsekwencji, możliwości posiadania przez nie dwóch charakterystyk sprawności. Efekt przeskoku pomiędzy charakterystykami, omówiony w rozdziale 3.2, może prowadzić do zwielokrotnienia efektywnego pasma wysokiej sprawności, nie powodując przy tym spadku sprawności szczytowej.

Podwariant II układu o dwóch stopniach swobody może cechować się więc zarówno najszerszym pasmem wysokiej sprawności jak i najwyższą sprawnością szczytową. Wyłania się więc on, jako najbardziej korzystny spośród przeanalizowanych wariantów.

5.1. Perspektywa dalszych badań

W niniejszej rozprawie wykazano, że układ o bistabilnej charakterystyce może cechować się znacznie wyższą sprawnością od układu liniowego, jednak wzmocnienie to utrzymane może być tylko przy prędkości pracy bliskiej prędkości nominalnej. W wyniku nawet niewielkiego odchylenia, urządzenie doznawać będzie intensywnego spadku sprawności, poniżej tej, jaką zapewnia układ liniowy. W związku z tym, zaplanowano badania, mające na celu ustalenie, czy w układzie, którego model przedstawiono na rys. 5.1.1, efekt ten nie będzie zniwelowany.



Rys. 5.1.1. Model urządzenia polistabilnego.

Rolka, połączona z masą przy pomocy elementu sprężystego, tocząc się po sinusoidalnej bieżni, spowoduje, że urządzenie takie posiadać będzie wiele stabilnych położeń równowagi. Wraz z rosnącą prędkością przepływu, wzrastać będzie również liczba położeń równowagi, pomiędzy którymi oscyluje masa. Przewiduje się więc, że charakterystyka sprawności takiego układu, posiadać będzie liczbę lokalnych ekstremów równą połowie liczby punktów siodłowych, przez które przechodzi rolka. Przewiduje się więc, że jeśli ekstrema będą wystarczająco blisko siebie, punkt pracy układu nigdy nie oddali się od sprawności szczytowej wystarczająco mocno, aby doznać istotnego spadku sprawności.

Literatura

- [1] Lomborg B., *Smart Solutions to Climate Change, Comparing Costs and Benefits*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] Kumar S., Tiwari P., Zymbler M., Internet of Things is a revolutionary approach for future technology enhancement: a review. *Journal of Big Data* 6(1), 2019.
- [3] Martins F., PV sector in the European Union countries – Clusters and efficiency. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 74, s. 173-177, 2017.
- [4] Yildiz F., Potential Ambient Energy-Harvesting Sources and Techniques. *The Journal of Technology Studies* 35(1), 2009.
- [5] Williams C.B., Yates R. B., Analysis of a micro-electric generator for microsystems. *Sensors and Actuators* 52, s. 8–11, 1996.
- [6] Yuen S. C., Lee J., Li W. J., Leong P., An AA-Sized Vibration-Based Microgenerator for Wireless Sensors. *IEEE Pervasive Computing* 6(1), s. 64-72, 2007.
- [7] Peng W., Wei L., Lufeng C., Design and fabrication of a micro electromagnetic vibration energy harvester. *Journal of Semiconductors* 32(10):104009, 2011.
- [8] Munaz A., Lee B. C., Chung G. S., A study of an electromagnetic energy harvester using multi-pole magnet. *Sensors and Actuators A: Physical* 201, s. 134-140, 2013.
- [9] Liu X., *An Electromagnetic Energy Harvester for Powering Consumer Electronics*. Rozprawa doktorska, Clemson University, 2012.
- [10] Chen S. J., Wu J. Y., Fabrication of a 2-DOF electromagnetic energy harvester with in-phase vibrational bandwidth broadening. *Smart Materials and Structures* 25(9), 2016.
- [11] Perez M., Chesne S., Jean-Mistral C. Billon K., Augez R. Clerc C., A two degree-of-freedom linear vibration energy harvester for tram applications. *Mechanical Systems and Signal Processing* 140, 2020.
- [12] Lu Z., Wen Q., He X., Wen Z., A Nonlinear Broadband Electromagnetic Vibration Energy Harvester Based on Double-Clamped Beam. *Energies* 12(14), s. 2710, 2019.
- [13] Kankana P., Amann A., Saibal R., Tapered nonlinear vibration energy harvester for powering Internet of Things. *Applied Energy* 283(5):116267, 2020.
- [14] Umeda M., Nakamura K., Ueha S., Energy Storage Characteristics of a Piezo-Generator using Impact Induced Vibration. *Japanese Journal of Applied Physics* 36(5B), s. 3146–3151, 1997.
- [15] Toit N., *Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester*. Rozprawa doktorska, Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [16] Cojocariu B., Hill A., Escudero A., Xiao H., Piezoelectric Vibration Energy Harvester: Design and Prototype. *ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 2012.
- [17] Miller L. M., *Micro-scale piezoelectric vibration energy harvesting: from fixed-frequency to adaptable-frequency devices*. Rozprawa doktorska, University of California, 2012.
- [18] Foupouapouognigni O., Clemence N. D. B., Martin S. S., Piezoelectric vibration energy harvester: Operating mode, excitation type and dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 509, 2018.
- [19] Xiao H., Wang X., John S., A dimensionless analysis of a 2DOF piezoelectric vibration energy harvester. *Mechanical Systems and Signal Processing* 58, s. 355-375, 2015.
- [20] Wang W., Liu S., Cao J., Zhou S., Lin J., Two degrees of freedom piezoelectric vibration energy harvester. *SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, 2016.

