



Politechnika Poznańska  
Wydział Informatyki i Telekomunikacji

*Streszczenie rozprawy doktorskiej w języku polskim*

Nowe kierunki w odpornej  
Granicznej Analizie Danych

**Anna Labijak-Kowalska**

Promotor: dr hab. inż. Miłosz Kadziński, prof. PP

Poznań, 2023



## Wprowadzenie

Graniczna Analiza Danych (ang. Data Envelopment Analysis (DEA)) jest metodą pozwalającą na ocenę względnej efektywności jednostek decyzyjnych, które pobierają wiele nakładów (wejść) i produkują wiele efektów (wyjść). W oryginalnym sformułowaniu metody, efektywność jednostki określana jest jako stosunek pomiędzy wirtualnym efektem a wirtualnym nakładem, będącymi sumami ważonymi istniejących nakładów i efektów. Celem metody DEA jest identyfikacja zbioru jednostek, które działają efektywnie. Jest on uzyskiwany poprzez znalezienie wektora wag skojarzonych z nakładami i efektami, dla którego badana jednostka osiąga najwyższą wartość miary efektywności.

W Granicznej Analizie Danych wyróżnia się trzy podstawowe modele efektywności: CCR, BCC oraz model addytywny. Pierwsze dwa są modelami ilorazowymi, w których rozróżnia się orientację na nakłady i na efekty. Ostatni opiera się na wyznaczaniu odległości  $L_1$  badanej jednostki od granicy efektywności. W tym przypadku orientacje na nakłady i efekty zostały połączone w jeden wspólny model. Choć takie powiązanie obu orientacji jest często pożądanym efektem, to oryginalne sformułowanie modelu addytywnego posiada kilka wad. Po pierwsze, w modelu addytywnym istnieje problem skali, tj. projekcje jednostek nieefektywnych na granicę efektywności zależą, w znacznym stopniu, od zakresów wartości poszczególnych czynników (wejść i wyjść). Po drugie, miara efektywności w tym modelu nie ma intuicyjnej interpretacji. Rozwiązaniem powyższych problemów było wprowadzenie nowego modelu efektywności, tj. modelu addytywnego opartego na funkcjach wartości, (ang. Value-based additive DEA (VDEA)), który czerpie inspirację z wieloatrybutowej teorii użyteczności. W tym modelu, wejściom i wyjściom przypisuje się cząstkowe funkcje wartości, które następnie agregowane są z użyciem funkcji addytywnej (sumy ważonej).

Niezależnie od wybranego modelu efektywności, ocena jednostek decyzyjnych oparta jest zawsze tylko na jednym, najbardziej korzystnym, wektorze wag dla badanej jednostki. Ponadto, wektory wag uzyskane dla różnych jednostek są różne, co budzi wątpliwości co do merytorycznej poprawności porównań między nimi. Dodatkowo, klasyczne podejście w DEA pozwala tylko na wskazanie jednostek efektywnych, nie dostarczając przy tym narzędzi pozwalających na ich rozróżnienie.

Opisane powyżej problemy były punktem wyjścia do dalszego rozwoju metodologii DEA. Po pierwsze, w literaturze zaproponowano wiele metod, które pozwalają na porównanie jednostek efektywnych między sobą oraz stworzenie pełnego rankingu jednostek decyzyjnych, spośród których najbardziej popularne są super-efektywność oraz efektywność krzyżowa. Ponadto, wprowadzono możliwość uwzględnienia informacji preferencyjnej w modelu, co pozwala na ograniczenie przestrzeni dopuszczalnych wektorów wag. Żadna z powyższych metod nie pozwala jednak na ocenę jednostki z uwzględnieniem całego dopuszczalnego spektrum wektorów wag. Badania przeprowadzone w ramach niniejszej rozprawy skupiają się na opracowaniu spójnego zestawu metod, pozwalających na ocenę odporności jednostek decyzyjnych, tj. ich efektywności w oparciu o wszystkie dopuszczalne wektory wag. W kolejnych rozdziałach zaproponowane rozwiązania zostały opisane w zwięzłej formie.

# 1 Metody badania odporności dla Granicznej Analizy Danych

W niniejszej rozprawie zaproponowany został spójny zestaw metod, które pozwalają na badanie odporności jednostek decyzyjnych w oparciu o pełen zakres wektorów wag dla dwóch różnych modeli efektywności: ilorazowego oraz opartego na funkcjach wartości. Zaproponowane metody można podzielić na dwie grupy, które wzajemnie się uzupełniają. Pierwsza z nich oparta jest na programowaniu matematycznym i pozwala na wyznaczenie skrajnych wartości efektywności, odległości od najlepszej jednostki oraz występowanie koniecznych i możliwych relacji preferencji dla par jednostek. Druga wykorzystuje symulację Monte Carlo do wyznaczenia indeksów akceptowalności reprezentujących rozkłady poszczególnych miar lub wyników.

Równoczesna analiza wyników uzyskanych w obu podejściach jest korzystna z kilku względów. Z jednej strony, metody dokładne pozwalają na precyzyjną ocenę tego, w jakim zakresie znajdują się wartości efektywności dla poszczególnych jednostek z uwzględnieniem wszystkich wektorów wag. Uzyskane zakresy są jednak w wielu przypadkach bardzo szerokie. Dodatkowo, uzyskane skrajne wartości występują bardzo rzadko, tylko dla pojedynczych, szczególnych wektorów wag. Podobnie, w wielu problemach relacja możliwej preferencji występuje dla większości par jednostek decyzyjnych, podczas gdy konieczna preferencja jest relacją rzadką. Powyższa własność czyni większość par jednostek nieporównywalną. W takich sytuacjach analiza stochastyczna pozwala na uzyskanie dodatkowej informacji na temat rozkładów badanych miar, tj. wartości miary efektywności, odległości do najlepszej jednostki, pozycji w rankingu oraz prawdopodobieństwa preferencji jednej jednostki nad inną. Z drugiej strony, same indeksy akceptowalności również nie dostarczają wszystkich potrzebnych informacji. Mogą one być wyznaczone jedynie w sposób przybliżony. W szczególności, szansa, że wylosowany zostanie wektor wag odpowiadający najwyższej lub najniższej możliwej wartości efektywności dla badanej jednostki jest niewielka. Analogicznie, szacowana wartość indeksu akceptowalności relacji przewyższania dla pewnej pary jednostek może być równa 1, jednak nie świadczy to o koniecznej preferencji w obrębie tej pary. Powyższe cechy świadczą o zasadności zestawienia ze sobą obu typów wyników.

