

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
WYDZIAŁ AUTOMATYKI, ROBOTYKI I ELEKTROTECHNIKI  
INSTYTUT AUTOMATYKI I ROBOTYKI

Rozprawa doktorska

---

**Linearyzacja układów  
niedosterowanych i badanie dynamiki  
zerowej na przykładzie układów  
mechanicznych w  $\mathbb{R}^4$  i  $\mathbb{R}^6$**

---

mgr inż. Paweł Parulski

Promotor: dr hab. inż. Dariusz Pazderski

Poznań, 2023



## Streszczenie

W niniejszej rozprawie zaprezentowano wyniki teoretyczne, symulacyjne oraz eksperymentalne dotyczące analizy i sterowania wybranej klasy nieliniowych układów niedosterowanych. W dysertacji omówiono zagadnienie częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne planarnych manipulatorów posiadających  $n$  stopni swobody i pokazano oryginalne rozwiązania w zakresie syntezy algorytmów stabilizacji dla obiektów o dwóch i trzech członach, które rozszerzają wyniki znane z literatury przedmiotu.

Wykorzystując do opisu matematycznego modelu naturalne zmienne konfiguracyjne zaproponowano standardowy sterownik bazujący na częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne, będący punktem wyjścia do dalszej analizy. Następnie zaproponowano warianty algorytmów z użyciem transformacji zmiennych stanu oraz wejścia, które uwzględniały m.in. zastosowanie pseudoprędkości oraz formy normalne dynamiki. Dokonano porównania skuteczności metod opartych na zmiennych naturalnych i przekształconych dla zadania sterowania polegającego na stabilizacji robota w górnym niestabilnym położeniu równowagi. Efektywność proponowanych metod została zilustrowana wieloma wynikami badań symulacyjnych dla struktur dwu- i trójczłonowych oraz wynikami eksperymentalnymi uzyskanymi dla robota typu *Pendubot*. Symulacyjne porównanie efektywności polegało na wyznaczeniu dla każdej z rozpatrywanych strategii sterowania tzw. obszarów zbieżności, tj. zbiorów warunków początkowych, dla których analizowany algorytm osiąga założony cel sterowania. Ponadto analizowano wskaźniki opisujące jakość regulacji dla zastosowanych praw sterowania celem wzajemnego porównania rozpatrywanych strategii.

Badania eksperymentalne zostały wykonane na obiekcie rzeczywistym firmy *Quanser*. Przedstawiono opis stanowiska laboratoryjnego oraz podano szczegóły praktycznej implementacji rozważanych algorytmów sterowania dla robota typu *Pendubot*. Przedstawiono wyniki sterowania dla zadania stabilizacji w górnym niestabilnym punkcie równowagi.

Za pomocą symulacji numerycznych i badania obszarów zbieżności wykazano przewagę stosowania pseudoprędkości nad zmiennymi naturalnymi do opisu modelu robota oraz strategii sterowania. Badania eksperymentalne potwierdzają natomiast zarówno słuszność symulacji numerycznych jak i możliwość wykorzystania pseudoprędkości do opisu i sterowania wybranej, analizowanej grupy modeli rzeczywistych.

## Abstract

This dissertation presents theoretical, simulation and experimental results concerning an analysis and control of a selected class of non-linear underactuated systems. The problem of partial feedback linearization of  $n$  degrees of freedom planar manipulators, was demonstrated. New solutions in the field of stabilization algorithms synthesis for two- and three-link objects are shown, which extend the well-known literature results.

Using natural configuration variables to describe the mathematical model, a standard controller based on partial feedback linearization was proposed, which constituted the starting point for further analysis. Subsequently the transformation of inputs and state variables, taking into account pseudovelocities and the normal form, was discussed, together with a proposal for the construction of a dedicated controller. A comparison of the effectiveness of both methods based on natural and transformed variables was conducted, for the control task specified as stabilizing the robot in the upper unstable equilibrium position. The effectiveness of the proposed methods was illustrated by the results of simulation tests for two- and three-link structures and experimental results were obtained on the *Pendubot* robot. The simulation comparison of effectiveness was performed to determine the so-called areas of convergence, i.e. the sets of initial conditions for which the analyzed algorithm achieves the assumed control goal. In addition, the quality indicators for the applied control laws were analyzed in order to compare the aforementioned strategies.

Experimental studies were performed on a real test-bed by *Quanser* company. A description of the laboratory test-bed was presented and details of the practical implementation of the considered control algorithms for the *Pendubot* type robot were provided. The results of the problem of stabilization at the upper unstable equilibrium pose were presented.

The advantage of using pseudovelocities over natural variables to describe the robot model and control strategy was demonstrated using numerical simulations and examining areas of convergence. Experimental research confirms both the pertinence of numerical simulations and the possibility of using pseudovelocities to describe and control a selected group of analyzed real models.



---

## Spis treści

---

### ROZDZIAŁ 1:

#### WSTĘP

---

1.1 Przedstawienie problemu i motywacja . . . . .	19
---	----

### ROZDZIAŁ 2:

#### MECHANICZNE UKŁADY STEROWANIA

---

2.1 Ograniczenia różniczkowe . . . . .	25
2.2 Modelowanie $n$ -przegubowych układów mechanicznych . . . . .	26
2.2.1 Proste układy Lagranżianowe . . . . .	27
2.2.2 W pełni dosterowane układy mechaniczne . . . . .	28
2.2.3 Niedosterowane układy mechaniczne . . . . .	28
2.2.4 Manipulator płaski o 2 stopniach swobody . . . . .	28
2.2.5 Manipulator płaski o 3 stopniach swobody . . . . .	30
2.2.6 Inne przykłady układów niedosterowanych z wahadłem . . . . .	33

### ROZDZIAŁ 3:

#### WYBRANE METODY LINEARYZACJI

---

3.1 Pojęcia podstawowe . . . . .	35
3.2 Linearyzacja pełna . . . . .	39
3.2.1 Linearyzacja obiektów o jednym wejściu . . . . .	40
3.2.2 Linearyzacja obiektów o wielu wejściach . . . . .	44
3.3 Częściowa linearyzacja przez sprzężenie zwrotne . . . . .	46
3.3.1 Warunki częściowej linearyzacji . . . . .	46

### ROZDZIAŁ 4:

#### CZĘŚCIOWA LINEARYZACJA MANIPULATORÓW O $n$ DOF

---

4.1 Ogólna struktura układu sterowania . . . . .	49
4.2 Klasyczna częściowa linearyzacja manipulatorów $n$ -DOF . . . . .	51
4.2.1 Linearyzacja typu skojarzonego dla obiektów $n$ -DOF . . . . .	52
4.2.2 Linearyzacja typu nieskojarzonego dla obiektów $n$ -DOF . . . . .	52
4.2.3 Pomocnicze zadanie sterowania . . . . .	53
4.2.4 Sterowalność . . . . .	54
4.3 Częściowa linearyzacja dla manipulatora 2-DOF . . . . .	55
4.3.1 Propozycja sterowania . . . . .	55
4.3.2 Dynamika układu zamkniętego . . . . .	56
4.3.3 Częściowa linearyzacja dla robota typu Pendubot . . . . .	57
4.3.4 Pendubot – sterownik energetyczny . . . . .	62
4.3.5 Częściowa linearyzacja dla robota typu Acrobot . . . . .	63
4.3.6 Forma normalna . . . . .	69

4.4	Transformacje zmiennych stanu dla wahadła 2 DOF przy użyciu pseudoprędkości	71
4.4.1	Postać normalna i quazi-prędkości (PN-QP): Pendubot	71
4.4.2	Postać normalna i quazi-prędkości (PN-QP): Acrobot	77
4.4.3	Synteza sterownika $u_{stab}$ z wykorzystaniem PN-QP	81
4.4.4	Quazi-prędkości znormalizowane (QPZ)	82
4.4.5	Manipulator 2 DOF wyrażony w QPZ	83
4.4.6	Synteza sterownika $u_{stab}$ z wykorzystaniem QPZ	85
4.4.7	QPZ – sterownik energetyczny	86
4.5	Częściowa linearyzacja dla manipulatora 3-DOF	88
4.5.1	Propozycja sterowania	88
4.5.2	Dynamika układu zamkniętego	90
4.5.3	Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_1, \tau_2$	91
4.5.4	Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_1, \tau_3$	100
4.5.5	Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_2, \tau_3$	107
4.5.6	Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_1$	113
4.5.7	Dynamika zerowa – podsumowanie	117
4.6	Częściowa linearyzacja manipulatora 3-DOF z wykorzystaniem pseudoprędkości	118
4.6.1	Pomocnicze zadanie sterowania	118
4.6.2	QP: 2 sterowania – $\tau_1, \tau_2$	118
4.6.3	QP: 2 sterowania – $\tau_1, \tau_3$	121
4.6.4	QP: 2 sterowania – $\tau_2, \tau_3$	123
4.6.5	QP: 2 sterowania – $\tau_1$	125

## ROZDZIAŁ 5:

## WYNIKI BADAŃ SYMULACYJNYCH DLA 2 DOF

5.1	Opis procedury symulacji	128
5.1.1	Opis parametrów symulacji	130
5.2	Wyniki numeryczne symulacji	131
5.2.1	MCG: Acrobot	132
5.2.2	MCG: Pendubot	133
5.2.3	MCG+Energy: Pendubot	134
5.2.4	Spong: Acrobot	136
5.2.5	Spong: Pendubot	140
5.2.6	QPZ+LQR: Pendubot	144
5.2.7	QPZ+Energy: Pendubot	145
5.2.8	QPZ+LQR: Acrobot	147
5.2.9	PN-QP: Acrobot	148
5.2.10	PN-QP+LQR: Pendubot	150
5.2.11	PN-QP: Pendubot	151
5.3	Wnioski	153

## ROZDZIAŁ 6:

## WYNIKI BADAŃ SYMULACYJNYCH DLA 3 DOF

6.1	Opis procedury symulacji	159
6.2	Wyniki numeryczne symulacji	160
6.2.1	MCG: $\tau_1, \tau_2$	162
6.2.2	MCG: $\tau_1, \tau_3$	163
6.2.3	MCG: $\tau_2, \tau_3$	164
6.2.4	MCG: $\tau_1$	165
6.2.5	Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Collocated	166
6.2.6	Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Non-collocated	167

6.2.7	Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Collocated	168
6.2.8	Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Non-collocated	169
6.2.9	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Collocated	170
6.2.10	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Non-collocated	171
6.2.11	Spong: $\tau_1$ : Collocated	172
6.2.12	QP+LQR: $\tau_1, \tau_2$	173
6.2.13	QP+LQR: $\tau_1, \tau_3$	174
6.2.14	QP+LQR: $\tau_2, \tau_3$	175
6.2.15	QP+LQR: $\tau_1$	176
6.2.16	QP+Lin+h(x): $\tau_1, \tau_2$	177
6.2.17	QP+Lin+h(x): $\tau_1, \tau_3$	178
6.2.18	QP+Lin+h(x): $\tau_2, \tau_3$	179
6.2.19	QP+Lin+h(x): $\tau_1$	180
6.2.20	QP+Lin+h( $\tilde{x}$ )	181
6.3	Wnioski	182

## ROZDZIAŁ 7:

## BADANIA EKSPERYMENTALNE

7.1	Obiekt sterowania i stanowisko laboratoryjne	187
7.1.1	Stanowisko eksperymentalne – robot typu Pendubot	187
7.2	Wyniki eksperymentalne	190
7.2.1	MCG+LQR	191
7.2.2	MCG + Energy	193
7.2.3	Spong + LQR	194
7.2.4	QPZ	202
7.2.5	QPZ + Energy	205
7.2.6	PN-QP	207
7.3	Wnioski płynące z eksperymentu	213

## ROZDZIAŁ 8:

## PODSUMOWANIE

## ROZDZIAŁ ZAŁĄCZNIKI

A	PN-QP: całki $I_1$ i $I_2$	217
B	PN-QP: Pendubot	219
C	PN-QP: Acrobot	222
D	Dekompozycja macierzy mas	226
E	QPZ: wyprowadzenia modelu dynamiki	227
E.1	Przekształcenie I	227
E.2	Przekształcenie II	229
F	Linearyzacja klasyczna dla 3 DOF: pochodne Liego funkcji wyjścia	231
F.1	Sterowania $\tau_1, \tau_2$	231
F.2	Sterowania $\tau_1, \tau_3$	233
F.3	Sterowania $\tau_2, \tau_3$	234
G	Manipulator 3 DOF: wyznaczenie najmniejszej inwolutywnej dystrybucji	235
G.1	Sterowania $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0, \tau_3 = 0$	235
G.2	Sterowania $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = 0, \tau_3 \neq 0$	236
G.3	Sterowania $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0, \tau_3 \neq 0$	236
H	Linearyzacja klasyczna dla 3 DOF: $\tau_1, \tau_2$	238
I	QP: 3 DOF – $\tau_2, \tau_3$ , prostowanie pola wektorowego	239

---

J	QP: 3 DOF – $\tau_1, \tau_2$ . . . . .	241
K	QP: 3 DOF – $\tau_1, \tau_3$ . . . . .	242
L	QP: 3 DOF – $\tau_2, \tau_3$ . . . . .	243
M	QP: 3 DOF – $\tau_1$ . . . . .	244

---

ROZDZIAŁ BIBLIOGRAFIA

---

1.1 Schemat ilustrujący główne systemy i algorytmy sterowania rozważane w rozprawie . . . . .	22
2.1 Stanie na nodze jako przykład układu: a) dosterowanego, b) niedosterowanego . . . . .	26
2.2 Niedosterowanie na przykładzie ruchu zawierającego fazę lotu . . . . .	26
2.3 Ogólny schemat manipulatora 2 DOF . . . . .	28
2.4 Ogólny schemat manipulatora 3 DOF . . . . .	30
2.5 Schemat robota o 2 złączach obrotowych: a) Acrobot, b) Pendubot . . . . .	33
2.6 a) Cart-Pole, b) wahadło Furuta . . . . .	33
3.1 Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez transformację zmiennych stanu . . .	41
3.2 Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez transformację zmiennych stanu i sprzężenie zwrotne . . . . .	42
3.3 Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez czyste sprzężenie zwrotne . . . . .	46
4.1 Przykładowe przebiegi dla zadania typu <i>swing-up</i> . . . . .	50
4.2 Rozmieszczenie napędów dla analizowanego robota o 2 DOF . . . . .	55
4.3 Punkty równowagi dla manipulatora o 2 DOF, przy zerowym wymuszeniu . . . . .	55
4.4 Spong-Coll: Pendubot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	59
4.5 Spong-Coll: Pendubot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	60
4.6 Spong-NonColl: Pendubot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	61
4.7 Warunki istnienia funkcji Lyapunova . . . . .	64
4.8 Spong-Coll: Acrobot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	66
4.9 Spong-Coll: Acrobot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	66
4.10 Spong-Coll: Acrobot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1 - \ddot{q}_1$ . . . . .	67
4.11 Spong-NonColl: Acrobot: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	69
4.12 Postać unormowana . . . . .	70
4.13 Wyrażenie $L_g L_f^2 h$ podczas przykładowej próby . . . . .	76
4.14 Przebieg zależności $\theta_2(t)$ dla równania (4.191). Interpretacja równania (4.192) . . . . .	77
4.15 Ilustracja rozwiązania równania różniczkowego (4.213) dla $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . . . . .	80
4.16 Portret fazowy równania (4.213) dla $\alpha_k = (-\pi, \pi)$ . . . . .	80
4.17 Rozmieszczenie napędów dla analizowanego robota o 3 DOF . . . . .	88
4.18 Punkty równowagi dla robota o 3 złączach, przy zerowym wymuszeniu . . . . .	88
4.19 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	94
4.20 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	94
4.21 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - q_2$ . . . . .	98
4.22 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - q_2$ . . . . .	98
4.23 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	98
4.24 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	99
4.25 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	99
4.26 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	99
4.27 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	102
4.28 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	102
4.29 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - q_3$ . . . . .	105
4.30 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - q_3$ . . . . .	105
4.31 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	105
4.32 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	105

4.33	Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	105
4.34	Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	106
4.35	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	109
4.36	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_1 - \dot{q}_1$ . . . . .	109
4.37	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - q_3$ . . . . .	111
4.38	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - q_3$ . . . . .	112
4.39	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	112
4.40	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	112
4.41	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	112
4.42	Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	112
4.43	Spong: $\tau_1$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - q_3$ . . . . .	115
4.44	Spong: $\tau_1$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - q_3$ . . . . .	116
4.45	Spong: $\tau_1$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	116
4.46	Spong: $\tau_1$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_2 - \dot{q}_2$ . . . . .	116
4.47	Spong: $\tau_1$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	116
4.48	Spong: $\tau_1$ : Coll: Trajektorie układu na dynamice zerowej, zależność $q_3 - \dot{q}_3$ . . . . .	116
5.1	Schemat obrazujący zrównoleglenie obliczeń . . . . .	127
5.2	MCG: Acrobot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	132
5.3	MCG: Acrobot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	132
5.4	MCG: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	132
5.5	MCG: Pendubot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	133
5.6	MCG: Pendubot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	133
5.7	MCG: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	133
5.8	MCG+Energy: Pendubot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	134
5.9	MCG+Energy: Pendubot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	134
5.10	MCG+Energy: Pendubot, sim_1. Histogram: a) $k_P$ , b) $k_D$ , c) $k_E$ . . . . .	135
5.11	MCG+Energy: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	135
5.12	Spong - Coll: Acrobot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	136
5.13	Spong - Coll: Acrobot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	136
5.14	Spong - Coll: Acrobot, sim_1. Histogram: a) $\xi$ , b) $\omega_0$ . . . . .	137
5.15	Spong - Coll: Acrobot, sim_1. Histogram: a) $k_P$ , b) $k_D$ . . . . .	137
5.16	Spong - Coll: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	137
5.17	Spong - NonColl: Acrobot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	138
5.18	Spong - NonColl: Acrobot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	138
5.19	Spong - NonColl: Acrobot, sim_1. Histogram: a) $\xi$ , b) $\omega_0$ . . . . .	138
5.20	Spong - NonColl: Acrobot, sim_1. Histogram: a) $k_P$ , b) $k_D$ . . . . .	139
5.21	Spong - NonColl: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	139
5.22	Spong - Coll: Pendubot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	140
5.23	Spong - Coll: Pendubot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	140
5.24	Spong - Coll: Pendubot, sim_1. Histogram: a) $\xi$ , b) $\omega_0$ . . . . .	141
5.25	Spong - Coll: Pendubot, sim_1. Histogram: a) $k_P$ , b) $k_D$ . . . . .	141
5.26	Spong - Coll: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	141
5.27	Spong - NonColl: Pendubot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	142
5.28	Spong - NonColl: Pendubot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	142
5.29	Spong - NonColl: Pendubot, sim_1. Histogram: a) $\xi$ , b) $\omega_0$ . . . . .	142
5.30	Spong - NonColl: Pendubot, sim_1. Histogram: a) $k_P$ , b) $k_D$ . . . . .	143
5.31	Spong - Non-Collocated: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	143
5.32	QPZ+LQR: Pendubot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	144
5.33	QPZ+LQR: Pendubot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	144
5.34	QPZ+LQR: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	144
5.35	QPZ+Energy: Pendubot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	145
5.36	QPZ+Energy: Pendubot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	145
5.37	QPZ+Energy: Pendubot, sim_1. Histogram: a) $k_P$ , b) $k_D$ , c) $k_E$ . . . . .	146
5.38	QPZ+Energy: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	146
5.39	QPZ+LQR: Acrobot, sim_1. Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	147
5.40	QPZ+LQR: Acrobot, sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	147
5.41	QPZ+LQR: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3 . . . . .	147

5.42 PN-QP: Acrobot, <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	148
5.43 PN-QP: Acrobot, <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	148
5.44 PN-QP: Acrobot, <i>sim_1</i> . Histogram: a) $\alpha_k$ b) $k_1$ , c) $k_2$ . . . . .	149
5.45 PN-QP: Acrobot. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	149
5.46 PN-QP+LQR: Pendubot, <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności. Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	150
5.47 PN-QP+LQR: Pendubot, <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	150
5.48 PN-QP+LQR: Pendubot. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	150
5.49 PN-QP: Pendubot. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_1</i> , c) <i>sim_2</i> . . . . .	151
5.50 PN-QP: Pendubot, <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	151
5.51 PN-QP: Pendubot, <i>sim_1</i> . Histogramy wsk. energetycznych . . . . .	152
5.52 PN-QP: Pendubot. Obszar zbieżności: a) <i>sim_1a</i> , b) <i>sim_1b</i> , c) <i>sim_1c</i> . . . . .	152
5.53 PN-QP: Pendubot. Obszar zbieżności: a) <i>sim_b</i> , b) <i>sim_c</i> , c) <i>sim_d</i> . . . . .	152
6.1 Punkty równowagi dla robota o 3 złączach, przy zerowym wymuszeniu . . . . .	160
6.2 Rozmieszczenie napędów dla robota 3 DOF . . . . .	161
6.3 MCG: $\tau_1, \tau_2$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	162
6.4 MCG: $\tau_1, \tau_2$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	162
6.5 MCG: $\tau_1, \tau_2$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	162
6.6 MCG: $\tau_1, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	163
6.7 MCG: $\tau_1, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	163
6.8 MCG: $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	163
6.9 MCG: $\tau_2, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	164
6.10 MCG: $\tau_2, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	164
6.11 MCG: $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	164
6.12 MCG: $\tau_1$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	165
6.13 MCG: $\tau_1$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	165
6.14 MCG: $\tau_1$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	165
6.15 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Coll: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	166
6.16 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Coll: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	166
6.17 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Coll. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	166
6.18 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	167
6.19 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	167
6.20 Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	167
6.21 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Coll: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	168
6.22 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Coll: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	168
6.23 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Coll. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	168
6.24 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	169
6.25 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	169
6.26 Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	169
6.27 Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Coll: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	170
6.28 Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Coll: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	170
6.29 Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Coll. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	170
6.30 Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	171
6.31 Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	171
6.32 Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	171
6.33 Spong: $\tau_1$ : Coll: <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	172
6.34 Spong: $\tau_1$ : Coll: <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	172
6.35 Spong: $\tau_1$ : Coll. Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	172
6.36 QP: $\tau_1, \tau_2$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	173
6.37 QP: $\tau_1, \tau_2$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	173
6.38 QP: $\tau_1, \tau_2$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	173
6.39 QP+LQR: $\tau_1, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	174
6.40 QP+LQR: $\tau_1, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	174
6.41 QP+LQR: $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	174
6.42 QP+LQR: $\tau_2, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	175
6.43 QP+LQR: $\tau_2, \tau_3$ , <i>sim_1</i> . Minimalne wartości wskaźników energetycznych . . . . .	175
6.44 QP+LQR: $\tau_2, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) <i>sim_0</i> , b) <i>sim_2</i> , c) <i>sim_3</i> . . . . .	175
6.45 QP+LQR: $\tau_1$ , <i>sim_1</i> . Obszar zbieżności . . . . .	176



6.46	QP+LQR: $\tau_1$ , sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych	176
6.47	QP+LQR: $\tau_1$ . Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3	176
6.48	QP Lin: $\tau_1, \tau_2$ , sim_1. Obszar zbieżności	177
6.49	QP Lin: $\tau_1, \tau_2$ , sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych	177
6.50	QP Lin: $\tau_1, \tau_2$ . Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3	177
6.51	QP Lin: $\tau_1, \tau_3$ , sim_1. Obszar zbieżności	178
6.52	QP Lin: $\tau_1, \tau_3$ , sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych	178
6.53	QP Lin: $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3	178
6.54	QP Lin: $\tau_2, \tau_3$ , sim_1. Obszar zbieżności	179
6.55	QP Lin: $\tau_2, \tau_3$ , sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych	179
6.56	QP Lin: $\tau_2, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3	179
6.57	QP Lin: $\tau_1$ , sim_1. Obszar zbieżności	180
6.58	QP Lin: $\tau_1$ , sim_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych	180
6.59	QP Lin: $\tau_1$ . Obszar zbieżności: a) sim_0, b) sim_2, c) sim_3	180
6.60	QP Lin $h(\tilde{x})$ : Obszar zbieżności: a) $\{\tau_1, \tau_2\}$ , b) $\{\tau_1, \tau_3\}$ , c) $\{\tau_2, \tau_3\}$	181
7.1	Robot typu Pendubot	187
7.2	Oryginalny system firmy Quanser	188
7.3	Robot typu Pendubot – Stanowisko testowe	188
7.4	Quanser – Sterownik i wzmacniacz mocy	189
7.5	MCG+LQR: Obszar zbieżności	191
7.6	MCG+LQR, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	191
7.7	MCG+LQR, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	191
7.8	MCG+LQR, Przypadek 2: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	192
7.9	MCG+LQR, Przypadek 2: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	192
7.10	MCG+Energy, Przypadek 1: Obszar zbieżności	193
7.11	MCG+Energy, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	193
7.12	MCG+Energy, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	193
7.13	Spong - Coll: Obszar zbieżności	194
7.14	Spong - Coll, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	194
7.15	Spong - Coll, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	194
7.16	Spong - Coll, Przypadek 2: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	195
7.17	Spong - Coll, Przypadek 2: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	195
7.18	Spong - Coll, Przypadek 3: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	196
7.19	Spong - Coll, Przypadek 3: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	196
7.20	Spong - Coll, Przypadek 4: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	197
7.21	Spong - Coll, Przypadek 4: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	197
7.22	Spong - NonColl: Obszar zbieżności	198
7.23	Spong - NonColl, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	198
7.24	Spong - NonColl, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	198
7.25	Spong - NonColl, Przypadek 2: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	199
7.26	Spong - NonColl, Przypadek 2: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	199
7.27	Spong - NonColl, Przypadek 3: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	200
7.28	Spong - NonColl, Przypadek 3: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	200
7.29	Spong - NonColl, Przypadek 4: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	201
7.30	Spong - NonColl, Przypadek 4: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	201
7.31	QPZ+LQR: Obszar zbieżności	202
7.32	QPZ+LQR, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	202
7.33	QPZ+LQR, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	202
7.34	QPZ+LQR, Przypadek 2: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	203
7.35	QPZ+LQR, Przypadek 2: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	203
7.36	QPZ+LQR, Przypadek 3: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	204
7.37	QPZ+LQR, Przypadek 3: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	204
7.38	QPZ+Energy+LQR: Obszar zbieżności	205
7.39	QPZ+Energy+LQR, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	205
7.40	QPZ+Energy+LQR, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	205
7.41	QPZ+Energy+LQR, Przypadek 2: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp	206
7.42	QPZ+Energy+LQR, Przypadek 2: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp	206



7.43 PN-QP+LQR: Obszar zbieżności . . . . .	207
7.44 PN-QP+LQR, Przypadek 1: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp . . . . .	207
7.45 PN-QP+LQR, Przypadek 1: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp . . . . .	207
7.46 PN-QP+LQR, Przypadek 2: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp . . . . .	208
7.47 PN-QP+LQR, Przypadek 2: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp . . . . .	208
7.48 PN-QP+LQR, Przypadek 3: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp . . . . .	209
7.49 PN-QP+LQR, Przypadek 3: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp . . . . .	209
7.50 PN-QP+LQR, Przypadek 4: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp . . . . .	210
7.51 PN-QP+LQR, Przypadek 4: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp . . . . .	210
7.52 PN-QP: Obszar zbieżności . . . . .	211
7.53 PN-QP, Przypadek 5: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp . . . . .	211
7.54 PN-QP, Przypadek 5: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp . . . . .	211
7.55 PN-QP, Przypadek 6: Położenia kątowe: a) sym, b) eksp . . . . .	212
7.56 PN-QP, Przypadek 6: Sygnał wejściowy: a) sym, b) eksp . . . . .	212



---

## Spis tabel

---

5.1	Wykaz badanych algorytmów . . . . .	131
5.2	Parametry symulacji . . . . .	131
5.3	Wyniki symulacji: MCG: Acrobot . . . . .	132
5.4	Wyniki symulacji: MCG: Pendubot . . . . .	133
5.5	Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: MCG+Energy: Pendubot . . . . .	134
5.6	Wyniki symulacji: MCG+Energy: Pendubot . . . . .	134
5.7	Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach . . . . .	136
5.8	Wyniki symulacji: Spong: Collocated: Acrobot . . . . .	136
5.9	Wyniki symulacji: Spong: NonCollocated: Acrobot . . . . .	138
5.10	Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach . . . . .	140
5.11	Wyniki symulacji: Spong: Collocated: Pendubot . . . . .	140
5.12	Wyniki symulacji: Spong: Non-Collocated: Pendubot . . . . .	142
5.13	Wyniki symulacji: QPZ+LQR: Pendubot . . . . .	144
5.14	Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: QPZ+Energy: Pendubot . . . . .	145
5.15	Wyniki symulacji: QPZ+Energy – Pendubot . . . . .	145
5.16	QPZ+Energy – Pendubot – Uwagi do tabeli 5.15 . . . . .	145
5.17	Wyniki symulacji: QPZ+LQR: Acrobot . . . . .	147
5.18	Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: PN-QP: Acrobot . . . . .	148
5.19	Wyniki symulacji: PN-QP: Acrobot . . . . .	148
5.20	Wyniki symulacji: PN-QP+LQR: Pendubot . . . . .	150
5.21	Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: PN-QP: Pendubot . . . . .	151
5.22	Wyniki symulacji: PN-QP: Pendubot . . . . .	151
5.23	Porównanie algorytmów – Pendubot, dla przypadków <i>sim_1</i> . . . . .	154
5.24	Porównanie algorytmów – Acrobot, dla przypadków <i>sim_1</i> . . . . .	156
6.1	Wykaz badanych algorytmów 3 DOF . . . . .	161
6.2	Parametry symulacji robota 3 DOF . . . . .	161
6.3	Wyniki symulacji: MCG: $\tau_1, \tau_2$ . . . . .	162
6.4	Wyniki symulacji: MCG: $\tau_1, \tau_3$ . . . . .	163
6.5	Wyniki symulacji: MCG: $\tau_2, \tau_3$ . . . . .	164
6.6	Wyniki symulacji: MCG: $\tau_1$ . . . . .	165
6.7	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_1, \tau_2$ : Coll . . . . .	166
6.8	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_1, \tau_2$ : NonColl . . . . .	167
6.9	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_1, \tau_3$ : Coll . . . . .	168
6.10	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_1, \tau_3$ : NonColl . . . . .	169
6.11	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_2, \tau_3$ : Coll . . . . .	170
6.12	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_2, \tau_3$ : NonColl . . . . .	171
6.13	Wyniki symulacji: Spong: $\tau_1$ : Coll . . . . .	172
6.14	Wyniki symulacji: QP+LQR: $\tau_1, \tau_2$ . . . . .	173
6.15	Wyniki symulacji: QP+LQR: $\tau_1, \tau_3$ . . . . .	174
6.16	Wyniki symulacji: QP+LQR: $\tau_2, \tau_3$ . . . . .	175
6.17	Wyniki symulacji: QP+LQR: $\tau_1$ . . . . .	176
6.18	Wyniki symulacji: QP+Lin: $\tau_1, \tau_2$ . . . . .	177
6.19	Wyniki symulacji: QP+Lin: $\tau_1, \tau_3$ . . . . .	178
6.20	Wyniki symulacji: QP+Lin: $\tau_2, \tau_3$ . . . . .	179

6.21	Wyniki symulacji: QP+Lin: $\tau_1$	180
6.22	Wyniki symulacji: QP+Lin+h( $\tilde{x}$ )	181
6.23	Porównanie algorytmów – 3 DOF, dla przypadków <i>sim_1</i>	182
6.24	Porównanie algorytmów. Strategia sterowania: MCG+LQR	183
6.25	Porównanie algorytmów. Strategia sterowania: QP+LQR	183
6.26	Porównanie algorytmów. Strategia sterowania: Spong: Collocated	183
6.27	Porównanie algorytmów. Strategia sterowania: Spong: Non-Collocated	184
6.28	Porównanie algorytmów. Strategia sterowania: QP: Lin + $h(x)$	184
6.29	Porównanie algorytmów. Strategia sterowania: QP: Lin+h( $\tilde{x}$ )	184
7.1	Parametry robota typu Pendubot	188
7.2	Parametry jednostki bazowej Servo	189
7.3	MCG+LQR, Przypadek 1: Warunek początkowy	191
7.4	MCG+LQR, Przypadek 2: Warunek początkowy	192
7.5	MCG+Energy: Warunek początkowy	193
7.6	Spong - Coll: Warunek początkowy	194
7.7	Spong - Coll, Przypadek 2: Warunek początkowy	195
7.8	Spong - Coll, Przypadek 3: Warunek początkowy	196
7.9	Spong - Coll, Przypadek 4: Warunek początkowy	197
7.10	Spong - NonColl, Przypadek 1: Warunek początkowy	198
7.11	Spong - NonColl, Przypadek 2: Warunek początkowy	199
7.12	Spong - NonColl, Przypadek 3: Warunek początkowy	200
7.13	Spong - NonColl, Przypadek 4: Warunek początkowy	201
7.14	QPZ+LQR, Przypadek 1: Warunek początkowy	202
7.15	QPZ+LQR, Przypadek 2: Warunek początkowy	203
7.16	QPZ+LQR, Przypadek 3: Warunek początkowy	204
7.17	QPZ+Energy+LQR, Przypadek 1: Warunek początkowy	205
7.18	QPZ+Energy+LQR, Przypadek 2: Warunek początkowy	206
7.19	PN-QP+LQR, Przypadek 1: Warunek początkowy	207
7.20	PN-QP+LQR, Przypadek 2: Warunek początkowy	208
7.21	PN-QP+LQR, Przypadek 3: Warunek początkowy	209
7.22	PN-QP+LQR, Przypadek 4: Warunek początkowy	210
7.23	PN-QP, Przypadek 5: Warunek początkowy	211
7.24	PN-QP, Przypadek 6: Warunek początkowy	212

---

## Podziękowania

---

Szczególnie pragnę podziękować mojej rodzinie – mej żonie – Prof. dr hab. n. med. Ewelinie Szczepanek-Parulskiej oraz Rodzicom – że zapewniali mi spokój od trosk dnia codziennego. Dzieciom moim – Piotrowi, Aleksandrowi i Paulinie – za radość jaką wnoszą w każdy mój dzień – im też dedykuję tę pracę.

Promotorowi dr hab. inż. Dariuszowi Pazderskiemu – za pomoc merytoryczną i koleżeńską.

Śp. Profesorowi dr hab. inż. Krzysztofowi Kozłowskiemu – pierwszemu promotorowi – za umożliwienie przeżycia tej życiowej przygody, jak również za wsparcie okazywane mi przez lata pracy.

Profesorowi dr hab. inż. Witoldowi Respondekowi oraz dr hab. inż. Przemysławowi Hermanowi – za rozmowy i sugestie, które nadały kierunek moim pracom.

Ponadto pragnę podziękować moim kolegom, m.in. mgr inż. Patrykowi Bartkowiakowi, oraz mgr inż. Tomaszowi Jedwabnemu, za cenne wskazówki, pomoc i wsparcie przy realizacji pracy.

Kolegom dr inż. Wojciechowi Adamskiemu, dr inż. Tomaszowi Gawronowi, z którymi spędziłem lata na wspólnej walce z zagadnieniami bardziej i mniej naukowymi.



### Główne tezy pracy

- *Metody linearyzacji, w tym metody oparte na geometrii różniczkowej, stanowią istotne narzędzie do analizy dynamiki i syntezy algorytmów sterowania dla pewnej klasy niedosterowanych układów mechanicznych (niedosterowanych wahadeł).*
- *Zastosowanie przekształcenia zmiennych stanu i wejścia może zwiększyć obszar zbieżności w zadaniu stabilizacji pewnej klasy układów niedosterowanych w nietrywialnych konfiguracjach.*
- *Badanie stanów przejściowych i ocena jakości sterowania w całej przestrzeni stanu układów nieliniowych możliwa jest dzięki zastosowaniu wielkoskalowych obliczeń numerycznych.*
- *Możliwa jest implementacja metod wykorzystujących linearyzację oraz transformację zmiennych stanu dla rzeczywistych wahadeł wieloczłonowych, która zapewnia właściwości układu zamkniętego porównywalnych do tych uzyskanych na podstawie modeli numerycznych.*

### 1.1 Przedstawienie problemu i motywacja

W ciągu ostatnich trzech dekad obserwuje się znaczne zainteresowanie sterowaniem układów mechanicznych, na ruch których nałożone są pewne ograniczenia (więzy) nieholonomiczne, tj. ewolucja stanu tych układów spełnia niecałkowalne ograniczenia różniczkowe. W odróżnieniu od więzów holonomicznych, które opisują związki geometryczne zachodzące między zmiennymi konfiguracyjnymi, więzów nieholonomicznych nie można wyrazić w takiej postaci. Niecałkowalne więzy prędkości mogą być wynikiem idealnego toczenia się koła (bez poślizgu) lub zasady zachowania momentu pędu w układzie wieloczłonowym, takim jak np. ruch nurka lub gimnastyka podczas wykonywania ewolucji w powietrzu przy założeniu niewielkiej dyssypacji energii. Układy z niecałkowalnymi więzami prędkości określane są również mianem układów z niecałkowalną kinematyką lub z nieholonomicznymi ograniczeniami pierwszego rodzaju.

Ostatnie lata to również czas szczególnego zainteresowania systemami nieholonomicznymi z niecałkowalnymi ograniczeniami nałożonymi na przyspieszenia, zwanymi ograniczeniami nieholonomicznymi drugiego rodzaju. Źródła tych ograniczeń należy upatrywać w samej dynamice układu mechanicznego, którego pewne stopnie swobody nie są napędzane.

Istnieje wiele przykładów systemów nieholonomicznych, wśród których możemy wyróżnić kilka klas ze względu na:

- ograniczenie na brak poślizgu: obiekty ruchome o ostrych krawędziach ślizgające się po powierzchni (np. sanie), koła toczące się bez poślizgu [9], pojazdy kołowe oraz roboty mobilne [22, 65], ciągniki z przyczepami [54], itd.;

- zasadę zachowania momentu pędu: obiekty wielocłonowe swobodnie się unoszące (ang. *a free-floating body*), w tym manipulatory kosmiczne; roboty kroczące w fazie lotu [7, 89], itd.;
- ograniczenia na przyspieszenia w układach niedosterowanych: np. manipulatory ze złączami pasywnymi jak np. robot typu Acrobot [21], roboty kroczące [13], manipulatory z elastycznymi złączami [86], roboty z elastycznymi ogniwami [88], statki kosmiczne z deficytem napędów [42], pojazdy podwodne [34, 66], samoloty, układ typu wózek z wahadłem (ang. *cart-pole*) [59], siłownik przesuwno-obrotowy (ang. *TORA – the rotational translational actuator*) [56] oraz układy, które utraciły możliwość sterowania pewnymi złączami w wyniku awarii elementów wykonawczych.

Jak wynika z tego zestawienia, układy z ograniczeniami nieholonomicznymi drugiego rzędu charakteryzują się deficytem sterowania, tj. liczba ich stopni swobody jest większa niż liczba wejść sterujących. Z uwagi na tę cechę noszą one nazwę *układów niedosterowanych*.

Niedosterowanie jako cecha obiektu może wynikać m.in. z następujących przesłanek:

- naturalnej dynamiki i założonych właściwości danego systemu (np. samoloty, statki kosmiczne, helikoptery, pojazdy podwodne, roboty z elastycznymi ogniwami),
- zamierzonego działania projektanta dążącego do optymalizacji konstrukcji
- aspektów modelowania, poprzez wprowadzenie sztucznych ograniczeń pozwalających uprościć analizę dynamiki wysokiego rzędu [60],
- awarii któregoś z napędów.

Można powiedzieć, że niedosterowanie jest powszechną cechą, a układy mechaniczne o pełnym sterowaniu stanowią szczególny przypadek, gdy każdy element wykonawczy przeznaczony jest to sterowania oddzielnym stopniem swobody. Z przypadkiem takim mamy do czynienia w manipulatorach przemysłowych o sztywnej strukturze. Z kolei dla układów o mobilnej bazie, takich jak manipulatory mobilne i manipulatory kosmiczne oraz dla manipulatorów podatnych, niecałkowalne ograniczenia różniczkowe istotnie wpływają na dopuszczalne trajektorie ruchu [51, 90]. Co więcej, z punktu widzenia kosztów i optymalizacji konstrukcji mechanicznej wybór liczby niezależnych elementów wykonawczych może mieć istotne znaczenie. Konieczne jest tutaj uzyskanie kompromisu - z jednej strony większa liczba napędów poprawia właściwości użytkowe mechanizmu dzięki możliwości oddziaływania poprzez sterowanie na jego ruch w każdym możliwym kierunku w przestrzeni stanu, ale z drugiej prowadzi do wzrostu złożoności, wyższego kosztu, większego rozmiaru i większej masy urządzenia. Można też oczekiwać, że urządzenia niedosterowane mogą być wydajniejsze, prostsze i bardziej niezawodne niż ich w pełni dosterowane wersje.