- [21] Friswell M., Ali S. F., Adhikari S., Lees A., Bilgen O., Litak G., Non-Linear Piezoelectric Vibration Energy Harvesting From a Vertical Cantilever Beam With Tip Mass. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 23(13), s. 1505-1521, 2012.
- [22] Petrin O., Guha K., Jakšić O., Jakšić Z., Innacci J., Investigation of Nonlinear Piezoelectric Energy Harvester for Low-Frequency and Wideband Applications. *Micromachines* 13(9), s. 1399, 2022.
- [23] Meninger S., Mur-Miranda J. O., Amirtharajah R., Chandrakasan A. P., Lang J. H., Vibration-to-Electric Energy Conversion. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (Vlsi) Systems* 9(1), s. 64-76, 2001.
- [24] Boisseau S., Despesse G., Seddik B. A., Electrostatic Conversion for Vibration Energy Harvesting. *InTech*, 2012.
- [25] Aljadiri R. T., Taha L., Ivey P., Electrostatic harvester for wind energy harvesting and wind speed remote sensing. *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2015*, s. 412-417, 2015.
- [26] Dragunov V., Dorzhiev V., Electrostatic vibration energy harvester with increased charging current. *Journal of Physics Conference Series* 476(1), s. 2115, 2013.
- [27] Roundy S., Leland E., Baker J., Carleton E., Reilly E., Lai E., Otis B., Rabaey J., Wright P., Sundararajan V., Improving power output for vibration-based energy scavengers. *Pervasive Computing, IEEE* 4, s. 28 – 36, 2005.
- [28] Beeby S. P., Tudor M. J., White N. M., Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Measurement Science and Technology* 17(12), 2006.
- [29] McRobb M., *Development and enhancement of various mechanical oscillators for application in vibrational energy harvesting*. Rozprawa doktorska, University of Glasgow, 2014.
- [30] Wang J., Geng L., Ding L., Zhu H., The state-of-the-art review on energy harvesting of flow-induced vibrations. *Applied Energy*, 2020.
- [31] Zhang M., Zhang C., Abdelkefi A., Yu H., Gaidai O., Qin X., Wang J., Piezoelectric energy harvesting from vortex-induced vibration of a circular cylinder: Effect of Reynolds number. *Ocean Engineering* 235(1):109378, 2021.
- [32] Wang J., Tang L., Zhao L., Hu G., Song R., Kun X., Equivalent circuit representation of a vortex-induced vibration-based energy harvester using a semi-empirical lumped parameter approach. *International Journal of Energy Research* 44(6), s. 4516-4528, 2020.
- [33] Wang J., Zhang C., Zhang M., Enhancing energy harvesting from flow-induced vibrations of a circular cylinder using a downstream rectangular plate: *An experimental study*. *International Journal of Mechanical Sciences* 211(14):106781, 2021.
- [34] Azadeh-Ranjbar V., Elvin N., Andreopoulos Y., Vortex-induced vibration of finite-length circular cylinders with spanwise free-ends: Broadening the lock-in envelope. *Physics of Fluids* 30(10):105104, 2010.
- [35] Modir A., Goudarzi N., Experimental investigation of Reynolds number and spring stiffness effects on vortex induced vibrations of a rigid circular cylinder. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 74, 2018.
- [36] Zhang L. B., Dai H. L., Abdelkefi A., Wang L., Improving the performance of aeroelastic energy harvesters by an interference cylinder. *Applied Physics Letters* 111:073904, 2017.
- [37] Franzini G., Lucas O. B., A numerical investigation on piezoelectric energy harvesting from Vortex-Induced Vibrations with one and two degrees of freedom. *Journal of Fluids and Structures* 77, s. 196-212, 2017.