Aby uzyskać stochastyczne indeksy akceptowalności dla problemów z ilorazowym modelem efektywności zastosowano poniższy algorytm. Jako, że przestrzeń wektorów wag jest nieograniczona, wprowadzono dodatkowe ograniczenia, które normalizują otrzymane wektory wag w taki sposób, że suma wag, zarówno dla nakładów jak i dla efektów musi być równa 1. Następnie, zastosowano algorytm Hit-And-Run, aby uzyskać zbiór próbek wektorów wag. W niniejszej pracy do próbkowania użyto rozkładu jednorodnego. Bazując na wygenerowanym zestawie wag obliczone zostają wartości efektywności dla wszystkich jednostek. W ostatnim etapie otrzymane wartości efektywności zostają podzielone przez wartość uzyskaną przez najlepszą jednostkę. Taki zabieg zapewnia, że najlepsza jednostka uzyskuje efektywność równą 1. Uzyskane w taki sposób wartości efektywności pozwalają na wyznaczenie rozkładów miary efektywności oraz pozycji w rankingu efektywności. Dodatkowo, estymowane są również prawdopodobieństwa występowania preferencji dla par jednostek.

Rozważone zostały trzy różne perspektywy oceny efektywności jednostek decyzyjnych: wartości miary efektywności (lub ich odległość do najlepszej jednostki), rankingi jednostek pod względem efektywności oraz ich porównania parami. Poniżej, poszczególne

perspektywy zostały krótko opisane w odniesieniu do modelu ilorazowego.

### **Wartości miary efektywności**

Z punktu widzenia miary efektywności analiza odporności polega na wyznaczeniu skrajnych (maksymalnych i minimalnych) wartości miary efektywności dla każdej jednostki. Maksymalną miarę efektywności dla badanej jednostki można uzyskać rozwiązując oryginalnie zaproponowany w metodzie DEA model programowania liniowego (model CCR). W niniejszej rozprawie zaproponowany został model mieszanego programowania całkowitoliczbowego, który pozwala na znalezienie najmniej korzystnego scenariusza dla badanej jednostki. W zaproponowanym modelu minimalizowana jest miara efektywności badanej jednostki z uwzględnieniem ograniczenia, że przynajmniej jedna z jednostek w zbiorze pozostaje efektywna, tj. osiąga efektywną równą jeden.

Rozkład miary efektywności w dopuszczalnej przestrzeni wektorów wag wyznaczany jest poprzez oszacowanie indeksów akceptowalności dla przedziałów efektywności (ang. Efficiency Acceptability Interval Indices (EAIIs)). Indeks ten dla pewnej jednostki  $DMU_o$  oraz przedziału  $b_i$  definiowany jest jako stosunek liczby wektorów wag, dla których jednostka  $DMU_o$  osiąga efektywność w przedziale  $b_i$  do liczby wszystkich dopuszczalnych wektorów wag. Przedziały  $b_i, i = 1, 2, \dots, K$  muszą być rozłączne i pokrywać całą możliwą przestrzeń miary efektywności, tj. ich suma musi być równa przedziałowi  $[0, 1]$ . Suma wartości EAI dla danej jednostki jest zawsze równa jeden.

Dodatkowo, analiza z użyciem symulacji Monte Carlo pozwala na wyznaczenie dodatkowych miar opisujących efektywność jednostek, takich jak skrajne wartości efektywności uzyskane przy pomocy próbkowania oraz oczekiwana wartość efektywności.

### **Rankingi jednostek pod względem efektywności.**

Drugą perspektywą analizy jednostek decyzyjnych jest ocena danej jednostki pod względem pozycji, którą zajmuje w rankingu efektywności. W tej perspektywie wyznaczane są skrajne pozycje, jakie może osiągać dana jednostka dla jakiegokolwiek dopuszczalnego wektora wag. W ramach niniejszej pracy zaproponowano modele programowania liniowego pozwalające na wyznaczenie tych skrajnych pozycji. Oba zaproponowane modele wykorzystują mieszane programowanie całkowitoliczbowe. W obu przypadkach model opiera się na ustaleniu wartości efektywności badanej jednostki na 1. W przypadku modelu znajdującego najlepszą (minimalną) pozycję danej jednostki minimalizuje się sumę zmiennych binarnych odpowiadających jednostkom, które równocześnie osiągają efektywność większą od badanej jednostki. Analogicznie, w modelu znajdującym najgorszą pozycję w rankingu dla danej jednostki, suma zmiennych binarnych odpowiadająca jednostkom nie gorszym niż badana jednostka jest maksymalizowana.

Aby uzyskać rozkład pozycji w rankingu dla badanej jednostki wyznaczone zostały wartości indeksy akceptowalności dla rankingów efektywności (ang. Efficiency Rank Acceptability Indices (ERAI)) zdefiniowane jako udział wektorów wag, dla których badana jednostka osiąga daną pozycję w rankingu efektywności. Dla każdej jednostki suma wartości ERAI dla wszystkich pozycji jest równa 1. Oprócz rozkładu pozycji w rankingach, dla każdej jednostki wyznaczana jest również wartość oczekiwana pozycji w rankingu efektywności, jako średnia arytmetyczna pozycji uzyskanych we wszystkich próbkach.