Należy podkreślić, że zarysowany podział układów mechanicznych na te o pełnym stopniu sterowania i niedosterowane związany jest nie tylko z zagadnieniami konstrukcyjnymi, ale przede wszystkim wpływa na metodykę projektowania algorytmów planowania ruchu i sterowania ruchem. Ograniczenie liczby napędów sprawia, że sterowanie układami niedosterowanymi jest z reguły bardziej złożone niż dla ich w pełni dosterowanych odpowiedników [100]. Z tego powodu rozwój metod dedykowanych tej klasie obiektów jest istotnym zagadnieniem badawczym zarówno w teorii sterowania jak i robotyce.

Ze względu na różnorodność układów niedosterowanych i zazwyczaj nieliniową postać ich dynamiki trudno sformułować uniwersalne algorytmy, rozwiązujące podstawowe zadania sterowania. Z tego powodu kluczowy jest wybór klasy układów reprezentującej pewną grupę systemów mechanicznych. Obiekty z pozoru nieskomplikowane mechanicznie, takie jak działające w polu grawitacyjnym podwójne bądź potrójne wahadła uważane za jedne z najprostszych przykładów niedosterowanych układów mechanicznych, nadal zajmują ważne miejsce w robotyce oraz teorii sterowania układów nieliniowych. Można je postrzegać jako układy wzorcowe, będące interesującym tematem badań, dla których pojawiają się podstawowe problemy sterowania związane z deficytem sygnałów wejściowych względem liczby stopni swobody [14, 67, 85]. Ponadto metody używane w analizie tychże obiektów, jak i syntezy algorytmów ich sterowania, mogą być z powodzeniem stosowane dla bardziej skomplikowanych struktur, zarówno niedosterowanych jak i w pełni dosterowanych.



Manipulatory planarne o dwóch złączach obrotowych i jednym napędzie, znajdujące się w jednorodnym polu grawitacyjnym i zorientowane w taki sposób, że osie obrotu są ortogonalne do wektora grawitacji, określane inaczej mianem *Acrobot* lub *Pendubot* (w zależności od umiejscowienia napędu), stanowią przedmiot zainteresowania autora w niniejszej dysertacji. Układy te opisane są na dwuwymiarowej przestrzeni konfiguracji, czyli dwuwymiarowym torusie  $\mathbb{T}^2$  i czterowymiarowej przestrzeni stanu, którą lokalnie można utożsamiać z przestrzenią Euklidesową  $\mathbb{R}^4$ . Wnioski wyciągnięte z badania tych obiektów posłużyły do analizy manipulatorów o trzech złączach, których przestrzeń konfiguracji opisana jest na trójwymiarowym torusie  $\mathbb{T}^3$ , a zatem ich przestrzeń stanu lokalnie można traktować jako podzbiór  $\mathbb{R}^6$ . Wskazano na podobieństwa wspólne wahadeł klasy  $\mathbb{R}^4$  i  $\mathbb{R}^6$ , natomiast gdy dołożenie dodatkowego złącza znacząco zmieniało charakter rozważań, wskazano na dzielące te mechanizmy różnice.

Wspólną cechą rozważanych struktur jest sterowalność liniowej aproksymacji ich dynamiki w punktach równowagi w świetle warunków podanych przez Kalmana. Jest to podstawowa właściwość, uzyskana dzięki obecności dryfu wprowadzanego przez grawitację, w obecności której działają te układy. Warunkuje ona możliwość stosowania metod liniowych w zadaniu sterowania mimo silnie nieliniowego charakteru obiektów. W tym kontekście można odwołać się zarówno do klasycznej aproksymacji taylorowskiej a także technik linearyzacji układów z użyciem przekształcenia stanu i wejścia [37]. W tym ostatnim przypadku pełna linearyzacja nie jest możliwa.

Zastosowaniu szeroko pojętych metod wywodzących się z linearyzacji poświęcone są badania autora tej rozprawy. Wśród celów szczegółowych pracy można wskazać:

- zaproponowanie różnych wariantów algorytmów stabilizacji niedosterowanych wahadeł dwu i trójczłonowych uwzględniających przekształcenie stanu i wejścia
- szczegółowe porównanie metod stabilizacji z uwzględnieniem szerokiego zbioru warunków początkowych z użyciem metod symulacyjnych,
- sprawdzenie warunków stosowalności tych algorytmów, dla takich kryteriów jak np.
  - efekt energetyczny – np. wydatkowane momenty/napięcie na silnikach
  - metody implementacji – obliczeniowość, czasochłonność algorytmów
- przeprowadzenie weryfikacji eksperymentalnej algorytmów.

Analiza literatury przedmiotu może sugerować, że problematyka sterowania klasą obiektów rozważanych w tej pracy jest już dobrze zbadana. Okazuje się jednak, że według najlepszej wiedzy autora, jest niewiele publikacji poświęconych stabilizacji struktur mechanicznych, zarówno o dwóch złączach typu Acrobot i Pendubot, oraz analogicznych struktur trzyzłączowych, w których rzetelnie porównuje się właściwości różnych technik sterowania. Ponadto często nie podaje się precyzyjnie informacji o użytym modelu dynamiki lub używa się modeli niemających prawidłowej interpretacji fizycznej (np. spotyka się założenie o wartości przyspieszenia ziemskiego  $g = 1 \frac{m}{s^2}$ , długości wszystkich ogniw równej 1 m, itp.). W wielu publikacjach uwzględnia się parametry pierwotnie podane przez Sponga, które niekoniecznie odzwierciedlają właściwości systemów rzeczywistych. Wydaje się, że w obszarze dyscypliny inżynierijno-technicznej uwzględnienie fizycznych cech obiektów jest istotnym zagadnieniem, zwłaszcza w kontekście zastosowań wyników badań podstawowych. Z tego powodu w tej pracy weryfikacja symulacyjna, badania stabilności lub ocena obszaru zbieżności algorytmu została przeprowadzona dla modelu komercyjnie dostępnego systemu laboratoryjnego. Pozwoliło to również uzyskać weryfikację eksperymentalną, która odpowiadała warunkom przyjętym w symulacjach.

Innym celem autora było pokazanie na konkretnych przykładach pewnych ograniczeń dotyczących rozpatrywanych metod sterowania, które to z reguły nie są rozważane w dotychczas opublikowanych pracach.

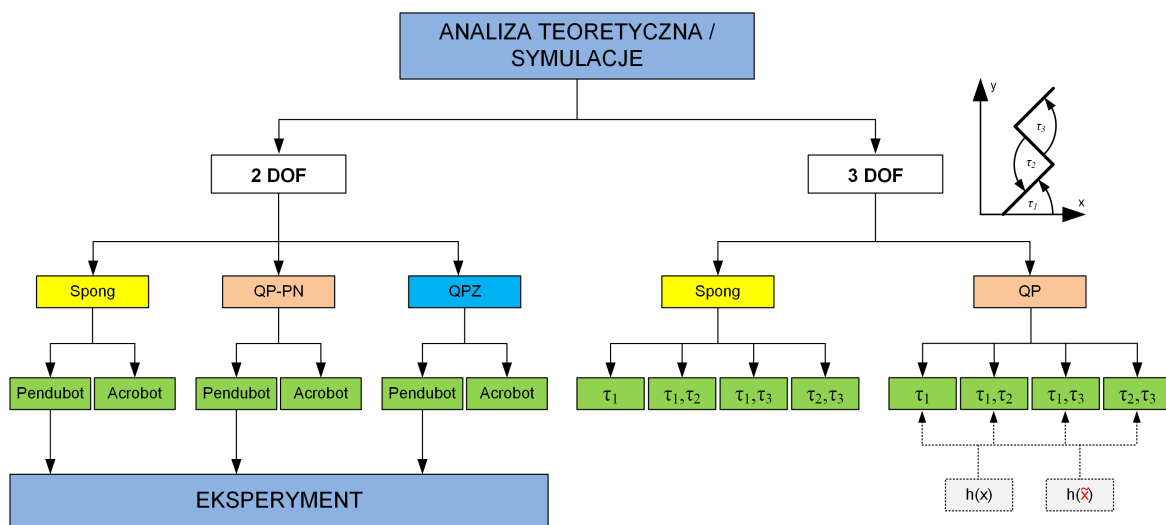
Badaniu podlegał także wpływ transformacji zmiennych stanu oraz transformacji wejścia, ze względu na zastosowanie w opisie dynamiki robota *pseudoprędkości* (lub zamiennie *quasi-prędkości*), które w mechanice analitycznej rozumiane są jako liniowe kombinacje prędkości uogólnionych ze współczynnikami będącymi funkcjami współrzędnych uogólnionych [30, 53]. Prace [33, 46] stanowiły jedną z inspiracji do podjęcia badań, które przedstawia niniejsza rozprawa dok-

torska. Na podstawie rozważań teoretycznych, badań symulacyjnych oraz częściowo badań eksperymentalnych, autor objął za cel wykazanie lepszych właściwości algorytmów sterowania opartych o zastosowanie transformacji zmiennych stanu z wykorzystaniem pseudoprędkości.

Istotną część pracy poświęcono zagadnieniu praktycznej implementacji algorytmu sterowania robota typu *Pendubot*. Przedstawione zostały wyniki badań eksperymentalnych obejmujące zadanie sterowania do punktu, przy wykorzystaniu zarówno zmiennych „naturalnych” jak i tych uwzględniających pseudoprędkości.

## ZAKRES PRAC

Wyniki autora tej rozprawy zostały uzyskane dla wielu wariantów algorytmów sterowania, które oparto na metodach lineryzacji – schematycznie główne ścieżki badań zaznaczono na rys. 1.1.



Rysunek 1.1: Schemat ilustrujący główne systemy i algorytmy sterowania rozważane w rozprawie

Dokonując podziału zagadnień ze względu na umiejscowienie napędów, w grupie robotów o dwóch złączach rozważano *Acrobota* oraz *Pendubota*. W grupie robotów o trzech złączach, analizowane było umiejscowienie napędów w złączu pierwszym, w pierwszym i drugim, następnie pierwszym i trzecim oraz drugim i trzecim. Pojedyncze napędy w drugim bądź trzecim złączu nie były rozważane, ze względu na bardzo dużą trudność stabilizacji i nikłą przydatność praktyczną.

Ze względu na rozważane strategie sterowania możemy wyróżnić dwie zasadnicze grupy algorytmów, określane przez autora mianem algorytmów opartych na „klasycznych” zmiennych stanu oraz na zmiennych zawierających pseudoprędkości.

Wśród algorytmów z „klasycznymi” zmiennymi punkt odniesienia stanowią algorytmy oparte o formalizm Sponga [84]. Ze względu na ich powszechność i częstość występowania w literaturze autor uznał to podejście za referencyjne względem innych podlegających analizie.

W polu zainteresowania autora znalazła się również grupa algorytmów, które wykorzystują transformację zmiennych stanu oraz wejścia z użyciem pseudoprędkości. Opisane są one na schemacie 1.1 symbolami *QP* (*Quasi-Prędkości*), *QP-PN* (*Quasi-Prędkości, Postać Normalna*) oraz *QPZ* (*Quasi-Prędkości Znormalizowane*) i bazują na formalizmie zaproponowanym w pracach [46] (*QP, QP-PN*) oraz pracach [76, 33] (*QPZ*). Prace dotyczące robota z uwzględnieniem algorytmu *QP* obejmują propozycję sterowania opartą zarówno o funkcje wyjścia zależne od zmiennych stanu  $h(x)$ , jak również o funkcje wyjścia, w których występują pseudoprędkości  $h(\tilde{x})$ .

Szczególną uwagę poświęcono mechanizmowi typu *Pendubot*. Dla tego przypadku (jak wskazuje schemat 1.1) wykonano próby eksperymentalne.

Przyjęto, że model matematyczny dynamiki rozpatrywanych obiektów powinien być możliwie nieskomplikowany. Autor ma świadomość występowania zarówno parametrycznych jak i struktu-

ralnych niepewności modelu, niemniej względna jego prostota ma odpowiadać ogólnym formułom zawartym w szeregu prac dotyczących sterowania układami o dwóch lub trzech złączach, jak również ważna jest ze względu na wykorzystanie go w syntezie układu sterowania.

Celem poszerzenia obszarów zbieżności zastosowano podejście hybrydowe. Polega ono na uzupełnieniu danego algorytmu o sterownik stabilizujący w otoczeniu punktu równowagi, tj. pozycji zadanej.

Spośród analizowanych w pracy strategii sterowania w kontekście stabilizacji robota w otoczeniu punktu równowagi interesujące cechy przejawiają dwa nowe podejścia wywodzące się z geometrii różniczkowej. Pierwsze z nich dotyczy robota typu *Acrobot* oraz transformacji zmiennych przy użyciu pseudoprędkości, wg koncepcji zaproponowanej w pracy [46]. Cechą charakterystyczną tego przypadku jest brak konieczności stosowania dodatkowego sterownika stabilizującego w otoczeniu equilibrium, z racji asymptotycznie stabilnej dynamiki zerowej.

Drugi przypadek również dotyczy stosowania pseudoprędkości oraz formy normalnej, tyle że dla robota typu *Pendubot*. Dla tej metody istnieją jednak ograniczenia stosowania podejścia częściowej linearyzacji z uwagi na obecność punktów osobliwych co nie pozwala bezpośrednio uzyskać stabilizację w punkcie zadanym [63].

Główne oryginalne wyniki w tej pracy zostały uzyskane dla metod sterowania poszerzających podstawowe propozycje podane przez *Sponga* i dotyczą algorytmów opartych o algorytmy *QP*, które do tej pory nie posiadały żadnej weryfikacji na drodze symulacji czy eksperymentu.

W przypadku strategii *Sponga* rozważania autora wykraczają poza te dotychczas analizowane w literaturze. Przedstawione w pracy badania stanowią próbę egzemplifikacji tej metody dla szerokiego spektrum warunków, a nie są odtwórczym jednym wybranym przypadkiem, powielanym w literaturze.

Niniejsza dysertacja stanowi autorskie, spójne i możliwie obiektywne spojrzenie na kwestię sterowania dla analizowanych klas układów nieliniowych wykorzystujących metody linearyzacji, w tym metody oparte na geometrii różniczkowej. Autorowi nie są znane tak obszerne prace dotyczące rozważanych strategii sterowania wraz z ich symulacyjnym oraz eksperymentalnym porównaniem.

## UKŁAD PRACY

Poprzedzony wstępem stanowiącym rozdział pierwszy, **rozdział 2** podejmuje zagadnienie modelowania kinematyki i dynamiki manipulatorów planarnych o dwóch i trzech złączach, wraz z przedstawieniem dynamiki obiektów o zbliżonym charakterze.

**Rozdział 3** zawiera definicję pojęć podstawowych z punktu widzenia procesu linearyzacji układów nieliniowych.

W **rozdziale 4** przedstawiono zagadnienie częściowej linearyzacji manipulatorów o  $n$  stopniach swobody, wraz z uszczegółowieniem dla obiektów o dwóch i trzech członach. Zaproponowano standardowy sterownik bazujący na częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne, będący punktem wyjścia do dalszej analizy. W kolejnych częściach rozdziału przedstawiono sposób transformacji zmiennych stanu oraz wejścia uwzględniający pseudoprędkości, wraz z propozycją konstrukcji sterownika na niej bazującym.

**Rozdział 5** oraz **rozdział 6** zawierają wyniki symulacji numerycznych, które ilustrują rozwiązania zawarte w rozdziale 4. Dokonano ponadto porównania zastosowanych praw sterowania.

W **rozdziale 7** przedstawiono opis stanowiska laboratoryjnego oraz podano szczegóły praktycznej implementacji rozważanych algorytmów sterowania dla robota typu *Pendubot*. Przedstawiono wyniki sterowania dla zadania stabilizacji w górnym niestabilnym punkcie równowagi.

**Rozdział 8** stanowi zwięzłe podsumowanie pracy.



## ROZDZIAŁ 2

---

### Mechaniczne układy sterowania

---

#### 2.1 Ograniczenia różniczkowe

Układy mechaniczne można podzielić ze względu na rodzaj nałożonych na nie ograniczeń różniczkowych.

Ograniczenie różniczkowe jest holonomiczne jeśli jest całkowalne i nieholonomiczne jeśli jest niecałkowalne [48]. W układach mechanicznych można wyróżnić dwa typy ograniczeń nieholonomicznych – pierwszego i drugiego rzędu.

W przypadku ograniczeń pierwszego rzędu (ze względu na prędkości) w układzie kinematycznym występuje niedobór prędkościowych sygnałów wejściowych względem liczby zmiennych konfiguracyjnych, natomiast na poziomie dynamiki liczba sygnałów wejściowych jest równa liczbie niezależnych sygnałów prędkościowych.

Dla ograniczeń drugiego rzędu (ze względu na przyspieszenie), na poziomie dynamiki liczba sygnałów wejściowych jest mniejsza od liczby niezależnych sygnałów prędkościowych. Rozpatrywane w pracy standardowe dwu-złączowe planarne struktury manipulatorów znane jako Acrobot i Pendubot można postrzegać jako przykład drugiej grupy układów. Są to zatem układy z ograniczeniami nieholonomicznymi drugiego rzędu, dla których liczba napędów jest mniejsza od rozmiaru przestrzeni konfiguracyjnej, czasem zwane w skrócie mianem *układów z deficytem napędów*. Inna definicja przedstawiona np. w [18] mówi wprost, że niedosterowane układy mechaniczne są układami, które mają mniej wejść sterujących niż zmiennych konfiguracyjnych.

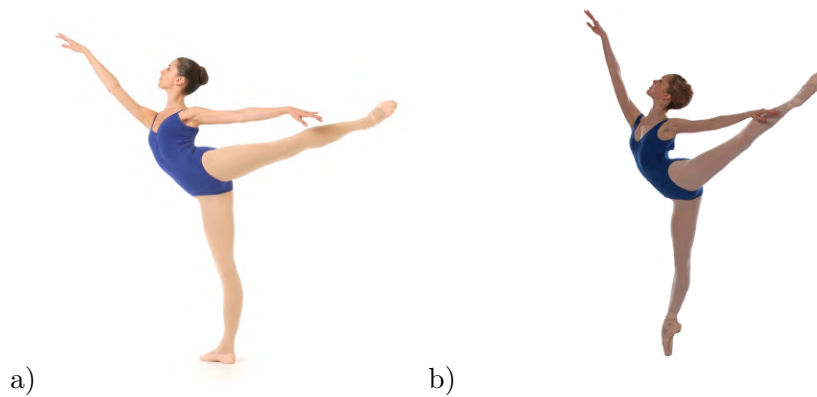
*W dalszej części pracy pod pojęciem układów niedosterowanych będziemy rozumieć układy posiadające ograniczenia nieholonomiczne drugiego rodzaju.*

Rozszerzając przykłady zawarte w rozdziale 1.1 rozważmy zjawisko niedosterowania z punktu widzenia organizmów żywych. Niedosterowanie jest w pewnym sensie związane ze zwinnością lub sprawnością tych organizmów. Dla przykładu, stanie na jednej nodze płaską stopą (rys.2.1a) nie jest traktowane jako szczególnie wymagające, podczas gdy stanie na głowie, lub na pointach (*sur les pointes*) w balecie (rys.2.1b) wymaga wielkiej wprawy.

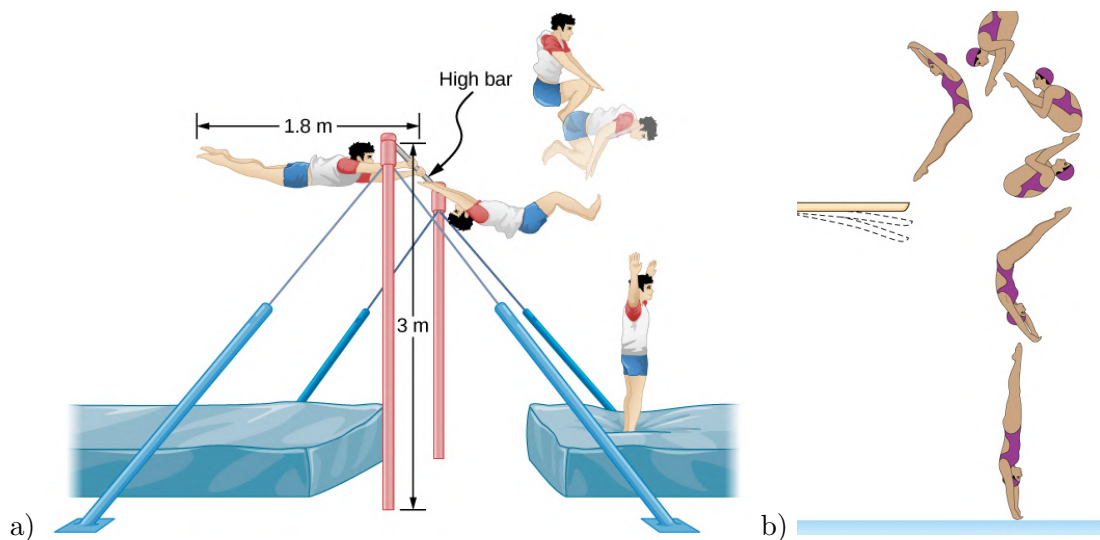
W pierwszym przypadku, stopa nie obraca się względem podłoża, a zatem punkt obrotu znajduje się w kostce, która, podobnie jak pozostałe stawy, jest napędzana. W konsekwencji normalny proces stania człowieka można rozpatrywać jako układ w pełni napędzany. W drugim przypadku, punkt kontaktu pomiędzy ciałem a podłożem rozpatrywany jest jako złącze obrotowe bez napędu. W tej sytuacji mamy do czynienia z układem niedosterowanym. Dla takich przykładów typowym zadaniem sterowania będzie utrzymanie pozycji lub wykonanie ruchu, bez utraty równowagi.

Ruch zawierający fazę lotu (balistyczną) zwykle również uważany jest za skomplikowany i wymagający wprawy. Przykładami jest odczepienie się skoczek od poprzeczki (rys. 2.2a) lub skoki do wody z platformy (rys. 2.2b).

W takim przypadku niedosterowanie objawia się poprzez brak kontaktu z podłożem. Faza bali-



Rysunek 2.1: Stanie na nodze jako przykład układu: a) dostereowanego, b) niedostereowanego [16].



Rysunek 2.2: Niedostereowanie na przykładzie ruchu zawierającego fazę lotu: a) odcięcie się skoczka od poprzeczki, b) skok do wody [55]

styczna lotu zachodzi w stosunkowo krótkim przedziale, podczas gdy faza odzyskania kontaktu z podłożem (np. z ziemią, matą, wodą...) jest celem całego manewru [28].

Analizowane w pracy niedostereowane obiekty dwu- i trój-złączowe, mimo swojej względnie prostej struktury mechanicznej, są wymagające pod względem sterowania i wciąż stanowią interesujący temat badawczy. Ponadto, metody używane do ich analizy jak i syntezy algorytmów sterowania mogą z powodzeniem być wykorzystane dla bardziej skomplikowanych struktur, zarówno w pełni dostereowanych, jak i z deficytem napędów.

## 2.2 Modelowanie $n$ -przegubowych układów mechanicznych

Modelowanie układów mechanicznych w robotyce ma duże znaczenie zarówno od strony badawczej jak i praktycznej. Pozwala bowiem na sprawdzenie algorytmów sterowania bez konieczności budowania nowej maszyny i bez ryzyka jej uszkodzenia. Trzeba jednak pamiętać, że nawet najbardziej dokładny model nie zastąpi rzeczywistego układu i nie uwzględni wszystkich działających na niego zjawisk fizycznych. Za zapewnienie odpowiedniego stopnia odporności na pominięte bądź niemodelowane zjawiska i niepewność parametryczną odpowiedzialne są natomiast odpowiednio dobrane do rozpatrywanego zadania algorytmy sterowania.

W tym rozdziale zostanie przedstawiony krótki wstęp do modelowania kinematyki i dynamiki robotów manipulacyjnych. W modelowaniu warto rozważyć aspekty złożoności modelu i celowości uwzględnienia zjawisk niedominujących. W celu uproszczenia zapisów matematycznych jak i uproszczenia rozpatrywanych zjawisk, analiza zostanie przeprowadzona w dwóch wymiarach na płaszczyźnie  $x - y$  [80].

### 2.2.1 Proste układy Lagranżianowe

Proste układy Lagranżianowe (*ang. simple mechanical systems*) są układami dla których ich Lagranżian dany jest jako różnica pomiędzy energią kinetyczną a energią potencjalną

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q)$$

gdzie  $q \in Q$  oznacza wektor konfiguracyjny należący do  $n$ -wymiarowej rozmierności konfiguracji  $Q$ ,  $M(q)$  jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą mas,  $K$  jest energią kinetyczną, zaś  $V$  energią potencjalną. Niech  $f_i(q) : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, m$  będą  $m$  liniowo niezależnymi siłami zewnętrznymi przyłożonymi do układu. Równanie Eulera-Lagrange'a dla takiego mechanicznego układu sterowania jest następujące

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right)^T = F(q)u \quad (2.1)$$

gdzie  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$  oraz  $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$  oznacza macierz sił zewnętrznych. Równanie ruchu dla tego układu mechanicznego może być wyprowadzone w następujący sposób

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)u, \quad k = 1, \dots, n$$

gdzie  $e_k$  jest  $k$ -tym wektorem bazowym w  $\mathbb{R}^n$ ,  $g_k(q) = \partial_{q_k} V(q)$ , oraz  $\Gamma_{ij}^k(q)$  nazywane są symbolami Christoffela i mogą być zdefiniowane jako

$$\Gamma_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right).$$

W postaci wektorowej otrzymujemy

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = F(q)u \quad (2.2)$$

gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}_k$$

jest elementem  $C(q, \dot{q})$ . Składnik  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  zawiera dwa typy składników angażujące  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  zwanymi składnikami *odśrodkowymi* ( $i = j$ ), lub składnikami *Coriolisa* ( $i \neq j$ ). Ponadto  $G(q)$  zawiera składniki grawitacyjne. Interesującą zależnością pomiędzy macierzami  $M$  i  $C$  jest fakt, że  $S_0 = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  jest macierzą skośnie symetryczną. Innymi słowy, ponieważ  $M$  jest symetryczne, można otrzymać, że  $\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})$ . Biorąc tę zależność pod uwagę oraz wiedząc, że  $M(q)$  jest macierzą dodatniookreśloną, transformacja *Legendre'a* względem  $\dot{q}$  dana zależnością

$$p = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)^T = M(q) \dot{q}$$

jest odwracalna oraz dynamika układu mechanicznego (2.1) może być zapisana w następującej postaci kanonicznej

$$\begin{cases} \dot{q} &= M^{-1}(q)p \\ \dot{p} &= -G(q) + \tilde{C}^T(q, p)M^{-1}(q)p + F(q)u \end{cases} \quad (2.3)$$

gdzie  $\tilde{C}^T(q, p) = C(q, M^{-1}p)$ . Zależność (2.3) określamy jako *Unormowaną Formę Legendre'a* (*Legendre Normal Form*) prostego układu mechanicznego.

Dla układów mechanicznych równania (2.2) i (2.3) są równoważne. Unormowana Forma Legendre'a jest układem równań różniczkowych pierwszego rzędu, zaś (2.2) jest układem drugiego rzędu [60].



### 2.2.2 W pełni dosterowane układy mechaniczne

Rozważmy układ mechaniczny dany zależnością (2.1). System (2.1) będziemy nazywać *w pełni dosterowanym układem mechanicznym* jeśli

$$m = \text{rank } F(q) = n \quad (2.4)$$

tj.  $F(q)$  jest macierzą odwracalną. Dla układów w pełni dosterowanych liczba wejść sterujących równa jest wymiarowi jej różniczkowej mnogości konfiguracyjnej. Dlatego też układy w pełni dosterowane są w pełni linearyzowalne przez sprzężenie zwrotne (*ang. exact feedback linearizable*), w konsekwencji nie posiadają dynamiki zerowej. Można tego dowiedzieć poprzez zastosowanie następującej zmiany sygnału sterującego

$$u = F(q)^{-1}(M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \quad (2.5)$$

a następnie przypisanie zmiennych jako  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ , aby otrzymać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v \end{aligned} \quad (2.6)$$

tj. podwójny integrator. Dlatego też większość problemów związanych z mechanicznymi układami w pełni dosterowanymi można zredukować do równoważnych problemów dla systemów liniowych. Fakt ten oznacza, że sterowanie układów mechanicznych jest trudne albo z powodu występujących niepewności (na przykład niepewności parametrycznej w macierzach  $M$ ,  $C$ ,  $G$ ), albo z powodu mniejszej niż  $n$  liczby wejść sterujących, co uniemożliwia zastosowanie wprost sprzężenia odspzęgającego układ [60].

### 2.2.3 Niedosterowane układy mechaniczne

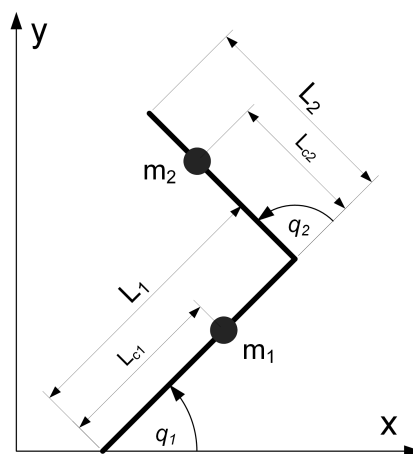
Układ mechaniczny o konfiguracji  $q \in Q$  oraz Lagranżianie  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  spełniającym równanie (2.1) będziemy nazywać *niedosterowanym układem mechanicznym*, jeśli

$$m = \text{rank } F(q) < n = \dim(Q). \quad (2.7)$$

Innymi słowy, układy niedosterowane są systemami mechanicznymi posiadającymi mniej aktuatorów niż zmiennych konfiguracyjnych. Z uwagi na to ograniczenie nie jest możliwa linearyzacja poprzez sprzężenie zwrotne systemów niedosterowanych.

### 2.2.4 Manipulator płaski o 2 stopniach swobody

W kolejnym rozdziale zostaną przedstawione równania dynamiki dla manipulatora płaskiego o dwóch stopniach swobody (zwanego również wahadłem podwójnym), przedstawionego na rys. 2.3.



Rysunek 2.3: Ogólny schemat manipulatora 2 DOF

Zastosowane oznaczenia są następujące:



- $m_1$  - masa pierwszego ogniwa
- $m_2$  - masa drugiego ogniwa
- $L_1$  - długość pierwszego ramienia
- $L_2$  - długość drugiego ramienia
- $L_{c_1}$  - odległość środka masy pierwszego ogniwa od osi jego obrotu
- $L_{c_2}$  - odległość środka masy drugiego ogniwa od osi jego obrotu
- $q_1$  - kąt obrotu pierwszego ogniwa
- $q_2$  - kąt obrotu drugiego ogniwa
- $J_1$  - moment bezwładności pierwszego ogniwa
- $J_2$  - moment bezwładności drugiego ogniwa.

Dla uproszczenia opisu, nie tracąc przy tym ogólności rozważań, w wielu miejscach pracy przyjęto  $L_{c_1} = L_1$ , oraz  $L_{c_2} = L_2$ .

### RÓWNANIA RUCHU WG. FORMALIZMU EULERA-LAGRANGE'A

Wyprowadźmy położenia oraz prędkości środków mas  $m_1$ ,  $m_2$  zgodnie z rys. 2.3

$$p_{m_1} = \begin{bmatrix} L_{c_1} \cos q_1 \\ L_{c_1} \sin q_1 \end{bmatrix}, \quad p_{m_2} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + L_{c_2} \cos(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin q_1 + L_{c_2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$v_{m_1} = \begin{bmatrix} -L_{c_1} \sin q_1 \dot{q}_1 \\ L_{c_1} \cos q_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad v_{m_2} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - L_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ L_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + L_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Zdefiniujmy energię kinetyczną odpowiadającą masom  $m_1$  oraz  $m_2$ ,

$$\begin{aligned} E_{k_1} &= \frac{1}{2}(m_1 L_{c_1}^2 + J_1) \dot{q}_1^2 \\ E_{k_2} &= \frac{1}{2} m_2 [L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2L_1 L_{c_2} \cos q_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] + \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

oraz związaną z nimi energię potencjalną:

$$\begin{aligned} E_{p_1} &= -g L_{c_1} m_1 \sin q_1 \\ E_{p_2} &= -g m_2 (L_1 \sin q_1 + L_{c_2} \sin(q_1 + q_2)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bazując na całkowitej energii kinetycznej oraz całkowitej energii potencjalnej, możemy wyznaczyć Lagrangian dany zależnością

$$\mathcal{L} = K - P \quad (2.12)$$

gdzie:  $K = E_{k_1} + E_{k_2}$ , zaś  $P = E_{p_1} + E_{p_2}$ .

Odpowiednie równania ruchu można wyznaczyć stosując formalizm Lagrange'a, tzn.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot{q}) \right)^T = \tau \quad (2.13)$$

gdzie  $q$  są współrzędnymi uogólnionymi.

Równanie (2.13) możemy przekształcić również do standardowej formy

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (2.14)$$

gdzie  $M$  jest macierzą mas,  $C$  – macierzą sił Coriolisa oraz sił odśrodkowych działających w układzie,  $G$  – wektorem sił grawitacji działających na układ,  $\tau$  – wektorem sił wymuszających.

Korzystając z zależności (2.10), (2.11) oraz (2.13) otrzymujemy następujące postacie macierzy  $M, C, G$ :

$$M(q) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2 & a_2 + a_3 \cos q_2 \\ a_2 + a_3 \cos q_2 & a_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$C(q, \dot{q}) = a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1 \\ a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

gdzie:  $a_1 = m_1 L_{c_1}^2 + m_2 L_1^2 + J_1$ ,  $a_2 = m_2 L_{c_2}^2 + J_2$ ,  $a_3 = m_2 L_1 L_{c_2}$ ,  $a_4 = g(m_1 L_{c_1} + m_2 L_1)$ ,  $a_5 = g m_2 L_{c_2}$ .

Na potrzeby dalszych rozdziałów, równanie (2.14) możemy przedstawić w alternatywnej postaci, gdzie odpowiednie macierze  $M, C, G$  dane są zależnościami:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

lub w równoważnej postaci:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \mu_1 + G_1 &= \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \mu_2 + G_2 &= \tau_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

gdzie:  $\mu_1 = c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2$ ,  $\mu_2 = c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2$ .

Będziemy również postugiwać się alternatywną formą równań dynamiki, którą wyznaczamy z równań (2.14) otrzymując:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + \tau). \quad (2.20)$$

W postaci szczegółowej mamy:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = M(q)^{-1} \left( - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right). \quad (2.21)$$

Równoważnie, zależność (2.21) można wyrazić przez

$$\ddot{q}_1 = R_1 + M_{1*}^- \tau \quad (2.22)$$

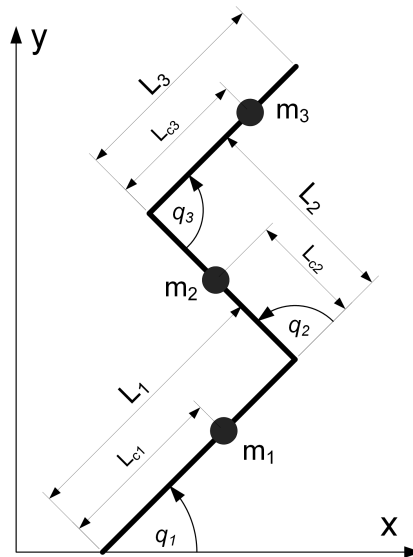
$$\ddot{q}_2 = R_2 + M_{2*}^- \tau \quad (2.23)$$

gdzie  $M_{i*}^-$  jest  $i$ -tym wierszem macierzy  $M(q)^{-1}$  dla  $i = \{1, 2\}$  oraz

$$R_i = M_{i*}^- (-C(q, \dot{q})\dot{q} - G). \quad (2.24)$$

### 2.2.5 Manipulator płaski o 3 stopniach swobody

Wykorzystując formalizm opisu użyty w rozdziale 2.2.4 dokonamy wyprowadzenia równań dynamiki dla manipulatora płaskiego o trzech stopniach swobody, przedstawionego na rysunku 2.4. Zastosowane oznaczenia są następujące:



Rysunek 2.4: Ogólny schemat manipulatora 3 DOF

- $m_1$  - masa pierwszego ogniwa
- $m_2$  - masa drugiego ogniwa

- $m_3$  - masa trzeciego ogniwa
- $L_1$  - długość pierwszego ramienia
- $L_2$  - długość drugiego ramienia
- $L_3$  - długość trzeciego ramienia
- $L_{c_1}$  - odległość środka masy pierwszego ogniwa od osi jego obrotu
- $L_{c_2}$  - odległość środka masy drugiego ogniwa od osi jego obrotu
- $L_{c_3}$  - odległość środka masy trzeciego ogniwa od osi jego obrotu
- $q_1$  - kąt obrotu pierwszego ogniwa
- $q_2$  - kąt obrotu drugiego ogniwa
- $q_3$  - kąt obrotu trzeciego ogniwa
- $J_1$  - moment bezwładności pierwszego ogniwa
- $J_2$  - moment bezwładności drugiego ogniwa
- $J_3$  - moment bezwładności trzeciego ogniwa.

Położenia mas  $m_1, m_2, m_3$  przyjęto zgodnie z rysunkiem 2.4 a ich współrzędne w układzie podstawowym są następujące

$$\begin{aligned} p_{m_1} &= \begin{bmatrix} L_{c_1} \cos q_1 \\ L_{c_1} \sin q_1 \end{bmatrix}, & p_{m_2} &= \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + L_{c_2} \cos(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin q_1 + L_{c_2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \\ p_{m_3} &= \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Prędkości tych punktów w układzie podstawowym wynoszą

$$\begin{aligned} v_{m_1} &= \begin{bmatrix} -L_{c_1} \sin q_1 \dot{q}_1 \\ L_{c_1} \cos q_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, & v_{m_2} &= \begin{bmatrix} -L_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - L_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ L_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + L_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}, \\ v_{m_3} &= \begin{bmatrix} -L_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - L_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - L_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ L_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + L_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku robota o dwóch złączach, możemy wyznaczyć energię kinetyczną, potencjalną, Lagranżian, w efekcie otrzymując matematyczny model dynamiki dany zależnością:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (2.27)$$

gdzie odpowiednie macierze  $M, C, G$  opisane są następująco

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

W równoważnej postaci mamy:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \mu_1 + G_1 &= \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + \mu_2 + G_2 &= \tau_2 \\ m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \mu_3 + G_3 &= \tau_3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + c_{13}\dot{q}_3, \\ \mu_2 &= c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + c_{23}\dot{q}_3, \\ \mu_3 &= c_{31}\dot{q}_1 + c_{32}\dot{q}_2 + c_{33}\dot{q}_3. \end{aligned}$$

Poszczególne elementy macierzy mas  $M$  przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 2(r_1 + r_2 + r_3) \\
m_{12} &= a_2 + a_3 + a_4 + r_1 + r_2 + 2r_3 \\
m_{13} &= a_3 + r_1 + r_3 \\
m_{21} &= m_{12} \\
m_{22} &= a_2 + a_3 + a_4 + 2r_3 \\
m_{23} &= a_3 + r_3 \\
m_{31} &= m_{13} \\
m_{32} &= m_{23} \\
m_{33} &= a_3
\end{aligned} \tag{2.30}$$

przy czym współczynniki  $a_1, \dots, a_5$  oraz  $r_1, r_2, r_3$  opisane są przez

$$\begin{aligned}
a_1 &= m_1 L_{c1}^2 + I_1 \\
a_2 &= m_2 L_{c2}^2 + I_2 & r_1 &= L_1 L_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) \\
a_3 &= m_3 L_{c3}^2 + I_3 & r_2 &= L_1 (L_2 m_3 + L_{c2} m_2) \cos q_2 \\
a_4 &= m_3 L_2^2 & r_3 &= L_2 L_{c3} m_3 \cos q_3. \\
a_5 &= (m_2 + m_3) L_1^2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Elementy macierzy  $C$  wynoszą

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -d_1 \dot{q}_2 - d_2 \dot{q}_3, & c_{12} &= -d_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - d_2 \dot{q}_3, & c_{13} &= -d_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3), \\
c_{21} &= d_1 \dot{q}_1 - d_3 \dot{q}_3, & c_{22} &= -d_3 \dot{q}_3, & c_{23} &= -d_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3), \\
c_{31} &= d_2 \dot{q}_1 + d_3 \dot{q}_2, & c_{32} &= d_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), & c_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
d_1 &= L_1 L_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) + (m_2 L_{c2} + m_3 L_2) L_1 \sin q_2 \\
d_2 &= L_1 L_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 L_{c3} m_3 \sin q_3 \\
d_3 &= L_2 L_{c3} m_3 \sin q_3.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Elementy wektora grawitacji  $G$  są następujące:

$$\begin{aligned}
G_1 &= g(b_1 + b_2 + b_3) \\
G_2 &= g(b_2 + b_3) \\
G_3 &= g b_3
\end{aligned} \tag{2.34}$$

dla

$$\begin{aligned}
b_1 &= m_1 L_{c1} \cos q_1 + (m_2 + m_3) L_1 \cos q_1 \\
b_2 &= (m_2 L_{c2} + m_3 L_2) \cos(q_1 + q_2) \\
b_3 &= m_3 L_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Będziemy również posługiwać się następującym zapisaniem równań dynamiki uzyskanym poprzez wyznaczenie  $\ddot{q}$  z równania (2.27), tj.