- [38] Sun W. P., Su W. J., Analysis of a Two-Degree-of-Freedom Piezoelectric Energy Harvester from Vortex-Induced Vibrations. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, s. 1619-1623, 2019.
- [39] Lu D., Li Z., Hu G., Zhou B., Yang Y., Zhang G., Two-Degree-of-Freedom Piezoelectric Energy Harvesting from Vortex-Induced Vibration. *Micromachines* 13(11), s. 1936, 2022.
- [40] Naseer R., Abdelkefi A., Dai H., Wang L., Characteristics and comparative analysis of monostable and bistable piezomagnetoelastic energy harvesters under vortex-induced vibrations. *AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, s. 1959, 2018.
- [41] Javed U., Abdelmoula H., Abdelkefi A., On the nonlinear dynamics and performance of hybrid piezoelectric-inductive energy harvesters subjected to vortex-induced vibrations. *25th AIAA/AHS Adaptive Structures Conference*, 2017.
- [42] Zhang L. B., Abdelkefi A., Dai H., Naseer R., Wang L., Design and experimental analysis of broadband energy harvesting from vortex-induced vibrations. *Journal of Sound and Vibration* 408, s. 210-219, 2017.
- [43] Oficjalna strona producenta Bladeless Vortex: <https://vortexbladeless.com>; 13.06.2023.
- [44] Parameshwaran R., Dhulipalla S. J., Yendluri D. R. V., Fluid-structure Interactions and Flow Induced Vibrations: A Review. *Procedia Engineering* 144, s. 1268-1293, 2016.
- [45] Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, fourth ed. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [46] Ludlam D. V., Aeronautico I., *Optimal energy harvesting form vortex induced vibration and transverse galloping vibrations*. Praca magisterska, Universidad Politécnica de Madrid, 2017.
- [47] Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andrés A., Energy harvesting from transverse galloping. *Journal of Sound and Vibration* 329(14), s. 2873-2883, 2010.
- [48] Abdelkefi A., Hajj M. R., Nayfeh A. H., Power harvesting from transverse galloping of square cylinder. *Nonlinear Dynamics* 70(2), 2012.
- [49] Ibarra D., Sorribes F., Alonso G., Meseguer J., Transverse galloping of two-dimensional bodies having a rhombic cross-section. *Journal of Sound and Vibration* 333(13), s. 2855–2865, 2014.
- [50] Noel J., Yadav R., Li G. Daqaq M., Improving the performance of galloping micro-power generators by passively manipulating the trailing edge. *Applied Physics Letters* 12(8):083503, 2018.
- [51] Zhao K., Zhang Q., Wang W., Optimization of Galloping Piezoelectric Energy Harvester with V-Shaped Groove in Low Wind Speed. *Energies* 12(24):4619, 2019.
- [52] Zhao D., Hu X., Tan T., Yan Z., Zhang W., Piezoelectric galloping energy harvesting enhanced by topological equivalent aerodynamic design. *Energy Conversion and Management* 222:113260, 2022.
- [53] Hu G., Wang J., Tang L., A Comb-Like Beam based Piezoelectric System for Galloping Energy Harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021.
- [54] Lan C., Tang L., Hu G., Qin W., Dynamics and performance of a two degree-of-freedom galloping-based piezoelectric energy harvester. *Smart Materials and Structures* 28(4), 2019.
- [55] Hu G., Wang J., Qiao H., Zhao L., Li Z., Tang L., An Experimental Study of a Two-Degree-of-Freedom Galloping Energy Harvester. *International Journal of Energy Research* 45(2), 2020.
- [56] Hu G., Liang J., Tang L., Wang J., Improved Theoretical Analysis and Design Guidelines of a Two-Degree-of-Freedom Galloping Piezoelectric Energy Harvester. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 33(1), 2021.