## Porównania parami jednostek decyzyjnych.

Ostatnia perspektywa analizy rozważana w ramach niniejszej rozprawy skupia się na porównaniach parami jednostek decyzyjnych. W tym przypadku zdefiniowano dwie relacje preferencji pomiędzy jednostkami decyzyjnymi. Relacja możliwej preferencji ( $\succsim_E^P$ ) dla pary jednostek zachodzi wtedy, gdy istnieje choć jeden dopuszczalny wektor wag, dla którego pierwsza jednostka osiąga efektywność nie gorszą niż druga. Relacja koniecznej preferencji ( $\succsim_E^N$ ) zachodzi dla pary jednostek, gdy pierwsza z jednostek osiąga efektywność większą lub równą efektywności drugiej jednostki dla wszystkich dopuszczalnych wektorów wag.

Aby zweryfikować występowanie relacji możliwej preferencji dla danej pary jednostek decyzyjnych, zaproponowano model programowania liniowego, w którym maksymalizowana jest wartość efektywności pierwszej jednostki przy założeniu, że efektywność drugiej z nich jest równa 1. Jeśli otrzymana optymalna efektywność jest większa lub równa 1, wtedy pierwsza jednostka jest możliwie preferowana nad drugą. Taki sam model, po zmianie kierunku optymalizacji, pozwala na sprawdzenie czy dana jednostka jest koniecznie preferowana nad inną. Jeśli minimalna efektywność uzyskana w opisywanym modelu jest nie mniejsza niż 1, wtedy pierwsza jednostka z badanej pary jest koniecznie preferowana nad drugą.

Ponadto, dla pary jednostek decyzyjnych zdefiniowano indeks akceptowalności dla relacji przewyższania pod względem efektywności (ang. Pairwise Efficiency Outranking Index (PEOI)) jako liczbę dopuszczalnych wektorów wag, dla których pierwsza z badanych jednostek osiąga efektywność nie gorszą niż druga w stosunku do wszystkich wektorów wag.

## Metody badania odporności dla modelu addytywnego opartego na funkcjach wartości.

Opisane powyżej miary mogą zostać zastosowane, w analogiczny sposób, dla problemów, w których zastosowano model efektywności oparty na funkcjach wartości. Podobnie jak dla modelu ilorazowego, rozważone zostały trzy perspektywy analizy efektywności jednostek: wartości miary efektywności, pozycje w rankingach oraz porównania parami jednostek decyzyjnych.

W kontekście modelu opartego o funkcje wartości perspektywa wartości miary efektywności może uwzględniać zarówno bezwzględne wartości efektywności jak i odległość badanej jednostki od najlepszej. W niniejszej rozprawie rozważono obie te miary. Po pierwsze, wykorzystano oryginalne sformułowanie modelu VDEA do wyznaczenia najlepszej (minimalnej) odległości badanej jednostki od najlepszej. Następnie, zaproponowano model matematyczny pozwalający na wyznaczenie najgorszej możliwej odległości badanej jednostki od jednostki najlepszej.

Rozważając bezwzględne wartości efektywności w modelu opartym o funkcje wartości, zaproponowano metodę, która pozwala na określenie skrajnych wartości efektywności dla badanej jednostki. W tym przypadku optymalizowana jest miara efektywności z zapewnieniem zachowania zdefiniowanych ograniczeń na wagi nakładów i efektów.

Analiza stochastyczna dla modelu VDEA prowadzona jest w sposób analogiczny do tej prowadzonej dla modelu ilorazowego, z tą różnicą, że w modelu opartym na funkcjach wartości suma wszystkich wag, przypisanych do wejść i wyjść musi być równa 1. Po wy-

losowaniu próbek wag wyznaczana jest wartość efektywności dla wszystkich jednostek. Z uwagi na zastosowanie w rozważanym modelu cząstkowych funkcji wartości oraz normalizacji wag, osiągane wartości efektywności zawierają się zawsze w przedziale  $[0 - 1]$ . W opozycji do modelu ilorazowego, dodatkowa normalizacja nie jest potrzebna.

Bazując na otrzymanych wartościach efektywności, estymowane są indeksy akceptowalności (EAI, PEOI, ERAI) w sposób analogiczny jak dla modelu ilorazowego. Dodatkowo, w przypadku modelu VDEA, wyznaczany jest indeks akceptowalności dla przedziałów odległości do najlepszej jednostki w sposób analogiczny do wyznaczania indeksów EAI. Ponadto, możliwe jest również oszacowanie wartości oczekiwanej tej odległości dla każdej jednostki decyzyjnej.

### **Zależności między wynikami dokładnymi a indeksami akceptowalności.**

W rozprawie przedstawione zostały zależności pomiędzy wynikami otrzymanymi przy użyciu programowania liniowego oraz szacowanymi indeksami akceptowalności. Poniżej przedstawiono przykładowe z nich. Dla każdej jednostki  $DMU_o$ :

- jeżeli cały przedział  $b_i$  leży poza zakresem wyznaczonym przez skrajne wartości efektywności dla  $DMU_o$ , to  $EAI(DMU_o, b_i) = 0$ ;
- przedział wyznaczony przez skrajne wartości efektywności otrzymane przy pomocy próbkowania zawsze zawiera się w przedziale wyznaczonym przez rzeczywiste skrajne wartości efektywności;
- jeżeli dana jednostka jest koniecznie preferowana nad inną jednostkę to PEOI dla tej pary jednostek jest zawsze równe 1;
- suma wartości ERAI dla wszystkich pozycji z przedziału wyznaczonego przez skrajne pozycje musi być równa 1.

Relacje przeciwnie nie są prawdziwe ze względu na losowy charakter wyznaczanych indeksów akceptowalności. Na przykład, jeśli PEOI uzyskane dla pewnej pary jednostek decyzyjnych jest równe 1, nie oznacza, że preferencja dla tej pary występuje dla wszystkich wektorów wag. Oznacza to tylko tyle, że dla każdej wylosowanej próbki jedna z jednostek osiągała efektywność nie gorszą niż druga. Jednak istnieje możliwość, że opisana preferencja nie zachodzi dla pewnego wektora wag, który nie został wylosowany.