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} (-C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q) + \tau). \tag{2.36}$$

W szczegółowej postaci równanie (2.36) można wyrazić przez

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = M(q)^{-1} \left( - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \right), \tag{2.37}$$

lub, w postaci

$$\ddot{q}_1 = R_1 + M_{1*}^- \tau \tag{2.38}$$

$$\ddot{q}_2 = R_2 + M_{2*}^- \tau \tag{2.39}$$

$$\ddot{q}_3 = R_3 + M_{3*}^- \tau \tag{2.40}$$

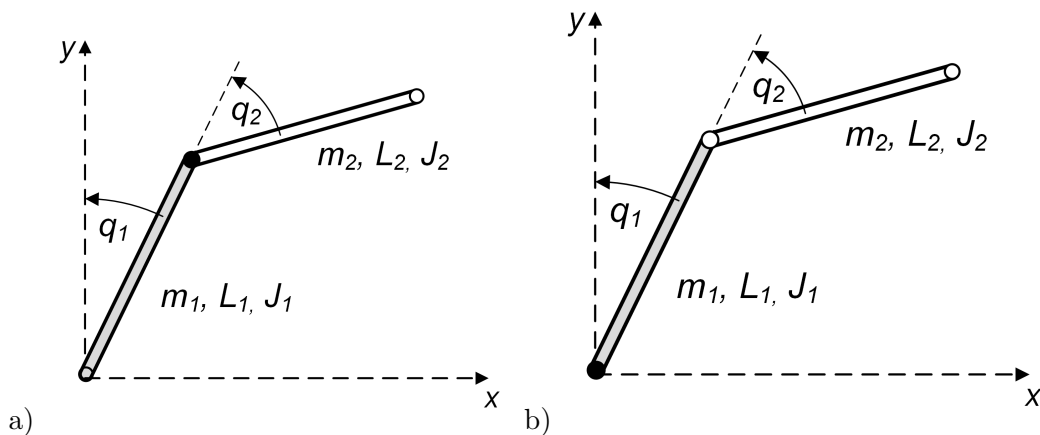
gdzie  $M_{i*}^-$  jest  $i$ -tym wierszem macierzy  $M(q)^{-1}$  dla  $i = \{1, 2, 3\}$  oraz

$$R_i = M_{i*}^- (-C(q, \dot{q}) \dot{q} - G). \tag{2.41}$$

### 2.2.6 Inne przykłady układów niedosterowanych z wahadłem

Poza omówionym już robotem o 2 złączach obrotowych warto wspomnieć jeszcze o innych przedstawicielach układów niedosterowanych, jak układ wózek-wahadło (*Cart-Pole*), czy obrotowe wahadło (lub inaczej wahadło Furuta).

Dla przypomnienia Acrobot jest planarnym robotem o 2 ogniwach ze złączami obrotowymi i 1 napędem w łokciu (Rys. 2.5a). Pendubot (Rys. 2.5b) jest również planarnym robotem o 2 ogniwach ze złączami obrotowymi ale z 1 napędem w barku. Acrobot i Pendubot graficznie

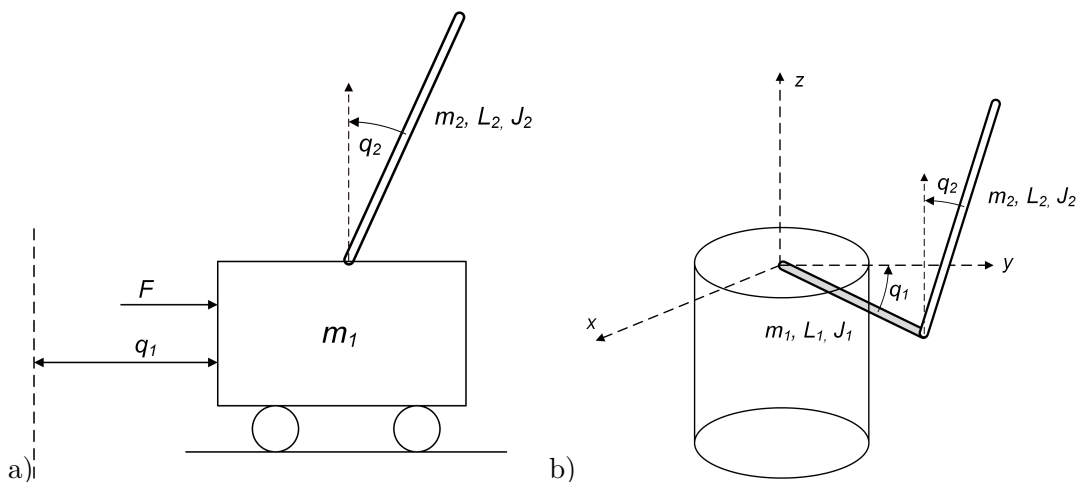


Rysunek 2.5: Schemat robota o 2 złączach obrotowych: a) Acrobot, b) Pendubot

wyglądają bardzo podobnie (tj. ich model matematyczny ma tę samą macierz mas). Jednakże różnica w położeniu pojedynczego napędu powoduje późniejsze różnice w procesie sterowania. Jednym z możliwych celów sterowania jest w tym przypadku stabilizacja w górnej wyprostowanej pozycji równowagi dla dowolnych warunków początkowych, zaś bardziej skomplikowanym zadaniem może być stabilizacja tychże robotów w dowolnym ich położeniu równowagi [60].

### WÓZEK-WAHADŁO I OBROTOWE WAHADŁO

Układ wózek-wahadło pokazany na rysunku 2.6a złożony jest z odwróconego wahadła oraz wózka. Rysunek 2.6b przedstawia system zwany wahadłem obrotowym, który składa się z odwróconego



Rysunek 2.6: a) Cart-Pole, b) wahadło Furuta

wahadła umieszczonego na obrotowym ramieniu.

Macierz mas dla układu wózek-wahadło jest następująca

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \cos q_2 \\ a_2 \cos q_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

natomiast dla układu obrotowego wahadła przedstawia się następująco

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \sin^2 q_2 & b_2 \cos q_2 \\ b_2 \cos q_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

gdzie wszystkie  $a_i, b_i, c_i > 0$  są wartościami stałymi. Jediną różnicą pomiędzy macierzami mas dla dwóch powyższych układów mechanicznych jest pierwszy element  $m_{11}(q_2)$ . Kolejnym podobieństwem pomiędzy układem wózek-wahadło a obrotowym wahadłem jest fakt, że oba układy posiadają taką samą postać energii potencjalnej

$$V(q_2) = a_4 \cos q_2, \quad \text{dla } a_4 > 0.$$

## ROZDZIAŁ 3

### Wybrane metody linearyzacji

Niewiele rzeczywistych układów fizycznych to układy liniowe. Powszechną metodą analizy i projektowania sterowania układu nieliniowego jest aproksymacja liniowa jego dynamiki w otoczeniu wybranego punktu, przez co otrzymujemy liniowy model systemu. W wyniku uzyskuje się możliwość stosowania liniowych technik do projektowania i sterowania tymi układami. Istnieją jednak systemy, dla których wpływ nieliniowości jest istotny i nie może zostać w żaden sposób pominięty. Dla tych układów używane są nieliniowe techniki analizy i projektowania, które zostały scharakteryzowane w tym rozdziale.

#### 3.1 Pojęcia podstawowe

Poniższy rozdział prezentuje zbiór pojęć podstawowych wykorzystywanych w rozprawie i w większości opiera się na terminologii zaczerpniętej z pracy [11]. Zagadnienia, które zdaniem autora są szczególnie istotne z punktu widzenia tej pracy zostały wyróżnione w postaci definicji i twierdzeń.

##### Pole wektorowe

Weźmy pod uwagę układ nieliniowy o jednym wejściu opisany równaniem

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.1)$$

gdzie:

- $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  jest wektorem stanu;
- $u$  jest skalarnym wymuszeniem;
- $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$  i  $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)]^T$  są wektorami zależnymi od  $x$ .

##### Definicja 3.1.1

Polem wektorowym  $f(x)$  w obszarze  $V \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy funkcję, która każdemu punktowi  $p \in V$  przyporządkowuje wektor  $f(p)$ .

W rozdziale 3.1 funkcje  $f$  i  $g$  określają więc odpowiednie pola wektorowe.

##### Gradient

Niech  $\psi(x)$  będzie wektorem wierszowym o wymiarze  $1 \times n$ , którego składowymi są funkcje gładkie

$$\psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)].$$

Taki wektor wierszowy może być użyty do reprezentacji jedno-formy różniczkowej zwanej kowektorem. Kowektorem o szczególnym znaczeniu jest gradient. Oznacza się go jako  $d\lambda$  lub  $\nabla_x \lambda$ . Każda

$i$ -ta składowa tego kowektora jest pochodną cząstkową funkcji  $\lambda$  po  $i$ -tej zmiennej  $x_i$ .

$$d\lambda(x) = \nabla_x \lambda(x) = \left[ \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_n} \right]$$

Używa się również bardziej zwartego zapisu

$$d\lambda(x) = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x}.$$

### Pochodna Liego funkcji skalarnej

#### Definicja 3.1.2

Pochodną Liego  $L_f h$  pierwszego rzędu funkcji skalarnej  $h = h(x)$  względem pola wektorowego  $f = f(x)$  nazywamy funkcję skalarną określoną wzorem

$$L_f h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x).$$

Korzystając z iloczynu skalarnego  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , możemy  $L_f h$  napisać w postaci

$$L_f h = \langle \text{grad } h, f \rangle \quad \text{lub} \quad L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f.$$

Przy wielokrotnym obliczaniu pochodnej Liego stosuje się oznaczenie

$$L_f^i h = L_f (L_f^{i-1} h)$$

przy czym  $L_f^0 h = h$ .

Pochodne Liego można wyznaczać wzdłuż różnych wektorów. Stosuje się wówczas oznaczenia

$$L_g L_f h = L_g (L_f h) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_f h}{\partial x_i} g_i(x)$$

dla dowolnych pól wektorowych  $f$  i  $g$  oraz funkcji skalarnej  $h = h(x)$ .

### NAWIAS LIEGO PÓL WEKTOROWYCH

Weźmy pod uwagę dwa gładkie (tzn. mające ciągłe pochodne dowolnego rzędu)  $n$ -wymiarowe pola wektorowe  $f = f(x)$  i  $g = g(x)$  wektora  $x \in \mathbb{R}^n$ .

#### Definicja 3.1.3

Nawiasem Liego  $[f, g]$  pól wektorowych  $f$  i  $g$  nazywamy pole wektorowe określone wzorem

$$[f, g] = \frac{dg}{dx} f - \frac{df}{dx} g$$

przy czym

$$\frac{dg}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

oznaczają macierze Jacobiego dla  $g(x)$  i  $f(x)$ .

Nawiasy Liego pól wektorowych  $f$  i  $g$  oznacza się również symbolem  $ad_f g$ , tj.

$$ad_f g = [f, g].$$

Nawias Liego można używać wielokrotnie. Taki iterowany nawias Liego określa się przez:

$$ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g]$$

dla  $k > 0$ , oraz  $ad_f^0 g = g$ .



## Dyfeomorfizm

Podstawowym sposobem postępowania wykorzystywanym w linearyzacji jest transformacja zmiennych stanu opisujących obiekt.

Niech obiekt będzie opisywany przez  $n$  zmiennych stanu  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Ten sam obiekt można opisać za pomocą innego zestawu zmiennych stanu, np.  $z \in Z \subset \mathbb{R}^n$ . Zmianę zmiennych opisuje się za pomocą przekształcenia

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ T_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

### Definicja 3.1.4

Przekształcenie  $T(x)$  nazywa się *dyfeomorfizmem*, jeżeli

- $T(x)$  jest przekształceniem odwracalnym, tzn. istnieje takie przekształcenie  $T^{-1}(x)$ ;  $T^{-1}(T(x)) = x$  dla wszystkich  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ;
- $T(x)$  oraz  $T^{-1}(x)$  są gładkimi odwzorowaniami, tzn. mają ciągłe pochodne cząstkowe dowolnego rzędu.

## Rząd względny

Obiekt (3.2) ma rząd względny  $r$  (lub  $rd(h,g)$ ) w obszarze  $X \subset \mathbb{R}^n$ , jeśli dla wszystkich  $i < r - 1$  oraz dla wszystkich  $x \in X$  spełnione są warunki

1.  $L_g L_f^i h(x) = 0$
2.  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ .

Rząd względny jest pojęciem wykorzystywanym przy linearyzacji. Zasadniczo definiuje się go dla obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jeżeli  $rd(h,g) = \infty$  to znaczy, że  $L_g L_f^i h(x) = 0$  dla wszystkich  $i$ , to oznacza, że sygnał sterujący  $u$  nie ma wpływu na wyjście  $y = h(x)$ .

Rząd względny określa liczbę równań, przez które musi przejść sygnał sterujący, żeby mieć bezpośredni wpływ na sygnał wyjściowy. Dla obiektów linowych opisanych za pomocą transmitancji rząd względny oznacza różnicę stopni wielomianów w mianowniku i liczniku (jeśli obiekt jest sterowalny).

Pojęcie rzędu względnego można rozszerzyć także na układy dynamiczne o wielu wejściach i wielu wyjściach.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y &= [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)]^T \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie  $f, g_i$  – gładkie funkcje wektorowe,  $h_i(x)$  – gładkie funkcje skalarne, dla  $i = 1, \dots, m$ .

Przyjęcie równej liczby wejść i wyjść nie zmniejsza ogólności rozważań, ponieważ zawsze każdą gładką funkcję zmiennych stanu można przyjąć za wyjście.

Obiekt (3.3) ma wektor rzędów względnych  $[r_1, r_2, \dots, r_m]$  w obszarze  $X \subset \mathbb{R}^n$ , jeżeli w każdym punkcie  $x \in X$  zachodzi

1.  $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$  dla wszystkich  $1 \leq j \leq m$ , dla wszystkich  $k \leq r_i - 2$ , dla wszystkich  $1 \leq i \leq m$ ,
2. macierz  $\mathbb{R}(x)$  o wymiarze  $m \times m$  jest nieosobliwa

$$R(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{bmatrix}.$$

### Dystrybucja

To przestrzeń rozpięta przez wektory  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)$  w punkcie  $x$ .

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)\}.$$

### Kodystrybucja

To dystrybucja rozpięta przez kowektory. Jest to obiekt dualny do dystrybucji.

$$\Psi(x) = \text{span}\{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_d(x)\}$$

Przejście pomiędzy dystrybucjami a kodystrybucjami odbywa się za pomocą operacji transponowania

$$\Delta = \Psi^T \text{ oznacza, że } \Delta(x) = \text{span}\{\psi_1^T(x), \psi_2^T(x), \dots, \psi_d^T(x)\}.$$

### Inwolutywność

#### Definicja 3.1.5

Dystrybucja  $\Delta(x)$  jest inwolutywna

- jeżeli dla dowolnych dwóch pól wektorowych  $f_1(x), f_2(x)$  należących do dystrybucji  $\Delta$ , ich nawias Liego również należy do dystrybucji  $\Delta$   
 $f_1(x), f_2(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [f_1, f_2](x) \in \Delta(x);$   
 lub
- jeżeli jeden wiersz macierzy  $D(x)$  ma wszystkie składowe zerowe oraz  $\text{rz } D(x) = n - 1;$   
 lub
- jeżeli istnieje taki wiersz macierzy  $D(x)$ , który jest liniową kombinacją pozostałych wierszy oraz  $\text{rz } D(x) = n - 1.$

$D(x)$  – macierz, której kolumny są wektorami rozpinającymi dystrybucję  $\Delta_{n-2}$

$$D(x) : \Delta_{n-2} = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{m-2} g\}$$

Jeżeli  $i$ -ty wiersz dystrybucji  $\Delta_{n-2}$  jest zerowy, to przyjmując  $h(x) = x_i$ , otrzymuje się funkcję, której gradient jest anihilatorem  $\Delta_{n-2}$ .

### Anihilator dystrybucji $\Delta^\perp$

Szczególnym przykładem kodystrybucji jest anihilator  $\Delta^\perp(x)$  dystrybucji  $\Delta(x)$ .

Kodystrybucję  $\Delta^\perp(x)$  nazywa się anihilatorem dystrybucji  $\Delta(x)$ , jeżeli dla każdego kowektora należącego do kodystrybucji  $\psi \in \Delta^\perp$  i dla każdego wektora należącego do dystrybucji  $v \in \Delta$  zachodzi

$$\langle \psi, v \rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i v_i = 0.$$

Jeżeli dystrybucja  $\Delta(x)$  jest rozpięta przez kolumny pewnej macierzy  $F(x)$ , to jej anihilator jest określony jako zbiór wszystkich kowektorów  $\psi$  spełniających warunek:

$$\psi F(x) = 0$$

Jeżeli macierz  $F(x)$  na wymiar  $n \times d$ , to kowektory anihilatora są rozwiązaniami układu równań  $\psi_j F(x) = 0$  dla  $j = 1, \dots, n - d$ .

Interesujące jest poszukiwanie rozwiązań układu równań w szczególnej postaci:

$$\psi_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x},$$

gdzie  $\lambda_j$  są odpowiednimi funkcjami skalarnymi. Można tutaj postawić pytanie, czy możliwe jest zależenie  $n - d$  niezależnych rozwiązań układu nieliniowych, cząstkowych równań różniczkowych

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} [f_1(x), \dots, f_d(x)] = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} F(x) = 0.$$

To zagadnienie można wyrazić także w języku dystrybucji, tj. rozważyć kiedy dystrybucja  $\Delta(x)$  ma anihilator  $\Delta^\perp(x)$ , który jest rozpięty przez gradienty  $n - d$  skalarnych funkcji? Jeśli odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, to dystrybucję  $\Delta(x)$  nazywa się w pełni całkowalną.

### Strumień $\Phi_t^f(x)$

Strumieniem pola wektorowego  $f$  nazywa się gładką funkcję  $t$  oraz  $x$  mającą taką własność, że  $x(t) = \Phi_t^f(x_0)$  jest rozwiązaniem układu zwyczajnych równań różniczkowych

$$\dot{x} = f(x)$$

z warunkiem początkowym  $x(0) = x_0$ . Strumień  $\Phi_t^f(x)$  spełnia zależności

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Phi_t^f(x))}{\partial t} &= f(\Phi_t^f(x)), \quad \Phi_0^f(x) = x_0 \\ x = \Psi(z) &= \Phi_{z_1}^{f_1} \Phi_{z_2}^{f_2}, \dots, \Phi_{z_n}^{f_n}(x_0), \quad \Psi(0) = x_0. \end{aligned}$$

Pola wektorowe  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  są liniowo niezależne, przy czym tylko wektory  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)$  rozpinają dystrybucję  $\Delta$ . Jeśli strumienie będące rozwiązaniami  $\dot{x} = f_i(x)$  dla  $1 \leq i \leq n$  wykorzystają się do skonstruowania dyfeomorfizmu  $x = \Psi(z) = \Phi_{z_1}^{f_1} \Phi_{z_2}^{f_2}, \dots, \Phi_{z_n}^{f_n}(x_0)$ ,  $\Psi(0) = x_0$ , to rozwiązanie równań  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} [f_1(x), \dots, f_d(x)] = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} F(x) = 0$  jest określone jako ostatnie  $n - d$  składników przekształcenia  $z = \Psi^{-1}(x)$  odwrotnego do  $x = \Psi(z)$ .

### Twierdzenie Frobeniusa

Nieosobliwa dystrybucja jest w pełni całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest inwolutywna [11].

## 3.2 Linearyzacja pełna

W tym rozdziale przedstawiono rodzaje linearyzacji, w których wykorzystano przekształcenie zmiennych stanu i sprzężenie zwrotne do syntezy układów regulacji.

Interesujące jest pytanie: czy można dla obiektów nieliniowych przeprowadzić syntezę układu regulacji metodami opracowanymi dla obiektów liniowych? To zagadnienie określa się mianem linearyzacji obiektu nieliniowego. Należy przy tym odpowiedzieć na pytanie: kiedy i jak można przeprowadzić linearyzację oraz w jakich warunkach pracy obiektu ta linearyzacja jest poprawna.

Istnieją dwa podejścia do linearyzacji. Jedno klasyczne, oparte na zastosowaniu przybliżenia liniowego, oraz drugie, oparte na zastosowaniu przekształcenia zmiennych stanu i sprzężenia zwrotnego. To drugie podejście wynika ze stwierdzenia, że nieliniowości występujące w modelu obiektu nie są jego zasadniczą cechą, a pojawiają się w równaniach jedynie ze względu na „niewłaściwy” wybór zmiennych stanu.

Transformacja zmiennych stanu jest podstawowym narzędziem pozwalającym zastąpić obiekt nieliniowy obiektem liniowym w obszarze  $X$ , a nie tylko w jednym punkcie.

Zastosowanie transformacji zmiennych stanu rozważa się dla klasy obiektów afinicznych

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.4)$$

- $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  – wektor stanu,
- $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  – wektor sterowań,

- $F(\cdot, \cdot) : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest gładkim odwzorowaniem.

$$\begin{aligned} f(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T, \\ g(x) &= [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)], \\ g_i(x) &= [g_{1i}(x), g_{2i}(x), \dots, g_{ni}(x)]^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

dla  $i = 1, \dots, m$ .

Zakłada się, że rząd macierzy  $g(x)$  jest stały i wynosi  $m$  w całym obszarze  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

Zmienne stanu można przekształcić za pomocą transformacji (3.6), która jest dyfeomorfizmem:

$$z = T(x), \quad z \in Z \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

### 3.2.1 Linearyzacja obiektów o jednym wejściu

Warunkiem koniecznym linearyzowalności (zarówno przez czystą transformację zmiennych stanu, jak i przez sprzężenia zwrotne) jest istnienie takiej funkcji wyjścia  $h(x)$ , że obiekt

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad g(x) \neq 0 \text{ dla } x \in X \subset \mathbb{R}^n$$

ma rząd względny równy  $n$ . W przypadku linearyzacji przez sprzężenie zwrotne jest to również warunek wystarczający. Głównym zyskiem z twierdzenia Frobeniusa jest możliwość sprowadzenia tego problemu do rozwiązania odpowiedniego układu równań zwyczajnych. Prowadzi to do następującego algorytmu wyznaczania linearyzującej transformacji zmiennych stanu.

#### ALGORYTM WYZNACZANIA LINEARYZUJĄCEJ TRANSFORMACJI ZMIENNYCH STANU

1. Wyznaczyć pole wektorowe rozpinające dystrybucję  $\Delta = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  oraz sprawdzić czy obiekt spełnia warunki linearyzowalności. Jeśli tak, to można przejść do następnego kroku.
2. Znaleźć rozwiązania  $n$ -układów równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x} = h_i(x)$$

z warunkami początkowymi  $x(0) = x_0$ , gdzie

$$h_i(x) = ad_f^{i-1} g(x) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

3. Przekształcenie odwrotne do poszukiwanego dyfeomorfizmu definiuje się jako

$$x = T^{-1}(z) = \Phi_{z_n}^{h_1} \left( \Phi_{z_{n-1}}^{h_2} (\dots \Phi_{z_1}^{h_n}(x_0)) \right)$$

4. Wyznacza się przekształcenie odwrotne, które jest poszukiwanym dyfeomorfizmem  $z = T(x)$ .

#### LINEARYZACJA PRZEZ CZYSTĄ TRANSFORMACJĘ ZMIENNYCH STANU:

Warunki linearyzowalności przez czystą transformację zmiennych stanu są następujące.

##### Twierdzenie 3.2.1

Obiekt jest linearyzowalny przez czystą transformację zmiennych stanu, wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie  $x \in X$  zachodzi:

1. wymiar dystrybucji  $\dim \Delta(x) = n$ , gdzie  $\Delta = \text{span}\{ad_f^q g_i(x); 1 \leq i \leq m, 1 \leq q \leq n-1\}$
2.  $[ad_f^q g_i(x), ad_f^r g_j(x)] = 0$  dla wszystkich  $1 \leq i, j \leq m$  oraz  $0 \leq q \leq n-1, 0 \leq r \leq n$ .

Po zastosowaniu przekształcenia (3.6) do obiektu (3.4), otrzymuje się

$$\dot{z} = \frac{dT(x)}{dt} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u). \quad (3.7)$$

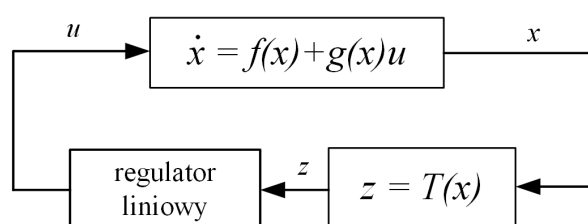
Prawa strona równania (3.7) zależy od  $x$ . Ponieważ transformacja (3.6) jest dyfeomorfizmem, więc  $x = T^{-1}(z)$ . Dlatego równanie (3.8) przyjmuje ostatecznie postać

$$\dot{z} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} f(T^{-1}(z)) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} g(T^{-1}(z))u. \quad (3.8)$$

Obiekt (3.4) jest linearyzowalny przez czystą transformację zmiennych stanu w obszarze  $X$ , jeżeli można tak dobrać transformację  $T(x)$ , że równanie (3.8) będzie liniowe, czyli dla każdego  $x \in X$  spełnione będą warunki

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} f(T^{-1}(z)) = Az, \quad \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} g(T^{-1}(z)) = B. \quad (3.9)$$

Oznacza to, że obiekt (3.4) jest transformowalny do postaci  $\dot{x} = Ax + Bu$ . Obiekt nieliniowy można zatem traktować jak obiekt liniowy w całym obszarze  $X$ , w którym dyfeomorfizm (3.6) jest dobrze określony, a nie tylko w otoczeniu jednego punktu, jak w przybliżeniu liniowym. W strukturze układu regulacji pojawia się nieliniowa transformacja zmiennych stanu (rys. 3.1)



Rysunek 3.1: Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez transformację zmiennych stanu

Znalezienie takiej transformacji jest możliwe tylko dla stosunkowo wąskiej klasy obiektów nieliniowych. Rozszerzenie tej klasy umożliwia zastosowanie sprzężenia zwrotnego.

### LINEARYZACJA PRZEZ SPRZĘŻENIE ZWROTNE

Pojęcie linearyzacja przez sprzężenie zwrotne oznacza, że zastosowano transformację zmiennych stanu (3.6) oraz w pętli sprzężenia zwrotnego wprowadzono zależność (3.10), którą określa się jako linearyzujące sprzężenie zwrotne.

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.10)$$

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix}, \quad \beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

gdzie  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  to odpowiednio wektor i macierz zawierająca gładkie funkcje, które pozostają w dyspozycji projektanta układu regulacji,  $v = [v_1, \dots, v_m]^T$  – wektor nowych sygnałów sterujących. Zależność (3.10) określa się również mianem transformacji sygnałów sterujących.

To podejście do linearyzacji uważane jest za standardowe, dlatego jego warianty określa się za pomocą bardziej rozbudowanego nazewnictwa. Jeśli linearyzację można przeprowadzić używając jedynie sprzężenia zwrotnego, to taki wariant będzie się określać mianem linearyzacji przez czyste sprzężenie zwrotne – analogicznie do linearyzacji przez czystą transformację zmiennych stanu. Jeśli w pętli sprzężenia zwrotnego zamiast statycznej zależności (3.10) wprowadzi się człon dynamiczny, to ten wariant nazywać się będzie linearyzacją przez dynamiczne sprzężenie zwrotne.

Po zastosowaniu (3.6) i sprzężenia zwrotnego (3.10), równanie obiektu przyjmuje postać

$$\dot{z} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} g(x)\alpha(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} g(x)\beta(x)v. \quad (3.11)$$

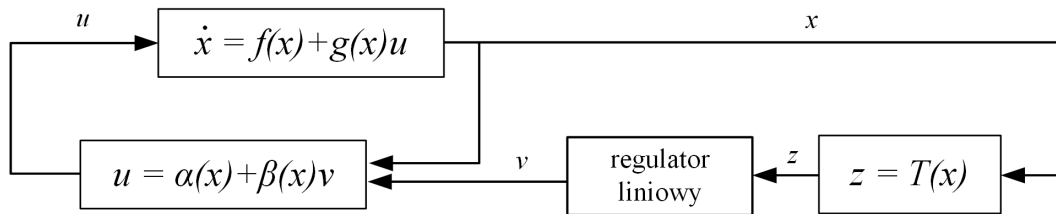
Po zmianie zmiennych stanu po prawej stronie (3.11) otrzymuje się równanie obiektu w postaci

$$\begin{aligned} \dot{z} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} f(T^{-1}(z)) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} g(T^{-1}(z))\alpha(T^{-1}(z)) \\ + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} g(T^{-1}(z))\beta(T^{-1}(z))v. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Obiekt (3.4) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze  $X$ , jeżeli można tak dobrać  $T(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  aby równanie (3.12) było liniowe, czyli dla każdego  $x \in X$  spełnione będą warunki

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} f(T^{-1}(z)) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} g(T^{-1}(z))\alpha(T^{-1}(z)) = Az \\ \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=T^{-1}(z)} g(T^{-1}(z))\beta(T^{-1}(z)) = B. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Projektant układu regulacji ma do dyspozycji trzy przekształcenia:  $T(x)$ ,  $\alpha(x)$  i  $\beta(x)$ , co pozwala przeprowadzić linearyzację dla szerszej klasy nieliniowych obiektów. Struktura układu regulacji staje się jednak bardziej złożona (rys. 3.2).



Rysunek 3.2: Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez transformację zmiennych stanu i sprzężenie zwrotne

Warunki linearyzowalności przez sprzężenie zwrotne można określić za pomocą rzędu względnego. Rozpatrzmy przypadek obiektu o jednym wejściu opisany równaniem

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.14)$$

Obiekt (3.14) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne, jeśli istnieje skalarna funkcja wyjścia  $h(x)$ , taka że rząd względny  $r$  jest równy rządowi obiektu  $n$  w każdym punkcie obszaru  $X$ . Funkcję  $h(x)$  spełniającą ten warunek nazywa się wyjściem linearyzującym.

### ISTOTA PROCESU LINEARYZACJI

Ponieważ rząd względny jest równy  $n$ , więc zachodzą zależności

$$L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \quad (3.15)$$

Niech pierwsza nowa zmienna stanu będzie określona jako  $z_1 = h(x)$ . Jej pochodna jest równa

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + u L_g h.$$

Równość  $L_g h = 0$  wynika z (3.15). W związku z tym pochodna  $z_1$  nie zależy od sygnału sterującego i może być wybrana jako kolejna nowa zmienna stanu  $z_2$ .

$$z_2 = \dot{z}_1 = L_f h.$$

Obliczając kolejną pochodną otrzymuje się

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + u L_g L_f h.$$

Wyraz  $L_g L_f h$  stojący przy sygnale sterującym  $u$  jest równy zero, co także wynika z (3.15).

Obliczając w ten sposób kolejne pochodne można zdefiniować przekształcenie  $T(x)$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{i-1} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Równanie obiektu w nowych współrzędnych ma postać:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(x) + u L_g L_f^{n-1} h(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wszystkie równania są liniowe poza ostatnim. Jednak w dyspozycji projektanta układu regulacji pozostaje jeszcze sygnał sterujący. Można go tak dobrać, aby ostatnie równanie zależało liniowo od nowego sygnału sterującego  $\nu$ .

Wtedy linearyzujące sprzężenie zwrotne ma postać

$$u = \frac{\nu - L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (3.18)$$

Mianownik (3.18) jest niezerowy dzięki odpowiedniej wartości rzędu względnego (3.15), zatem prawo sterowania jest dobrze określone. Wyrażenia  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  ze wzoru (3.10) przyjmują postać

$$\alpha = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}, \quad \beta = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}$$

Obiekt staje się liniowy w nowych współrzędnych  $z$  i z nowym sygnałem sterującym  $\nu$ , przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu.$$

Jeśli ponadto okaże się, że  $L_f^n h(x) = 0$  oraz  $L_g L_f^{n-1} h(x) = \text{const}$ , to do linearyzacji nie trzeba stosować już sprzężenia zwrotnego (3.18) i wystarczy tylko transformacja zmiennych stanu (3.16).

Kluczowym zagadnieniem w linearyzacji jest znalezienie takiej funkcji  $h(x)$ , która może stanowić podstawę do konstrukcji dyfeomorfizmu (3.16), więc  $h(x)$  musi być rozwiązaniem układu nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych

$$L_g h = L_g L_f h = \dots = L_g L_f^{n-2} h = 0.$$

Po zastosowaniu własności pochodnej Liego i nawiasu Liego otrzymuje się

$$L_g h = L_{ad_f g} h = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} h = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} g &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} ad_f g &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x} ad_f^{n-2} g &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Z tego wynika, że gradient  $h(x)$  musi anihilować dystrybucję

$$\Delta_{n-2}(x) = \text{span}\{g(x), \text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x)\}.$$

**Twierdzenie Frobeniusa** daje odpowiedź na pytanie, kiedy znalezienie takiego  $h(x)$  jest możliwe – dystrybucja  $\Delta_{n-2}$  musi być inwolutywna.

Obiekt (3.14) jest linearizowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie  $x \in X$  zachodzi

- dystrybucja  $\Delta_{n-2}(x) = \text{span}\{g(x), \text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x)\}$  jest inwolutywna;
- dystrybucja  $\Delta_{n-1}(x) = \text{span}\{g(x), \text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-1} g(x)\}$  ma wymiar  $n$ .

### 3.2.2 Linearizacja obiektów o wielu wejściach

Obiekt o wielu wejściach można opisać zależnością:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.20)$$

gdzie

- $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ ,
- $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]$ ,
- $g_i(x) = [g_{1i}(x), g_{2i}(x), \dots, g_{ni}(x)]^T$  dla  $i = 1, \dots, m$ .

Linearizacja obiektów o wielu wejściach jest bardziej złożona. Zakłada się, że rząd macierzy wejścia  $g(x)$  jest równy  $m$  w całym obszarze  $x \in \mathbb{R}^n$ . W przypadku obiektów o jednym wejściu wystarczy znaleźć jedną funkcję wyjścia  $h(x)$ , która zapewnia odpowiednią wartość rzędu względnego. W przypadku obiektu o wielu wejściach należy znaleźć  $m$  funkcji:  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)$ .

#### Twierdzenie 3.2.2

Obiekt o wielu wejściach (3.20) jest linearizowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze  $X$ , jeżeli istnieje  $m$  funkcji skalarnych  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)$ , takich że wektor rzędów względnych  $[r_1, r_2, \dots, r_m]$  istnieje w każdym punkcie  $x \in X$  oraz  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ .

#### Twierdzenie 3.2.3

Definiuje się dystrybucję  $\Delta_i$  dla obiektu (3.20)

$$\Delta_0 = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\},$$

$$\Delta_1 = \text{span}\{g_1, \dots, g_m, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_m\}$$

⋮

$$\Delta_{n-1} = \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}.$$

Obiekt  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  jest linearizowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie  $x \in X$  zachodzi:

1. dla każdego  $0 \leq i \leq n-1$  dystrybucja  $\Delta_i$  ma stały wymiar,
2. dystrybucja  $\Delta_{n-1}$  ma wymiar  $n$ ,
3. dla każdego  $0 \leq i \leq n-2$  dystrybucja  $\Delta_i$  jest inwolutywna.

Na podstawie Twierdzenia 3.2.3 można sformułować algorytm 1.



**Algorytm 1** Algorytm pełnej linearyzacji

- 1: **KROK 1**
- 2: Należy obliczyć wymiary dystrybucji:  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$
- 3: Podstawia się  $k := 1; \kappa := n - 2$
- 4: **KROK 2**
- 5: Należy obliczyć  $m_k = n - \text{rank}(\Delta_\kappa) - \sum_{j=1}^{k-1} (k - j + 1)m_j$
- 6: **KROK 3**
- 7: Jeżeli  $m_k > 0$ , to KROK 4.
- 8: Jeżeli  $m_k = 0$ , to  $\kappa := \kappa - 1$ ; KROK 2.
- 9: **KROK 4**
- 10: Należy znaleźć liniowo niezależne, nietrywialnie funkcje  $h_i(x)$  o indeksach i określonych nierównościami
 
$$\sum_{j=1}^{k-1} m_j + 1 \leq i \leq \sum_{j=1}^{k-1} m_j + m_k,$$
 których gradienty  $dh_i(x)$  anihilują dystrybucję  $\Delta_\kappa + \Omega^T$ 
 gdzie  $\Omega = \sum_{q=1}^{k-1} \text{span} \left\{ dL_f^j h_i : \sum_{p=1}^{q-1} m_p + 1 \leq i \leq \sum_{p=1}^q m_p ; j = 0, \dots, k - q \right\}$ .
- 11: **KROK 5**
- 12: Jeżeli  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$ , to znaleziono odpowiednie funkcje.
- 13: **KONIEC**
- 14: Jeżeli  $m_1 + m_2 + \dots + m_k < m$ , to  $k := k + 1, \kappa := \kappa - 1$ ; KROK 2

Dla obiektu  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  transformacja zmiennych stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r_1} \\ \vdots \\ z_{r_1+\dots+r_{m-1}+1} \\ \vdots \\ z_{r_1+\dots+r_{m-1}+r_m} \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

a linearyzujące sprzężenie zwrotne:

$$u = R^{-1}(x)(v - P(x)) \quad (3.22)$$

gdzie:

$$P(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad R(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (3.23)$$

$$\alpha(x) = -R^{-1}(x)P(x), \quad \beta(x) = R^{-1}(x). \quad (3.24)$$

Linearyzacja przez czystą transformację zmiennych stanu jest szczególnym przypadkiem linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. Warunek (2) twierdzenia 3.2.1 implikuje inwolutywność dystrybucji  $\Delta_i$  dla każdego  $0 \leq i \leq n - 2$ , co stanowi warunek (3) twierdzenia 3.2.3. Również istnienie odpowiedniego wektora rzędów względnych (twierdzenie 3.2.2) jest warunkiem koniecznym linearyzacji przez czystą transformację. W przypadku linearyzacji przez czystą transformację stanu, ta transformacja także ma postać (3.21), natomiast zależności (3.24) są określone przez

$$\alpha(x) = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T, \quad \beta(x) = B,$$

gdzie  $B$  jest macierzą o stałych współczynnikach.

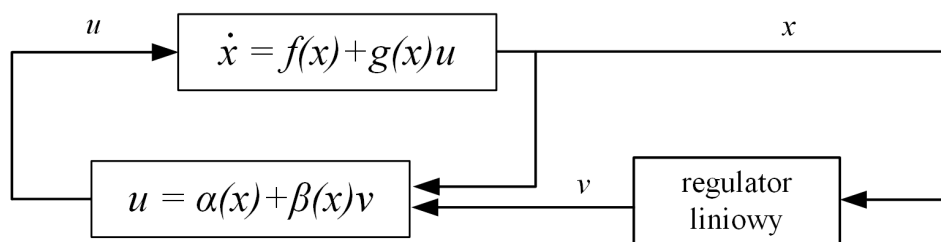
Uproszczoną wersją linearyzacji jest linearyzacja przez czyste sprzężenie zwrotne (rys. 3.3). Stanowi ona szczególny przypadek linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. W tej sytuacji dyfeomorfizm (3.6) jest przekształceniem tożsamościowym. Po zastosowaniu czystego sprzężenia zwrotnego (3.10) do obiektu (3.4) otrzymuje się równanie obiektu w postaci

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \quad (3.25)$$

#### Twierdzenie 3.2.4

Obiekt (3.20) jest linearyzowalny przez czyste sprzężenie zwrotne w obszarze  $X$ , jeśli można tak dobrać  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ , że równanie (3.25) będzie liniowe, tzn. dla każdego  $x \in X$  będą spełnione warunki (3.26)

$$f(x) + g(x)\alpha(x) = Ax, \quad \text{oraz} \quad g(x)\beta(x) = B. \quad (3.26)$$



Rysunek 3.3: Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez czyste sprzężenie zwrotne

### 3.3 Częściowa linearyzacja przez sprzężenie zwrotne

Metoda linearyzacji przez czyste sprzężenie zwrotne (*ang. state feedback linearization*) opiera się na transformacji układu do układu liniowego i sterowalnego, w wyniku czego możliwym jest stosowanie powszechnie znanych technik służących sterowaniu systemami liniowymi. Jednakże klasa układów nieliniowych posiadających tę własność jest bardzo skromna, co pociąga za sobą fakt, że metoda nie jest często używana, szczególnie w praktycznych zastosowaniach.

Natomiast **częściowa linearyzacja przez sprzężenie zwrotne** opiera się na transformacji układu do systemu w nowych współrzędnych, w których to współrzędnych widać liniowe zależności pomiędzy pewnymi pomocniczymi wyjściami a nowymi wejściami. Należy jednak podkreślić, że każdy nieliniowy system częściowo przetransformowany do nowego układu z liniowym odwzorowaniem wejście-wyjście posiada pewną nieobserwowalną dynamikę zwaną **dynamiką wewnętrzną**.