- [57] Zhao L., Tang L., Yang Y., Enhanced piezoelectric galloping energy harvesting using 2 degree-of-freedom cut-out cantilever with magnetic interaction. *Japanese Journal of Applied Physics* 53(6):060302, 2014.
- [58] Abdelkefi A., Yan Z., Hajj M. R., Nonlinear dynamics of galloping-based piezoaeroelastic energy harvesters. *The European Physical Journal Special Topics* 222, s. 1483-1501, 2013.
- [59] Abdelkefi A., Yan Z., Hajj M. R., Modeling and nonlinear analysis of piezoelectric energy harvesting from transverse galloping. *Smart Materials and Structures* 22.(2):025016, 2013.
- [60] Li H. T., Ren H., Cao F., Qin W. Y., Improving the galloping energy harvesting performance with magnetic coupling. *International Journal of Mechanical Sciences* 237:107785, 2023.
- [61] Zhang H., Zhang L., Wang Y., Yang X., Song R., Sui W., Modeling and experimental investigation of asymmetric distance with magnetic coupling based on galloping piezoelectric energy harvester. *Smart Materials and Structures* 31(6), 2022.
- [62] Sarbinowski F., Starosta R., Assessment of the role of structural nonlinearity in galloping energy harvesters. *Vibrations in Physical Systems* 32(2):2021209, 2021.
- [63] Alhadidi A., Abderrahmane H., Daqaq M., Exploiting stiffness nonlinearities to improve flow energy capture from the wake of a bluff body. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 337, 2016.
- [64] Li X., Ma T., Liu B., Wang C., Experimental Study on Magnetic Coupling Piezoelectric–Electromagnetic Composite Galloping Energy Harvester. *Sensors* 22(21):8241, 2022.
- [65] Wang Q., Chen Z., Zhao L., Li M., Zou H., Wei K., Zhang X., Zhang W., Enhanced galloping energy harvester with cooperative mode of vibration and collision. *Applied Mathematics and Mechanics* 7, s. 945-958, 2022.
- [66] Sun W., Zhang Y., Cheng G., He S., An enhanced galloping-based piezoelectric energy harvester with non-rotational bluff body. *Applied Physics Letters* 121(17):173907, 2022.
- [67] Sun W., Guo C., Cheng G., He S., Performance enhancement of galloping-based piezoelectric energy harvesting by exploiting 1:1 internal resonance of magnetically coupled oscillators. *Nonlinear Dynamics* 108(4), 2022.
- [68] Abdelkefi A., Nayfeh A. H., Hajj M., Enhancement of power harvesting from piezoaeroelastic systems. *Nonlinear Dynamics* 68(4), 2011.
- [69] Abdelkefi A., Nayfeh A. H., Hajj M., Modeling and analysis of piezoaeroelastic energy harvesters. *Nonlinear Dynamics* 67(2), s. 925-939, 2011.
- [70] Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Nowy Jork, 1964.
- [71] Kovacic I., Brennan M. J., *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*, Wiley, Chichester, Anglia, 2011.
- [72] Kovacic I., Cveticanin L., Zukovic M., Rakaric Z., Jacobi elliptic functions: A review of nonlinear oscillatory application problems. *Journal of Sound and Vibration* 180, 2016.
- [73] Szemplińska – Stupnicka W., Tyrkiel E., *Bifurkacje, drgania chaotyczne i fraktale w oscylatorze dwudolkowym*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 2001.