### **Wpływ przyrostowego definiowania ograniczeń wag na wyniki badania odporności.**

W rozprawie omówiony został także wpływ przyrostowej definicji ograniczeń wag na wyniki badania odporności. Rozważono sytuację, w której analiza odporności tego samego zbioru jednostek została przeprowadzona kilkakrotnie, za każdym razem rozszerzając ograniczenia na wagi. W rezultacie przestrzeń możliwych wektorów wag, w kolejnych iteracjach ulegała zawężeniu. W takim przypadku przedziały wyznaczone przez skrajne wartości efektywności, odległości do najlepszej jednostki oraz pozycje w rankingu efektywności zawężają się w kolejnych iteracjach. Wartości minimalne są, w kolejnych iteracjach, nierosnące, podczas gdy wartości maksymalne mogą tylko maleć (lub pozostać niezmiennione). Ponadto, relacja koniecznej preferencji, w kolejnych iteracjach, ulega

wzbogaceniu, tj. zbiór par jednostek, dla których ta relacja zachodzi w iteracji  $t$  jest nadzbiorem takiego zbioru dla iteracji  $t - 1$ . Odwrotną zależność można zauważyć dla relacji możliwych preferencji. W kolejnych iteracjach zbiór par jednostek, dla których zachodzi relacja możliwej preferencji jest coraz mniejszy.

## 2 Badanie odporności jednostek decyzyjnych dla problemów z nieprecyzyjnymi danymi

W rzeczywistych problemach zebranie precyzyjnych danych jest często niemożliwe lub bardzo kosztowne. Z tego powodu, w ramach niniejszej rozprawy, metody badania odporności zostały rozszerzone i zaadaptowane do problemów z nieprecyzyjnymi danymi. Rozważone zostały trzy typy niepewności: wartości wejść i wyjść zdefiniowane w formie przedziałów, nakłady oraz efekty zdefiniowane na skali porządkowej oraz, dla problemów z modelem efektywności opartym na funkcjach wartości, dopuszczalne zakresy cząstkowych funkcji wartości. Wszystkie powyższe typy niepewności zostały uwzględnione zarówno w metodach opartych o programowanie matematyczne, jak i analizie stochastycznej.

W metodach dokładnych poszczególne typy niedokładności zostały uwzględnione w opisany poniżej sposób.

**Przedziałowe wartości nakładów i efektów.** W problemach programowania matematycznego przedziałowe wartości wejść i wyjść zostały zastąpione wartościami dokładnymi reprezentującymi najbardziej lub najmniej korzystny scenariusz dla badanej jednostki w zależności od rozważanego typu wyników. Dla modeli identyfikujących najlepsze możliwe wyniki dla badanej jednostki (scenariusz optymistyczny) precyzyjne wartości wejść i wyjść dla badanej jednostki odpowiadają minimalnym wejściom i maksymalnym wyjściom z podanego przedziału. Dla pozostałych jednostek wartości dokładne równe są równym maksymalnym wartościom z danego przedziału dla wejść i minimalnym wartościom dla wyjść. Analogicznie, w przypadku modeli znajdujących najgorsze możliwe wartości dla danej jednostki, wartości dokładne reprezentują najmniej korzystny scenariusz, tj. największe nakłady i najmniejsze efekty, dla tej jednostki i najbardziej korzystny (najmniejsze nakłady i największe efekty) dla pozostałych jednostek.

**Czynniki zdefiniowane na skali porządkowej.** Dla czynników (nakładów lub efektów) zdefiniowanych na skali porządkowej znana jest jedynie kolejność jednostek na danym kryterium. W modelach matematycznych zapewnione zostało, że zdefiniowana kolejność zostaje zachowana. Aby uniknąć nieliniowości modelu, w modelu ilorazowym, wprowadzono do modelu dodatkowe zmienne reprezentujące iloczyn wagi danego czynnika porządkowego i jego wartości dla poszczególnych jednostek. Na tak zdefiniowanych zmiennych nałożono ograniczenia zapewniające ich monotoniczność zgodnie ze zdefiniowanym porządkiem. W modelu opartym na funkcjach wartości czynniki porządkowe uwzględnione zostały w podobny sposób, jednak w tym przypadku zmienna zastępcza nie reprezentuje iloczynu wagi i oceny jednostki, lecz iloczyn wagi danego czynnika i jego wartości cząstkowej funkcji. Dodatkowo, w modelu opartym o funkcje wartości, ograniczenia w modelu muszą uwzględniać różny kierunek monotoniczności dla nakładów i efektów oraz zapewniać, że wartość przypisana dla najgorszej jednostki jest dodatnia (większa od pewnej małej wartości  $\epsilon$ ). Dla najlepszej jednostki wartość przypisana do nowo utworzonej zmiennej nie może przekraczać wagi danego czynnika.



**Dopuszczalne zakresy cząstkowych funkcji wartości.** Dla modelu bazującego na funkcjach wartości rozważono również trzeci rodzaj niepewności: dopuszczalne zakresy cząstkowych funkcji wartości. Takie zakresy definiuje się za pomocą dwóch funkcji wartości reprezentujących górną i dolną granicę dopuszczalnego zakresu. Aby uwzględnić tego typu niepewność w modelach programowania matematycznego ponownie wprowadzono zmienne zastępcze, podobnie jak dla czynników porządkowych. Jeśli dany nakład lub efekt jest również zdefiniowany w formie przedziałów, w pierwszej kolejności wartości przedziałowe muszą zostać zastąpione precyzyjnymi w sposób opisany powyżej. Następnie, konieczne jest zapewnienie, że cząstkowa wartość dla każdej z jednostek mieści się w zdefiniowanym zakresie funkcji. Dodatkowo, wymuszony został monotoniczny kształt funkcji wartości, podobnie jak dla czynników porządkowych.