Z teoretycznego punktu widzenia dynamika układów mechanicznych opisana jest za pomocą  $n$ -wymiarowej przestrzeni stanów. Linearyzacja przez statyczne sprzężenie zwrotne przy użyciu odpowiedniej funkcji wyjścia rzędu względnego  $r$  prowadzi do otrzymania liniowego podsystemu o wymiarze  $r$ . Innymi słowy, problem maksymalnej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne sprowadza się do znalezienia funkcji posiadającej maksymalny rząd względny [107]. W ogólności, by móc używać czy to linearyzacji przez czyste sprzężenie zwrotne, czy linearyzacji przez częściowe sprzężenie zwrotne, koniecznym jest wyznaczenie właściwej funkcji wyjścia posiadającej odpowiedni rząd względny  $r$  [3].

#### 3.3.1 Warunki częściowej linearyzacji

Warunki istnienia pełnej linearyzacji są restrykcyjne, dlatego też dla systemów nie dających się w pełni zlinearyzować naturalnym jest pytanie o to, jaki jest największy możliwy do zlinearyzowania podsystem takiego układu nieliniowego [75]. Pierwsze formalne wyniki dotyczące częściowej

linearyzacji przez sprzężenie zwrotne dla obiektów o jednym oraz o wielu wejściach zostały pokazane w pracach [37], [41] czy [49], w których przedstawiono mechanizm takiej linearyzacji. Ideę tę można przedstawić w sposób pokazany poniżej [64].

Dany jest układ (3.27)

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.27)$$

Rozważmy następujące zbiory i dystrybucje:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}, & \mathcal{G}_f &= \{f + g, g \in \mathcal{G}_0\} \\ \mathcal{G}_i &= \text{span}\{\mathcal{G}_{i-1}, \{[\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_{i-1}]\}\}, & Q_i &= \text{span}\{\text{ad}_f^i \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_{i-1}\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie  $[\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_{i-1}] = \{[X, Y], \forall X \in \mathcal{G}_f, Y \in \mathcal{G}_{i-1}\}$ , oraz  $\bar{\mathcal{G}}_{i-1}$  oznacza inwolutywne domknięcie  $\mathcal{G}_{i-1}$ , zaś  $\text{ad}_f^i g = [f, \text{ad}_f^{i-1} g]$  i  $\text{ad}_f^1 g = [f, g]$ . Bazując na tych definicjach obliczmy następujące współczynniki (liczby całkowite):

$$\begin{aligned} r_0 &= \dim \mathcal{G}_0 \\ r_i &= \dim Q_i - \dim \bar{\mathcal{G}}_{i-1}, \quad \forall i \geq 1 \\ K_j &= \#\{r_i \geq j, \forall i \geq 0\}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie  $\#\{\cdot\}$  oznacza moc zbioru  $\{\cdot\}$ , tj. jego liczebność.

W pracy [49] wykazano, że sekwencja liczb  $\{r_0, r_1, \dots, r_i, \dots\}$  jest nierosnąca, tzn.  $r_1 \geq r_2 \geq \dots$ , tak więc maksymalny stopień względny jaki można otrzymać dla układu (3.27) wynosi  $r_1 + r_2 + \dots \leq n$ .

Ponadto jeżeli  $\mathcal{G}_0$  jest inwolutywne, to  $\mathcal{G}_0 = \bar{\mathcal{G}}_0$ . Własność inwolutywności pozwala zauważyć także, że

$$\mathcal{G}_1 = \text{span}\{\mathcal{G}_0, \{[\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_0]\}\} = \text{span}\{\mathcal{G}_0, \{[f, \mathcal{G}_0]\}\}. \quad (3.30)$$

$\sum_{a=1}^j K_a$  – oznacza największy stopień linearyzowalnego podsystemu [77].



## ROZDZIAŁ 4

### Częściowa linearyzacja manipulatorów o $n$ DOF

Jak wspomniano we wcześniejszych rozdziałach, odwrócone wahadła charakteryzują się silnie nieliniową i lokalnie niestabilną dynamiką. Stanowią grupę obiektów szczególnie przydatnych dla rozwoju i porównania różnych strategii sterowania układów nieliniowych. Choć stabilizacja pojedynczego oraz podwójnego wahadła była tematem wielu prac to analiza i sterowanie  $n$ -członowym odwróconym wahadłem dla  $n \geq 3$ , wciąż jest aktualnym tematem badawczym. W literaturze rozważane są zarówno podstawowe modele wahadeł, jak i wahadła zamontowane na wózku ([24], [26], [20], [52], [102]). Warto zwrócić uwagę, że żadna z cytowanych prac nie bazuje na podejściu formalnym z wykorzystaniem geometrii różniczkowej, które odwołuje się do koncepcji częściowej linearyzacji dynamiki do postaci liniowej o maksymalnym wymiarze stanu. Rozdział ten ma na celu naświetlenie powyższego zagadnienia i zawiera pewne wyniki dotyczące analizy i sterowania podwójnego oraz potrójnego odwróconego wahadła z deficytem napędów.

Wśród zadań sterowania omawianej klasy manipulatorów można wyróżnić dwie zasadnicze grupy – problem podniesienia wahadła (*ang. swing-up*), oraz zadanie utrzymania wahadła w pionie w pozycji niestabilnej (rysunek 4.3a oraz 4.18a) [21]. Rozwiązanie pierwszej grupy problemów sterowania opiera się w znacznej mierze na wykorzystaniu linearyzacji przez częściowe sprzężenie zwrotne, szczególnie zaś na fundamentalnych pracach Sponga i Blocka [85, 81, 82], sukcesywnie rozwijanych przez innych autorów, jak np. [17, 23, 97]. Inne podejścia wykorzystują własności pasywności obiektów, bądź sterowanie poziomem energii (*energy based control*) [21, 4], logikę rozmytą [45], czy metodę stabilizacji orbity (*model orbit stabilization*) [61]. W przypadku istotnych niepewności modelu można wykorzystywać metody sterowania odpornego, adaptacyjnego lub aktywną kompensację zakłóceń znaną jako ADRC (*active disturbance rejection control*) [73]. Rozwiązanie zadania balansowania wokół pozycji wyprostowanej opiera się głównie na wykorzystaniu regulatora LQR [57, 78, 85, 82, 92, 96, 104], technik linearyzacji jak w pracach [95, 17, 60, 31, 43, 98, 105], czy innych technikach obejmujących np. kształtowanie energii (*ang. energy-shaping*) [23]. Poruszane w pracy tematy obejmują również szereg innych istotnych aspektów związanych z robotami niedosterowanymi, które są stale rozwijane, wnosząc nowe wartości lub uszczegóławiając problem sterowania takimi systemami [19, 40, 103].

W kolejnych podrozdziałach zajmiemy się analizą właściwości modeli robotów o dwóch i trzech złączach, uwzględniając takie czynniki jak umiejscowienie napędów, rodzaj wykorzystanej linearyzacji, czy własności dynamiki wewnętrznej.

#### 4.1 Ogólna struktura układu sterowania

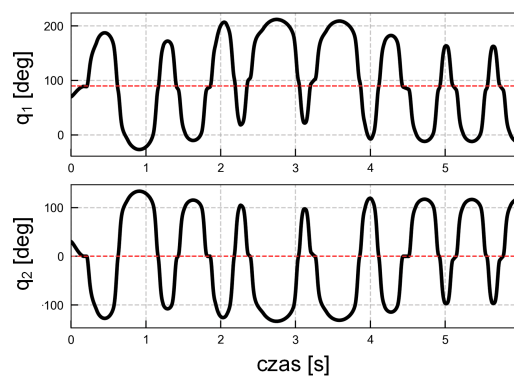
Projektowanie sprzężenia zwrotnego staje się wyzwaniem w przypadku systemów nieliniowych, dla których poszukiwanie optymalnego regulatora może być złożonym problemem, często przekraczającym możliwości dostępnych metod analitycznych.

Znanym z literatury podejściem jest w takich sytuacjach zastosowanie struktury hybrydowej ste-

rownika. Gdy algorytm sterowania nie zapewnia możliwości stabilizacji, co np. stricte wynika z jego natury, można rozważyć uzupełnienie danego algorytmu o część stabilizującą w otoczeniu punktu równowagi, tj. pozycji zadanej. Sterownik taki można przedstawić według następującej formuły

$$u = \begin{cases} u_{\text{stab}}, & \text{gdy } \|q_{\text{ref}} - q\| < \Delta_q \\ u_{\text{swing}}, & \text{poza} \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie  $u_{\text{swing}}$  oraz  $u_{\text{stab}}$  oznaczają dwie różne reguły sterowania. Pierwsza z nich, oznaczona jako  $u_{\text{swing}}$  jest sterowaniem opartym na dostarczaniu dodatkowej energii do układu celem rozkołysania wahadła (działanie typu *swing-up*). Jego zadaniem jest sprowadzenie stanu układu w pobliże zadanego punktu równowagi. Przykładowy ruch typu *swing-up* będący wynikiem działania sterownika  $u_{\text{swing}}$  został przedstawiony na rysunku 4.1. Można zaobserwować, że trajektoria konfiguracyjna cyklicznie przechodzi w otoczeniu punktu equilibrium, ale nie jest do niego zbieżna z uwagi na właściwości algorytmu. W takim przypadku uzasadnione jest więc użycie sprzężenia od stanu



**Rysunek 4.1:** Przykładowe przebiegi dla zadania typu *swing-up* dla robota o dwóch złączach. Linia przerywaną oznaczono zadane wartości współrzędnych do których powinna zmierzać trajektoria konfiguracji robota.

oznaczone jako  $u_{\text{stab}}$ , które jest załączane, gdy trajektoria robota znajdzie się w pobliżu punktu równowagi. To sprzężenie ma na celu utrzymać rozważany układ w pozycji równowagi.

W niniejszej pracy w sterowniku  $u_{\text{stab}}$  wykorzystano liniowe sprzężenie od stanu, które zaprojektowane jest na podstawie strategii LQR. W celu wyznaczenia jego wzmocnień zaproponowano następującą funkcję kosztów  $J$ , która w ogólnym przypadku zależy od błędów stanu układu  $\tilde{x}$  oraz od sygnału wejściowego  $u$ :

$$J = \int_t^{\infty} (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + u^T R u) d\tau, \quad (4.2)$$

gdzie  $Q$  oraz  $R$  są macierzami wag dla odpowiednio błędów stanów oraz sygnałów wejściowych.

Odwolanie się do liniowego przybliżenia nieliniowej dynamiki wokół punktu równowagi jest możliwe pod warunkiem, że odpowiedni model liniowy jest sterowalny w sensie Kalmana. Ze względu na liniowe przybliżenie nieliniowej dynamiki wokół punktu równowagi, podejście to ma charakter lokalny, nakładający ograniczenia na zbiór dopuszczalnych warunków początkowych. W takich okolicznościach podejście LQR jest w stanie zapewnić jedynie wyniki suboptymalne. Mimo to LQR nadal stanowi istotną metodę sterowania układami nieliniowymi. W szczególności jest w stanie zagwarantować lokalną wykładniczą zbieżność, która zapewnia odporność na pewną klasę niepewności [38]. Z tego powodu metoda ta ma duże znaczenie w robotyce, gdzie dominująca grupa układów mechanicznych wykazuje właściwości silnie nieliniowe. W ostatnim czasie można znaleźć szereg publikacji omawiających zastosowania metody LQR, często w kontekście złożonych technik hybrydowych do sterowania manipulatorami ze sztywnymi lub podatnymi złączami [94, 15, 5]. W szczególności rozwiązania sterowania oparte na LQR zostały zaproponowane dla klasy systemów niedosterowanych [50, 96, 92, 44]. W niektórych przypadkach podejście LQR zostało zastosowane np. jako metoda strojenia dla ściśle nieliniowych regulatorów, np. [2]. Prace dotyczą również

modyfikacji strategii LQR dla układów nieliniowych, jak np. zależne od stanu równanie Riccatiego (SDRE) [109] i jego różne implementacje [8, 87, 25]. Ponadto techniki inspirowane dynamicznym programowaniem różniczkowym [35, 91] prowadzą do iteracyjnej metody LQR (iLQR) [47, 93], dla której dynamika jest linearyzowana sekwencyjnie, a funkcja kosztu w otoczeniu trajektorii nominalnej jest obliczana w celu wyznaczenia sterowania typu LQR.

W niniejszej pracy odwołujemy się do zagadnień z zakresu nieliniowej teorii sterowania oraz używamy koncepcji równoważnych układów ze sprzężeniem zwrotnym [74] w celu poprawy skuteczności strategii LQR poprzez rozszerzenie zestawu możliwych warunków początkowych, które definiują tzw. basen przyciągania (*ang. basin of attraction*), lub inaczej obszar zbieżności. Rozważana metodyka polega na wykorzystaniu liniowego sprzężenia zwrotnego od stanu zaprojektowanego dla liniowej aproksymacji równoważnego układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym i wyznaczeniu stabilizatora przy wykorzystaniu transformacji stanu i wejścia. Kluczowym składnikiem jest przekształcenie pierwotnej dynamiki do postaci, która wykazuje lepsze właściwości do syntezy regulatora liniowego. W szczególnych przypadkach wynikowa dynamika może być nawet liniowa [37], co może znacznie poprawić działanie sterownika w danym podzbiore przestrzeni stanów, w którym linearyzacja jest możliwa.

Aby zbadać wpływ reprezentacji przestrzeni stanów na charakterystykę układu zamkniętego rozpatrywanych manipulatorów, oryginalna dynamika Lagrange'a została przekształcona w dwie alternatywne formy. Formy te wykorzystują tzw. quasi-prędkości, które w mechanice analitycznej rozumiane są jako liniowe kombinacje prędkości uogólnionych ze współczynnikami będącymi funkcjami współrzędnych uogólnionych [53, 30]. W pierwszej postaci wykorzystywane są znormalizowane quasi-prędkości inercyjne (QPZ) zaproponowane przez Jaina i Rodrigueza w [36, 76], które pochodzą z faktoryzacji macierzy mas. Dodatkowo, wykorzystując quasi-prędkości oraz nieliniową transformację współrzędnych dynamikę manipulatora można przedstawić w tzw. postaci normalnej [60]. Postać taka, rozpatrywana m.in. w problemach klasyfikacyjnych, podkreśla w uporządkowany sposób istotne cechy nieliniowego układu dynamicznego [46].

W przypadku projektowania sprzężenia zwrotnego w oparciu o równania układu przekształconego kryterium strojenia regulatora LQR wydaje się kluczowe [108, 62]. Sterownik LQR powinien więc uwzględniać wskaźniki jakości wyznaczone dla pierwotnego systemu, tj. uwzględniać stan tego systemu oraz wydatek energetyczny związany z rzeczywistym wejściem. W pracy przedstawiono sposób wyznaczania wzmocnień zapewniający wzajemnie jednoznaczność dynamikę układu zamkniętego w otoczeniu punktu zadanego niezależnie od przyjętej reprezentacji stanu i wejścia. Ponadto zaprezentowana została równoważna postać kwadratowa opisująca kryterium optymalizacji w odniesieniu do przekształconej dynamiki.

Powyższy opis dotyczący sterownika  $u_{\text{stab}}$  stanowi jedno z zadań sterowania wprowadzonych we wstępie do rozdziału 4 i dotyczy utrzymania wahadła w pozycji niestabilnej. Drugim nie mniej ważnym zadaniem jest problem podniesienia wahadła, tzw. *swing-up*, oznaczone symbolem  $u_{\text{swing}}$ , które zostanie szczegółowo omówione w poniższych rozdziałach.

## 4.2 Klasyczna częściowa linearyzacja manipulatorów $n$ -DOF

Pod pojęciem „klasyczna” należy rozumieć szeroko stosowaną metodę częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne z wykorzystaniem koncepcji zaprezentowanej w pracach Sponga [81, 84]. Praca ta dotyczy zagadnienia sterowania układów o  $n$  stopniach swobody oraz  $m < n$  napędach, z których każdy napędza pojedynczy stopień swobody.

Zapiszmy ogólną postać obiektu niedosterowanego o  $n$  stopniach swobody (dla  $l$  stopni pasywnych oraz  $m$  aktywnych) w następującej postaci:  $\Sigma = \{\Sigma_p, \Sigma_a\}$ ,

$$\begin{cases} \Sigma_p : & M_{p1}\ddot{q}_p + M_{a1}\ddot{q}_a + \mu_p + G_p = 0 \\ \Sigma_a : & M_{p2}\ddot{q}_p + M_{a2}\ddot{q}_a + \mu_a + G_a = \tau \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\quad (4.4)$$

gdzie  $l + m = n$ , oraz  $q^T = [q_p^T, q_a^T]$ ,  $q_a \in \mathbb{R}^m$ ,  $q_p \in \mathbb{R}^l$ , natomiast indeks dolny  $a$  związany jest

z częścią napędzaną (aktywną), zaś  $p$  odpowiada części nienapędzanej (pasywnej).

### 4.2.1 Linearyzacja typu skojarzonego dla obiektów $n$ -DOF

Przedstawmy proces częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne dla układów niedosterowalnych, które linearyzuje dynamikę napędzanych zmiennych konfiguracyjnych, zwany dalej częściową linearyzacją typu skojarzonego/związanego (*ang. collocated*) z wejściem sterującym, dla obiektu danego zależnościami (4.3)-(4.4).

Wyznamy  $\ddot{q}_p$  z równania (4.3)

$$\ddot{q}_p = -M_{p1}^{-1}(M_{a1}\ddot{q}_a + \mu_p + G_p). \quad (4.5)$$

Podstawiając powyższą zależność do równania (4.4) otrzymujemy

$$\overline{M}_a \ddot{q}_a + \overline{\mu}_a + \overline{G}_a = \tau, \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \overline{M}_a = M_{a2} - M_{p2}M_{p1}^{-1}M_{a1} & (4.7) \\ \overline{\mu}_a = \mu_a - M_{p2}M_{p1}^{-1}\mu_p & (4.8) \\ \overline{G}_a = G_a - M_{p2}M_{p1}^{-1}G_p. & (4.9) \end{cases}$$

Zdefiniujmy sterownik odsprężający układ (4.6) przez sprzężenie zwrotne jako:

$$\tau = \overline{M}_a v + \overline{\mu}_a + \overline{G}_a, \quad (4.10)$$

dla którego  $v \in \mathbb{R}^m$  oznacza nowe wejścia sterujące.

Po zastosowaniu (4.10) do (4.3)-(4.4) otrzymuje się następującą dynamikę

$$\begin{cases} \ddot{q}_a = v & (4.11) \\ \ddot{q}_p = -M_{p1}^{-1}(M_{a1}v + \mu_p + G_p). & (4.12) \end{cases}$$

### 4.2.2 Linearyzacja typu nieskojarzonego dla obiektów $n$ -DOF

Zamiast linearyzować aktywne stopnie swobody  $q_a$  można rozważyć linearyzację stopni pasywnych  $q_p$ , wykorzystując nieliniowe sprzężenie zwrotne. Rozważmy proces częściowej linearyzacji typu nieskojarzonego (*ang. noncollocated*), dla obiektu danego zależnościami (4.3-4.4).

Wyznamy  $\ddot{q}_a$  z równania (4.3)

$$\ddot{q}_a = -M_{a1}^\dagger(M_{p1}\ddot{q}_p + \mu_p + G_p), \quad (4.13)$$

gdzie

$$M_{a1}^\dagger = M_{a1}^T(M_{a1}M_{a1}^T)^{-1} \quad (4.14)$$

jest prawą pseudoinwersją.

Podstawiając (4.13) do równania (4.4) otrzymujemy

$$\overline{M}_p \ddot{q}_p + \overline{\mu}_a + \overline{G}_a = \tau, \quad (4.15)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \overline{M}_p = M_{p2} - M_{a2}M_{a1}^\dagger M_{p1} & (4.16) \\ \overline{\mu}_a = \mu_a - M_{a2}M_{a1}^\dagger \mu_p & (4.17) \\ \overline{G}_a = G_a - M_{a2}M_{a1}^\dagger G_p. & (4.18) \end{cases}$$

Zdefiniujmy sterownik odsprężający układ (4.15) przez sprzężenie zwrotne jako:

$$\tau = \overline{M}_p v + \overline{\mu}_a + \overline{G}_a, \quad (4.19)$$

dla którego  $v \in \mathbb{R}^l$  jest nowym wejściem sterującym.

Warto podkreślić, że zastosowanie metody (4.19) wymaga tego, aby macierz  $\overline{M}_p$  była nieosobliwa.



Po zastosowaniu sterowania (4.19) do (4.15) rozważany system możemy zapisać w następującej ogólnej formie jako

$$\begin{cases} \ddot{q}_a = -M_{a1}^\dagger(M_{p1}\mathbf{v} + \mu_p + G_p) \\ \ddot{q}_p = \mathbf{v}. \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\quad (4.21)$$

Uwaga: Zgodnie z Definicją 1, zamieszczoną w pracy [81], pseudoinwersja (4.14) istnieje wtedy i tylko wtedy gdy

$$\text{rank}(M_{a1}(q)) = l, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n, \quad (4.22)$$

tzn. gdy  $m \geq l$ , tj. gdy liczba napędzanych stopni swobody jest co najmniej taka, jak liczba pasywnych stopni swobody.

Definicja ta jest warunkiem sterowalności i zapewnia, że wektor przyspieszeń  $\mathbf{v}$  we wzorze (4.20) może zostać wykorzystany jako wejście sterujące do sterowania konfiguracją  $q_a$ .

### 4.2.3 Pomocnicze zadanie sterowania

Dynamika niedosterowanego obiektu zarówno (4.11)-(4.12) jak i (4.20)-(4.21) może zostać przedstawiona jako

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\nu, \quad (4.23)$$

gdzie  $x = [q_a^T, \dot{q}_a^T, q_p^T, \dot{q}_p^T]^T \in X \subset \mathbb{R}^{2n}$ , przy czym  $X$  jest przestrzenią stanu, natomiast  $\nu$  jest wejściem.

Celem pomocniczego zadania sterowania jest śledzenie pewnej trajektorii referencyjnej tak, by zapewnić asymptotyczną zbieżność trajektorii wyjścia  $y(t) = h(q(t))$  do zadanej  $y_d(t)$ , co można wyrazić to za pomocą następującej zależności

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_d(t)) = 0. \quad (4.24)$$

Odwołując się do zagadnień przedstawionych w rozdziale 3.2.1, poszukiwać będziemy więc takiej funkcji wyjścia  $y = [h_1(q), \dots, h_j(q)]^T \in \mathbb{R}$ , która wykorzystana w procesie sterowania zapewni uzyskanie możliwie najmniejszego wymiaru dynamiki zerowej.

Zdefiniujmy funkcję wyjścia

$$y = h(x, \varrho), \quad (4.25)$$

gdzie  $\varrho$  oznacza zbiór dodatkowych zmiennych jawnie zależnych od czasu.

Dla obiektu niedosterowanego o  $m$  aktywnych stopniach swobody wyznaczając kolejne pochodne funkcji  $y$  uzyskamy finalnie zależność, w której pojawi się sygnał sterujący  $\nu$ :

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} = L_f h + \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4.26)$$

$$\ddot{h} = \frac{\partial h}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} = L_f^2 h + \frac{\partial}{\partial t} L_f h + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = L_f^2 h + L_f \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, \quad (4.27)$$

$$\ddot{\ddot{h}} = L_f^3 h + L_f^2 \frac{\partial h}{\partial t} + L_f \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}, \quad (4.28)$$

⋮

$$h^{(r)} = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h \nu + \sum_{i=0}^{r-1} L_f^i \frac{\partial^{r-i} h}{\partial t^{r-i}}, \quad (4.29)$$

gdzie dla obiektu (4.23)  $r$  jest rzędem względnym zdefiniowanym w rozdziale 3.1. Symbol  $\frac{\partial h}{\partial t}$  jest wykorzystany do wyznaczenia pochodnej funkcji  $h$  względem zmiennych jawnie zależnych od czasu. W celu odsprężenia dynamiki (4.29) określmy następujący sygnał wejściowy

$$\nu = \left( L_g L_f^{r-1} h \right)^{-1} \left( u - L_f^r h - \sum_{i=0}^{r-1} L_f^i \frac{\partial^{r-i} h}{\partial t^{r-i}} \right), \quad (4.30)$$

przy czym  $u \in \mathbb{R}$  jest pomocniczym wejściem.

Przy założeniu, że w pewnym zbiorze  $x \in X$  spełniony jest warunek (4.31)

$$\det(L_g L_f^{r-1} h) \neq 0, \quad (4.31)$$

otrzymuje się układ odsprężony w postaci

$$y^{(r)} = u. \quad (4.32)$$

W celu asymptotycznego śledzenia trajektorii  $y_d$  można zastosować następujące równanie sterownika

$$u = y_d^{(r)} + \sum_{i=0}^{r-1} K_i (y_d^{(i)} - h^{(i)}), \quad (4.33)$$

przy czym  $K_i$  są dodatnio określonymi macierzami wzmocnień odpowiednio dobranymi tak, aby spełnić warunek Hurwitza oraz uzyskać założony czas zbieżności trajektorii błędu do zera.

#### 4.2.4 Sterowalność

Transformacja stanu oraz sygnału wejściowego może pociągać za sobą utratę sterowalności w przypadku gdy przekształcenia nie są bijekcją. Zagadnienie to zostanie zbadane dla rozważanych transformacji.

#### STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW LINIOWYCH

Niech dany będzie standardowy układ liniowy ciągły opisany równaniami:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.34)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.35)$$

przy czym  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  oznacza stan  $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$  i  $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$  są odpowiednio wymuszeniem (wejście) i odpowiedzią (wyjściem), a  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , i  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  określają macierze o stałych współczynnikach.

Sterowalność jest związana z możliwością wpływu sygnału sterującego na współrzędne stanu. Układ jest *sterowalny*, jeżeli za pomocą sygnału sterującego można oddziaływać na wszystkie zmienne stanu. Stan układu sterowalnego można za pomocą odpowiedniego sterowania w skończonym czasie sprowadzić do dowolnego punktu w przestrzeni stanów [29]. Do określenia sterowalności układów liniowych o parametrach niezależnych jawnie od czasu, tj. układów LTI, służą kryteria sterowalności sformułowane przez R.E. Kalmana. Dla stwierdzenia, czy układ (4.34) jest sterowalny, rozpatruje się macierz o wymiarach  $(n \times nm)$

$$\mathcal{A}^s = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]. \quad (4.36)$$

Rząd macierzy  $\mathcal{A}^s$  jest równy liczbie stanów sterowalnych układu (4.34). Jeśli rząd macierzy  $\mathcal{A}^s$  jest równy  $n$ , to układ (4.34) jest sterowalny.

#### STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Choć problem sterowalności układów nieliniowych jest bardziej złożony, to z uwagi na użyte metody sterowania w tej pracy będziemy się posługiwali warunkami sterowalności w sensie Kalmana [58]. Badając sterowalność systemu (4.23) w otoczeniu punktu pracy  $(x_0, u_0)$  poszukuje się liniowej aproksymacji w jego otoczeniu, a następnie sprawdza, czy

$$\text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n, \quad (4.37)$$

gdzie  $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}$ ,  $B = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}$ .

W przypadku, gdy rozpatrujemy pewną przestrzeń stanu układu nieliniowego  $X^* \in X$ , możemy posługiwać się alternatywną postacią macierzy sterowalności z wykorzystaniem iterowanego nawiasu Liego. Dla układu (4.23) mamy

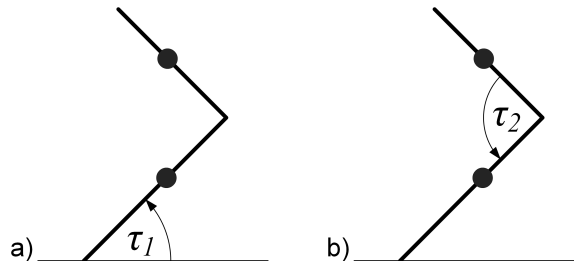
$$\mathcal{A}^s = [\chi_i, [\chi_{i-1}, [\dots, [\chi_2, \chi_1] \dots]]], \quad (4.38)$$

gdzie  $\chi_i$  jest polem wektorowym w zbiorze  $\{f, g_1, \dots, g_i\}$ ,  $i = \{1, \dots, m\}$  dla linearyzacji typu skojarzonego, lub  $i = \{1, \dots, l\}$  dla linearyzacji typu nieskojarzonego.

Jeśli rząd macierzy  $\mathcal{A}^s$  jest równy  $n$ , to układ jest sterowalny dla  $X^* \in X$ .

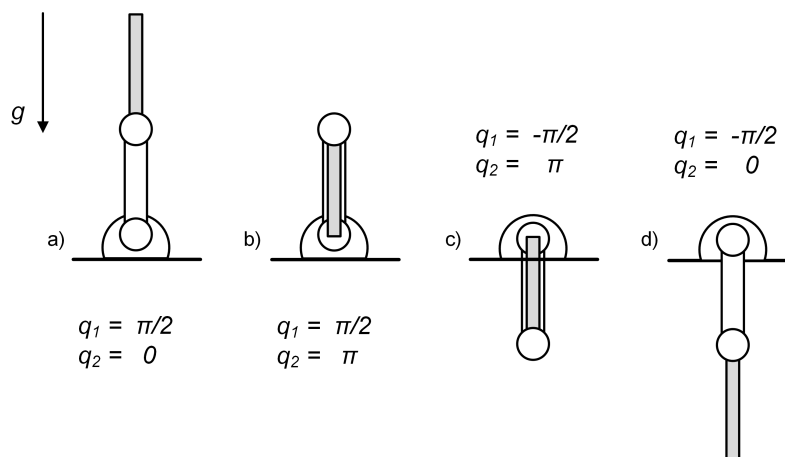
### 4.3 Częściowa linearyzacja dla manipulatora 2-DOF

Uszczegóławiając zagadnienia przedstawione w części 4.2 prześledźmy proces częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne dla wahadła o 2 stopniach swobody. W niniejszym podrozdziale ograniczymy się do przypadku gdy  $n = 2$  oraz  $m = 1$ , co w zależności od umiejscowienia napędu, odpowiada dwóm przypadkom – robotowi typu Pendubot (rysunek 4.2a) oraz Acrobot (rysunek 4.2b).



Rysunek 4.2: Rozmieszczenie napędów dla analizowanego robota o 2 DOF

Biorąc pod uwagę drugi wiersz wektora (2.17) oraz zakładając, że w równaniu (2.14) wejście  $\tau = [0 \ 0]^T$ , możemy otrzymać następującą zależność opisującą warunek równowagi wahadła:  $\cos(q_1 + q_2) = 0$ . System ten posiada wtedy 4 punkty charakterystyczne: pierwsze dwa są pozycjami niestabilnymi, dla których  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ , oraz  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0)$ . Pozostałe dwa punkty, określone przez  $(-\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0)$  oraz  $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$  są trywialne i nie podlegają analizie. Pozycja z rysunku a) przedstawia natomiast podstawową **konfigurację nietrywialną** i stanowi ważny punkt w dalszej analizie. Interpretacja geometryczna układu w punktach równowagi została przedstawiona na rysunku 4.3.



Rysunek 4.3: Punkty równowagi dla manipulatora o 2 DOF, przy zerowym wymuszeniu

#### 4.3.1 Propozycja sterowania

Nawiązując do rozdziału 4.2.3 przedstawimy postać pomocniczego wejścia (4.33).

UWAGA: Zakładamy, że wartości referencyjne funkcji wyjścia będą rozpatrywane w zerze, tj. dla

$$\left( \ddot{y}^d, \dot{y}^d, y^d \right) = (0, 0, 0), \quad (4.39)$$

oraz wartości referencyjne

$$\left( \ddot{q}_i^d, \dot{q}_i^d, q_i^d \right) = (0, 0, \text{const}) \quad \text{dla } i = 1, 2 \quad (4.40)$$

są wartościami stałymi, tzn. zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu.

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.25) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d), \quad (4.41)$$

gdzie  $h \in \mathbb{R}$  oraz  $k_{11}, k_{12}$  przyjmują wartości ze zbioru  $\{0, 1\}$ .

Wyznaczmy kolejne pochodne funkcji (4.41), dla obiektu opisanego dynamiką (4.23):

$$\dot{h} = L_f h \quad (4.42)$$

$$\ddot{h} = L_f^2 h + L_g L_f h \nu. \quad (4.43)$$

W celu odsprężania dynamiki (4.43) zdefiniujemy następujący sygnał wejściowy  $\nu \in \mathbb{R}^1$

$$\nu = (L_g L_f h)^{-1}(u - L_f^2 h), \quad (4.44)$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym przez

$$u = -K_d L_f h - K_p h, \quad (4.45)$$

przy czym  $K_p, K_d$ , są dodatnimi wzmocnieniami.

Z równania (4.30) wynika, że jako wyjścia częściowo linearyzujące można wziąć dowolną funkcję  $h$  taką, dla której  $L_g L_f h \neq 0$  dla  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^4$ .

### 4.3.2 Dynamika układu zamkniętego

Przedstawmy ogólną postać dynamiki układu zamkniętego, uwzględniającą propozycję sterowania z rozdziału 4.3.1.

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Wprowadzając zmienne stanu

$$\begin{aligned} z_1 &= h(q), & \eta_1 &= q_p, \\ z_2 &= \dot{h}(q), & \eta_2 &= \dot{q}_p, \end{aligned} \quad (4.46)$$

dynamikę układu zamkniętego możemy zapisać w następującej ogólnej postaci

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{h}_1 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \ddot{q}_p = -M_{p1}^{-1}(M_{a1}v + \mu_p + G_p) \\ \tilde{y}_1 &= z_1. \end{aligned} \quad (4.47)$$

#### LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Wprowadzając zmienne stanu

$$\begin{aligned} \eta_1 &= h(q), & z_1 &= q_a, \\ \eta_2 &= \dot{h}(q), & z_2 &= \dot{q}_a, \end{aligned} \quad (4.48)$$

dynamikę układu zamkniętego możemy zapisać w następującej ogólnej postaci

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \ddot{h} \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -M_{a1}^\dagger(M_{p1}v_1 + \mu_p + G_p) \\ \tilde{y}_1 &= \eta_1. \end{aligned} \quad (4.49)$$

### 4.3.3 Częściowa linearyzacja dla robota typu Pendubot

Przejdźmy do analizy częściowej linearyzacji dla pierwszego ze scenariuszy, w którym zakładamy, że napędy umieszczone są w pierwszym złączu, zgodnie z rysunkiem 4.2b. Szczegółową postać równania dynamiki (4.3)-(4.4) dla analizowanego wahadła możemy zapisać w następującej formie

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \mu_1 + G_1 = \tau & (4.50) \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \mu_2 + G_2 = 0, & (4.51) \end{cases}$$

gdzie:

$$\ddot{q}_a = \ddot{q}_1, \quad \ddot{q}_p = \ddot{q}_2,$$

oraz

$$\begin{aligned} M_{p1} &= m_{22}, & M_{a1} &= m_{21}, & \mu_p &= \mu_2, & G_p &= G_2, \\ M_{p2} &= m_{12}, & M_{a2} &= m_{11}, & \mu_a &= \mu_1, & G_a &= G_1. \end{aligned}$$

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Dla modelu (4.50)-(4.51) częściowo zlinearyzowany system (4.11)-(4.12) można przedstawić w szczególnej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v \\ \ddot{q}_2 = -m_{22}^{-1}(m_{21}v + \mu_2 + G_2). \end{cases} \quad (4.52)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2]^T \quad (4.53)$$

oraz  $\tilde{J}_1 = -\frac{m_{21}}{m_{22}}$ , otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{J}_1 \end{bmatrix}}_{g(x)} v. \quad (4.54)$$

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.3.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla następującej postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.41) są następujące:

$$k_{11} = 0, \quad k_{12} = 1. \quad (4.55)$$

Równanie (4.30) przybiera więc postać

$$v = 1u, \quad (4.56)$$

gdzie sygnał  $u$  dany (4.33) możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_1 - K_p(q_1 - q_1^d) = v, \quad (4.57)$$

natomiast zmienne stanu (4.46) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 - q_1^d & z_2 &= \dot{q}_1 \\ \eta_1 &= q_2 & \eta_2 &= \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.40) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left( \ddot{q}_1^d, \dot{q}_1^d, q_1^d \right) = \left( 0, 0, \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.59)$$

to dynamika (4.47) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_p z_1 - K_d z_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2 - m_{21}(K_p z_1 + K_d z_2)) \\ \ddot{y}_2 &= z_1.\end{aligned}\tag{4.60}$$

W postaci macierzowej powyższe równania możemy zapisać jako

$$\dot{z} = Az \tag{4.61}$$

$$\dot{\eta} = \omega(q_2, z, \eta, t) \tag{4.62}$$

$$\tilde{y} = Cz \tag{4.63}$$

dla której  $z = [z_1, z_2]^T$ ,  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , zaś macierze  $A$  i  $C$  określone są przez

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \tag{4.64}$$

natomiast dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2 - m_{21}(K_p z_1 + K_d z_2)) \end{bmatrix}. \tag{4.65}$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.59) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.65), tj.

$$\dot{\eta}_2 = -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2 - m_{21}(K_p z_1 + K_d z_2)) \Big|_{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d, q_1 = q_1^d} \tag{4.66}$$

redukuje się do

$$\dot{\eta}_2 = g \sin q_2. \tag{4.67}$$

Finalnie, zależność (4.65) zdefiniowana jako:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ g \sin q_2 \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Przywołajmy twierdzenie dotyczące stabilności układu pełnego oraz zredukowanego, z uwzględnieniem kwestii dynamiki zerowej [81].

#### Twierdzenie 4.3.1

Rozważmy system opisany równaniami (4.61)-(4.63). Załóżmy, że  $\omega(0, \eta, t) = 0$  dla  $t \geq 0$ , t.j.  $(0, \eta_0)$  jest punktem równowagi całego systemu (4.61)-(4.63), oraz  $\eta_0$  jest punktem równowagi dynamiki zerowej danej wzorem (4.68). Załóżmy także, że  $A$  jest macierzą Hurwitza. Wtedy punkt  $(0, \eta_0)$  całego systemu (4.61)-(4.63) jest lokalnie stabilny (lub lokalnie asymptotycznie stabilny, lub niestabilny) jeśli punkt  $\eta_0$  jest lokalnie stabilny (lub lokalnie asymptotycznie stabilny, lub niestabilny) dla dynamiki zerowej danej zależnością (4.68).

Kluczowym wnioskiem płynącym z tego twierdzenia jest fakt, że własność lokalnej stabilności pełnego systemu może zostać określona na podstawie dwóch systemów o zredukowanym rzędzie, tzn. (4.61) oraz (4.68).

Dokonajmy linearyzacji dynamiki (4.68) celem określenia jej stabilności w otoczeniu punktu równowagi, dla  $\hat{x} = [q_2, \dot{q}_2]^T$

$$Y = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\substack{q_2=0 \\ \dot{q}_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos q_2 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{q_2=0 \\ \dot{q}_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.69}$$

Wartości własne wyrażenia (4.69):  $\text{eig}(Y) = [-1, 1]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

Wyznamy w sposób jawny rozwiązanie równania (4.68). Wprowadzając nowe zmienne

$$q_2 = \chi_1, \quad \dot{q}_2 = \chi_2,$$

mamy:

$$\frac{d\chi_1}{dt} = \chi_2, \quad \frac{d\chi_2}{dt} = g \sin \chi_1, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\chi_1}{\chi_2} = \frac{d\chi_2}{g \sin \chi_1} \quad \Rightarrow \quad g \sin \chi_1 d\chi_1 = \chi_2 d\chi_2.$$

W wyniku otrzymujemy

$$-g \cos \chi_1 = \frac{1}{2} \chi_2^2 + C_1$$

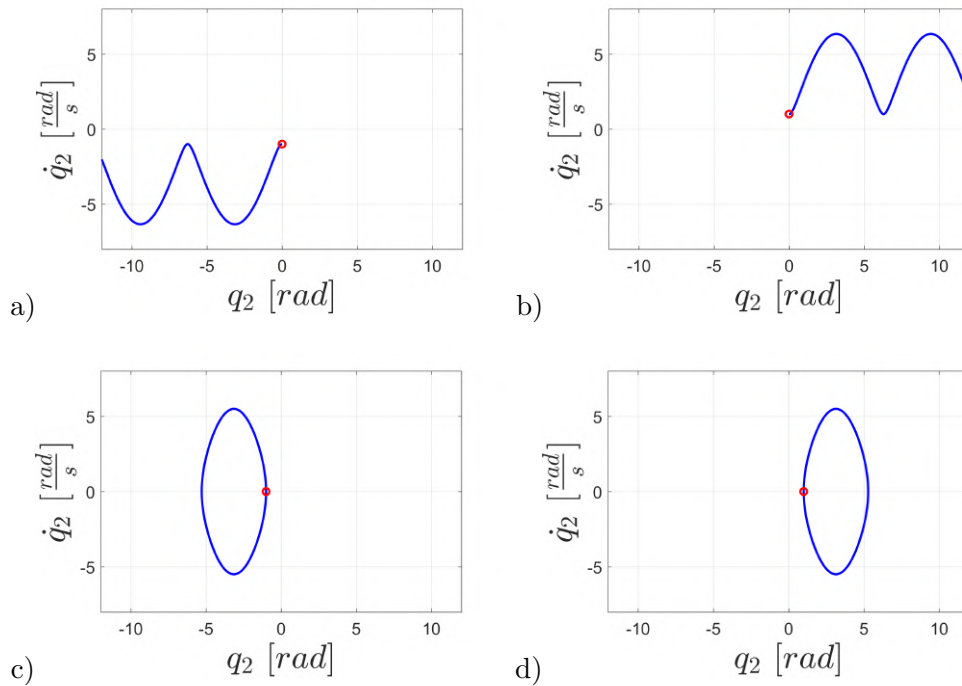
co jest tożsame z

$$-g \cos q_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + C_1.$$

Ostatecznie

$$\dot{q}_2 = \pm \sqrt{-2g \cos q_2 + C_2}. \quad (4.70)$$

Wynikiem całkowania wyrażenia (4.70) jest funkcja eliptyczna. Rysunki 4.4 i 4.5 stanowią graficzną interpretację otrzymanego wyniku, uzyskaną drogą numerycznych symulacji, dla różnych zestawów warunków początkowych. Przyjęto horyzont czasu  $T_{\text{sim}} = 10\text{s}$ . Czerwony okrąg  $\circ$  oznacza początek trajektorii.



