

Paulina Stempin

## Structural models in the framework of space-Fractional Continuum Mechanics

### Abstract

The research problem examined in the dissertation concerns modeling of structural elements that exhibit scale effect, e.g. nano- and micro-scale elements. In that case, classical continuum mechanics fails since it does not account for the fact that materials are heterogeneous (e.g. granular, porous) when considered at sufficiently small scales. Scale effect then appears, meaning the impact of heterogeneity of the internal structure on the object's behavior. As a consequence, the characteristic length of the internal structure (length scale) needs to be included when describing body behavior at scales close to the microstructure. The inability of continuum mechanics to account for the scale effects motivated the development of generalized continuum (non-local) theory, i.e. space-Fractional Continuum Mechanics (s-FCM).

This dissertation aims to develop structural models that account for scale effects to predict the mechanical response of structural elements over scales to a given external load. To achieve the stated objective, the s-FCM is relied upon. It assumes that using the fractional derivative allows the introduction of non-locality. It is because the fractional operators involve an interval whose size (in the approach used) relates to the length scale (microstructure grain size). Thus, it introduces the size of the interaction neighborhood of a specific material point.

The final results are space-Fractional Structural Mechanical Models (s-FSM), such as space-Fractional Beams and space-Fractional Plates. A numerical representation is created for each mathematical model developed, and a parametric study and validation are performed. The developed s-FSM models have only two additional parameters (order of fractional derivative and length scale) compared to their classical counterparts, and as both parameters control the scale effect in fractional models.

As mentioned, the new parameters of the s-FSM models relate to the material's microstructure. In particular, the length scale is set equal to the grain size. Consequently, a single set of parameters in statics and dynamics is obtained, which is unreachable in competitive non-local models. The results confirm that it is possible to return to classical models if the length scale's ratio to the structural element's external dimensions tends to zero or if the order of the fractional derivative is one. Most importantly, the s-FSM models are able to provide a good approximation of the experimental results for nano/micro-beams and nano/micro-plates.

Based on the results obtained, one can state that the aim of the dissertation has been achieved, and the thesis stated that *using the fractional derivative introduces the non-locality into structural mechanical models, allowing to capture scale effect* is correct.

Paulina Stempin

## Strukturalne modele mechaniki ośrodków ciągłych niecałkowitego rzędu

### Streszczenie

Problem badawczy podjęty w rozprawie doktorskiej dotyczy modelowania elementów strukturalnych wykazujących efekt skali, np. elementów w skali nano i mikro. Zastosowanie klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych jest nieodpowiednie w takim przypadku, ponieważ nie uwzględnia ona niejednorodności struktury materiałów (np. ziarnistej budowy, porowatości) co prowadzi do istotnych błędów modelowania przy dostatecznie małych skalach obserwacji. W małych skalach obserwacji występuje silny efekt skali oznaczający wpływ struktury wewnętrznej na zachowanie danego obiektu. Należy wówczas uwzględnić długość charakterystyczną struktury wewnętrznej (ang. *length scale*) w opisie zachowania rozpatrywanego ciała, szczególnie w skalach zbliżonych do wymiaru charakterystycznego mikrostruktury. Niezdolność klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych do uwzględnienia efektu skali stanowiło motywację do opracowania uogólnionej (nielokalnej) teorii, tj. mechaniki ośrodków ciągłych niecałkowitego rzędu.

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest opracowanie modeli strukturalnych uwzględniających efekt skali, aby umożliwić przewidywanie mechanicznej odpowiedzi elementów konstrukcyjnych w różnych skalach na zadane obciążenie zewnętrzne. Aby osiągnąć postawiony cel, wykorzystano założenia mechaniki ośrodków ciągłych niecałkowitego rzędu. Przyjmuje się, że zastosowanie pochodnej niecałkowitego rzędu pozwala na wprowadzenie nielokalności do modeli. Wynika to z faktu, iż pochodna niecałkowitego rzędu jest obliczana na pewnym przedziale, którego wielkość (w zastosowanym podejściu) związana jest z długością charakterystyczną struktury wewnętrznej. W ten sposób wprowadza się wielkość obszaru oddziaływania na dany punkt materialny.

Ostatecznym wynikiem rozprawy jest zdefiniowanie teorii strukturalnych, takich jak belki i płyty, w oparciu o mechanikę ośrodków ciągłych niecałkowitego rzędu. Dla każdego z modeli matematycznych stworzono reprezentację numeryczną oraz przeprowadzono studium parametryczne i walidację. Opracowane nielocalne modele strukturalne charakteryzują się ponadto tylko dwoma dodatkowymi parametrami odpowiedzialnymi za modelowanie efektu skali (rzęd pochodnej i długość charakterystyczną struktury wewnętrznej) w porównaniu do ich klasycznych odpowiedników.

Jak wspomniano, nowe parametry zdefiniowanych modeli powiązane są z mikrostrukturą materiału - w szczególności długość charakterystyczna struktury wewnętrznej odpowiada wielkości ziarna. W związku z tym możliwe jest uzyskanie pojedynczego zestawu parametrów niezależnie czy rozważa się zagadnienie statyki czy dynamiki, co jest nieosiągalne w przypadku konkurencyjnych modeli nielokalnych. Uzyskane wyniki potwierdzają, że modele można zastąpić modelami klasycznymi, jeśli stosunek długości charakterystycznej struktury wewnętrznej do zewnętrznych wymiarów elementu konstrukcyjnego dąży do zera lub jeśli rząd pochodnej jest równy jeden. Najistotniejszym aspektem jest, że modele zapewniają dobre przybliżenie wyników eksperymentalnych dla nano/mikro belek i nano/mikro płyt.

Na podstawie uzyskanych wyników stwierdza się, że cel rozprawy doktorskiej został osiągnięty, a teza głosząca, że *wykorzystanie pochodnej niecałkowitego rzędu wprowadza nielokalność do strukturalnych modeli mechanicznych, pozwalając na opis efektu skali* jest poprawna.