**Metody oparte na symulacji Monte Carlo.** Aby wyznaczyć indeksy akceptowalności dla metody DEA z nieprecyzyjnymi danymi, procedura próbkowania odbywa się w kilku etapach. W pierwszej kolejności uruchomiony zostaje algorytm Hit-And-Run, aby uzyskać określoną liczbę próbek wektorów wag, w taki sam sposób jak dla problemów z precyzyjnymi danymi. Kolejne etapy zależą od typu niepewności oraz modelu efektywności. W przypadku nakładów i efektów zdefiniowanych w formie przedziałów, niezależnie od modelu efektywności, generowane są próbki efektywności z przedziałów zdefiniowanych dla każdej z jednostek. Dla czynników porządkowym zastosowane zostało podejście SMAA-O. Bez utraty ogólności można założyć, że oceny jednostek dla czynników porządkowych zawarte są w przedziale  $[0, 1]$ . Z tego zakresu wylosowane zostaje  $K$  wartości ( $K$  – liczba jednostek). Następnie, wartości te zostają potraktowane jako precyzyjne oceny poszczególnych jednostek dla badanego czynnika, z uwzględnieniem podanej kolejności. W przypadku modelu opartego o funkcje wartości ze zdefiniowanym zakresem dopuszczalnych funkcji, w ostatnim kroku generowane są próbki cząstkowych wartości dla wszystkich jednostek. Mając dane precyzyjne oceny jednostek, wylosowane zostają wartości cząstkowych funkcji z przedziału pomiędzy górną a dolną funkcją ograniczającą dopuszczalny zakres. Dodatkowo, zapewnione zostaje, że cząstkowe wartości wylosowane w każdej próbkce zachowują monotoniczny porządek. Po wygenerowaniu próbek wag, ocen i wartości cząstkowych funkcji, wartość efektywności dla każdej jednostki obliczona zostaje zgodnie z wybranym modelem. Ostatecznie, wyznaczone zostają indeksy akceptowalności w oparciu o te wartości efektywności.

### 3 Badanie odporności dla problemów z hierarchiczną strukturą nakładów i efektów

W klasycznym podejściu, struktura nakładów i efektów rozważanych w metodzie DEA jest płaska. W niniejszej rozprawie rozważono również problemy, w których wejścia i wyjścia zorganizowane zostały w wielopoziomową, hierarchiczną strukturę. Takie podejście posiada kilka korzyści. Po pierwsze, istnieje możliwość łatwej modyfikacji i aktualizacji zbioru danych o nowe czynniki. Po drugie, taka struktura pozwala na dekompozycję problemów na mniejsze składniki, które są łatwiejsze do zarządzania, a wyniki bardziej precyzyjne. Po trzecie, w hierarchicznej strukturze istnieje możliwość modelowania interakcji nie tylko pomiędzy pojedynczymi czynnikami, ale także pomiędzy całymi kategoriami. Ograniczenia na wagi mogą zostać zdefiniowane na każdym poziomie hierarchii.

W ramach niniejszej rozprawy zaproponowano metody pozwalające na otrzymanie wyników badania odporności dla jednostek decyzyjnych, z użyciem modelu opartego na funkcjach wartości, dla każdej kategorii w hierarchii czynników. Ponadto, modele matematyczne pozwalające na wyznaczanie skrajnych odległości od najlepszej jednostki, pozycji w rankingach oraz weryfikacji występowania koniecznych i możliwych relacji preferencji zostały zaadaptowane tak, aby uwzględniać możliwość definicji ograniczeń na wagi na wszystkich poziomach hierarchii.

Dodatkowo, w rozprawie przedstawione zostały zależności pomiędzy odpornymi wynikami dla różnych kategorii. Poniżej przedstawiono przykładowe z nich:

- jeżeli dla wszystkich kategorii, będących bezpośrednimi dziećmi pewnej kategorii  $c$ , minimalna odległość do najlepszej jednostki jest zerowa, to dla kategorii  $c$  minimalna odległość do najlepszej jednostki również wynosi 0;
- Jeżeli najlepsza pozycja pewnej jednostki w rankingu efektywności dla wszystkich bezpośrednich podkategorii danej kategorii  $c$  jest pierwsza (lub ostatnia) to dla kategorii  $c$  najlepsza pozycja tej jednostki jest również pierwsza (lub ostatnia);
- Jeśli dla danej pary jednostek i kategorii  $c$  relacja koniecznej preferencji zachodzi w każdej podkategorii  $c$  to ta relacja musi zachodzić też w kategorii  $c$ .

W przypadku metod stochastycznych, estymacja indeksów akceptowalności odbywa się w sposób podobny do klasycznych problemów, jednak, wygenerowany wektor wag musi uwzględniać wagi wszystkich nakładów, efektów oraz kategorii na każdym poziomie rozważanej hierarchii. Dla każdej kategorii suma wag jej podkategorii musi być równa 1.

## **4 Metody badania odporności dla oceny efektywności z uwzględnieniem wielu scenariuszy analizy**

W niektórych przypadkach ten sam zbiór jednostek decyzyjnych oceniany jest kilkakrotnie, biorąc pod uwagę różne punkty widzenia (scenariusze). Przykładowo, w niniejszej rozprawie rozważono efektywność lekarzy osobno dla grup pacjentów zgłaszających różne dolegliwości. W takim przypadku analizę odporności można przeprowadzić na dwóch poziomach. Z jednej strony wyniki badania odporności można przeanalizować dla każdego scenariusza osobno. Z drugiej strony, w niniejszej rozprawie zaproponowano miary pozwalające na agregację wyników uzyskanych dla poszczególnych scenariuszy. Wprowadzone miary opierają się na wyznaczeniu koniecznych i możliwych wyników, odpowiadających wynikom uzyskanym dla, odpowiednio, wszystkich i co najmniej jednego ze scenariuszy. Przykładowo, bazując na relacjach koniecznej preferencji uzyskanych dla poszczególnych scenariuszy można zweryfikować występowanie relacji koniecznie koniecznej preferencji występującej, gdy dla danej pary jednostek relacja koniecznej referencji występuje we wszystkich scenariuszach. Analogicznie, relacja możliwie koniecznej preferencji występuje, gdy dla danej pary jednostek konieczna preferencja występuje dla co najmniej jednego scenariusza. Podobne miary można zdefiniować na podstawie możliwej preferencji. W przypadku przedziałów pozycji w rankingu efektywności można wyznaczyć możliwie konieczny przedział pozycji jako przecięcie przedziałów pozycji, uzyskanych dla poszczególnych scenariuszy. Podobnie, możliwie możliwy przedział pozycji zdefiniowany został

jako suma zakresów pozycji dla pojedynczych scenariuszy. Analogiczne miary można zaproponować dla skrajnych wartości efektywności czy odległości od najlepszej jednostki.