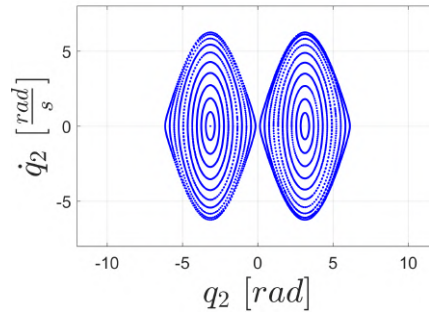
**Rysunek 4.4:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [1, 0]$ . Znacznik  $\circ$  oznacza punkt początkowy.

#### LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Zamiast linearyzować aktywny stopień swobody  $q_1$  możemy rozważyć linearyzację pasywnych stopni  $q_2$  wykorzystując nieliniowe sprzężenie zwrotne.

Dla modelu (4.50)-(4.51) częściowo zlinearyzowany system (4.20)-(4.21) można przedstawić w szczególnej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 &= -m_{21}^{-1}(m_{22}v + \mu_2 + G_2). \\ \ddot{q}_2 &= v \end{cases} \quad (4.71)$$



Rysunek 4.5: Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych:  $q_2 \in (-\pi, \pi)$ ,  $\dot{q}_2 = 0$ ,

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2]^T \quad (4.72)$$

oraz  $\tilde{J}_2 = -\frac{m_{22}}{m_{21}}$ , otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ -m_{21}^{-1}(\mu_2 + G_2) \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} v. \quad (4.73)$$

W powyższym przypadku pasywne stopnie swobody  $q_2$  zostały zlinearyzowane i odsprężone od reszty układu.

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.3.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla następującej postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.41) są następujące:

$$k_{11} = 0, \quad k_{12} = 1. \quad (4.74)$$

Równanie (4.30) przybiera więc postać

$$v = 1u, \quad (4.75)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_2 - K_p (q_2 - q_2^d) = v, \quad (4.76)$$

natomiast zmienne stanu (4.48) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 & z_2 &= \dot{q}_1 \\ \eta_1 &= q_2 - q_2^d & \eta_2 &= \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.40) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$(\ddot{q}_2^d, \dot{q}_2^d, q_2^d) = (0, 0, 0), \quad (4.78)$$

to dynamika (4.49) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -K_p \eta_1 - K_d \eta_2 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -m_{21}^{-1} (\mu_2 + G_2 - m_{22} (K_p \eta_1 + K_d \eta_2)) \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \eta_1. \end{aligned} \quad (4.79)$$



W postaci macierzowej powyższe równania możemy zapisać jako

$$\dot{\eta} = A\eta \quad (4.80)$$

$$\dot{z} = s(q_2, \eta, z, t) \quad (4.81)$$

$$\tilde{y} = C\eta \quad (4.82)$$

dla której  $z = [z_1, z_2]^T$ ,  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , zaś macierze  $A$  i  $C$  określone są przez

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (4.83)$$

natomiast dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -m_{12}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{11}(K_p\eta_1 + K_d\eta_2)) \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.78) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.84), tj.

$$\dot{z}_2 = -m_{21}^{-1} (\mu_2 + G_2 - m_{22}(K_p\eta_1 + K_d\eta_2)) \Big|_{\dot{q}_2=\dot{q}_2^d, q_2=q_2^d} \quad (4.85)$$

redukuje się do

$$\dot{z}_2 = \frac{a_5}{a_2} g \cos q_1. \quad (4.86)$$

Finalnie, zależność (4.84) zdefiniowana jako:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{a_5}{a_2} g \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy linearyzacji dynamiki (4.87) celem określenia jej stabilności w otoczeniu punktu równowagi, dla  $\hat{x} = [q_1, \dot{q}_1]^T$

$$Y = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\substack{q_1=\frac{\pi}{2} \\ \dot{q}_1=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g\frac{a_5}{a_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

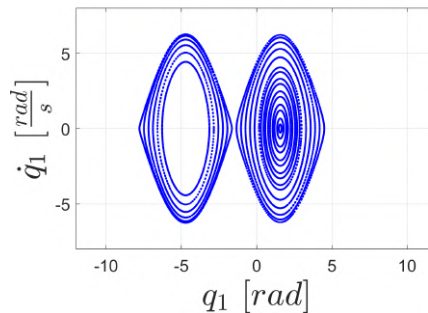
Wartości własne wyrażenia (4.88):  $\text{eig}(Y) = [-1.9809i, 1.9809i]^T$  nie pozwalają jednoznacznie ocenić stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

Stabilność tę można określić poprzez formalne rozwiązanie równania dynamiki podobnie jak miało to miejsce dla przypadku linearyzacji typu skojarzonego.

Ostatecznie otrzymujemy

$$\dot{q}_1 = \pm \sqrt{2\frac{a_5}{a_2} g \sin q_1 + C}. \quad (4.89)$$

Graficzna interpretacja rozwiązania dynamiki zerowej w postaci portretu fazowego przedstawiona została na rysunku 4.6.



**Rysunek 4.6:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych:  $q_1 \in (-\pi, \pi)$ ,  $\dot{q}_1 = 0$ ,

#### 4.3.4 Pendubot – sterownik energetyczny

Przywołajmy ideę stojącą za sterowaniem energetycznym dla robota typu Pendubot. Block [10] zaproponował strategię sterowania dla Pendubota bazującą na dwóch algorytmach. Do rozwiązania zadania podniesienia wahadła (*swing-up*) zastosowano technikę częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne [85]. Natomiast do rozwiązania zadania stabilizacji użyto technik linearyzacji wokół zadanego punktu równowagi za pomocą regulatora LQR. Sterownik zaproponowany w pracy [21] nie opiera się na technikach linearyzacji, lecz odwołuje się do pasywności Pendubota oraz wykorzystuje podejście energetyczne.

Przypomnijmy model niedosterowanego robota o dwóch stopniach swobody, przedstawionego w rozdziale 2.2.4. Jego całkowita energia mechaniczna dana jest zależnością

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + K(q) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + a_4 g \sin q_1 + a_5 g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Dla pozycji wyprostowanej z rysunku 4.3a, dla której  $(q, \dot{q})_{\text{top}} = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$  otrzymujemy

$$E(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0) = E_{\text{top}} = (a_4 + a_5)g. \quad (4.91)$$

Nadrzędny cel sterowania można zdefiniować jako stabilizację robota wokół jego górnego niestabilnego położenia równowagi  $(q, \dot{q})_{\text{top}}$ .

Założmy, że spełnione są następujące warunki:

- c1)  $\dot{q}_1 = 0$
- c2)  $E(q, \dot{q}) = (a_4 + a_5)g$ .

Wtedy

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_{22} \dot{q}_2^2 + a_4 g \sin q_1 + a_5 g \sin(q_1 + q_2) = (a_4 + a_5)g. \quad (4.92)$$

Z powyższej zależności wynika, że jeśli  $q_1 \neq \frac{\pi}{2}$  wtedy  $\dot{q}_2 > 0$ .

Jeżeli do warunków c1) i c2) dołączymy warunek

- c3)  $q_1 = \frac{\pi}{2}$ ,

to na podstawie zależności (4.92) możemy zapisać następujące równanie

$$\frac{1}{2} m_{22} \dot{q}_2^2 = a_5 g (1 - \cos q_2). \quad (4.93)$$

Definiuje ono trajektorię odpowiadającą orbicie homoklinicznej, co oznacza, że pozycja kątowa złącza drugiego porusza się zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, do momentu gdy osiągnie ono położenie równowagi określone przez  $(q_2, \dot{q}_2) = (0, 0)$ . Tak więc cel sterowania *swing-up* można rozumieć jako przyciąganie trajektorii stanu układu do orbity (4.93) przy  $\dot{q}_1 = 0$  oraz  $q_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Zapewniając zbieżność do podanej orbity homoklinicznej, gwarantujemy, że trajektoria stanu znajdzie się w obszarze przyciągania sterownika odpowiedzialnego za stabilizację.

W pracy [21] zauważono, że dzięki własności pasywności systemu przy projektowaniu sterowania typu *swing-up* pomocnym może być użycie energii całkowitej  $E$  (4.90).

Wprowadzono definicje następujących błędów:

$$\tilde{q}_1 = q_1 - \frac{\pi}{2}, \quad (4.94)$$

$$\tilde{E} = E - E_{\text{top}}, \quad (4.95)$$

które wraz z  $\dot{q}_1$ , w procesie sterowania mają zostać sprowadzone do zera.

Sterownik podany w [21] można przedstawić w postaci

$$\tau_1 = \frac{1}{D_2 k_E \tilde{E} + k_D} \left( -k_D \frac{1}{a_2} F(q, \dot{q}) - D_2 (\dot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1) \right), \quad (4.96)$$

gdzie  $k_E$ ,  $k_D$ , oraz  $k_P$  oznaczają dodatnie parametry,  $D_2 = a_1 - \frac{a_3^2}{a_2} \cos^2 q_2$ ,

$$F = a_2 a_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_3^2 \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_1^2 + a_3 a_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) - a_2 a_4 g \cos q_1. \quad (4.97)$$

Warto przypomnieć, że formuła (4.97) wynika z wyznaczenia  $\ddot{q}_1$  z równania (2.14) dla Pendubota, tj.

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\det(M)} (a_2 \tau_1 + F(q, \dot{q})). \quad (4.98)$$

Bardziej szczegółowe rozważania, oraz analiza stabilności układu zamkniętego z wykorzystaniem funkcji Lyapunowa znajdują się w pracy [21].

Chcąc zrealizować zadanie stabilizacji Pendubota w otoczeniu górnego niestabilnego położenia równowagi  $(q, \dot{q})_{\text{top}}$ , sterownik powinien zostać zastąpiony innym, który zagwarantuje (lokalnie) asymptotyczną stabilność tego punktu równowagi. Sterownik taki może zostać opracowany na wiele sposobów, np. przy użyciu metody LQR, która zapewnia lokalną wykładniczą stabilność górnego położenia równowagi.

#### WARUNKI STOSOWALNOŚCI

Analiza funkcji Lyapunowa zaprezentowana w pracy [21] wskazuje na szereg ograniczeń dotyczących zakresu stosowalności przedstawionego algorytmu.

Zaproponowana funkcja Lyapunowa jest postaci

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} \tilde{E}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{k_P}{2} \tilde{q}_1^2. \quad (4.99)$$

W pracy wykazano, że układ pod działaniem zaproponowanego sterowania nie osiąga osobliwości, jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$|\tilde{E}| \leq \frac{k_D - \epsilon}{k_E a_1}, \quad (4.100)$$

oraz

$$|\tilde{E}| < c = \min \left( 2a_4 g, 2a_5 g, \frac{k_D - \epsilon}{k_E a_1} \right). \quad (4.101)$$

Ze względu na to, że funkcja  $V$  (4.99) musi być nierosnąca, wyrażenie (4.101) jest spełnione, jeśli warunki początkowe są tak wybrane, że

$$V(0) \leq \frac{c^2}{2}. \quad (4.102)$$

Należy zauważyć, że stałe  $2a_4 g, 2a_5 g, \frac{k_D - \epsilon}{k_E a_1}$  nie zależą od konfiguracji robota.

Wyrażenie  $V(0)$  przyjmuje postać:

$$V(0) = \frac{k_E}{2} (E(0) - E_{\text{top}})^2 + \frac{k_P}{2} \tilde{q}_1^2, \quad (4.103)$$

dla  $E(0) = a_4 g \sin q_1 + a_5 g \sin(q_1 + q_2)$ .

W związku z tym spełnienie zależności (4.102) zależy wyłącznie od wartości początkowych  $(q_1, q_2)$  oraz nastaw regulatorów  $k_P$  i  $k_E$ .

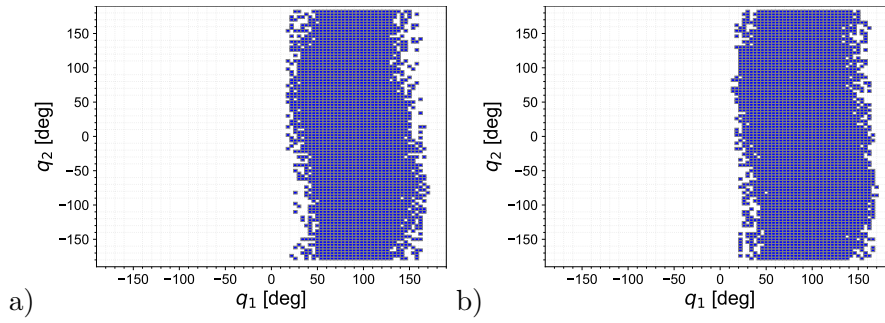
Rysunek 4.7 przedstawia zakres warunków początkowych dla których (4.102) jest spełnione. Przyjęto model, którego parametry opisano w rozdziale 7.1, natomiast poszukując rozwiązań, w zależności (4.103) dokonano 50 zmian parametrów  $k_P, k_E$  dla przypadku „a)” oraz 100 zmian dla „b)”. Z rysunku 4.7 jasno wynika, że metoda zaproponowana w pracy [21] nie gwarantuje spełnienia warunków na istnienie funkcji Lyapunowa w całym zakresie kątów  $q_1 \in (-\pi, \pi), q_2 \in (-\pi, \pi)$ , w wyniku czego zaproponowane prawo sterowania ma jedynie charakter lokalny.

#### 4.3.5 Częściowa linearyzacja dla robota typu Acrobot

Przejdźmy do analizy częściowej linearyzacji dla drugiego ze scenariuszy, w którym zakładamy, że napędy umieszczone są w drugim złączu, zgodnie z rysunkiem 4.2a. Szczegółową postać równania dynamiki (4.3)-(4.4) dla analizowanego wahadła możemy zapisać więc w następującej formie

$$\begin{cases} m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + \mu_1 + G_1 = 0 \\ m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + \mu_2 + G_2 = \tau, \end{cases} \quad (4.104)$$

$$(4.105)$$



Rysunek 4.7: Warunki dla których (4.102) jest spełnione.

gdzie:

$$\ddot{q}_a = \ddot{q}_2, \quad \ddot{q}_p = \ddot{q}_1,$$

oraz

$$\begin{aligned} M_{p1} &= m_{11}, & M_{a1} &= m_{12}, & \mu_p &= \mu_1, & G_p &= G_1, \\ M_{p2} &= m_{21}, & M_{a2} &= m_{22}, & \mu_a &= \mu_2, & G_a &= G_2. \end{aligned}$$

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Dla modelu (4.104)-(4.105) częściowo zlinearyzowany system (4.11)-(4.12) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 &= -m_{11}^{-1}(m_{12}v + \mu_1 + G_1) \\ \ddot{q}_2 &= v. \end{cases} \quad (4.106)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2]^T \quad (4.107)$$

oraz  $\tilde{J}_1 = -\frac{m_{12}}{m_{11}}$ , otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} v. \quad (4.108)$$

#### DYNAMIKA ZEROWA

Odwołując się do zależności opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.3.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla następującej postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD 1.** Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.41) są następujące:

$$k_{11} = 0, \quad k_{12} = 1. \quad (4.109)$$

Równanie (4.30) przybiera więc postać

$$v = 1u, \quad (4.110)$$

gdzie sygnał  $u$  dany (4.33) możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_2 - K_p (q_2 - q_2^d) = v, \quad (4.111)$$

natomiast zmienne stanu (4.46) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_2 - q_2^d & z_2 &= \dot{q}_2 \\ \eta_1 &= q_1 & \eta_2 &= \dot{q}_1. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla sterowań (4.111) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left(\ddot{q}_2^d, \dot{q}_2^d, q_2^d\right) = (0, 0, 0), \quad (4.113)$$

to dynamika (4.47) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_p z_1 - K_d z_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -m_{11}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{12}(K_p z_1 + K_d z_2)) \\ \dot{y}_2 &= z_1. \end{aligned} \quad (4.114)$$

W postaci macierzowej powyższe równania możemy zapisać jako

$$\dot{z} = Az \quad (4.115)$$

$$\dot{\eta} = \omega(q_2, z, \eta, t) \quad (4.116)$$

$$\tilde{y} = Cz \quad (4.117)$$

dla której  $z = [z_1, z_2]^T$ ,  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , zaś macierze  $A$  i  $C$  określone są przez

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (4.118)$$

natomiast dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -m_{11}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{12}(K_p z_1 + K_d z_2)) \end{bmatrix}. \quad (4.119)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.113) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.119), tj.

$$\dot{\eta}_2 = m_{11}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{12}(K_p z_1 + K_d z_2)) \Big|_{\dot{q}_2=\dot{q}_2^d, q_2=q_2^d} \quad (4.120)$$

redukuje się do

$$\dot{\eta}_2 = \chi \cos q_1 \quad (4.121)$$

dla  $\chi = -\frac{a_4 + a_5}{a_1 + a_2 + 2a_3}$ .

Finalnie, zależność (4.119) zdefiniowana jako:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \chi \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową** i ma postać analogiczną do (4.87).

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy linearyzacji dynamiki (4.122) celem określenia jej stabilności w otoczeniu punktu równowagi dla  $\hat{x} = [q_1, \dot{q}_1]^T$

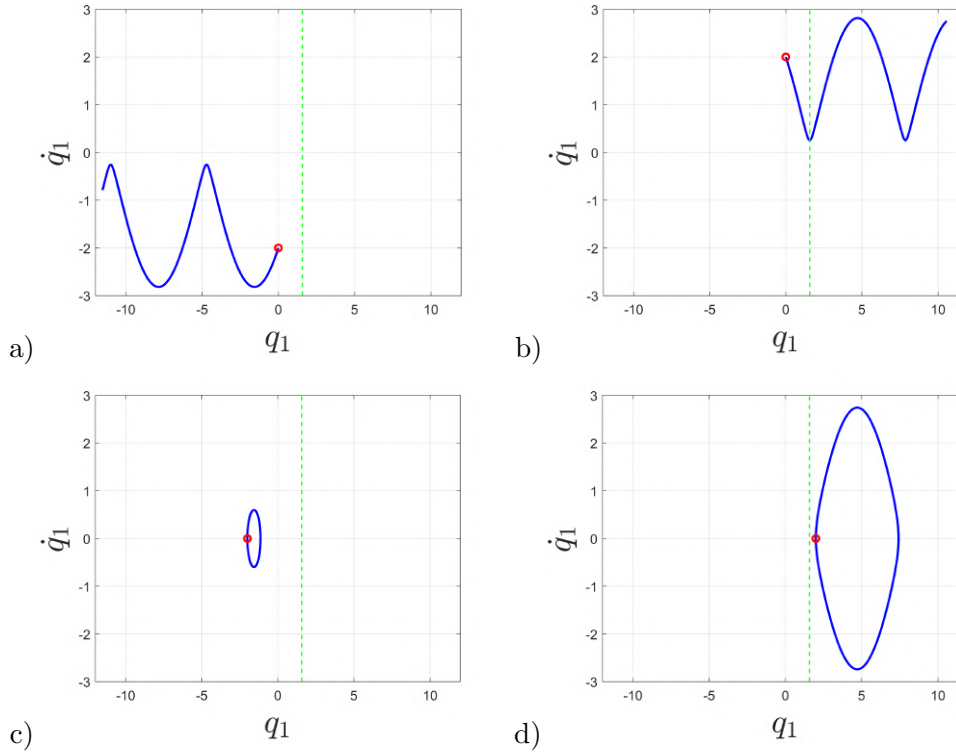
$$Y = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\substack{q_1=0 \\ \dot{q}_1=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\chi \sin q_1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{q_1=\frac{\pi}{2} \\ \dot{q}_1=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.123)$$

Wartości własne wyrażenia (4.123):  $\text{eig}(Y) = [-1i, 1i]^T$  nie pozwalają jednoznacznie ocenić stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi. Rozwiązanie równania (4.122) jest analogiczne jak w przypadku robota typu *Pendubot* i linearyzacji typu nieskojarzonego.

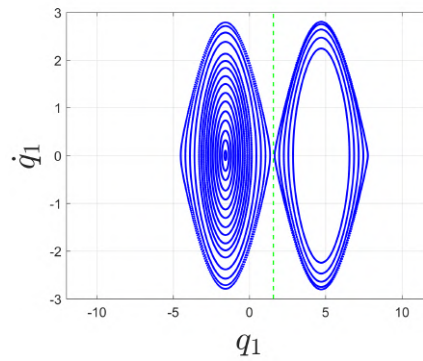
Graficzna interpretacja rozwiązania dynamiki zerowej w postaci portretu fazowego przedstawiona została na rysunku 4.8 i 4.9.

**PRZYKŁAD 2.** Rozpatrzmy zagadnienie dynamiki zerowej dla obiektu o dynamice wewnętrznej danej zależnością (4.119). Przyjmijmy zgodnie z [81], że trajektoria referencyjna dla ogniwa 2 będzie funkcją prędkości  $\dot{q}_1$  ogniwa pierwszego:

$$q_2^d = \frac{2\alpha}{\pi} \arctan \dot{q}_1. \quad (4.124)$$



**Rysunek 4.8:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -2]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 2]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-2, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [2, 0]$ . Znacznik  $\circ$  oznacza punkt początkowy.



**Rysunek 4.9:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych:  $q_1 \in (-\pi, \pi)$ ,  $\dot{q}_1 = 0$ ,

W literaturze można spotkać się z określeniem, że zastosowanie powyższej formy trajektorii referencyjnej stanowi odpowiednik sterowania energetycznego, przedstawionego w rozdziale 4.3.4.

Obliczając pierwszą i drugą pochodną sygnału  $q_2^d$  z równania (4.124) otrzymujemy

$$\dot{q}_2^d = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{1 + \dot{q}_1^2} \ddot{q}_1, \quad \ddot{q}_2^d = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{-2\dot{q}_1 \ddot{q}_1 \dot{q}_1}{(1 + \dot{q}_1^2)^2} + \frac{1}{1 + \dot{q}_1^2} q_1^{(3)} \right). \quad (4.125)$$

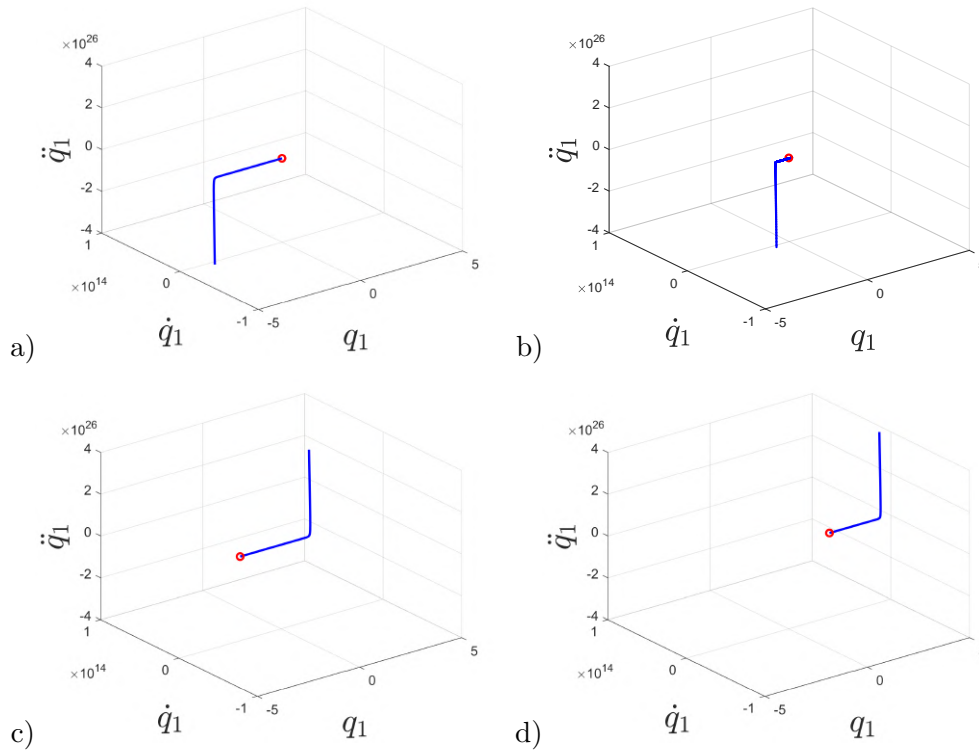
Następnie podstawiając (4.124) oraz (4.125) do (4.119) mamy

$$\dot{\eta}_2(0) = -m_{11}^{-1}[\mu_1 + G_1] - m_{11}^{-1}m_{12} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{-2\dot{q}_1 \ddot{q}_1 \dot{q}_1}{(1 + \dot{q}_1^2)^2} + \frac{1}{1 + \dot{q}_1^2} q_1^{(3)} \right) = 0, \quad (4.126)$$

co ostatecznie pozwala zapisać

$$\frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{m_{12}(q_2^d)}{1 + \dot{q}_1^2} q_1^{(3)} - 2 \frac{m_{12}(q_2^d) \dot{q}_1}{(1 + \dot{q}_1^2)^2} \ddot{q}_1 \right) + \mu_1 + G_1 = 0. \quad (4.127)$$

Graficzna interpretacja rozwiązania dynamiki zerowej w postaci portretu fazowego przedstawiona została na rysunku 4.10. Z rysunku tego wynika, że dynamika zerowa dana zależnością (4.127) dla rozważanego układu jest autonomicznym nieliniowym systemem trzeciego rzędu oraz ma tą cechę, że jej rozwiązanie zmierza do  $+\infty$  lub  $-\infty$ , czyli jest niestabilna.



**Rysunek 4.10:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -2]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 2]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-2, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [2, 0]$ . Znacznik  $\circ$  oznacza punkt początkowy;  $\ddot{q}_1 = 0$  dla każdego z przypadków.

#### LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Dla modelu (4.104)-(4.105) częściowo zlinearyzowany system (4.20)-(4.21) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v \\ \ddot{q}_2 = -m_{12}^{-1}(m_{11}v + \mu_1 + G_1). \end{cases} \quad (4.128)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2]^T \quad (4.129)$$

oraz  $\tilde{J}_2 = -\frac{m_{11}}{m_{12}}$ , otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ -m_{12}^{-1}(\mu_1 + G_1) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{J}_2 \end{bmatrix}}_{g(x)} v. \quad (4.130)$$

## DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.3.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla następującej postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.41) są następujące:

$$k_{11} = 1, \quad k_{12} = 0. \quad (4.131)$$

Równanie (4.30) przybiera więc postać

$$v = 1u, \quad (4.132)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_1 - K_p q_1 = v, \quad (4.133)$$

natomiast zmienne stanu (4.48) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_2 & z_2 &= \dot{q}_2 \\ \eta_1 &= q_1 - q_1^d & \eta_2 &= \dot{q}_1. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla sterowań (4.133) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left( \ddot{q}_1^d, \dot{q}_1^d, q_1^d \right) = \left( 0, 0, \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.135)$$

to dynamika (4.49) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -K_p \eta_1 - K_d \eta_2 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -m_{12}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{11} (K_p \eta_1 + K_d \eta_2)) \\ \tilde{y}_1 &= \eta_1. \end{aligned} \quad (4.136)$$

W postaci macierzowej powyższe równania możemy zapisać jako

$$\dot{\eta} = A\eta \quad (4.137)$$

$$\dot{z} = s(q_2, \eta, z, t) \quad (4.138)$$

$$\tilde{y} = C\eta \quad (4.139)$$

dla której  $z = [z_1, z_2]^T$ ,  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , zaś macierze  $A$  i  $C$  określone są przez

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (4.140)$$

natomiast dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -m_{12}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{11} (K_p \eta_1 + K_d \eta_2)) \end{bmatrix}. \quad (4.141)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.135) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.141), tj.

$$\dot{z}_2 = -m_{12}^{-1} (\mu_1 + G_1 - m_{11} (K_p \eta_1 + K_d \eta_2)) \Big|_{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d, q_1 = q_1^d} \quad (4.142)$$

redukuje się do

$$\dot{z}_2 = -\frac{a_5 \sin q_2}{a_2 + a_3 \cos q_2} \quad (4.143)$$

Finalnie, zależność (4.141) zdefiniowana jako:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{a_5 \sin q_2}{a_2 + a_3 \cos q_2} \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.



**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy linearyzacji dynamiki (4.144) celem określenia jej stabilności w otoczeniu punktu równowagi dla  $\hat{x} = [q_2, \dot{q}_2]^T$

$$Y = \left. \frac{\partial \dot{z}}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{q_2=0 \\ \dot{q}_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a_5}{a_2+a_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Wartości własne wyrażenia (4.145):  $\text{eig}(Y) = [-1.3018, 1.3018]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

Wyznamy w sposób jawny rozwiązanie równania (4.144). Wprowadzając nowe zmienne

$$q_2 = \chi_1, \quad \dot{q}_2 = \chi_2,$$

mamy:

$$\frac{d\chi_1}{dt} = \chi_2, \quad \frac{d\chi_2}{dt} = -\frac{a_5 \sin q_2}{a_2 + a_3 \cos q_2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\chi_1}{\chi_2} = \frac{d\chi_2}{-\frac{a_5 \sin q_2}{a_2 + a_3 \cos q_2}} \quad \Rightarrow \quad g \sin \chi_1 d\chi_1 = \chi_2 d\chi_2.$$

W wyniku otrzymujemy

$$-\frac{1}{2}\chi_2^2 + C_1 = \int \frac{a_5 \sin \chi_1}{a_2 + a_3 \cos \chi_1} d\chi_1$$

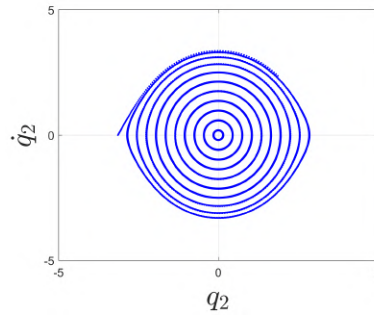
co jest tożsame z

$$\frac{1}{2}\chi_2^2 = \frac{a_5}{a_3} \ln |a_2 + a_3 \cos \chi_1| + C$$

Ostatecznie

$$\dot{q}_2 = \pm \sqrt{\frac{2a_5}{a_3} \ln |a_2 + a_3 \cos q_2| + C}. \quad (4.146)$$

Graficzna interpretacja rozwiązania dynamiki zerowej w postaci portretu fazowego przedstawiona została na rysunku 4.11.



**Rysunek 4.11:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla następujących warunków początkowych:  $q_2 \in (-\pi, \pi), \dot{q}_2 = 0$ ,

### 4.3.6 Forma normalna

Zagadnienia opisane w rozdziałach 4.3.3-4.3.5 można podsumować w następujący sposób.

Rozważmy układ opisany równaniem

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F \quad (4.147)$$

Dokonajmy dekompozycji wektora zmiennych konfiguracyjnych powyższego układu na wektor

$$q = \text{col}(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2 \quad (4.148)$$

gdzie wymiar rozmaitości konfiguracyjnej  $Q_i$  oznaczmy przez  $n_i = \dim(Q_i)$  dla  $i = 1, 2$  oraz  $n_1 + n_2 = n$ . Równanie ruchu Eulera-Lagrangea dla tego systemu może zostać zapisane w formie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \right) &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \right) &= \tau_2 \end{aligned} \quad (4.149)$$

gdzie  $\mathcal{L}$  jest Lagranżianem,  $\tau_i$  są wejściami sterującymi spełniającymi jeden ze scenariuszy:

**A1)**  $\tau = \tau_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$  jest wejściem sterującym oraz  $\tau_1 \equiv 0$

**A2)**  $\tau = \tau_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  jest wejściem sterującym oraz  $\tau_2 \equiv 0$ .

Równania (4.149) mogą zostać zapisane w postaci

$$\begin{aligned} M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) &= \tau_1 \\ M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) &= \tau_2 \end{aligned} \quad (4.150)$$

gdzie  $h_i(q, \dot{q})$  stanowią składniki związane z siłami Coriolisa, odśrodkowymi i grawitacją.

W pracach [83, 84] wykazano, że istnieje odwracalne przekształcenie wejścia w postaci

$$\tau_i = \alpha_i(q)u + \beta_i(q, \dot{q}), \quad i = 1, 2 \quad (4.151)$$

które transformuje dynamikę (4.150) do postaci

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= f(q, w) + g(q)u \\ \dot{q}_2 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= u \end{aligned} \quad (4.152)$$

gdzie  $f(q, w)$ ,  $g(q)$  są pewnymi funkcjami zawierającymi składniki macierzy mas oraz  $h_i(q, \dot{q})$ .

#### FORMY NORMALNE DLA UKŁADÓW NIEDOSTEROWANYCH

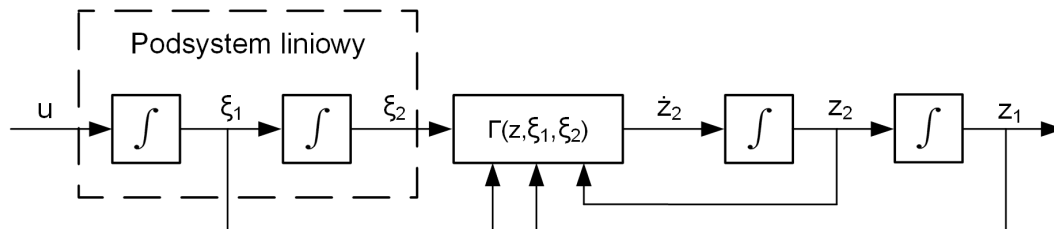
W niedosterowanych układach mechanicznych występowanie jednego wejścia zarówno w dynamice części napędzanej jak i nienapędzanej utrudnia syntezę algorytmu sterowania [60]. Poniżej przedstawiono metodę rozdzielania tych dwóch podsystemów względem sygnału sterującego  $u$  przy użyciu globalnej zmiany współrzędnych <sup>i</sup>

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi(q_1, q_2) \\ z_2 &= \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \Phi(q) \right) \cdot w_1 + \left( \frac{\partial}{\partial q_2} \Phi(q) \right) \cdot w_2 \\ \xi_1 &= q_2 \\ \xi_2 &= w_2, \end{aligned} \quad (4.153)$$

która transformuje układ (4.152) do postaci unormowanej

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \Gamma(z, \xi_1, \xi_2) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Zaletą postaci unormowanej (4.154) jest usunięcie sygnału wejściowego w podsystemie nienapędzanym. Dzięki temu uzyskuje się strukturę kaskadową, zilustrowaną na rysunku 4.12



Rysunek 4.12: Postać unormowana

Upraszcza to syntezę sterowania dla układu niedosterowanego poprzez redukcję sterowania oryginalnego układu wysokiego rzędu do sterowania jego nieliniowym nienapędzanym podsystemem niższego rzędu. Ograniczeniem rozważanej metody transformacji jest to, że w ogólnym przypadku nie można zagwarantować znalezienia analitycznej postaci funkcji  $\Phi(q_1, q_2)$ , [60].

<sup>i</sup>Warunki istnienia tego przekształcenia opisano szczegółowo w pracy [60]

## 4.4 Transformacje zmiennych stanu dla wahadła 2 DOF przy użyciu pseudoprędkości

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie i porównanie dwóch znanych w literaturze metod opisu dynamiki robota o dwóch złączach obrotowych opartych na transformacji zmiennych stanu.

W opublikowanym w 2019 roku artykule [46] autorzy analizują zagadnienie największego linearyzowalnego podsystemu dla układów mechanicznych, które nie są w pełni linearyzowalne. Swoje przemyślenia ilustrują na przykładzie podwójnego odwróconego wahadła typu Acrobot i Pendubot, pozostając jednakże jedynie na etapie rozważań teoretycznych oraz opisu matematycznego. W konsekwencji nie pojawiła się jeszcze żadna praca autorów dotycząca symulacyjnej bądź eksperymentalnej weryfikacji prezentowanej metody. Niniejszy rozdział stanowi więc w pewien sposób uzupełnienie artykułu [46].

Drugim analizowanym podejściem jest formalizm zaprezentowany w pracach [33, 76] i wykorzystujący koncepcję inercyjnych quasiprędkości znormalizowanych (QPZ). Podczas gdy artykuł [33] zawiera szczątkowe wyniki symulacyjne, oryginalna praca [76] ogranicza się jedynie do formuł matematycznych. Niniejsza dysertacja ponownie stanowi więc uszczegółowienie rozważań z przywołanych prac, jak również ich rozszerzenie o badania symulacyjne i eksperymentalne. Kolejne podrozdziały stanowią zaprezentowanie idei zawartych w przywołanych artykułach na przykładzie dwóch typów robotów *Pendubota* oraz *Acrobota*.

### POJĘCIE QUASI-PRĘDKOŚCI

W mechanice analitycznej prędkości uogólnione (a więc pochodne po czasie współrzędnych konfiguracyjnych) zastępowane są quasi-prędkościami, których definicję przywołano poniżej.

#### Definicja 4.4.1

Rozważmy układ o  $N$  stopniach swobody, którego położenie określone jest za pomocą współrzędnych uogólnionych  $q_1, \dots, q_N$ . Niech prędkości punktów układu opisane będą nie prędkościami uogólnionymi  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$ , lecz za pomocą ich pewnych kombinacji liniowych ze współczynnikami, które są funkcjami współrzędnych uogólnionych

$$\nu_j = \sum_{i=1}^N a_{ji}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i + a_{j0}(q_1, \dots, q_N), \quad (j = 1, \dots, N) \quad (4.155)$$

Wielkości  $\nu_j$  z równania (4.155) nazywamy **quasi-prędkościami** [30].

Całkując prędkości uogólnione, otrzymuje się współrzędne uogólnione ( $q_i = \int \dot{q}_i dt$ ). W odróżnieniu od prędkości uogólnionych, które są pochodnymi współrzędnych uogólnionych, *quasi-prędkości* w ogólnym przypadku nie dają się przedstawić jako pochodne współrzędnych. To znaczy, że nie istnieją w postaci jawnej funkcje  $\pi_i$  spełniające zależność  $\pi_i = \int \nu_i dt$  [27].

W ogólności można stwierdzić, że quasi-prędkości stosuje się wtedy, gdy można uzyskać równania ruchu dogodniejsze do analizy. Może to być prostsza postać równań ruchu, np. równania opisujące dynamikę bryły sztywnej, gdzie prędkości kątowe zastępują pochodne względem czasu współrzędnych uogólnionych. Można też zauważyć, że quasi-prędkości dają większą swobodę wyboru zmiennych, a w niektórych przypadkach równania ruchu znacznie się upraszczają, gdy quasi-prędkości zostaną odpowiednio wybrane. Można zatem stwierdzić szczególną przydatność quasi-prędkości w budowie modeli dynamicznych układów [32].

#### 4.4.1 Postać normalna i quasi-prędkości (PN-QP): Pendubot

Przejdźmy do analizy zachowania się robota typu Pendubot, uwzględniając rozważania z pracy [46]. Stosując sposób linearyzacji częściowej typu skojarzonego przedstawiony w rozdziale 4.3.3

wynikowy model dynamiki Pendubota po transformacji możemy przedstawić w postaci

$$\Sigma_{\text{pend}} : \begin{cases} \dot{q}_1 = w_1 \\ \dot{w}_1 = u \\ \dot{q}_2 = w_2 \\ \dot{w}_2 = -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) + J_2(q_2)u. \end{cases} \quad (4.156)$$

#### PROSTOWANIE POLA WEKTOROWEGO $g$

Rozważmy model dynamiki Pendubota  $\Sigma_{\text{pend}}$  dany zależnością (4.156), oraz dokonajmy jego alternatywnego zapisu w postaci

$$\begin{cases} \dot{q} = w \\ \dot{w} = f(q, w) + g(q)u. \end{cases} \quad (4.157)$$

gdzie  $q = [q_1, q_2]^T$ ,  $w = [w_1, w_2]^T$ .

Poszukujemy przekształcenia zmiennych konfiguracyjnych

$$\theta = \Psi(q), \quad (4.158)$$

dla którego model (4.156) można przedstawić w formie normalnej, w której pole wektorowe  $g$  przyjmuje postać  $g = [0, 0, 0, 1]^T$ .

Obliczmy kolejne pochodne zależności (4.158):

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} = \frac{\partial \Psi}{\partial q} w. \quad (4.159)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial q} \left( \frac{\partial \Psi \dot{q}}{\partial q} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \ddot{q} = \frac{\partial \Psi}{\partial q} \left( \frac{\partial \Psi \dot{q}}{\partial q} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial q} f(q, w) + \frac{\partial \Psi}{\partial q} g(q). \quad (4.160)$$

Na podstawie równania (4.160) dokonajmy wyprostowania pola wektorowego  $\frac{\partial \Psi}{\partial q} g(q)$ .

W ramach prostowania pola poszukujemy rozwiązania następującego układu równań

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.161)$$

Otrzymujemy w wyniku:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} \cdot 1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} \cdot J_2(q_2) = 0 \quad (4.162)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} \cdot 1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} \cdot J_2(q_2) = 1. \quad (4.163)$$

Rozwiązując powyższy układ równań uzyskujemy:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} = 1, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} = 0,$$

i na tej podstawie znajdujemy

$$\psi_2 = \theta_2 = q_1. \quad (4.164)$$

Następnie, analizując równanie (4.162):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} \cdot J_2(q_2) = -1. \quad (4.165)$$

W celu wyznaczenia  $\psi_1$  z powyższego równania mamy

$$d\psi_1 = -\frac{1}{J_2(q_2)} dq_2$$

co po scałkowaniu daje

$$\psi_1 = -\int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds + C, \quad (4.166)$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. W celu obliczenia  $C$  podstawiamy równanie (4.166) do równania (4.162) otrzymując:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( - \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds + C \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( - \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds + C \right) J_2(q_2) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial q_1} - J_2(q_2)^{-1} J_2(q_2) + \frac{\partial C}{\partial q_2} J_2(q_2) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial q_1} + \frac{\partial C}{\partial q_2} J_2(q_2) &= 1 \end{aligned} \quad (4.167)$$

Z równania (4.167) wynika, że funkcja  $C$  spełniająca to równanie równa jest  $C = q_1$ . Ostatecznie funkcja  $\psi_1$  (4.166) wynosi:

$$\psi_1 = q_1 - \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds. \quad (4.168)$$

Poszukiwane przekształcenie konfiguracji (4.158) przyjmuje końcową formę

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \Psi(q) = \begin{bmatrix} q_1 - I_2(q_2) \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad (4.169)$$

gdzie

$$I_2(q_2) = \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds. \quad (4.170)$$

#### FORMA NORMALNA

Dokonajmy transformacji układu (4.156) do formy normalnej. W tym celu zdefiniujmy nowe zmienne stanu <sup>ii</sup>

$$\begin{aligned} \theta_1 &= q_1 - I_2(q_2) \\ v_1 &= w_1 - J_2^{-1}(q_2) w_2 \\ \theta_2 &= q_1 \\ v_2 &= w_1, \end{aligned} \quad (4.171)$$

gdzie  $\theta_1$  i  $\theta_2$  mają postać nowych konfiguracji, zaś  $v_1$  i  $v_2$  wyrażają quasi-prędkości, oraz  $I_2(q_2) = \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds$ , gdzie  $J_2(q_2) = -m_{22}^{-1} m_{21}$ .

Przyjmując nowy wektor zmiennych stanu  $x = [\theta_1, v_1, \theta_2, v_2]^T$  oraz dokonując podstawowych przekształceń model dynamiki Pendubota przybiera postać formy normalnej: <sup>iii</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= v_1 \\ \dot{v}_1 &= \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta \\ \dot{\theta}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= u, \end{aligned} \quad (4.172)$$

przy czym:  $\alpha(q_2) = \frac{a_3 \sin q_2}{a_2}$ ,  $\beta(q_2) = -2\alpha(q_2)$ ,  $\gamma(q_2) = \frac{a_3^2 \sin q_2 \cos q_2}{a_2(a_2 + a_3 \cos q_2)}$ ,  $\eta(q_1, q_2) = -\frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2}$ .

Warto zwrócić uwagę, że prawa strona równania opisującego  $\dot{v}_1$  jest wielomianem drugiego stopnia względem  $v_1$  i  $v_2$ , przy czym współczynniki tego wielomianu są wyłącznie funkcjami  $q_1, q_2$  (lub  $\theta_1, \theta_2$ ).

#### LINEARYZACJA

Dynamika (4.172) może zostać zapisana w równoważnej formie jako:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.173)$$

gdzie  $x = [\theta_1, v_1, \theta_2, v_2]^T$  jest nowym stanem, zaś

$$f(x) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.174)$$

<sup>ii</sup>Szczegółowe wyprowadzenie przedstawiono w załączniku A

<sup>iii</sup>Szczegółowe wyprowadzenia przedstawiono w załączniku B

Zdefiniujmy nową zmienną  $z \in \mathbb{R}^3$  oraz przekształcenie  $\Psi(x)$ :

$$z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} := \Psi(x) := \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix}. \quad (4.175)$$

Równanie zlinearyzowanego trójwymiarowego podsystemu w nowych współrzędnych ma postać:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = \nu, \quad (4.176)$$

gdzie  $\nu$  jest nowym sygnałem wejściowym danym jako

$$\nu = L_f^3 h(x) + u L_g L_f^2 h(x). \quad (4.177)$$

Po zastosowaniu procedury linearyzacji modelu dynamiki (4.173) zaproponowano sprzężenie liniowe od stanu

$$\nu = -Kz, \quad (4.178)$$

gdzie  $K = [K_1, K_2, K_3]$  jest macierzą wzmacnień wybraną tak aby układ zamknięty (4.176) był stabilny wykładniczo. Z tego wynika, że

$$\forall_{z(0) \in B_{0,\epsilon}} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0. \quad (4.179)$$

#### WARUNKI LINEARYZACJI

W przypadku, gdy spełnione są warunki linearyzacji w pewnej podprzestrzeni stanu, przekształcenie (4.177) jest dyfeomorfizmem, co oznacza, że istnieje różniczkowalna zależność odwrotna opisana przez

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 h} (-L_f^3 h + \nu). \quad (4.180)$$

Przekształcenie (4.180) jest dobrze określone, gdy  $L_g L_f^2 h \neq 0$ , a jego szczegółowa postać zależy od wyboru funkcji wyjścia  $h(x)$ .

Rozważmy wybór wyjścia  $h(x)$ , która maksymalnie linearyzuje (4.173). W publikacji [46] pokazano, że funkcję tę można znaleźć w postaci  $h(x) = \theta_1$ . W tej pracy proponujemy rozważanie bardziej ogólnego przypadku poprzez zmianę punktu referencyjnego, tj. przyjmujemy następującą definicję

$$h(x) = \theta_1 - \theta_{1\text{ref}}, \quad (4.181)$$

gdzie indeks ref oznacza wartość zadaną współrzędnej.

Dla tak zdefiniowanej funkcji  $h(x)$  wyrażenie  $L_g L_f^2 h$  zostało wyprowadzone w załączniku B i dane jest zależnością (4.182), tzn.

$$L_g L_f^2 h = \beta v_1 + 2\gamma v_2. \quad (4.182)$$

Przekształcenie  $\Psi(x)$  ma natomiast postać

$$\Psi(x) := \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{1\text{ref}} \\ v_1 \\ \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta \end{bmatrix}. \quad (4.183)$$

Zbiór  $\mathcal{X}$  określony jako

$$\mathcal{X} = \{x : L_g L_f^2 h(x) \neq 0\}, \quad (4.184)$$

oznacza zbiór punktów regularnych dla których linearyzacja jest możliwa. Z (4.182) wynika, że zbiór  $\mathcal{X}$  w (4.184) można równoważnie określić w sposób następujący

$$\mathcal{X} = \{x : \beta v_1 + 2\gamma v_2 \neq 0\}. \quad (4.185)$$

Na tej podstawie można zauważyć, że w punkcie  $v_1 = v_2 = 0$  punkty równowagi równania (4.173) nie są regularne.

Po przeprowadzeniu szczegółowych obliczeń dla wybranej funkcji  $h$  wyrażenie (4.182) może zostać przedstawione jako

$$L_g L_f^2 h(x) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad (4.186)$$

gdzie  $\kappa_1 := 2a_3 \sin \theta_2 (v_2 a_3 \cos \theta_2 - v_1 (a_2 + a_3 \cos \theta_2))$  oraz  $\kappa_2 := a_2^2 (a_2 + a_3 \cos \theta_2)$ .

Zbiór punktów nieregularnych można więc określić jako pewną podprzestrzeń stanu taką, że dla  $(\theta_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ , zachodzi  $\kappa_1 = 0$ .

#### STEROWANIE HYBRYDOWE

Zgodnie z przedstawionymi *Warunkami linearyzacji* oraz z [46], rząd względny funkcji  $h(x)$  w równaniu (4.175) nie jest dobrze określony w otoczeniu  $v_1 = v_2 = 0$ , tak więc punkty równowagi równania (4.173) nie są regularne. Ponieważ w punktach nie będącymi regularnymi zależność  $L_g L_f^2 h = 0$ , to z równania (4.180) wynika, że sygnał sterujący  $u$  staje się nieograniczony. W konsekwencji należy użyć innego algorytmu sterowania wokół equilibrium, celem ustabilizowania robota w zadanej pozycji.

Biorąc pod uwagę powyższe ograniczenie zaproponowano użycie sterownika hybrydowego celem stabilizacji robota w punkcie równowagi, jak opisano to w rozdziale 4.1. Proponowane prawo sterowania dla *Pendubota* przyjmuje formę

$$u = \begin{cases} u_{\text{swing}} & \text{dla rozkołysania wahadła,} \\ u_{\text{stab}} & \text{dla stabilizacji wokół punktu równowagi,} \end{cases} \quad (4.187)$$

tzn. uwzględnia dwa sterowniki składowe. Pierwsze oznaczone jako  $u_{\text{swing}}$  i dane równaniem (4.180) jest oparte o formalizm zaprezentowany w [46] i odpowiada za ruch wahadła w kierunku punktu równowagi (rodzaj wymachu). Gdy stan robota znajdzie się w okolicy punktu równowagi, następuje przełączenie na sterownik liniowy dany zależnością (4.188)

$$u_{\text{stab}} = -K(x_r - x), \quad (4.188)$$

którego celem jest utrzymanie robota w równowadze.

W równaniu (4.188) składniki  $x_r = [\theta_{r1}, v_{r1}, \theta_{r2}, v_{r2}]^T$  oraz  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$  oznaczają odpowiednio referencyjne wartości wektora stanu, oraz wzmocnienia regulatora.

#### UNIKANIE PUNKTÓW OSOBLIWYCH

Jednym z ograniczeń prezentowanej metody jest występowanie punktów osobliwych. W punktach nie będących regularnymi zależność  $L_g L_f^2 h \equiv 0$  a w konsekwencji sygnał sterujący  $u = u_{\text{swing}}$  w (4.180) staje się nieograniczony. Oznacza to, że *Pendubot* nie może być zlinearyzowany częściowo do 3 wymiarowego liniowego podsystemu (4.176) w punkcie równowagi.

Implementując sprzężenie (4.180) należy obliczać na bieżąco odwrotność składnika  $L_g L_f^2 h$ . Jako, że ta odwracalność może być realizowana wyłącznie dla  $x \in \mathcal{X}$ , w pozostałych przypadkach można rozważyć użycie następującej procedury odpornego odwracania składnika (4.182):

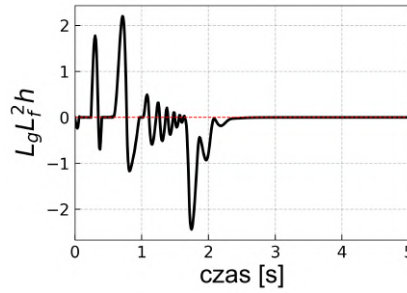
$$\frac{1}{L_g L_f^2 h} \approx \frac{L_g L_f^2 h}{(L_g L_f^2 h)^2 + \epsilon^2}, \quad (4.189)$$

oraz  $\epsilon > 0$  jest parametrem projektowym.

Celem zobrazowania faktu, że  $L_g L_f^2 h$  przechodzi przez 0 dla typowych trajektorii będących rozwiązaniem dynamiki, przeprowadzono przykładową symulację, której wynik przedstawiono na rysunku 4.13. Na rysunku tym można zauważyć, że (4.182) wielokrotnie zmienia znak w zakładanym horyzoncie czasowym. Należy przy tym podkreślić, że omówiona procedura lokalnie łamie ideę linearyzacji zaproponowaną w pracy [46].

#### DYNAMIKA ZEROWA

Przejdźmy do analizy *dynamiki zerowej* systemu (4.172) dla funkcji wyjścia  $h(x)$  danej równaniem (4.181).



Rysunek 4.13: Wyrażenie  $L_g L_f^2 h$  podczas przykładowej próby

Odwołując się do (4.179), tzn. dla  $z \rightarrow 0$  z zależności (4.181) otrzymujemy  $\theta_1 \rightarrow \theta_{1\text{ref}}$ . Następnie mając na uwadze, że  $L_f h = \dot{h} \rightarrow 0$  oraz  $L_f^2 h = \ddot{h} \rightarrow 0$  otrzymujemy, że  $v_1 \rightarrow 0$  oraz  $\dot{v}_1 \rightarrow 0$ . Dalej rozważmy równanie

$$\dot{v}_1 = \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta = 0 \quad (4.190)$$

przy  $z \rightarrow 0$ . Dla  $z = 0$  formuła (4.190) redukuje się do  $\gamma v_2^2 + \eta = 0$ . Pamiętając, że  $v_2 = \dot{\theta}_2$  można zapisać  $\dot{\theta}_2^2 = -\frac{\eta}{\gamma}$ , [63].

Uwzględniając powyższe zależności otrzymujemy wynikową postać jednowymiarowej dynamiki zerowej rozpatrywanego systemu w formie  $\dot{\theta}_2 = \pm \sqrt{-\frac{\eta}{\gamma}}$ , tzn.

$$\dot{\theta}_2 = \dot{q}_1 = \pm \sqrt{\frac{2a_2 a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_3^2 \sin(2q_2)}} \quad (4.191)$$

gdzie  $q_1 = \theta_2$ , zaś  $q_2$  jest rozwiązaniem pierwszego równania z (4.171) dla  $\theta_1 \equiv \theta_{1\text{ref}}$  i równe jest

$$q_2 = 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{a_2 - a_3} \tan \left( \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{2a_2} (\theta_1 - \theta_2) \right) \right). \quad (4.192)$$

#### SYMULACJA DYNAMIKI ZEROWEJ

Zmieniając iteracyjnie wartość  $q_{20}$  wyznaczono rodzinę funkcji reprezentujących dynamikę zerową (4.191) dla różnych warunków początkowych, co przedstawiono na rysunku 4.14a.

Symulację dynamiki zerowej wykonano przy założeniu, że zakres zmian  $q_{20} = (-\pi, \pi)$ . Następnie policzono kąt  $\theta_{20}$  wg zależności

$$\theta_{20} = \theta_{1\text{ref}} + I_2(q_{20}) \quad (4.193)$$

dla  $\theta_{1\text{ref}} = \frac{\pi}{2}$ . Wartość całki z  $\dot{\theta}_2$  wyznaczano pod warunkiem, że wyrażenie podpierwiastkowe w (4.191) jest większe od 0, zaś znak przed pierwiastkiem ma wartość +.

Analizując rysunek 4.14a zauważalny jest bardzo wąski zakres istnienia dynamiki zerowej, dla niewielkiego zakresu warunków początkowych, jak również bardzo krótki czas istnienia tejże dynamiki.

#### ZAKRES ISTNIENIA PRZEKSZTAŁCENIA (4.192)

Graficzną interpretację równania (4.192) przedstawia rysunek 4.14b, tzn. przedstawia on zakres, w którym istnieje rozpatrywane przekształcenie, przy założeniu stałego kąta  $\theta_{1\text{ref}} = \frac{\pi}{2}$ . Sytuacja ta może odpowiadać pozycji wyprostowanej w górę dla pierwszego złącza, przy założeniu  $q_2 = 0$  – wtedy wartość  $\theta_1 = \theta_2 - I_2(q_2)$  czyli  $\theta_1 = \theta_2$ .

Nasuwa się wniosek, że możliwość wskazania warunków istnienia dynamiki zerowej ograniczona jest dla bardzo wąskiego przedziału rzeczywistych kątów  $(q_1, q_2)$ .

Całkując równanie (4.191) otrzymamy zbiór rozwiązań, dla których dynamika zerowa istnieje. Ze względu na fakt, że wartość podpierwiastkowa (4.191) może zmienić znak na ujemny w trakcie ewolucji rozwiązania, "czas życia" takiego potoku może być bardzo krótki, po czym trajektoria systemu osiąga punkty osobliwe i dynamika zerowa przestaje istnieć.

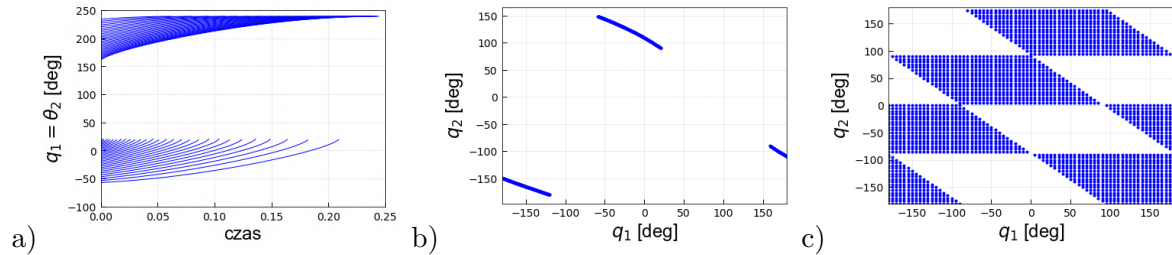
Zbiór wartości  $(q_1, q_2)$  dla których zachodzi zależność (4.194)

$$\frac{2a_2 a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_3^2 \sin(2q_2)} > 0 \quad (4.194)$$



czyli istnieje dynamika (4.191) przedstawiono na rysunku 4.14c.

Warto zauważyć, że dla funkcji wyjścia  $h(x)$  zdefiniowanej zależnością (4.181) projektant nie ma wpływu na warunki istnienia dynamiki zerowej, ponieważ wynikają one od konfiguracji Pendubota i parametrów opisujących jego dynamikę (4.172).



Rysunek 4.14: a) Przebieg zależności  $\theta_2(t)$  dla równania (4.191), b) Interpretacja równania (4.192), c) Zbiór wartości  $(q_1, q_2)$  dla których istnieje (4.191)

#### 4.4.2 Postać normalna i quasi-prędkości (PN-QP): Acrobot

Rozważmy dynamikę Acrobota daną jak w rozdziale 2.2.4 oraz zastosujmy linearyzację częściową typu skojarzonego, przedstawioną w rozdziale 4.3.5.

Całkowity model dynamiki Acrobota po tej transformacji możemy przedstawić w następującej postaci:

$$\Sigma_{\text{acr}} : \begin{cases} \dot{q}_1 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) + J_1(q_2)u \\ \dot{q}_2 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= u. \end{cases} \quad (4.195)$$

#### FORMA NORMALNA

Dokonajmy transformacji powyższego układu (4.195) do formy normalnej zgodnie z [46]. W tym celu zdefiniujemy nowe zmienne stanu

$$\begin{cases} \theta_1 &= q_1 - I_1(q_2) \\ v_1 &= w_1 - J_1(q_2)w_2 \\ \theta_2 &= q_2 \\ v_2 &= w_2, \end{cases} \quad (4.196)$$

gdzie  $\theta_1$  i  $\theta_2$  mają postać nowych konfiguracji, zaś  $v_1$  i  $v_2$  wyrażają quasi-prędkości, oraz  $I_1(q_2) = \int_0^{q_2} J_1(s)ds$ <sup>iv</sup>.

Dokonując podstawowych przekształceń otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 &= v_1 \\ \dot{v}_1 &= \eta + \beta v_1 v_2 \\ \dot{\theta}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= u. \end{cases} \quad (4.197)$$

przy czym  $\beta(q_2) = 2 \frac{1}{m_{11}} a_3 \sin q_2$ ,  $\eta(q) = -\frac{1}{m_{11}} [a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2)]$ .

Wprowadźmy ponadto zmienną  $\tilde{v}_1$  będącą pseudoprędkością

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\sigma(q_2)}, \quad (4.198)$$

gdzie  $\sigma(q_2) > 0$  dana jest zależnością

$$\sigma(q_2) = e^{\int_0^{q_2} \beta(s)ds} = \frac{1}{m_{11}(q_2)}. \quad (4.199)$$

<sup>iv</sup>Szczegółowe wyprowadzenie przedstawiono w załączniku A

Należy nadmienić, że odpowiednie funkcje  $\beta(q_2)$ ,  $\eta(q)$ , oraz  $\sigma(q_2)$  mogą być wyrażone jako funkcje nowych przekształconych konfiguracji  $(\theta_1, \theta_2)$  (jak ma to miejsce w załączniku C), jednakże dla uproszczenia zapisu postanowiono pozostać przy zmiennych naturalnych  $q$ .

Przyjmując nowy wektor zmiennych stanu  $x = [\theta_1, \tilde{v}_1, \theta_2, v_2]^T$  model dynamiki Acrobota przybiera postać formy normalnej:<sup>v</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \tilde{v}_1 \sigma(q_2) \\ \dot{\tilde{v}}_1 &= \tilde{\eta} \\ \dot{\theta}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= u\end{aligned}\quad (4.200)$$

dla

$$\tilde{\eta}(q_1, q_2) = \frac{\eta(q_1, q_2)}{\sigma(q_2)}.\quad (4.201)$$

### LINEARYZACJA

W celu przeprowadzenia dalszej analizy dynamikę (4.200) zapisuje się w standardowej formie

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,\quad (4.202)$$

gdzie

$$f(x) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \sigma \\ \tilde{\eta} \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\quad (4.203)$$

Zdefiniujmy następnie nową zmienną  $z \in \mathbb{R}^3$  oraz przekształcenie  $\Psi(x)$ :

$$z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} := \Psi(x) := \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix}.\quad (4.204)$$

Równanie zlinearyzowanego trójwymiarowego podsystemu w nowych współrzędnych ma postać:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = \nu,\quad (4.205)$$

gdzie  $\nu$  jest nowym sygnałem wejściowym danym jako

$$\nu = L_f^3 h(x) + u L_g L_f^2 h(x).\quad (4.206)$$

W celu stabilizacji układu (4.205) zaproponowano sprzężenie liniowe od stanu

$$\nu = -Kz,\quad (4.207)$$

gdzie  $K = [K_1, K_2, K_3]$  jest macierzą wzmocnień wybraną tak aby układ zamknięty był stabilny wykładniczo. Z tego wynika, że

$$\forall_{z(0) \in B_{0,\epsilon}} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.\quad (4.208)$$

### WARUNKI LINEARYZACJI

W przypadku, gdy spełnione są warunki linearyzacji w pewnej podprzestrzeni stanu, przekształcenie (4.206) jest dyfeomorfizmem, co oznacza, że istnieje różniczkowalna zależność odwrotna opisana przez

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 h} (-L_f^3 h + \nu).\quad (4.209)$$

Przekształcenie (4.209) jest dobrze określone, gdy  $L_g L_f^2 h \neq 0$ , a jego szczegółowa postać zależy od wyboru funkcji wyjścia  $h(x)$ .

<sup>v</sup>Szczegółowe kroki wyprowadzeń dla równań (4.197) oraz (4.200) przedstawione są w Załączniku C.

Założmy, podobnie jak ma to miejsce w pracy w [46], że funkcja wyjścia  $h(x)$  jest określona jako:

$$h(x) = k_1(\theta_1 - \theta_{1,\text{ref}}) + k_2\tilde{v}_1, \quad (4.210)$$

gdzie  $\theta_{1,\text{ref}}$  oznacza pewną stałą.

Dla tak zdefiniowanej funkcji  $h(x)$  wyrażenie  $L_g L_f^2 h$  zostało wyprowadzone w załączniku C i dane jest następującą zależnością

$$L_g L_f^2 h = k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \quad (4.211)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} &= a_4 \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \left( \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} + 1 \right) \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \\ \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} &= -\frac{a_2 + a_3 \cos \theta_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

Przekształcenie  $\Psi(x)$  ma natomiast postać

$$\Psi(x) := \begin{bmatrix} k_1(\theta_1 - \theta_{1,\text{ref}}) + k_2\tilde{v}_1 \\ k_1\tilde{v}_1\sigma(\theta_2) + k_2\tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix}, \quad (4.212)$$

gdzie  $L_f^2 h(x) = k_1 \sigma(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2$ .

Z analizy równania (4.211) wynika, że  $L_g L_f^2 h \neq 0$  gdy:

- $\tilde{v}_1 \neq \frac{-k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_2}}{k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2)}$
- $k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_2} \neq 0$

Ponadto warto zauważyć, że w otoczeniu punktu równowagi  $(q_1, q_2) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  otrzymujemy następujące zależności w równaniu (4.211):

- $k_1 \sigma(q_2) \beta(q_2) \tilde{v}_1 \xrightarrow{0}$
- $\theta_1 = q_1 - I_1(q_2) \xrightarrow{0}$
- $\frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{a_2 + a_3 \cos \theta_2 \xrightarrow{1}}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2 \xrightarrow{1}} = \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + 2a_3}$
- $a_4 \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2)) \xrightarrow{1}$
- $\left( \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} + 1 \right) \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \rightarrow \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + 2a_3} + 1$

Stąd możemy wnioskować, że warunek  $L_g L_f^2 h \neq 0$  jest zawsze spełniony w otoczeniu punktu równowagi  $(q_1, q_2) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Dla przypadków  $(q_1, q_2) \neq (\frac{\pi}{2}, 0)$  wykonano szereg testów symulacyjnych i nie zaobserwowano przejścia zależności  $L_g L_f^2 h$  przez punkt osobliwy. Nie uzyskano jednakże żadnej analitycznej zależności która dowodzi unikania rozwiązań osobliwych, w związku z czym nie mamy gwarancji, że sytuacja ta zachodzi globalnie. W przypadkach tych możemy stosować techniki odpornego odwracania zależności  $L_g L_f^2 h$ , opisane szerzej w podrozdziale 4.4.1 dotyczącym *Unikania punktów osobliwych dla robota typu Pendubot*.

## DYNAMIKA ZEROWA

Przejdźmy do analizy dynamiki zerowej systemu (4.200) dla funkcji wyjścia  $h(x)$  danej równaniem (4.210).

Odwołując się do (4.208), tzn. dla  $z \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$h(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}_1 = -\frac{k_1}{k_2}(\theta_1 - \theta_{1,\text{ref}})$$

Biorąc pod uwagę pierwsze równanie z (4.200) otrzymujemy, że

$$\dot{\theta}_1 = \tilde{v}_1 \sigma \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_1 = -\frac{k_1}{k_2} \sigma(\theta_1 - \theta_{1,\text{ref}})$$

czyli wynikowa postać dynamiki zerowej ma formę

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{k_1}{k_2} \cdot \sigma \cdot (\theta_1 - \theta_{1\text{ref}}). \quad (4.213)$$

Ponieważ  $\sigma > 0$ , to dla  $\frac{k_1}{k_2} > 0$  na dynamice zerowej trajektoria  $\theta_1(t)$  zmierza do  $\theta_{1\text{ref}}$ , a współczynnik zbieżności może być zmieniany za pomocą stosunku parametrów projektowych  $\frac{k_1}{k_2}$ .

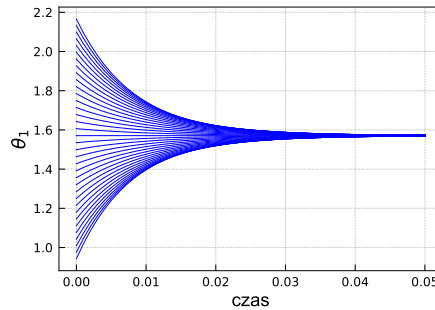
#### SYMULACJA DYNAMIKI ZEROWEJ

Przyjmijmy, że parametry  $k_1$  i  $k_2$  w równaniu (4.213) dane są następująco:  $k_1 = \sin^2 \alpha_k$  oraz  $k_2 = \cos^2 \alpha_k$ , gdzie  $\alpha_k$  jest arbitralnie wybranym parametrem. Załóżmy ponadto, że wyznaczono warunek początkowy

$$\theta_{1_0} = q_{1_0} - I_1(q_{2_0}) \quad (4.214)$$

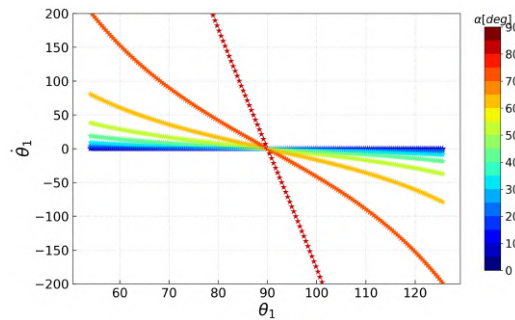
dla  $q_{2_0} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , przy  $q_{1_0} = \frac{\pi}{2}$ . Zmieniając iteracyjnie wartość  $q_{2_0}$  wyznaczono rodzinę rozwiązań dynamiki zerowej (4.213), przedstawioną na rysunku 4.15.

Zgodnie z analizą teoretyczną można zaobserwować asymptotyczną zbieżność trajektorii do punktu  $\theta_{1\text{ref}}$ , świadcząca o ograniczoności rozpatrywanej dynamiki zerowej.



Rysunek 4.15: Ilustracja rozwiązań równania różniczkowego (4.213) dla  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Dokonując natomiast zmiany kąta  $\alpha_k = (0, \frac{\pi}{2})$  będącego składnikiem parametrów  $k_1$  i  $k_2$  wyznaczono rodzinę charakterystyk przedstawioną na rysunku 4.16.



Rysunek 4.16: Portret fazowy równania (4.213) dla  $\alpha_k = (-\pi, \pi)$

W otoczeniu punktu  $\theta_{2_0} = q_{2_0} = 0$  można przyjąć, że  $\sigma(q_{2_0}) = \frac{1}{a_1 + a_2} = \text{const}$ , co oznacza, że dynamikę można lokalnie aproksymować przez równanie różniczkowe

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{k_1}{k_2} \sigma(0) (\theta_1 - \theta_{1\text{ref}}), \quad (4.215)$$

k którego rozwiązaniem jest równanie (4.216) wykładniczo zbiegające do pewnego punktu stałego.

$$\theta_1(t) = (\theta_{1_0} - \theta_{1\text{ref}}) e^{-\frac{k_1}{k_2} \sigma(0) t} + \theta_{1\text{ref}}. \quad (4.216)$$

Właściwość tę potwierdza analiza trajektorii fazowych na rys. 4.16, gdzie można zaobserwować, że w otoczeniu punktu równowagi trajektorie stają się styczne do prostych o nachyleniu wynikających ze współczynnika  $\sigma(0) \frac{k_1}{k_2}$ .

### 4.4.3 Synteza sterownika $u_{\text{stab}}$ z wykorzystaniem PN-QP

Mając na uwadze chęć porównania działania różnych praw sterowania, wykorzystujących czy to zmienne naturalne, bądź pseudoprędkości, oraz zawierające w swojej strukturze sterownik liniowy  $u_{\text{stab}}$  typu LQR, koniecznym jest uwspólnienie warunków wyznaczania wzmocnień takiego regulatora. Ze względu na różny charakter obliczanego sygnału sterującego dla analizowanych algorytmów, w tym dla rozważanego w pracy [46] algorytmu opierającego się o pseudoprędkości, poniżej przedstawiono sposób doboru nastaw regulatora liniowego, by był on zgodny z regulatorem bazującym na zmiennych rzeczywistych oraz rzeczywistym sygnale sterującym  $\tau$ .

Rozważmy następujące przekształcenie stanu i wejścia:

$$\xi = P(x) \quad (4.217)$$

$$u = H(x, \tau) \quad (4.218)$$

gdzie:

$x = [q, \dot{q}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  – wektor stanu wyrażony w zmiennych naturalnych,

$\xi = [q, \nu]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  – to nowy wektor stanu uwzględniający pseudoprędkości,

$P(x) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  – opisuje transformację zmiennych stanu,

$H(x, \tau) \in \mathbb{R}$  – transformacja sygnału sterującego.

W otoczeniu punktu zadanego  $q_{\text{ref}}$ , rozwinięcie w szereg Taylora zależności (4.217) przyjmuje postać

$$\tilde{\xi} = P(x_{\text{ref}})\tilde{x} + O(\tilde{x}^2) \quad (4.219)$$

gdzie  $\tilde{x} = x - x_{\text{ref}}$ , oraz  $O(\tilde{x}^2)$  stanowi ciąg reszt. Rozważając tylko część liniową możemy przyjąć, że

$$\tilde{\xi} = \left. \frac{\partial P(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{\text{ref}}} \cdot \tilde{x}. \quad (4.220)$$

Podobnie możemy zapisać dla wejścia

$$\tilde{u} = \left. \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{\text{ref}}} \cdot \tilde{x} + \left. \frac{\partial H(x)}{\partial \tau} \right|_{x=x_{\text{ref}}} \cdot \tilde{\tau}. \quad (4.221)$$

Zapiszmy kryterium optymalizacyjne dla zmiennych naturalnych

$$J = \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{\tau}^T R \tilde{\tau} \quad (4.222)$$

$Q$  oraz  $R$  są macierzami wag dla odpowiednio stanów oraz sygnałów wejściowych, a następnie podstawmy odpowiednio

$$\tilde{x} = P^{-1} \tilde{\xi} \quad (4.223)$$

$$\tilde{u} = H_x^{-1} \tilde{x} + H_\tau^{-1} \tilde{\tau} \quad (4.224)$$

$$\tilde{\tau} = H_\tau^{-1} (\tilde{u} - H_x \tilde{x}) \quad (4.225)$$

otrzymując aproksymację kryterium jakości (4.222) w nowych zmiennych

$$J = \tilde{\xi}^T Q_\xi \tilde{\xi} + \tilde{u}^T R_\tilde{u} \tilde{u} + J_3 \quad (4.226)$$

gdzie

$$Q_\xi = (P^{-1})^T \left( Q + H_x^T (H_\tau^{-1})^T \cdot R H_\tau^{-1} H_x \right) P^{-1} \quad (4.227)$$

$$R_\tilde{u} = (H_\tau^{-1})^T \cdot R H_\tau^{-1} \quad (4.228)$$

$$J_3 = -2\tilde{\xi}^T (P^{-1})^T H_x^T (H_\tau^{-1})^T \cdot R H_\tau^{-1} \tilde{u}. \quad (4.229)$$

#### 4.4.4 Quasi-piędkości znormalizowane (QPZ)

Standardowe równanie ruchu manipulatora można zapisać jako

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau. \quad (4.230)$$

Zapiszmy to samo równanie w wykorzystaniu *quasi-piędkości znormalizowanych*. Tego typu równania zaproponowali Jain i Rodriguez w pracach [36, 76].

Wprowadźmy następujące przekształcenie

$$\nu = L^T(q)\dot{q} \quad (4.231)$$

definiujące związek pomiędzy piędkościami uogólnionymi  $\dot{q}$  a nowo zdefiniowanymi quasi-piędkościami znormalizowanymi  $\nu$ , gdzie

- $\nu \in \mathbb{R}^N$  – wektor quasi-piędkości znormalizowanych (QPZ),
- $L(q) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  – macierz (operator przestrzenny) wynikająca z dekompozycji macierzy mas  $M(q)$ .

Macierz  $L^T(q)$  jest odwracalna i zawiera parametry mechaniczne manipulatora (inercyjne oraz geometryczne) zawarte w macierzy mas  $M(q)$ , zależy od jego bieżącej konfiguracji, oraz związana jest z macierzą  $M$  w następujący sposób [32]:

$$M(q) = L(q)L^T(q). \quad (4.232)$$

Odwołując się do równania (4.231) obliczmy pochodną wektora  $\nu$  względem czasu, uzyskując

$$\dot{\nu} = \dot{L}^T(q)\dot{q} + L^T(q)\ddot{q}, \quad (4.233)$$

oraz wyznaczmy z równania (4.230) wektor  $\ddot{q}$ :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q}) - G(q) + \tau). \quad (4.234)$$

Podstawmy wynik (4.234) do równania (4.233), otrzymując

$$\dot{\nu} = \dot{L}^T(q)\dot{q} + L^T(q)(M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q}) - G(q) + \tau)). \quad (4.235)$$

Dokonując dalszych przekształceń mamy:

$$\dot{\nu} + L^T M^{-1} C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T(q)\dot{q} - L^T M^{-1} G(q) = L^T M^{-1} \tau. \quad (4.236)$$

Wprowadzając następującą zależność

$$\chi = L^T M^{-1} \quad (4.237)$$

w wyniku uzyskamy postać dynamiki wyrażoną w quasi-piędkościach, tj.

$$\dot{\nu} + \chi C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T(q)\dot{q} + \chi G(q) = \chi \tau. \quad (4.238)$$

Uwzględniając następujące relacje:

$$\epsilon = \chi \tau \quad (4.239)$$

$$C_\nu = \chi C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T \dot{q} \quad (4.240)$$

$$G_\nu = \chi G(q) \quad (4.241)$$

gdzie  $\dot{L}^T(q) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  to macierz pochodnych po czasie macierzy  $L(q)$ , otrzymamy równanie ruchu manipulatora uwzględniające QPZ, tj.

$$\dot{\nu} + C_\nu(q, \nu) + G_\nu(q) = \epsilon \quad (4.242)$$

przy czym

- $\dot{\nu} \in \mathbb{R}^N$  – wektor quasi-przyspieszeń znormalizowanych,
- $C_\nu(q, \nu) \in \mathbb{R}^N$  – wektor sił Coriolisa i sił odśrodkowych w równaniach ruchu zawierających QPZ,
- $G_\nu(q) \in \mathbb{R}^N$  – wektor sił grawitacyjnych w równaniach ruchu zawierających QPZ,
- $\epsilon \in \mathbb{R}^N$  – wektor quasi-sił znormalizowanych w równaniach ruchu zawierających QPZ.

Można nadmienić, że zdefiniowany powyżej składnik grawitacyjny  $G_\nu(q)$  nie był jawnie określony w pracy [36].

Porównując odpowiednie składniki równania (4.238) z równaniem (4.230), otrzymamy zależności (4.239-4.241), co dowodzi równoważności zależności (4.230) oraz (4.242).

#### 4.4.5 Manipulator 2 DOF wyrażony w QPZ

Równania ruchu manipulatora wyrażone w QPZ mogą zostać zapisane jako zestaw równań (4.231) i (4.242) [33]. Co ważne, szczegółowa postać tych równań może się różnić w zależności od założonej formy dekompozycji macierzy mas  $M$ .

Rozpatrzmy dwie przykładowe możliwości dekompozycji, opisane poniżej jako *Przekształcenie I*, oraz *Przekształcenie II*, a przedstawione szczegółowo w rozdziale D.