## 5 Wybór reprezentatywnego wektora wag w oparciu o wyniki badania odporności

W tradycyjnym podejściu metoda DEA wyznacza, dla każdej jednostki osobno, najbardziej korzystny, wektor wag. Zasadność porównywania jednostek w takim przypadku budzi wątpliwości z uwagi na brak wspólnej bazy do porównania. Z tego powodu, w niektórych zastosowaniach, korzystne jest znalezienie jednego, wspólnego, wektora wag dla wszystkich jednostek. W literaturze zaproponowano wiele takich metod.

W niniejszej rozprawie wprowadzona została nowa procedura wyznaczania wspólnego wektora wag w oparciu o wyniki badania odporności. Wynikiem zaproponowanej metody jest jeden, wspólny wektor wag, który możliwie najlepiej reprezentuje wszystkie dopuszczalne wektory wag. Konkretnie, jeśli wyniki badania odporności wskazują na wyraźną preferencję jednej jednostki nad inną, to różnica w wartościach miary efektywności dla tych jednostek powinna być możliwie największa. Z drugiej strony, dla par jednostek nieporównywalnych pod względem badanej miary, wartość efektywności po zastosowaniu uzyskanego wektora wag powinna być możliwie najmniejsza.

W tej rozprawie zaproponowano cztery różne relacje pozwalające na ocenę czy wyniki badania odporności wskazują na preferencję jednej jednostki nad drugą. Relacje te opierają się na, odpowiednio, oczekiwanej wartości efektywności, oczekiwanej pozycji w rankingu, relacji koniecznej preferencji oraz wartościach indeksu PEOI.

Oba, opisane powyżej, cele mogą zostać osiągnięte poprzez sekwencyjne rozwiązanie dwóch problemów programowania matematycznego reprezentujących poszczególne cele. W pierwszej kolejności maksymalizowana jest najmniejsza z różnic dla par, dla których zidentyfikowano preferencję. Następnie, minimalizowana jest największa z różnic efektywności dla nieporównywalnych jednostek (z zachowaniem maksymalnej różnicy uzyskanej w poprzednim etapie). Wektor wag, uzyskany w optymalnym rozwiązaniu drugiego z modeli najlepiej reprezentuje całe spektrum dopuszczalnych wektorów wag.

## 6 Wyznaczanie reduktów i konstruktów efektywności

Analiza odporności dla metody DEA została również rozszerzona poprzez wprowadzenie dwóch nowych pojęć, które ułatwiają generowanie wyjaśnień wyników metody:

- redukt efektywności, dla pewnej efektywnej jednostki decyzyjnej, jest minimalnym zbiorem nakładów i efektów, które sprawiają, że dana jednostka jest efektywna;
- konstrukt efektywności, dla pewnej nieefektywnej jednostki decyzyjnej, jest najmniejszym możliwym zbiorem jednostek, które powodują jej nieefektywność. Inaczej mówiąc, jest to minimalny zbiór jednostek, które musiałyby zostać usunięte ze zbioru danych, aby badana jednostka została efektywna.

Do wyznaczenia reduktów efektywności zaproponowano przyrostowy algorytm, w którym sprawdzana jest efektywność badanej jednostki poczynając od najmniejszych (jednoelementowych) podzbiorów wejść i wyjść. W przypadku, gdy dla danego zbioru wejść i

wyjsć jednostka jest efektywna, wtedy wszystkie nadzbiory tego zbioru nie są brane pod uwagę w dalszym przeszukiwaniu. Dla każdej jednostki efektywnej można wyznaczyć co najmniej jeden redukt efektywności.

Dla jednostek nieefektywnych można wyznaczyć konstrukty efektywności. W tym celu rozwiązuje się ten sam model matematyczny, który pozwala na znalezienie minimalnej pozycji w rankingu efektywności. Jednostki, dla których zmienne binarne w optymalnym rozwiązaniu tego modelu przyjmują wartość 1 tworzą jeden z konstruktów efektywności. Kolejne konstrukty można znaleźć dodając do rozważanego modelu ograniczenie nie pozwalające na ponowne znalezienie tego samego rozwiązania.

## 7 Eksperymentalne porównanie metod tworzących pełen ranking jednostek decyzyjnych

Jak wspomniano wcześniej, klasyczne podejście w metodzie DEA pozwala jedynie na wyodrębnienie podzbioru jednostek efektywnych, bez możliwości porównania ich efektywności. Na przestrzeni ostatnich 50 lat, w literaturze zaproponowano liczne rozszerzenia pozwalające na konstrukcję pełnego rankingu jednostek decyzyjnych. W tej rozprawie przeprowadzono przegląd takich metod oraz ich eksperymentalne porównanie. Rozważone zostało 15 procedur pozwalających na uzyskanie rankingu jednostek decyzyjnych, spośród których 4 bazują na wynikach badania odporności i zostały oryginalnie zaproponowane w niniejszej pracy.

Metody tworzenia rankingu jednostek decyzyjnych wprowadzone w ramach tej pracy zostały oparte na wynikach metod badania odporności. Pierwsze dwie z nich porządkują zestaw jednostek w oparciu o malejące wartości oczekiwane miary efektywności oraz rosnące wartości oczekiwane pozycji w rankingu efektywności.