#### PRZEKSZTAŁCENIE I

gdy macierz  $L$  jest macierzą dolnotrójkątną. Oznacza to, że macierz  $L^T$  jest postaci <sup>vi</sup>:

$$L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{D_3} & \frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{\sqrt{D_3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}} \end{bmatrix}. \quad (4.243)$$

W rozważanym przypadku iloczyn macierzy  $L^T M^{-1}$  przedstawia się następująco:

$$\chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} & 0 \\ -\frac{m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} & \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix}. \quad (4.244)$$

#### DYNAMIKA

Model dynamiki przy uwzględnieniu pseudo-prędkości dany jest zależnością (4.242), dla której zastosowano przekształcenia (4.243) oraz (4.244) otrzymując wektory  $C_\nu(q, \dot{q})$  oraz  $G_\nu(q)$  dane odpowiednio równaniami <sup>vii</sup>

$$C_\nu(q, \dot{q}) = \frac{a_3 \sin q_2}{D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \begin{bmatrix} \sqrt{D_1 D_2} (-D_3 \dot{q}_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \dot{q}_2^2 (a_1 + a_3 \cos q_2)) \\ -\dot{q}_2^2 (D_1 D_2 + a_3 D_3 \cos q_2) \end{bmatrix}, \quad (4.245)$$

$$G_\nu(q) = g \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_3}} \\ \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)(a_1 + a_3 \cos q_2) - (a_2 + a_3 \cos q_2)a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix}. \quad (4.246)$$

Wektor sterowań  $\epsilon$  dany zależnością (4.239), tzn.  $\epsilon = \chi \tau$ , przyjmuje formę

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} & 0 \\ -\frac{m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} & \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} \tau_1 \\ -\frac{m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \tau_1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (4.247)$$

<sup>vi</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku E.1

<sup>vii</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku E.1

## PRZEKSZTAŁCENIE II

gdy macierz  $L$  jest macierzą górnotrójkątną. Oznacza to, że macierz  $L^T$  jest postaci

$$L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{D_2} & 0 \\ \sqrt{a_2}(1 + a_{32} \cos q_2) & \sqrt{a_2} \end{bmatrix} \quad (4.248)$$

natomiast iloczyn macierzy  $L^T M^{-1}$ :

$$\chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} & -\frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{D_1 \sqrt{D_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix}. \quad (4.249)$$

## DYNAMIKA

Model dynamiki przy uwzględnieniu pseudo-piędkości dany jest zależnością (4.242), dla której zastosowano przekształcenia (4.248) oraz (4.249) otrzymując wektory  $C_\nu(q, \nu)$  oraz  $G_\nu(q)$  dane odpowiednio równaniami: <sup>viii</sup>

$$C_\nu(q, \nu) = \begin{bmatrix} -D_2^{-\frac{1}{2}} a_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 (1 + \frac{a_3}{a_2} \cos q_2)) \\ D_1^{-\frac{1}{2}} a_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (4.250)$$

$$G_\nu(q) = g \begin{bmatrix} D_2^{-\frac{1}{2}} (-\frac{a_3}{a_2} a_5 \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1) \\ D_1^{-\frac{1}{2}} a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (4.251)$$

Wektor sterowań  $\epsilon$  dany zależnością (4.239), tzn.  $\epsilon = \chi \tau$ , przyjmuje formę

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} & -\frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{a_2 \sqrt{D_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} \tau_1 - \frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{a_2 \sqrt{D_2}} \tau_2 \\ \frac{1}{\sqrt{D_1}} \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (4.252)$$

## WNIOSKI

Należy podkreślić, że wybór *Przekształcenia I* lub *Przekształcenia II* skutkuje inną szczegółową postacią dynamiki.

W szczególności warto zwrócić uwagę na różne przekształcenia wejścia (4.247) i (4.252) opisujące zależności między  $\tau$  a  $\epsilon$ . Ma to istotne znaczenie w przypadku, gdy rozpatruje się układ mechaniczny (4.230), który jest niedosterowany. Zagadnienie to rozważymy dla struktury Pendubot i Acrobot.

## PRZYPADEK 1

Przyjmijmy sygnał sterujący  $\tau_1 = 0$ , który odpowiada sytuacji tożsamej z wyborem modelu robota typu *Acrobot*.

Skutkuje to postacią wektora  $\epsilon$  równej  $\epsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} \tau_2$  dla *Przekształcenia I*, lub dla *Prze-*

*kształcenia II* :  $\epsilon = \begin{bmatrix} -\frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{a_2 \sqrt{D_2}} \\ \frac{1}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix} \tau_2$ .

<sup>viii</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku E.2



Nasuwa się wniosek, że wybór *Przekształcenia I* daje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie między wektorami  $\tau$  i  $\epsilon$ . W przypadku *Przekształcenia II* odwzorowanie wejścia można interpretować jako iniekcję, dla której nie istnieje przekształcenie odwrotne między  $\tau_2$  a składowymi nowego wejścia  $\epsilon$ .

Prowadzi to również do konieczności stosowania w opisie dynamiki *Acrobot* równań (4.245) oraz (4.246).

## PRZYPADEK 2

Przyjmijmy sygnał sterujący  $\tau_2 = 0$ , który odpowiada sytuacji tożsamej z wyborem modelu robota typu *Pendubot*.

Skutkuje to postacią wektora  $\epsilon$  równą  $\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} \\ -\frac{m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} \tau_1$  dla *Przekształcenia I*, lub  $\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tau_1$

dla *Przekształcenia II*.

Podobnie jak poprzednio można wysnuć wniosek, że wybór *Przekształcenia II* daje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie między wektorami  $\tau$  i  $\epsilon$ . W przypadku *Przekształcenia I* odwzorowanie wejścia można interpretować jako iniekcję, dla której nie istnieje przekształcenie odwrotne między  $\tau_1$  a składowymi nowego wejścia  $\epsilon$ .

Prowadzi to również do konieczności opisu dynamiki *Pendubota* za pomocą równań (4.250) oraz (4.251).

### 4.4.6 Synteza sterownika $u_{\text{stab}}$ z wykorzystaniem QPZ

Motywacja dotycząca konieczności wyznaczenia wzmocnień regulatora jest bliźniacza do tej omówionej w rozdziale 4.4.3.

Rozważmy następujące przekształcenie stanu i wejścia:

$$\xi = F(q)x \quad (4.253)$$

$$\epsilon_i = H(q)\tau_i \quad (4.254)$$

gdzie:

$x = [q, \dot{q}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  – wektor stanu wyrażony w zmiennych naturalnych,

$\xi = [q, \nu]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  – to nowy wektor stanu uwzględniający pseudopędności,

$F(q) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  – opisuje transformację zmiennych stanu,

$H(q) \in \mathbb{R}$  – transformacja sygnału sterującego,

$i = \{1, 2\}$  – jest numerem złącza/napędu/sygnału sterującego.

W otoczeniu punktu zadanego  $q_{\text{ref}}$ , rozwinięcie w szereg Taylora zależności (4.253) przyjmuje postać

$$\tilde{\xi} = F(q_{\text{ref}})\tilde{x} + O(\tilde{x}^2) \quad (4.255)$$

gdzie  $\tilde{x} = x - x_{\text{ref}}$ , oraz  $O(\tilde{x}^2)$  stanowi ciąg reszt. Rozważając tylko część liniową możemy przyjąć w przybliżeniu, że

$$\tilde{\xi} = F(q_{\text{ref}})\tilde{x}. \quad (4.256)$$

Podobnie możemy zapisać dla wejścia

$$\epsilon = H(q_{\text{ref}})u. \quad (4.257)$$

Zapiszmy kryterium optymalizacyjne dla zmiennych naturalnych

$$J = \tilde{x}^T Q \tilde{x} + u^T R u \quad (4.258)$$

dla  $u = \tau_i$ , a następnie podstawmy odpowiednio

$$\tilde{x} = F^{-1}(q_{\text{ref}})\tilde{\xi} \quad (4.259)$$

$$u = H^{-1}(q_{\text{ref}})\epsilon_i \quad (4.260)$$

otrzymując kryterium optymalizacyjne dla zmiennych uwzględniających pseudopredkości:

$$J = \tilde{\xi}^T Q_\xi \tilde{\xi} + \epsilon_i^T R_\epsilon \epsilon_i \quad (4.261)$$

gdzie

$$Q_\xi = (F^{-1})^T Q F^{-1} \quad (4.262)$$

$$R_\epsilon = (H^{-1})^T R H^{-1}. \quad (4.263)$$

Zależność opisująca transformację zmiennych w równaniu (4.253) jest następująca:

$$F = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n \times n} & 0 \\ 0 & L^T \end{bmatrix}. \quad (4.264)$$

Należy zaznaczyć, że postać elementu  $H$  z równania (4.254) jest inna w zależności od przyjętego typu robota, tzn. dla *Pendubota* dla którego  $u = \tau_1$ , mamy zależność:

$$H = D_2^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.265)$$

natomiast dla *Acrobota* dla którego  $u = \tau_2$ , przekształcenie  $H$  z (4.254) przyjmuje formę

$$H = \sqrt{\frac{D_3}{D_1 D_2}}. \quad (4.266)$$

#### 4.4.7 QPZ – sterownik energetyczny

Na podstawie pracy [33] oraz rozważań przedstawionych w rozdziale 4.3.4 przedstawmy ideę stojącą za sterowaniem energetycznym dla robota typu *Pendubot*, z uwzględnieniem transformacji z rozdziału 4.4.4, tzn. przy wykorzystaniu quasi-prędkości *QPZ*.

Równanie dynamiki zapisane za pomocą *QPZ* wyraża się poprzez wzór (4.242).

Podobnie jak w pracy [21] wyznaczmy z (4.242) wektor quasi-przyspieszeń w postaci

$$\dot{\nu} = -C_\nu(q, \nu) - G_\nu(q) + \epsilon. \quad (4.267)$$

Analogicznie jak dla metody z rozdziału 4.3.4, rozważmy szczegółową postać równań opisujących dynamikę dla pierwszego złącza. W tym przypadku obliczamy składową  $\dot{\nu}_1$  podstawiając do równania (4.267) wyrażenia (4.250) oraz (4.251), co pozwala zapisać następujące równanie

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 = & D_2^{-\frac{1}{2}} \left[ a_3 \sin q_2 (w_1(q, \nu) + w_2(q, \nu))^2 + \frac{a_3^2}{a_2} w_1(q, \nu)^2 \sin q_2 \cos q_2 \right. \\ & \left. + \frac{a_3^2}{a_2} w_1(q, \nu) w_2(q, \nu) \sin q_2 \cos q_2 + \frac{a_3}{a_2} a_5 \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) - a_4 \cos q_1 + \epsilon_1 \right], \end{aligned} \quad (4.268)$$

gdzie  $\dot{q}_1 = w_1(q, \nu)$ ,  $\dot{q}_2 = w_2(q, \nu)$ .

W pracy [21] analizującej sterownik energetyczny wyrażony w zmiennych naturalnych zaproponowano sterowanie  $\tau_1$  (4.96), dla funkcji  $F$  opisanej równaniem (4.97).

Zastosowanie *QPZ* wymaga wprowadzenia nowej definicji tej funkcji określonej przez

$$F^{NQV} = \frac{1}{a_2} F + \frac{a_3^2}{a_2} \cos q_2 \sin q_2 \cdot w_1(q, \nu) w_2(q, \nu). \quad (4.269)$$

Przekształcenie to wynika z równoważności równań (4.98) i (4.268) opisujących dynamikę pierwszego złącza i wyrażonych odpowiednio przez przyspieszenie  $\ddot{q}_1$  i quasi-przyspieszenie  $\dot{\nu}_1$ , tj.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{1}{\det(M)} (F + a_2 \tau_1), \\ \dot{\nu}_1 &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} (F^{NQV} + \epsilon_1), \end{aligned} \quad (4.270)$$

przy czym w równaniu (4.270) podstawiono  $\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{D_2}} \tau_1$ .

Celem dalszej analizy zastosujemy analogicznie postępowanie jak miało to miejsce w rozdziale 4.3.4. Wyznamy energię całkowitą układu wyrażoną w *QPZ*, tzn.

$$E = \frac{1}{2} \nu^T \nu + a_4 g \sin q_1 + a_5 g \sin(q_1 + q_2). \quad (4.271)$$

Energia całkowita układu dla punktu równowagi wyrażona jest poprzez następujące równanie

$$E_{\text{top}} = E\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) = (a_4 + a_5)g. \quad (4.272)$$

Wprowadźmy ponadto następujące zależności:

$$\tilde{q}_1 = q_1 - \frac{\pi}{2}, \quad (4.273)$$

$$\tilde{E} = E - E_{\text{top}}, \quad (4.274)$$

które wraz z  $\nu_1$ , w procesie sterowania mają zostać sprowadzenie do zera.

Jak przedstawiono w pracy [33], zaproponowany sterownik wyrażony w  $QPZ$  przyjmuje postać:

$$\tau_1^{NQVs} = \frac{1}{k_E \tilde{E} + k_D} \left( -k_D F^{NQV} - (D_2 w_1(q, \nu) + k_P \tilde{q}_1) \right) \quad (4.275)$$

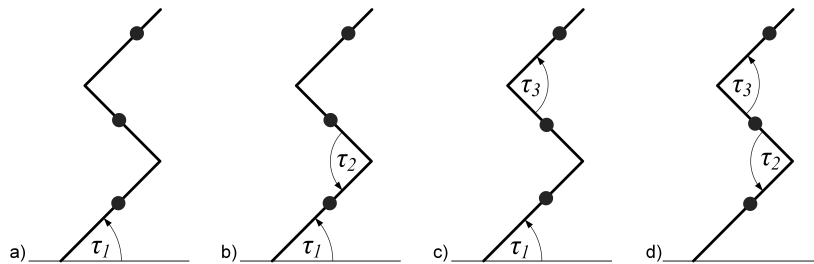
dla dodatnich parametrów  $k_E$ ,  $k_D$ , oraz  $k_P$  i jest on analogiczny do sterownika  $\tau_1$  (4.96) wyrażonego we współrzędnych naturalnych.

## 4.5 Częściowa linearyzacja dla manipulatora 3-DOF

Uszczegóławiając zagadnienia przedstawione w części 4.2 prześledźmy proces częściowej linearyzacji dla wahadła o 3 stopniach swobody z wykorzystaniem koncepcji zaprezentowanej w pracach [81, 84]. W niniejszym rozdziale dokonamy sprawdzenia warunków linearyzacji dla potrójnego odwróconego wahadła z deficytem napędów. Zaproponowany zostanie sterownik odpowiedzialny za stabilizację robota w pozycji wyprostowanej. Ponadto rozważaniom podlegać będzie dynamika zerowa rozpatrywanego modelu.

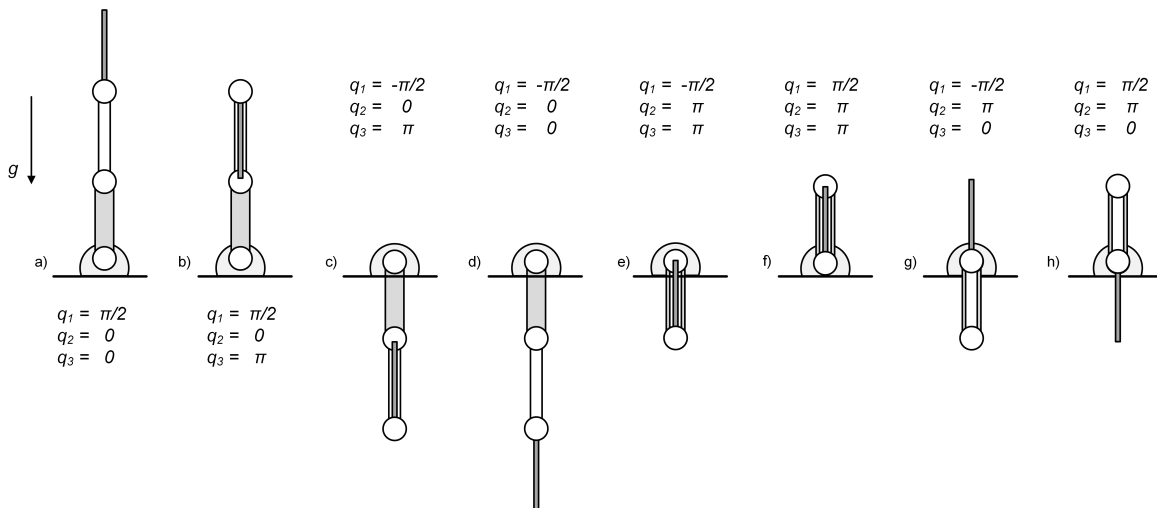
Analiza układu niedosterowanego z trzema złączami zostanie przeprowadzona dla systemu, którego liczba napędów  $m = 2$  oraz liczba biernych stopni swobody wynosi  $l = 1$ .

Poniższe podrozdziały przedstawiają uszczegółowienie częściowej linearyzacji dla 3-DOF uszeregowane ze względu na umiejscowienie napędów, jak przedstawiono na rysunku 4.17.



Rysunek 4.17: Rozmieszczenie napędów dla analizowanego robota o 3 DOF

Analogicznie jak w rozdziale 4.3 system posiada szereg punktów charakterystycznych przedstawionych na rysunku 4.18, dla których podstawowej konfiguracji nietrywialnej odpowiada rysunek a). Zadanie utrzymania wahadła w pionie realizowane jest właśnie dla niestabilnej pozycji z rysunku 4.18a.



Rysunek 4.18: Punkty równowagi dla robota o 3 złączach, przy zerowym wymuszeniu

### 4.5.1 Propozycja sterowania

Nawiązując do rozdziału 4.2.3 przedstawmy postać pomocniczego wejścia (4.33) w zależności od przyjętej formy linearyzacji częściowej.

UWAGA: Zakładamy, podobnie jak w rozdziale 4.3.1, że wartości referencyjne funkcji wyjścia będą rozpatrywane w zerze, tj. dla

$$(\ddot{y}^d, \dot{y}^d, y^d) = (0, 0, 0), \quad (4.276)$$

oraz wartości referencyjne

$$\left(\ddot{q}_i^d, \dot{q}_i^d, q_i^d\right) = (0, 0, \text{const}) \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (4.277)$$

są wartościami stałymi, tzn. zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu.

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.25) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = h_j = k_{j1}(q_1 - q_1^d) + k_{j2}(q_2 - q_2^d) + k_{j3}(q_3 - q_3^d), \quad (4.278)$$

dla  $j = \{1, 2\}$ ,  $h_j = [h_1, h_2]^T$ .

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (4.278), dla obiektu opisanego dynamiką (4.23):

$$\begin{aligned} \dot{h} &= L_f h_j \\ \ddot{h} &= L_f^2 h_j + L_{g_j} L_f h_j v_j. \end{aligned}$$

Zapisując powyższe zależności macierzowo otrzymujemy:

$$\ddot{h} = L_f^2 h + L_g L_f h v. \quad (4.279)$$

W celu odsprężania dynamiki (4.279) określmy następujący sygnał wejściowy  $v \in \mathbb{R}^2$

$$v = [v_1, v_2]^T = (L_g L_f h)^{-1}(u - L_f^2 h), \quad (4.280)$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym przez

$$u = \ddot{y}^d + K_d(\dot{y}^d - L_f h) + K_p(y^d - h), \quad (4.281)$$

przy czym  $\ddot{y}^d, \dot{y}^d, y^d$  opisują referencyjną trajektorię funkcji wyjścia  $h$ , zaś  $K_p = \text{diag}\{K_{p1}, K_{p2}\}$ ,  $K_d = \text{diag}\{K_{d1}, K_{d2}\}$  są dodatnio określonymi macierzami wzmocnień.

Z równania (4.280) wynika, że jako wyjścia częściowo linearyzujące można wziąć dowolną parę funkcji  $(h_1, h_2)$  takich, że <sup>ix</sup>

$$rg(L_g L_f h) = 2. \quad (4.282)$$

W konsekwencji  $h$  zbiega wykładniczo do  $y^d$  jeżeli  $L_g L_f h \neq 0$  dla  $x \in X \subset \mathbb{R}^6$ .

#### LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.25) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = h_1 = k_1(q_1 - q_1^d) + k_2(q_2 - q_2^d) + k_3(q_3 - q_3^d). \quad (4.283)$$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (4.283), dla obiektu opisanego dynamiką (4.23):

$$\begin{aligned} \dot{h} &= L_f h_1 \\ \ddot{h} &= L_f^2 h_1 + L_g L_f h_1 v. \end{aligned}$$

W celu odsprężania dynamiki  $\ddot{h}$  zdefiniujemy następujący sygnał wejściowy  $v \in \mathbb{R}^1$

$$v = (L_g L_f h)^{-1}(u - L_f^2 h) \quad (4.284)$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym następująco

$$u = \ddot{y}^d + K_d(\dot{y}^d - L_f h) + K_p(y^d - h), \quad (4.285)$$

przy czym  $\ddot{y}^d, \dot{y}^d, y^d$  opisują referencyjną trajektorię funkcji wyjścia  $h$ , zaś  $K_p, K_d$  są dodatnimi wzmocnieniami.

Z równania (4.284) wynika, że jako wyjście częściowo linearyzujące można wziąć dowolną funkcję  $h$  taką, że

$$L_g L_f h \neq 0. \quad (4.286)$$

W konsekwencji  $h$  zmierza wykładniczo do  $y^d$  jeżeli  $L_g L_f h \neq 0$  dla  $x \in X \subset \mathbb{R}^6$ .

<sup>ix</sup> $rg$  zdefiniowano w rozdziale 3.1

### 4.5.2 Dynamika układu zamkniętego

Przedstawmy ogólną postać dynamiki układu zamkniętego, uwzględniającą propozycję sterowania z rozdziału 4.5.1.

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Wprowadzając zmienne stanu

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1(q) & z_2 &= \dot{h}_1(q) \\ z_3 &= h_2(q) & z_4 &= \dot{h}_2(q) \\ \eta_1 &= q_p & \eta_2 &= \dot{q}_p. \end{aligned} \quad (4.287)$$

dynamikę układu zamkniętego możemy zapisać w następującej ogólnej postaci

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{h}_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \ddot{h}_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \ddot{q}_p = -M_{p1}^{-1}(M_{a1}v + \mu_p + G_p) \\ \tilde{y}_1 &= z_1 \\ \tilde{y}_2 &= z_3. \end{aligned} \quad (4.288)$$

#### LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Wprowadzając zmienne stanu

$$\begin{aligned} \eta_1 &= h(q) & \eta_2 &= \dot{h}(q) \\ z_1 &= q_{a_1} & z_2 &= \dot{q}_{a_1} \\ z_3 &= q_{a_2} & z_4 &= \dot{q}_{a_2}. \end{aligned} \quad (4.289)$$

dynamikę układu zamkniętego możemy zapisać w następującej ogólnej postaci

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \ddot{h} \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -M_{a1:1}^\dagger(M_{p1}v_1 + \mu_p + G_p) \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -M_{a1:2}^\dagger(M_{p1}v_1 + \mu_p + G_p) \\ \tilde{y}_1 &= \eta_1 \end{aligned} \quad (4.290)$$

gdzie  $M_{a1:\rho}^\dagger$  jest  $\rho$ -tym wierszem macierzy  $M_{a1}^\dagger$ .

### 4.5.3 Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_1, \tau_2$

Przejdźmy do analizy częściowej linearyzacji dla pierwszego ze scenariuszy, w którym zakładamy, że napędy umieszczone są w pierwszym i drugim złączu, zgodnie z rysunkiem 4.17a. Szczegółową postać równania dynamiki (4.3)-(4.4) dla analizowanego wahadła trójczłonowego możemy zapisać więc w następującej formie

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \mu_1 + G_1 = \tau_1 & (4.291) \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + \mu_2 + G_2 = \tau_2 & (4.292) \\ m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \mu_3 + G_3 = 0, & (4.293) \end{cases}$$

gdzie:

$$\ddot{q}_a^T = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2], \quad \ddot{q}_p = \ddot{q}_3, \quad \tau = [\tau_1, \tau_2]^T,$$

oraz

$$\begin{aligned} M_{p1} &= m_{33}, & M_{a1} &= [m_{31}, m_{32}], & M_{p2} &= \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{bmatrix}, & M_{a2} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \\ \mu_p &= \mu_3, & \mu_a &= [\mu_1, \mu_2]^T, & G_p &= G_3, & G_a &= [G_1, G_2]^T. \end{aligned}$$

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Dla modelu (4.291)-(4.293) częściowo zlinearyzowany system (4.11)-(4.12) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v_1 \\ \ddot{q}_2 = v_2 \\ \ddot{q}_3 = -m_{33}^{-1}(m_{31}v_1 + m_{32}v_2 + \mu_3 + G_3). \end{cases} \quad (4.294)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T \quad (4.295)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{J}_1 = -\frac{m_{31}}{m_{33}}, \quad \tilde{J}_2 = -\frac{m_{32}}{m_{33}},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ 0 \\ w_3 \\ -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_1 \end{bmatrix}}_{g_1(x)} v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{J}_2 \end{bmatrix}}_{g_2(x)} v_2. \quad (4.296)$$

#### STEROWALNOŚĆ

Nawiązując do zagadnień z rozdziału 4.2.4 wyznaczmy sterowalność dla obiektu opisanego równaniem (4.296). Macierz sterowalności (4.38) przybiera postać

$$\mathcal{A}^s = [g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, ad_{g_1} ad_f g_1, ad_{g_2} ad_f g_2, ad_f ad_f g_1, ad_f ad_f g_2]. \quad (4.297)$$

Dla układu (4.296) rząd

$$\text{rank } \mathcal{A}^s = 6 = n.$$

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.296) jest sterowalny w otoczeniu punktu równowagi

## WARUNKI LINEARYZACJI

Z równania (4.296) wynika, że model wahadła po transformacji opisywany jest przez 4-wymiarowy podsystem liniowy, oraz 2-wymiarowy system nieliniowy. Dokonajmy formalnego sprawdzenia największego linearyzowalnego podsystemu dla układu (4.296). Odwołajmy się do metody wyznaczania wymiaru dynamiki, która może być zlinearyzowana, opisaną w rozdziale 3.3.1. Procedurę tę można przedstawić w następujących krokach:

1. Krok pierwszy – wyznaczmy indeks sterowalności  $r_0$

$$r_0 = \dim \mathcal{G}_0 = 2,$$

$$\text{dla } \mathcal{G}_0 = \text{span}\{g_1, g_2\}.$$

2. Krok drugi – wyznaczmy  $r_1$

$$r_1 = \dim \Delta_1 - \dim \bar{\mathcal{G}}_0 = 4 - 2 = 2,$$

$$\bar{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G}_0, \text{ tak więc } \dim \bar{\mathcal{G}}_0 = \dim \mathcal{G}_0 = 2,$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{span}\{ad_f \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_0\} \\ &= \text{span}\{ad_f g_1, ad_f g_2, g_1, g_2\} = \mathcal{G}_1. \end{aligned}$$

3. Krok trzeci – wyznaczmy  $r_2$  <sup>x</sup>

$$r_2 = \dim \Delta_2 - \dim \bar{\mathcal{G}}_1 = 6 - 6 = 0,$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2\},$$

$$\bar{\mathcal{G}}_1 = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, ad_{g_1} ad_f g_1, ad_{ad_f g_1} ad_f g_1\},$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \text{span}\{ad_f^2 \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_1\} \\ &= \text{span}\{ad_f^2 g_1, ad_f^2 g_2, g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, ad_{g_1} ad_f g_1\}. \end{aligned}$$

Nie ma potrzeby liczenia pozostałych wskaźników  $r_i$ , jako, że są one dodatnie i nierosnące. W efekcie indeksy  $K_j$ ,  $j \geq 1$  są następujące:

$$\begin{aligned} K_1 &= \#\{r_i \geq 1, \forall i \geq 0\} = 2, \\ K_2 &= \#\{r_i \geq 2, \forall i \geq 0\} = 2, \\ K_3 &= \#\{r_i \geq 3, \forall i \geq 0\} = 0. \end{aligned} \quad (4.298)$$

Oznacza to, że największy linearyzowalny podsystem dla układu (4.296) jest wymiaru 4.

Potwierdzamy zatem formalnie, że możliwe jest przekształcenie układu (4.296) do postaci 4-wymiarowego podsystemu liniowego i 2-wymiarowego systemu nieliniowego.

## DYNAMIKA ZEROWA

Odwołując się do zależności opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji wyjścia  $h(q)$  danej zależnością (4.278), których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_{11}, \dots, k_{23}$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób.

Warto nadmienić, że prezentowane w niniejszym przykładzie wyniki, dla funkcji wyjścia określonej przez (4.299), odzwierciedlają również ideę oraz formę rozważań zaprezentowaną w oryginalnej pracy [81].

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.278) są następujące:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1, & k_{12} &= 0, & k_{13} &= 0, \\ k_{21} &= 0, & k_{22} &= 1, & k_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (4.299)$$

Równanie (4.280) przybiera więc postać <sup>xi</sup>

$$v = [v_1, v_2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (4.300)$$

<sup>x</sup>Wyznaczenie postaci najmniejszej inwolutywnej dystrybucji  $\bar{\mathcal{G}}_1$  znajduje się w załączniku G.1

<sup>xi</sup>Szczegółowe wyprowadzenia zawarto w załączniku F.1



gdzie sygnał  $u$  dany (4.281) możemy zapisać jako

$$u = -K_d \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_2 - q_2^d \end{bmatrix}, \quad (4.301)$$

natomiast zmienne stanu (4.287) przyjmują formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 - q_1^d & z_2 &= \dot{q}_1 \\ z_3 &= q_2 - q_2^d & z_4 &= \dot{q}_2 \\ \eta_1 &= q_3 & \eta_2 &= \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (4.302)$$

Wynikowa dynamika układu zamkniętego (4.288) dla powyżej określonych zmiennych stanu może być zapisana jako

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \dot{q}_3 = -m_{33}^{-1}(m_{31}v_1 + m_{32}v_2 + \mu_3 + G_3) \\ \tilde{y}_1 &= z_1 \\ \tilde{y}_2 &= z_3. \end{aligned} \quad (4.303)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.301) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$(q_1^d, q_2^d) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (4.304)$$

to dynamika (4.303) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_{p1}z_1 - K_{d1}z_2 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -K_{p2}z_3 - K_{d2}z_4 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= m_{33}^{-1} [m_{31}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{32}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_3 - G_3] \\ \tilde{y}_1 &= z_1 \\ \tilde{y}_2 &= z_3. \end{aligned} \quad (4.305)$$

W postaci macierzowej powyższe równania możemy zapisać jako

$$\dot{z} = Az \quad (4.306)$$

$$\dot{\eta} = \omega(q_1, q_2, z, \eta, t) \quad (4.307)$$

$$\tilde{y} = Cz \quad (4.308)$$

dla której  $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$ ,  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , zaś macierze  $A$  i  $C$  określone są przez

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_{p1} & -K_{d1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -K_{p2} & -K_{d2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.309)$$

natomiast dynamika wewnętrzna dana jest przez

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -m_{33}^{-1}(m_{31}v_1 + m_{32}v_2 + \mu_3 + G_3) \end{bmatrix}. \quad (4.310)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.304) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.310), tj.

$$\dot{\eta}_2 = m_{33}^{-1} [m_{31}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{32}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_3 - G_3] \Big|_{\substack{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d, q_1 = q_1^d \\ \dot{q}_2 = \dot{q}_2^d, q_2 = q_2^d}} \quad (4.311)$$

redukuje się do

$$\dot{\eta}_2 = \frac{1}{a_3} m_3 g L_{c3} \sin q_3. \quad (4.312)$$

Finalnie, zależność (4.310) zdefiniowana jako:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \frac{1}{a_3} m_3 g L_{c3} \sin q_3 \end{bmatrix} \quad \text{xii} \quad (4.313)$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy linearyzacji dynamiki (4.313) celem określenia jej stabilności w otoczeniu punktu równowagi, podobnie jak miało to miejsce w rozdziale 4.3.3.

$$Y = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} \Big|_{\substack{q_3=0 \\ \dot{q}_3=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \xi \cos q_3 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{q_3=0 \\ \dot{q}_3=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.314)$$

Wartości własne wyrażenia (4.314):  $\text{eig}(Y) = [6.8989, -6.8989]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

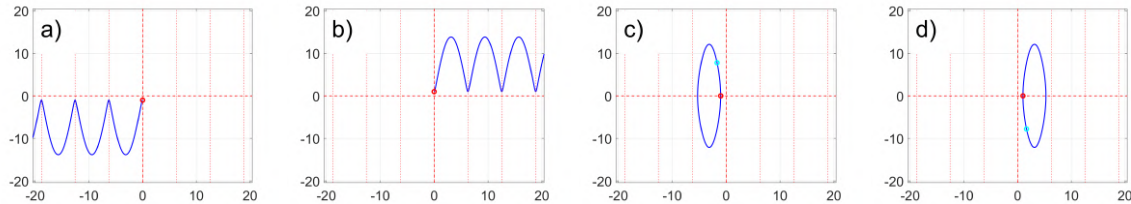
Wyznaczenie jawnej postaci rozwiązania równania (4.312) jest analogiczne do tego z rozdziału 4.3.3. Zakładając, że  $\xi = \frac{1}{a_3} g m_3 L_3$  możemy zapisać

$$\ddot{q}_3 = \xi \sin q_3, \quad (4.315)$$

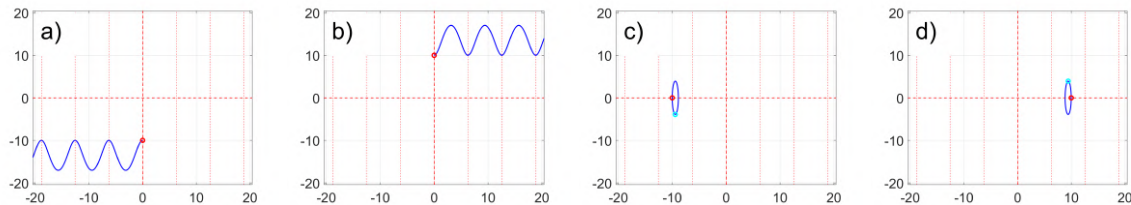
otrzymując

$$\dot{q}_3 = \pm \sqrt{-2\xi \cos q_3 + C_2}. \quad (4.316)$$

Wynikiem całkowania wyrażenia (4.316) jest funkcja eliptyczna. Rysunki (4.19-4.20) stanowią graficzną interpretację otrzymanego wyniku, uzyskaną drogą numerycznych symulacji, dla różnych zestawów warunków początkowych. Przyjęto horyzont czasu  $T_{\text{sim}} = 10\text{s}$ . Czerwony okrąg  $\circ$  oznacza początek, zaś  $\bullet$  oznacza koniec trajektorii. Czerwoną linią przerywaną oznaczono  $\pm i2\pi$ , dla  $i \in \mathbb{N}$ .



**Rysunek 4.19:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -1]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 1]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [1, 0]$ . Oś odciętych odpowiada zmiennej  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .



**Rysunek 4.20:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -10]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 10]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [10, 0]$ . Oś odciętych odpowiada zmiennej  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .

<sup>xii</sup>Wyprowadzenie znajduje się w załączniku H.

## LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Dla modelu (4.291)-(4.293) częściowo zlinearyzowany system (4.20)-(4.21) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 &= -\frac{m_{31}}{m_{31}^2+m_{32}^2}(m_{33}v_1 + \mu_3 + G_3) \\ \ddot{q}_2 &= -\frac{m_{32}}{m_{31}^2+m_{32}^2}(m_{33}v_1 + \mu_3 + G_3) \\ \ddot{q}_3 &= v_1. \end{cases} \quad (4.317)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T, \quad (4.318)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{\mathcal{J}}_1 = -\frac{m_{31}}{m_{31}^2+m_{32}^2}, \quad \tilde{\mathcal{J}}_2 = -\frac{m_{32}}{m_{31}^2+m_{32}^2},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \tilde{\mathcal{J}}_1(\mu_3 + G_3) \\ w_2 \\ \tilde{\mathcal{J}}_2(\mu_3 + G_3) \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_1 m_{33} \\ 0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_2 m_{33} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} v_1. \quad (4.319)$$

## STEROWALNOŚĆ

Nawiązując do zagadnień z rozdziału 4.2.4 wyznaczmy sterowalność dla obiektu opisanego równaniem (4.319). Macierz sterowalności (4.38) przybiera postać

$$\mathcal{A}^s = [g, ad_f g, ad_g ad_f g, ad_f ad_f g]. \quad (4.320)$$

Dla układu (4.319) rząd

$$\text{rank } \mathcal{A}^s = 4 \neq n.$$

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.319) nie jest sterowalny. Wynika to ze zmniejszenia rozmiaru wejścia.

## WARUNKI LINEARYZACJI

Z równania (4.319) wynika, że model wahadła po transformacji uwzględnia 2-wymiarowy podsystem liniowy, oraz 4-wymiarowy system nieliniowy. Dokonajmy formalnego sprawdzenia największego linearyzowalnego podsystemu dla układu (4.319). Odwołajmy się do metody wyznaczania wymiaru dynamiki, która może być zlinearyzowana, opisaną w rozdziale 3.3.1. Procedurę tą można przedstawić w następujących krokach:

1. Krok pierwszy – wyznaczmy indeks sterowalności  $r_0$

$$r_0 = \dim \mathcal{G}_0 = 1$$

dla  $\mathcal{G}_0 = \text{span}\{g\}$ .

2. Krok drugi – wyznaczmy  $r_1$

$$r_1 = \dim \Delta_1 - \dim \bar{\mathcal{G}}_0 = 2 - 1 = 1$$

$$\bar{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G}_0, \text{ tak więc } \dim \bar{\mathcal{G}}_0 = \dim \mathcal{G}_0 = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{span}\{ad_f \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_0\} \\ &= \text{span}\{ad_f g, g\} = \mathcal{G}_1 \end{aligned}$$

3. Krok trzeci – wyznaczmy  $r_2$

$$r_2 = \dim\Delta_2 - \dim\bar{\mathcal{G}}_1 = 3 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \text{span}\{g, ad_f g\} \\ \bar{\mathcal{G}}_1 &= \text{span}\{g, ad_f g, ad_f ad_f g\} \\ \Delta_2 &= \text{span}\{ad_f^2 \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_1\} \\ &= \text{span}\{ad_f^2 g, g, ad_f g, ad_g ad_f g\}.\end{aligned}$$

Nie ma potrzeby liczenia pozostałych wskaźników  $r_i$ , jako, że są one dodatnie i nierosnące. W efekcie indeksy  $K_j$ ,  $j \geq 1$  są następujące:

$$\begin{aligned}K_1 &= \#\{r_i \geq 1, \forall i \geq 0\} = 1 \\ K_2 &= \#\{r_i \geq 2, \forall i \geq 0\} = 1 \\ K_3 &= \#\{r_i \geq 3, \forall i \geq 0\} = 0\end{aligned}\tag{4.321}$$

Oznacza to, że największy linearyzowalny podsystem dla układu (4.319) jest wymiaru 2.

Potwierdzamy, że możliwe jest przekształcenie układu (4.319) do postaci 2-wymiarowego podsystemu liniowego i 4-wymiarowego systemu nieliniowego.

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji  $h(q)$  danej zależnością (4.283), których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_1, k_2, k_3$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób.

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.283) są następujące:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1.\tag{4.322}$$

Równanie (4.284) przybiera więc postać <sup>xiii</sup>

$$\mathbf{v} = 1(u - 0) = u,\tag{4.323}$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_3 - K_p(q_3 - q_3^d).\tag{4.324}$$

natomiast zmienne stanu (4.289) przyjmują formę

$$\begin{aligned}\eta_1 &= q_3 - q_3^d & \eta_2 &= \dot{q}_3 \\ z_1 &= q_1 & z_2 &= \dot{q}_1 \\ z_3 &= q_2 & z_4 &= \dot{q}_2.\end{aligned}\tag{4.325}$$

Wynikowa dynamika układu zamkniętego (4.290) dla powyżej określonych zmiennych stanu może być zapisana jako <sup>xiv</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \mathbf{v} \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{m_{31}}{m_{31}^2 + m_{32}^2}(m_{33}\mathbf{v} + \mu_3 + G_3) \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -\frac{m_{32}}{m_{31}^2 + m_{32}^2}(m_{33}\mathbf{v} + \mu_3 + G_3) \\ \tilde{y}_1 &= \eta_1.\end{aligned}\tag{4.326}$$

<sup>xiii</sup> Szczegółowe wyprowadzenia zawarto w załączniku F.1

<sup>xiv</sup> Wyprowadzenie znajduje się w załączniku H.

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla algorytmu (4.324) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left(\ddot{q}_3^d, \dot{q}_3^d, q_3^d\right) = (0, 0, 0), \quad (4.327)$$

to dynamika układu zamkniętego (4.326) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -K_p \eta_1 - K_d \eta_2 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{m_{31}}{m_{31}^2 + m_{32}^2} [m_{33}(-K_p \eta_1 - K_d \eta_2) + \mu_3 + G_3] \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -\frac{m_{32}}{m_{31}^2 + m_{32}^2} [m_{33}(-K_p \eta_1 - K_d \eta_2) + \mu_3 + G_3] \\ \tilde{y}_1 &= \eta_1. \end{aligned} \quad (4.328)$$

W postaci macierzowej powyższe równania możemy zapisać jako

$$\dot{\eta} = A\eta \quad (4.329)$$

$$\dot{z} = s(\eta, z, t) \quad (4.330)$$

$$\tilde{y} = C\eta, \quad (4.331)$$

dla której  $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$ ,  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , macierze  $A$  i  $C$  dane są jako

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0], \quad (4.332)$$

natomiast dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $s(\eta, z, t)$ :

$$s(\eta, z, t) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{m_{31}}{m_{31}^2 + m_{32}^2} (m_{33}v_1 + \mu_3 + G_3) \\ z_4 \\ -\frac{m_{32}}{m_{31}^2 + m_{32}^2} (m_{33}v_1 + \mu_3 + G_3) \end{bmatrix}. \quad (4.333)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.327) zależność  $\dot{z}_2$  oraz  $\dot{z}_4$  z (4.333) redukuje się do

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{31} \\ m_{32} \end{bmatrix} \frac{1}{m_{31}^2 + m_{32}^2} \left( \xi \dot{q}_1^2 \sin q_2 + gm_3 L_{c3} \cos(q_1 + q_2) \right) \Big|_{\substack{\dot{q}_3 = \dot{q}_3^d \\ q_3 = q_3^d}} \quad (4.334)$$

Finalnie, zależność (4.333) zdefiniowana teraz jako  $s(0, z, t)$ , tj.

$$s(0, z, t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{m_A}{m_A^2 + m_B^2} (\xi \dot{q}_1^2 \sin q_2 + gm_3 L_{c3} \cos(q_1 + q_2)) \\ z_4 \\ -\frac{m_B}{m_A^2 + m_B^2} (\xi \dot{q}_1^2 \sin q_2 + gm_3 L_{c3} \cos(q_1 + q_2)) \end{bmatrix}, \quad (4.335)$$

dla  $\xi = L_1 L_{c3} m_3$ ,  $m_A = a_3 + \xi \cos q_2$ ,  $m_B = a_3$ , jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy linearyzacji dynamiki (4.335) celem określenia jej stabilności w otoczeniu punktu równowagi.