Pozostałe dwie miary tworzą ranking jednostek wykorzystując macierz indeksów PEOI. Procedura NFS-PEOI czerpie inspirację z miary Net FLOW Score wykorzystywanej szeroko w MCDA m.in. w metodzie PROMETHEE. W tej metodzie, dla każdej jednostki, wyznaczany jest jej ogólny przepływ jako różnica przepływu dodatniego i ujemnego. Dodatni przepływ określa względną siłę danej jednostki (jej przewagę nad innymi jednostkami). Analogicznie, ujemny przepływ reprezentuje względną słabość badanej jednostki. Jednostki z najwyższą wartością ogólnego przepływu uznawane są za najlepsze.

Ostatnia metoda, wprowadzona w tej rozprawie, została nazwana PEV-PEOI i również opiera się na macierzy PEOI. W tej procedurze jednostki porządkowane są na podstawie wektora własnego odpowiadającego największej wartości własnej macierzy PEOI.

W niniejszej rozprawie wszystkie rozważone procedury porządkujące zostały opisane i zilustrowane na małym przykładzie. Następnie zidentyfikowano cechy poszczególnych metod i przedstawiono je w formie listy wad i zalet każdej z nich. Taka lista może pomóc w identyfikacji metody najbardziej pasującej do konkretnego problemu. Ostatecznie, rankingi wygenerowane przez poszczególne metody zostały porównane z wykorzystaniem pięciu różnych miar zgodności: współczynnika trafień (ang. Hit Ratio (HR)), znormalizowanego współczynnika trafień (ang. Normalized Hit Ratio (NHR)),  $\tau$  Kendalla, miary różnic rankingów (ang. Rank Difference Measure (RDM)) oraz miary zgodności rankingów (ang. Rank Acceptance Measure (RAM)).

Eksperymenty składały się z dwóch części. W pierwszym etapie procedury zostały

uruchomione dla 960 sztucznie wygenerowanych zbiorów danych z różną liczbą jednostek, nakładów i efektów. Następnie, uzyskane wyniki zostały porównane z tymi otrzymanymi dla 10 rzeczywistych zbiorów danych.

Wyniki uzyskane dla wszystkich pięciu miar były spójne, tj. identyfikowały te same pary metod jako generujących zbieżne rankingi. Spośród rozważanych procedur wyodrębniono trzy grupy metod, dla których generowane wyniki są podobne. Zidentyfikowano również trzy metody, które nie wpisują się w żadną z powyższych grup.

Z przeprowadzonej analizy wyraźnie wynika, że wybór metody wpływa, w istotny sposób, na otrzymany ranking. Wybierając procedurę generowania rankingu należy wziąć pod uwagę jej cechy oraz koncepcję, na której bazuje. Dodatkowo, korzystne wydaje się zestawienie wyników kilku metod, co pozwala na analizę problemu z różnych punktów widzenia.

## **8 Zastosowanie zaproponowanych metod do rzeczywistych problemów**

Metodologiczna część niniejszej rozprawy zilustrowana została licznymi zastosowaniami dla rzeczywistych problemów.

Metody badanie odporności dla modelu ilorazowego zostały zaaplikowane do oceny efektywności 11 lotnisk w Polsce. Przedstawiono i opisano wyniki badania odporności w trzech różnych sytuacjach. W pierwszej kolejności rozważono najprostszą sytuację, w której brano pod uwagę wszystkie lotniska ze zbioru bez zdefiniowanych ograniczeń na wagi. Następnie wprowadzono dodatkowe ograniczenia na wagi. Na koniec zidentyfikowano i usunięto ze zbioru danych jednostki będące przykładami odstającymi. Analiza trzech powyższych sytuacji pokazała użyteczność proponowanych metod, wpływ definicji ograniczeń wag na wyniki analizy oraz stosowalność metod badania odporności do wykrywania i usuwania jednostek będących przykładami odstającymi.

W kolejnej publikacji przedstawiono zastosowanie proponowanego podejścia do oceny niezawodności dostaw energii elektrycznej w 140 krajach. Problem został analizowany z kilku różnych perspektyw. Po pierwsze, zastosowano klasyczny ilorazowy model DEA do wskazania zbioru krajów efektywnych. W kolejnym etapie zastosowano zaproponowane algorytmy wyznaczania reduktów dla krajów efektywnych i konstruktów dla państw nieefektywnych. Ponadto, dla krajów nieefektywnych, wyznaczono jednostki będące referencjami (tzw. HCU) oraz poprawki konieczne do osiągnięcia efektywności. Następnie w pracy przedstawiono i omówiono wyniki metod badania odporności wprowadzonych w tej rozprawie. Na koniec wskazano i rozważono trzy potencjalne scenariusze rozwoju dla Japonii i Singapuru. Przeprowadzona analiza pokazała, że połączenie klasycznego modelu CCR z nowo zaproponowaną analizą odporności tworzy spójną całość i może zostać zastosowane w wielu dziedzinach.

Zastosowanie zaproponowanych metod z uwzględnieniem modelu opartego o funkcje wartości zostało zilustrowane na przykładzie analizy efektywności lekarzy z oddziału ratunkowego szpitala dziecięcego w Ottawie. Analiza została przeprowadzona osobno dla trzech grup pacjentów skarżących się na różne dolegliwości. W pracy przedstawiono zarówno szczegółowe wyniki badania odporności dla jednej z tych grup pacjentów jak i wyniki podejścia agregującego rezultaty uzyskane dla poszczególnych grup pacjentów. Dodatkowo, w ramach przeprowadzonej analizy, zastosowano algorytm pozwalający na

wybór wektora wag reprezentującego wyniki badania odporności.

Kolejne trzy zastosowania przedstawione w niniejszej rozprawie dotyczyły analizy efektywności chińskich portów, robotów przemysłowych oraz Specjalnych Stref Ekonomicznych w Polsce. We wszystkich tych problemach uwzględniono nieprecyzyjne dane. W przypadku oceny portów i robotów przemysłowych zastosowano model ilorazowy, podczas gry do oceny Specjalnych Stref Ekonomicznych wykorzystano model oparty na funkcjach wartości.

Użyteczność zaproponowanych metod w kontekście hierarchicznej struktury nakładów i efektów zilustrowano dla problemu oceny systemów ochrony zdrowia w polskich województwach. Analiza została przeprowadzona 4 różnych poziomach: poprawa stanu zdrowia mieszkańców, efektywna gospodarka finansowa, satysfakcja pacjentów oraz całościowy kształt systemu. W pracy pokazano sensowność analizy dla każdej z kategorii osobno oraz pokazano w jaki sposób agregacja takich wyników pozwala na identyfikację słabych i mocnych stron badanych jednostek.

## Podsumowanie

Badania przedstawione w niniejszej rozprawie dotyczyły metod analizy odporności dla Granicznej Analizy Danych uwzględniających cały zakres dopuszczalnych wektorów wag nakładów i efektów.

Zaproponowane rozwiązanie składa się z dwóch, wzajemnie uzupełniających się grup metod. Pierwsza z nich pozwala na uzyskanie dokładnych wyników z użyciem programowania matematycznego. Druga polega na zastosowaniu symulacji Monte Carlo do oszacowania indeksów akceptowalności reprezentujących rozkłady badanych miar. W pierwszej grupie metod wyniki, chociaż dokładne, pokazują tylko wartości skrajne, występujące rzadko. Metody stochastyczne dostarczają dodatkowej informacji o tym, jak wartości miar rozłożone są pomiędzy wartościami skrajnymi.

Efektywność jednostek decyzyjnych oceniona została z trzech różnych punktów widzenia. Pierwszy z nich dotyczy wartości miary efektywności i pozwala na wyznaczenie skrajnych wartości tej miary możliwych do osiągnięcia przez daną jednostkę, jej rozkładu i wartości oczekiwanej. Analogicznie, w perspektywie rankingów efektywności, zaproponowane podejście pozwala wyznaczyć skrajne pozycje poszczególnych jednostek, rozkład tych pozycji oraz ich wartości oczekiwane. Ostatnią rozważoną perspektywą były porównania parami jednostek. W tym przypadku zaproponowane modele pozwalają na ocenę występowania relacji koniecznej i możliwej preferencji dla par jednostek decyzyjnych przez prawdopodobieństwo wystąpienia preferencji jednej jednostki nad inną.

Rozważono dwa różne modele efektywności: ilorazowy, stosowany w klasycznym podejściu, oraz model addytywny oparty o funkcje wartości, w którym wartość efektywności wyznaczana jest jako ważona suma wartości cząstkowych funkcji zdefiniowanych dla poszczególnych nakładów i efektów. Ponadto, dla obu modeli efektywności wprowadzono rozszerzenia zaproponowanych metod uwzględniające problemy z nieprecyzyjnymi danymi. Rozważono trzy formy niepewności, tj. przedziały wartości nakładów i efektów, czynniki zdefiniowanych na skali porządkowej oraz dopuszczalne zakresy cząstkowych funkcji wartości. Modele matematyczne oraz metoda wyznaczania indeksów akceptowalności zostały zaadaptowane tak, aby uwzględniać wszystkie te typy niepewności.

Zaproponowane podejście pozwala również na analizę problemów, w których nakłady

i efekty pogrupowane są w kategorii tworząc wielopoziomą strukturę hierarchiczną. W tym przypadku, metody badania odporności pozwalają na uzyskanie wyników dla każdej kategorii osobno. Takie rezultaty dają pozwalają na analizę efektywności działania jednostek z różnych perspektyw i precyzyjniejsze wyznaczenie obszarów, w których poszczególne jednostki działają dobrze oraz takich, które wymagają usprawnień. Dodatkowo, w niniejszej rozprawie zaproponowano zestaw miar pozwalających na dwuetapową analizę odporności przypadku, gdy ten sam zestaw jednostek oceniany jest dla różnych scenariuszy.

Aby uprościć analizę wyników badania odporności, które mogą być trudne do interpretacji zaproponowano metodę pozwalającą na wyznaczenie jednego zestawu wag nakładów i efektów w taki sposób, aby uzyskane wartości efektywności możliwie najlepiej reprezentowały odporne wyniki. W tym celu wprowadzono dwuetapową procedurę. W pierwszym etapie maksymalizowana jest różnica pomiędzy wartościami miary efektywności dla par jednostek, dla których zaobserwowano wyraźną preferencję. W drugim etapie minimalizuje się różnice efektywności dla par jednostek nieporównywalnych pod względem rozważanej miary.

Ostatnie rozszerzenie, wprowadzone w ramach tej pracy, ułatwia decydom wyjaśnianie wyników metody DEA. W tym celu zdefiniowano pojęcia reduktu i konstrukt efektywności i zaproponowano algorytmy pozwalające wyznaczyć redukt efektywności dla jednostek efektywnych i konstrukt dla jednostek nieefektywnych.

W niniejszej rozprawie zaproponowano cztery nowe procedury do tworzenia pełnego rankingu jednostek decyzyjnych oparte o wyniki badania odporności. Powyższe metody zostały zestawione i porównane z innymi procedurami, opisanymi w literaturze. Wyniki analizy wyraźnie pokazały, że wybór metody rankingowej wpływa w znaczny sposób na uzyskane rezultaty.

Zaproponowane metody badania odporności dla obu modeli efektywności zostały zaimplementowane i udostępnione w ramach otwarto-źródłowego projektu *diviz*. Kod źródłowy stworzonych modułów napisany jest w języku R i dostępny pod adresem [https://github.com/alabijak/diviz\\_DEA/](https://github.com/alabijak/diviz_DEA/).

Niniejsza praca ma również charakter praktyczny. Wszystkie metody i rozszerzenia zostały zastosowane do rzeczywistych problemów dotyczących różnych dziedzin, m.in. ocena efektywności polskich lotnisk, niezawodności dostaw energii elektrycznej krajów oraz pracy lekarzy z oddziału ratunkowego szpitala dziecięcego w Ottawie.