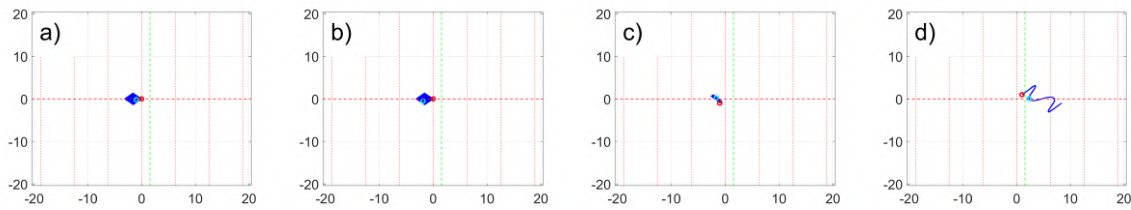
$$Y = \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{\substack{q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = 0 \\ \dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0}} = \frac{1}{m_A^2 + m_B^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ Y_4 & Y_5 & Y_6 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = 0 \\ \dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0}} \quad (4.336)$$

dla

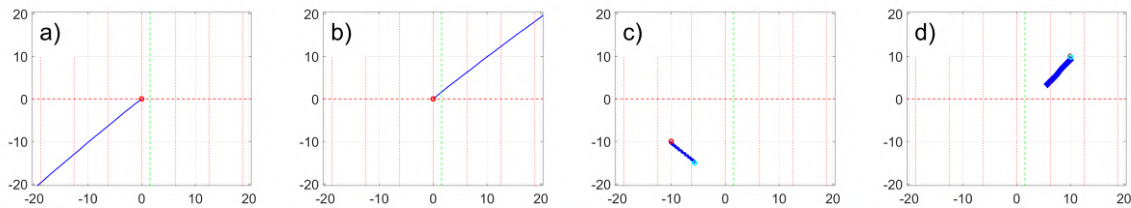
$$\begin{aligned}
 Y_1 &= m_A L c_3 g m_3 \sin(q_1 + q_2) \\
 Y_2 &= -2m_A L_1 L c_3 \dot{q}_1 m_3 \sin(q_2) \\
 Y_3 &= m_A (L c_3 g m_3 \sin(q_1 + q_2) - L_1 L c_3 \dot{q}_1^2 m_3 \cos q_2) \\
 &\quad + L_1 L c_3 m_3 \sin(q_2) (L_1 L c_3 m_3 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + L c_3 g m_3 \cos(q_1 + q_2)) \\
 &\quad - 2L_1 L c_3 m_3 \sin(q_2) (L_1 L c_3 m_3 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + L c_3 g m_3 \cos(q_1 + q_2)) m_A^2 \\
 Y_4 &= L c_3 a_3 g m_3 \sin(q_1 + q_2) \\
 Y_5 &= -2L_1 L c_3 a_3 \dot{q}_1 m_3 \sin(q_2) \\
 Y_6 &= a_3 (L c_3 g m_3 \sin(q_1 + q_2) - L_1 L c_3 \dot{q}_1^2 m_3 \cos q_2) \\
 &\quad - 2m_A L_1 L c_3 a_3 m_3 \sin q_2 (L_1 L c_3 m_3 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + L c_3 g m_3 \cos(q_1 + q_2)).
 \end{aligned}$$

Wartości własne wyrażenia (4.336) równe  $\text{eig}(Y) = [-4.6912, 4.6912, 0, 0]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

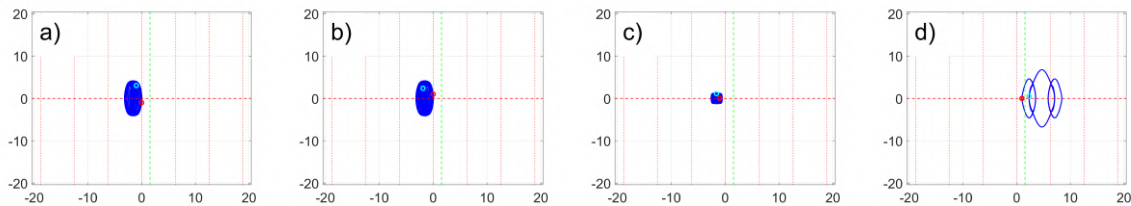
W tym przypadku analityczne wyznaczenie trajektorii układu na dynamice zerowej dla równania (4.335) jest trudne. Rozwiązanie można uzyskać symulacyjnie. Przykładową interpretację rozwiązania tej dynamiki przedstawiono na rysunkach (4.21-4.26), dla różnych zestawów warunków początkowych. Przyjęto horyzont czasu  $T_{\text{sim}} = 50\text{s}$ . Czerwony okrąg  $\circ$  oznacza początek, zaś  $\circ$  oznacza koniec trajektorii. Czerwoną linią przerywaną oznaczono  $\pm i2\pi$ , dla  $i \in \mathbb{N}$ . Zieloną linią przerywaną oznaczono  $q_1^d = \frac{\pi}{2}$ .



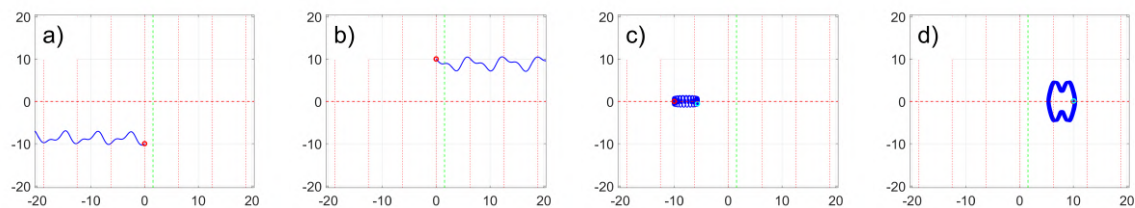
**Rysunek 4.21:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [0, -1, 0, -1]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [0, 1, 0, 1]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [-1, 0, -1, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [1, 0, 1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $q_2$ .



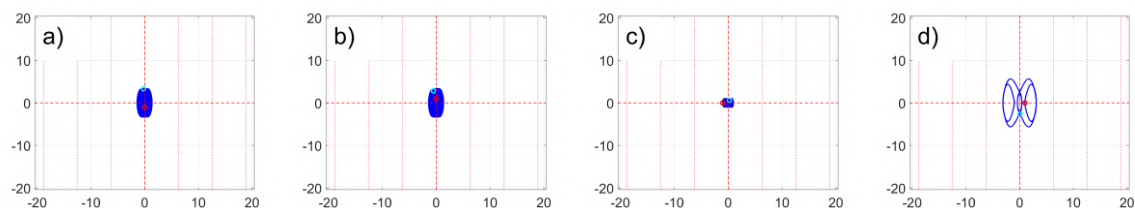
**Rysunek 4.22:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [0, -10, 0, -10]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [0, 10, 0, 10]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [-10, 0, -10, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2] = [10, 0, 10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $q_2$ .



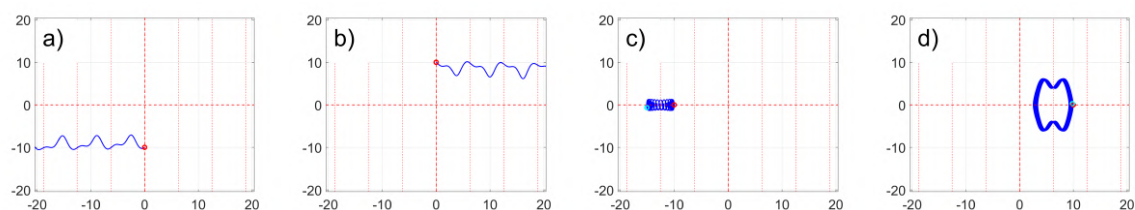
**Rysunek 4.23:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -1]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 1]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-1, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , rzędnych:  $\dot{q}_1$ .



**Rysunek 4.24:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -10]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 10]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-10, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_1$ .



**Rysunek 4.25:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , rzędnych:  $\dot{q}_2$ .



**Rysunek 4.26:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -10]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 10]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-10, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_2$ .

#### 4.5.4 Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_1, \tau_3$

W drugim z rozważanych scenariuszy zakładamy, że napędy umieszczone są w pierwszym i trzecim złączu (rysunek 4.17b). Szczegółową postać równań dynamiki (4.3)-(4.4) dla analizowanego wahadła trójczłonowego możemy zapisać więc w następującej formie

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \mu_1 + G_1 = \tau_1 & (4.337) \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + \mu_2 + G_2 = 0 & (4.338) \\ m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \mu_3 + G_3 = \tau_3 & (4.339) \end{cases}$$

gdzie:

$$\ddot{q}_a^T = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_3], \quad \ddot{q}_p = \ddot{q}_2, \quad \tau = [\tau_1, \tau_3]^T,$$

oraz

$$M_{p1} = m_{22}, \quad M_{a1} = [m_{21}, m_{23}], \quad M_{p2} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{32} \end{bmatrix}, \quad M_{a2} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mu_p = \mu_2, \quad \mu_a = [\mu_1, \mu_3]^T, \quad G_p = G_2, \quad G_a = [G_1, G_3]^T.$$

Ze względu na charakter rozważań bliźniaczy do rozdziału 4.5.3, przy zastosowaniu częściowej linearyzacji dla sterowań  $(\tau_1, \tau_3)$  część wyprowadzeń i analiz zostanie pominięta. Pozostawione zostaną natomiast różnice oraz szczegółowe zależności niezbędne z punktu widzenia czytelności przekazu.

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Dla modelu (4.337)-(4.339) częściowo zlinearyzowany system (4.11)-(4.12) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v_1 \\ \ddot{q}_3 = v_3 \\ \ddot{q}_2 = -m_{22}^{-1}(m_{21}v_1 + m_{23}v_3 + \mu_2 + G_2). \end{cases} \quad (4.340)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T \quad (4.341)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{J}_1 = -\frac{m_{12}}{m_{22}}, \quad \tilde{J}_3 = -\frac{m_{32}}{m_{22}},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{J}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_1(x)} v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2(x)} v_3. \quad (4.342)$$

#### STEROWALNOŚĆ

Dla układu (4.342) rząd

$$\text{rank } \mathcal{A}^s = 6 = n.$$

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.342) jest sterowalny w otoczeniu punktu równowagi.



## WARUNKI LINEARYZACJI

Przeprowadzając analogiczną jak w rozdziale 4.5.3 analizę otrzymujemy, że największy linearyzowalny podsystem dla układu (4.342) jest wymiaru 4.

Potwierdzamy zatem, że możliwe jest przekształcenie układu (4.342) do postaci 4-wymiarowego podsystemu liniowego i 2-wymiarowego systemu nieliniowego.

## DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla przykładowej funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji  $h_1(q), h_3(q)$ , których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_{11}, \dots, k_{33}$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób.

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.278) są następujące:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1, & k_{12} &= 0, & k_{13} &= 0, \\ k_{31} &= 0, & k_{32} &= 0, & k_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (4.343)$$

Równanie (4.280) przybiera więc postać <sup>xv</sup>

$$v = [v_1, v_3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (4.344)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_3 - q_3^d \end{bmatrix} \quad (4.345)$$

natomiast zmienne stanu (4.287) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 - q_1^d & z_2 &= \dot{q}_1 \\ z_3 &= q_3 - q_3^d & z_4 &= \dot{q}_3 \\ \eta_1 &= q_2 & \eta_2 &= \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (4.346)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.345) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left( q_1^d, q_3^d \right)^T = \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right), \quad (4.347)$$

to dynamika układu zamkniętego (4.288) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_{p1}z_1 - K_{d1}z_2 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -K_{p2}z_3 - K_{d2}z_4 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= m_{22}^{-1} [m_{21}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{23}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_2 - G_2] \\ \tilde{y}_1 &= z_1 \\ \tilde{y}_2 &= z_3. \end{aligned} \quad (4.348)$$

Dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -m_{22}^{-1}(m_{21}v_1 + m_{23}v_3 + \mu_2 + G_2) \end{bmatrix}. \quad (4.349)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.347) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.349), tj.

$$\dot{\eta}_2 = m_{22}^{-1} [m_{21}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{23}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_2 - G_2] \quad (4.350)$$

<sup>xv</sup>Szczegółowe wyprowadzenia zawarto w załączniku F.2

redukuje się do

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_2 &= -\frac{g(b_2+b_3)}{a_3+a_3+a_4+2r_3} \Big|_{q_1^d, \dot{q}_3^d, q_1^d, \dot{q}_3^d} \\ &= -g \frac{(m_2 L_{c2} + m_3 L_2) \cos(q_1 + q_2) + m_3 L_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)}{m_2 L_{c2}^2 + I_2 + m_3 L_{c3}^2 + I_3 + m_3 L_2^2 + 2L_2 L_{c3} m_3 \cos q_3} \Big|_{\substack{q_1 = \dot{q}_1^d, \dot{q}_1 = \dot{q}_1^d \\ \dot{q}_3 = \dot{q}_3^d, q_3 = \dot{q}_3^d}}\end{aligned}\quad (4.351)$$

Finalnie, zależność (4.351) dla wartości referencyjnych (4.347) zdefiniowana jest jako:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \kappa \sin q_2 \end{bmatrix}\quad (4.352)$$

dla  $\kappa = g \frac{m_2 L_{c2} + m_3 L_2 + m_3 L_{c3}}{m_2 L_{c2}^2 + I_2 + m_3 L_{c3}^2 + I_3 + m_3 L_2^2 + 2L_2 L_{c3} m_3}$ , jest poszukiwaną **dynamiką zerową**, której forma analogiczna jest do tej wyznaczonej dla przypadku linearyzacji typu skojarzonego dla *Pendubota*.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy bliźniaczej analizy jak w rozdziale 4.5.3. Wartości własne równania (4.352) równe  $[4.8335, -4.8335]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

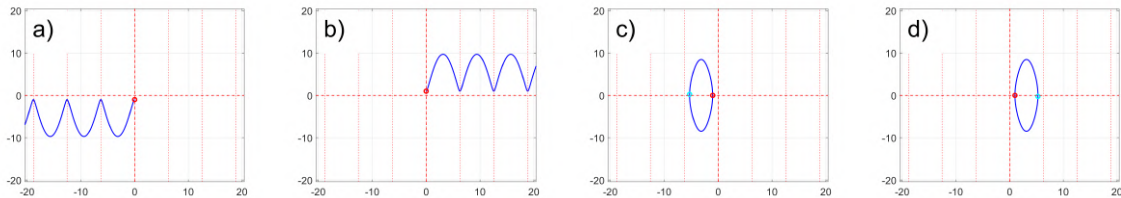
Wyznaczenie jawnej postaci rozwiązania równania (4.352) jest analogiczne do tego z rozdziału 4.5.3. Możemy więc zapisać równanie

$$\ddot{q}_2 = \kappa \sin q_2, \quad (4.353)$$

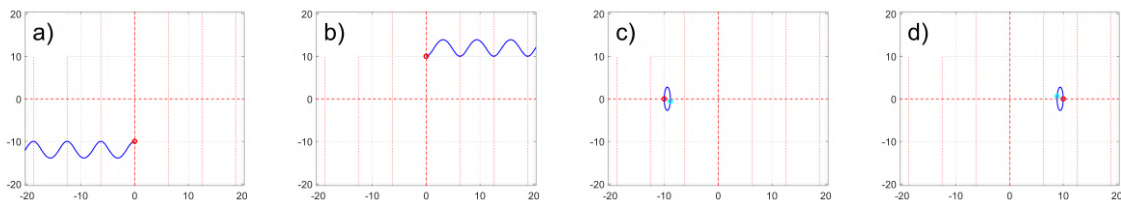
którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$\dot{q}_2 = \pm \sqrt{-2\kappa \cos q_2 + C_2}. \quad (4.354)$$

Wynikiem całkowania wyrażenia (4.354) jest funkcja eliptyczna. Rysunki 4.27-4.28 stanowią graficzną interpretację otrzymanego wyniku, uzyskaną drogą numerycznych symulacji, dla różnych zestawów warunków początkowych.



**Rysunek 4.27:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_2$ .



**Rysunek 4.28:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -10]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 10]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-10, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_2$ .

## LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Dla modelu (4.337)-(4.339) częściowo zlinearyzowany system (4.20)-(4.21) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 &= -\frac{m_{21}}{m_{21}^2+m_{23}^2} (m_{22}v_1 + \mu_2 + G_2) \\ \ddot{q}_2 &= v_1 \\ \ddot{q}_3 &= -\frac{m_{23}}{m_{21}^2+m_{23}^2} (m_{22}v_1 + \mu_2 + G_2). \end{cases} \quad (4.355)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T, \quad (4.356)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{J}_1 = -\frac{m_{21}}{m_{21}^2 + m_{23}^2}, \quad \tilde{J}_2 = -\frac{m_{23}}{m_{21}^2 + m_{23}^2},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \tilde{J}_1(\mu_2 + G_2) \\ w_2 \\ 0 \\ w_3 \\ \tilde{J}_2(\mu_2 + G_2) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_1 m_{22} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{J}_2 m_{22} \end{bmatrix}}_{g(x)} v_1. \quad (4.357)$$

## STEROWALNOŚĆ

Dla układu (4.357) rząd

$$\text{rank } \mathcal{A}^s = 4 \neq n.$$

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.357) nie jest sterowalny, co wynika ze zmniejszenia rozmiaru wejścia.

## WARUNKI LINEARYZACJI

Przeprowadzając analogiczną jak w rozdziale 4.5.3 analizę otrzymujemy, że największy linearyzowalny podsystem dla układu (4.357) jest wymiaru 2. Potwierdzamy zatem formalnie, że możliwe jest przekształcenie układu (4.357) jedynie do postaci 2-wymiarowego podsystemu liniowego i 4-wymiarowego systemu nieliniowego.

## DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji  $h(q)$  danej zależnością (4.283), których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_1, k_2, k_3$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób.

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.283) są następujące:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0, \quad (4.358)$$

Równanie (4.284) przybiera więc postać <sup>xvi</sup>

$$v = 1(u - 0) = u, \quad (4.359)$$

<sup>xvi</sup>Szczegółowe wyprowadzenia zawarto w załączniku F.2

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_2 - K_p (q_2 - q_2^d), \quad (4.360)$$

natomiast zmienne stanu (4.289) przybierają formę

$$\begin{aligned} \eta_1 &= q_2 - q_2^d & \eta_2 &= \dot{q}_2 \\ z_1 &= q_1 & z_2 &= \dot{q}_1 \\ z_3 &= q_3 & z_4 &= \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (4.361)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.360) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$(\ddot{q}_2^d, \dot{q}_2^d, q_2^d) = (0, 0, 0), \quad (4.362)$$

to dynamika układu zamkniętego (4.290) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -K_p \eta_1 - K_d \eta_2 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{m_{21}}{m_{21}^2 + m_{23}^2} [m_{22}(-K_p \eta_1 - K_d \eta_2) + \mu_2 + G_2] \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -\frac{m_{23}}{m_{21}^2 + m_{23}^2} [m_{22}(-K_p \eta_1 - K_d \eta_2) + \mu_2 + G_2] \\ \tilde{y}_1 &= \eta_1. \end{aligned} \quad (4.363)$$

Dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $s(\eta, z, t)$ :

$$s(\eta, z, t) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{m_{21}}{m_{21}^2 + m_{23}^2} (m_{22} v_1 + \mu_2 + G_2) \\ z_4 \\ -\frac{m_{23}}{m_{21}^2 + m_{23}^2} (m_{22} v_1 + \mu_2 + G_2) \end{bmatrix}. \quad (4.364)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.362) zależność  $\dot{z}_2$  oraz  $\dot{z}_4$  z (4.364) redukuje się do

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = - \left( \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{23} \end{bmatrix} \frac{1}{m_{21}^2 + m_{23}^2} [\dot{q}_1 (d_1 \dot{q}_1 - d_3 \dot{q}_3) + \dot{q}_3 (-d_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_3)) + g(b_2 + b_3)] \right) \Bigg|_{\substack{\dot{q}_2 = \dot{q}_2^d \\ q_2 = q_2^d}} \quad (4.365)$$

Finalnie, zależność (4.365) zdefiniowana teraz jako  $s(0, z, t)$ , tj.

$$s(0, z, t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{m_A}{m_A^2 + m_B^2} W_x \\ z_4 \\ -\frac{m_B}{m_A^2 + m_B^2} W_x \end{bmatrix} \quad (4.366)$$

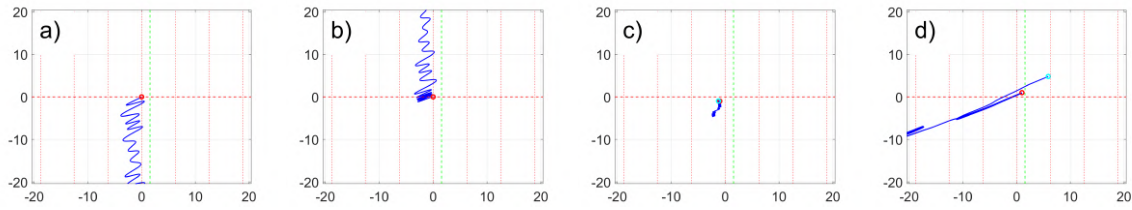
dla:

$$W_x = L_{c3} m_3 \sin q_3 [L_1 \dot{q}_1^2 - 2L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - L_2 \dot{q}_3^2] + g [(m_2 L_{c2} + m_3 L_2) \cos q_1 + m_3 L_{c3} \cos(q_1 + q_3)],$$

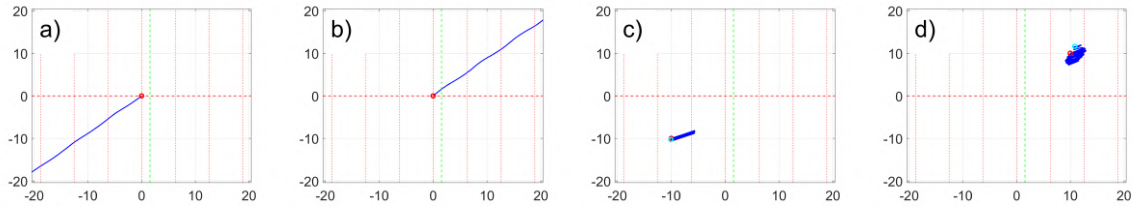
$$m_A = a_2 + a_3 + a_4 + (L_1 + L_2) m_3 L_{c3} \cos q_3, \quad m_B = a_3 + L_2 L_{c3} m_3 \cos q_3,$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.

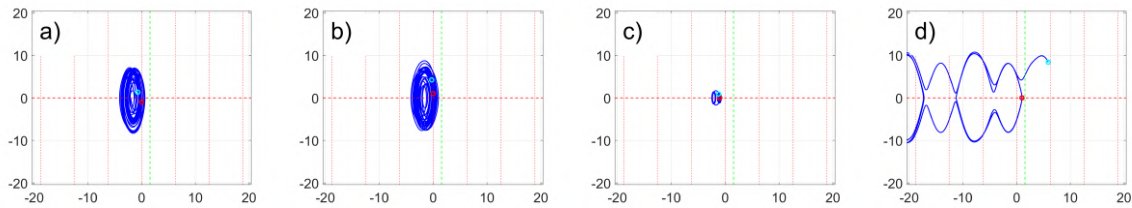
**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy bliźniaczej analizy jak w rozdziale 4.5.3. W konsekwencji wartości własne równania (4.366) równe  $[4.8465, -4.8465, 0, 0]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi. W tym przypadku analityczne wyznaczenie trajektorii układu na dynamice zerowej jest trudne. Rozwiązanie można uzyskać symulacyjnie. Przykładową interpretację rozwiązania tej dynamiki przedstawiono na rysunkach 4.29-4.34, dla różnych zestawów warunków początkowych.



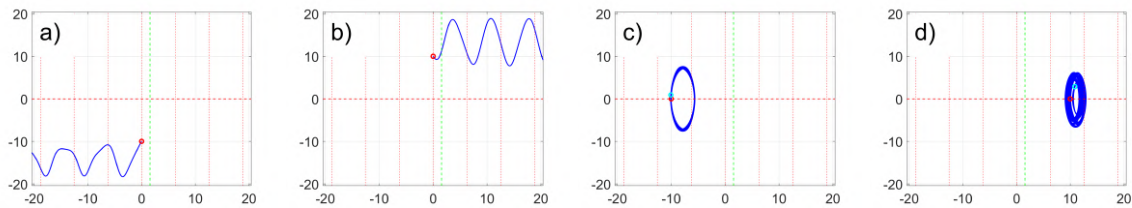
**Rysunek 4.29:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [0, -1, 0, -1]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [0, 1, 0, 1]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0, -1, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [1, 0, 1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $q_3$ .



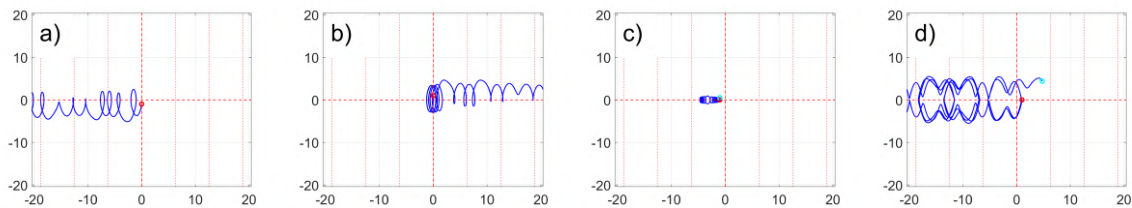
**Rysunek 4.30:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [0, -10, 0, -10]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [0, 10, 0, 10]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0, -10, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3] = [10, 0, 10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $q_3$ .



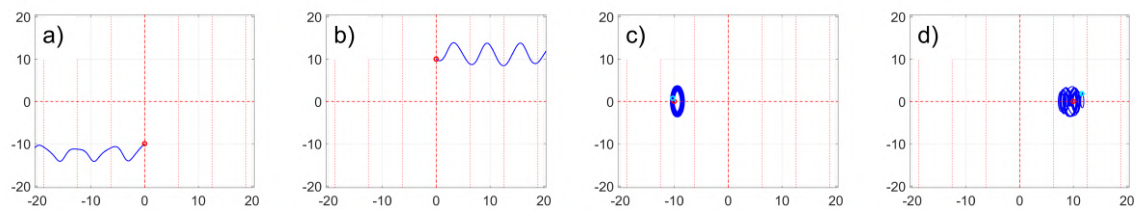
**Rysunek 4.31:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -1]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 1]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-1, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_1$ .



**Rysunek 4.32:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -10]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 10]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-10, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_1$ .



**Rysunek 4.33:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -1]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 1]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .



Rysunek 4.34: Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -10]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 10]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .

#### 4.5.5 Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_2, \tau_3$

W trzecim z rozważanych scenariuszy zakładamy, że napędy umieszczone są w drugim i trzecim złączu (rysunek 4.17c). Szczegółową postać równania dynamiki (4.3)-(4.4) dla analizowanego wahadła trójczłonowego możemy zapisać więc w następującej formie

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \mu_1 + G_1 = 0 & (4.367) \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + \mu_2 + G_2 = \tau_2 & (4.368) \\ m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \mu_3 + G_3 = \tau_3 & (4.369) \end{cases}$$

gdzie:

$$\ddot{q}_a^T = [\ddot{q}_2, \ddot{q}_3], \quad \ddot{q}_p = \ddot{q}_1, \quad \tau = [\tau_2, \tau_3]^T,$$

oraz

$$M_{p1} = m_{11}, \quad M_{a1} = [m_{12} \ m_{13}], \quad M_{p2} = \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}, \quad M_{a2} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \\ \mu_p = \mu_1, \quad \mu_a = [\mu_2, \mu_3]^T, \quad G_p = G_1, \quad G_a = [G_2, G_3]^T.$$

Podobnie jak w rozdziale 4.5.4, przy zastosowaniu częściowej linearyzacji dla sterowań ( $\tau_2, \tau_3$ ) część wyprowadzeń i analiz o zbliżonym charakterze zostanie pominięta. Pozostawione zostaną natomiast różnice oraz szczegółowe zależności niezbędne z punktu widzenia czytelności przekazu.

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Dla modelu (4.367)-(4.369) częściowo zlinearyzowany system (4.11)-(4.12) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -m_{11}^{-1}(m_{12}v_2 + m_{13}v_3 + \mu_1 + G_1) \\ \ddot{q}_2 = v_2 \\ \ddot{q}_3 = v_3. \end{cases} \quad (4.370)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T \quad (4.371)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{J}_2 = -\frac{m_{12}}{m_{11}}, \quad \tilde{J}_3 = -\frac{m_{13}}{m_{11}},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) \\ w_2 \\ 0 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_1(x)} v_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2(x)} v_3. \quad (4.372)$$

#### STEROWALNOŚĆ

Dla układu (4.372) rząd  $\text{rank } \mathcal{A}^s = 6 = n$ .

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.372) jest sterowalny w otoczeniu punktu równowagi

#### WARUNKI LINEARYZACJI

Przeprowadzając analogiczną jak w rozdziale 4.5.3 analizę otrzymujemy, że największy linearyzowalny podsystem dla układu (4.372) jest wymiaru 4. Potwierdzamy zatem, że możliwe jest przekształcenie układu (4.372) do postaci 4-wymiarowego podsystemu liniowego i 2-wymiarowego systemu nieliniowego.

## DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla przykładowej funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji  $h_2(q)$ ,  $h_3(q)$ , których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_{21}, \dots, k_{33}$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób. Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.278) są następujące:

$$\begin{aligned} k_{21} &= 0, & k_{22} &= 1, & k_{23} &= 0, \\ k_{31} &= 0, & k_{32} &= 0, & k_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (4.373)$$

Równanie (4.280) przybiera więc postać <sup>xvii</sup>

$$v = [v_2, v_3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (4.374)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} q_2 - q_2^d \\ q_3 - q_3^d \end{bmatrix}, \quad (4.375)$$

natomiast zmienne stanu (4.287) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_2 - q_2^d & z_2 &= \dot{q}_2 \\ z_3 &= q_3 - q_3^d & z_4 &= \dot{q}_3 \\ \eta_1 &= q_1 & \eta_2 &= \dot{q}_1. \end{aligned} \quad (4.376)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.375) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$(q_2^d, q_3^d) = (0, 0), \quad (4.377)$$

to dynamika układu zamkniętego (4.288) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_{p1}z_1 - K_{d1}z_2 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -K_{p2}z_3 - K_{d2}z_4 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= m_{11}^{-1} [m_{12}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{13}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_1 - G_1] \\ \tilde{y}_1 &= z_1 \\ \tilde{y}_2 &= z_3. \end{aligned} \quad (4.378)$$

Dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -m_{11}^{-1}(m_{12}v_2 + m_{13}v_3 + \mu_1 + G_1) \end{bmatrix}. \quad (4.379)$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.377) zależność  $\dot{\eta}_2$  z (4.379), tj.

$$\dot{\eta}_2 = m_{11}^{-1} [m_{12}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{13}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_1 - G_1] \quad (4.380)$$

redukuje się do

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 &= -\frac{g(b_1+b_2+b_3)}{a_1+a_2+a_3+a_4+2(r_1+r_2+r_3)} \Big|_{\dot{q}_2^d, \dot{q}_3^d, q_2^d, q_3^d} \\ &= -g \frac{(m_1 L_{c1} + (m_2 + m_3)L_1 + m_2 L_{c2} + m_3 L_2 + m_3 L_{c3}) \cos q_1}{m_1 L_{c1}^2 + I_1 + m_2 L_{c2}^2 + I_2 + m_3 L_{c3}^2 + I_3 + m_3 L_2^2 + (m_2 + m_3)L_1^2} \Big|_{\dot{q}_2^d, \dot{q}_3^d, q_2^d, q_3^d} \end{aligned} \quad (4.381)$$

Finalnie, zależność (4.379) dla wartości referencyjnych (4.377) zdefiniowana jest jako:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \rho \sin q_1 \end{bmatrix} \quad (4.382)$$

jest poszukiwaną **dynamiką zerową**, dla  $\rho = -g \frac{(m_1 L_{c1} + (m_2 + m_3)L_1 + m_2 L_{c2} + m_3 L_2 + m_3 L_{c3})}{m_1 L_{c1}^2 + I_1 + m_2 L_{c2}^2 + I_2 + m_3 L_{c3}^2 + I_3 + m_3 L_2^2 + (m_2 + m_3)L_1^2}$ .

<sup>xvii</sup>Szczegółowe wyprowadzenia zawarto w załączniku F.3



**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy bliźniaczej analizy jak w rozdziale 4.5.3. Wartości własne zlinearyzowanej dynamiki (4.382) równe  $[0, 0]^T$  nie pozwalają bezpośrednio określić stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

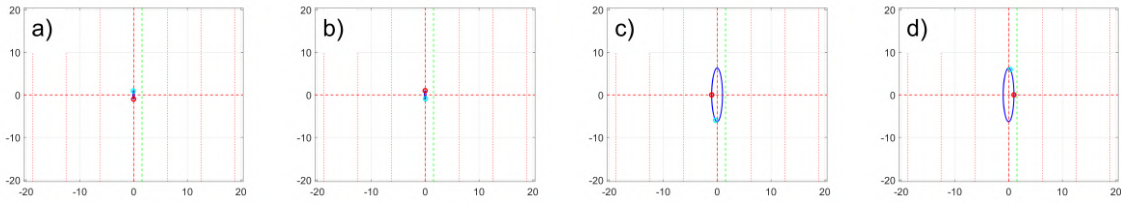
Wyznaczenie jawnej postaci rozwiązania równania (4.381) jest analogiczne do tego z rozdziału 4.5.3. Możemy więc zapisać równanie

$$\ddot{q}_1 = \varrho \sin q_1, \quad (4.383)$$

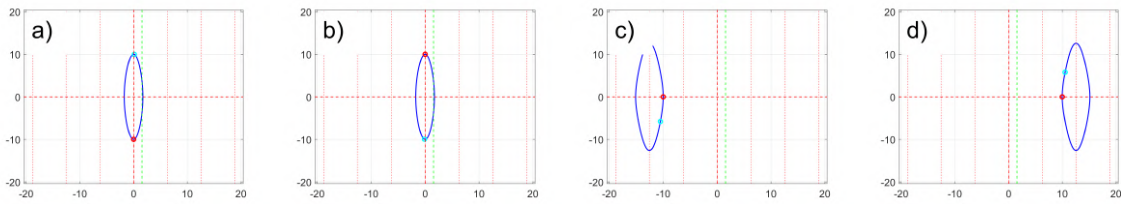
którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$\dot{q}_1 = \pm \sqrt{-2\varrho \cos q_1 + C_2}. \quad (4.384)$$

Wynikiem całkowania wyrażenia (4.384) jest funkcja eliptyczna. Rysunek (4.35) stanowi graficzną interpretację otrzymanego wyniku, uzyskaną drogą numerycznych symulacji, dla różnych zestawów warunków początkowych.



**Rysunek 4.35:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -1]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 1]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-1, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_1$ .



**Rysunek 4.36:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, -10]$ , b)  $[q_1, \dot{q}_1] = [0, 10]$ , c)  $[q_1, \dot{q}_1] = [-10, 0]$ , d)  $[q_1, \dot{q}_1] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_1$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_1$ .

#### LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Dla modelu (4.367)-(4.369) częściowo zlinearyzowany system (4.20)-(4.21) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v_1 \\ \ddot{q}_2 = -\frac{m_{12}}{m_{12}^2 + m_{13}^2} (m_{11}v_1 + \mu_1 + G_1) \\ \ddot{q}_3 = -\frac{m_{13}}{m_{12}^2 + m_{13}^2} (m_{11}v_1 + \mu_1 + G_1). \end{cases} \quad (4.385)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T, \quad (4.386)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{J}_1 = -\frac{m_{12}}{m_{12}^2 + m_{13}^2}, \quad \tilde{J}_2 = -\frac{m_{13}}{m_{12}^2 + m_{13}^2},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ \tilde{\mathcal{J}}_1(\mu_1 + G_1) \\ w_3 \\ \tilde{\mathcal{J}}_2(\mu_1 + G_1) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_1 m_{11} \\ 0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_2 m_{11} \end{bmatrix}}_{g(x)} v_1. \quad (4.387)$$

### STEROWALNOŚĆ

Dla układu (4.387) rząd  $\text{rank } \mathcal{A}^s = 4 \neq n$ .

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.387) nie jest sterowalny. Wynika to ze zmniejszenia rozmiaru wejścia.

### WARUNKI LINEARYZACJI

Przeprowadzając analogiczną jak w rozdziale 4.5.3 analizę otrzymujemy, że największy linearyzowalny podsystem dla układu (4.387) jest wymiaru 2. Potwierdzamy zatem, że możliwe jest przekształcenie układu (4.387) jedynie do postaci 2-wymiarowego podsystemu liniowego i 4-wymiarowego systemu nieliniowego.

### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji  $h(q)$  danej zależnością (4.283), których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_1, k_2, k_3$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób.

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.283) są następujące:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \quad (4.388)$$

Równanie (4.284) przybiera więc postać <sup>xviii</sup>

$$v = 1(u - 0) = u, \quad (4.389)$$

gdzie sygnał  $u$  dany (4.285) możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_1 - K_p(q_1 - q_1^d), \quad (4.390)$$

natomiast zmienne stanu (4.289) przybierają formę

$$\begin{aligned} \eta_1 &= q_1 - q_1^d & \eta_2 &= \dot{q}_1 \\ z_1 &= q_2 & z_2 &= \dot{q}_2 \\ z_3 &= q_3 & z_4 &= \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (4.391)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.390) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left( \ddot{q}_1^d, \dot{q}_1^d, q_1^d \right) = \left( 0, 0, \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.392)$$

<sup>xviii</sup>Szczegółowe wyprowadzenia zawarto w załączniku F.3

to dynamika układu zamkniętego (4.290) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= -K_p \eta_1 - K_d \eta_2 \\
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= -\frac{m_{12}}{m_{12}^2 + m_{13}^2} [m_{11}(-K_p \eta_1 - K_d \eta_2) + \mu_1 + G_1] \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= -\frac{m_{13}}{m_{12}^2 + m_{13}^2} [m_{11}(-K_p \eta_1 - K_d \eta_2) + \mu_1 + G_1] \\
 \tilde{y}_1 &= \eta_1.
 \end{aligned} \tag{4.393}$$

Dynamika wewnętrzna dana jest funkcją  $s(\eta, z, t)$ :

$$s(\eta, z, t) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{m_{12}}{m_{12}^2 + m_{13}^2} (m_{11}v_1 + \mu_1 + G_2) \\ z_4 \\ -\frac{m_{13}}{m_{12}^2 + m_{13}^2} (m_{11}v_1 + \mu_1 + G_1) \end{bmatrix}. \tag{4.394}$$

Mając na uwadze wartości referencyjne (4.392) zależność  $\dot{z}_2$  oraz  $\dot{z}_4$  z (4.394) redukuje się do

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{13} \end{bmatrix} \frac{1}{m_{12}^2 + m_{13}^2} \left( d_1 \dot{q}_2^2 + d_2 \dot{q}_3 + g(m_2 L_{c2} + m_3 L_2) \sin q_2 + g m_3 L_{c3} \sin(q_2 + q_3) \right) \Bigg|_{\substack{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d \\ q_1 = q_1^d}} \tag{4.395}$$

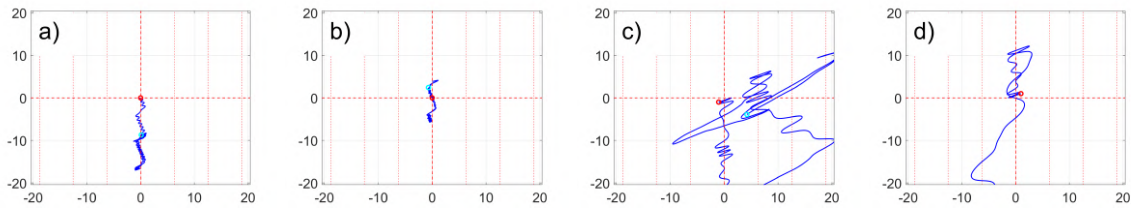
Finalnie, zależność (4.395) zdefiniowana teraz jako  $s(0, z, t)$ , tj.

$$s(0, z, t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{m_A}{m_A^2 + m_B^2} W_y \\ z_4 \\ -\frac{m_B}{m_A^2 + m_B^2} W_y \end{bmatrix} \tag{4.396}$$

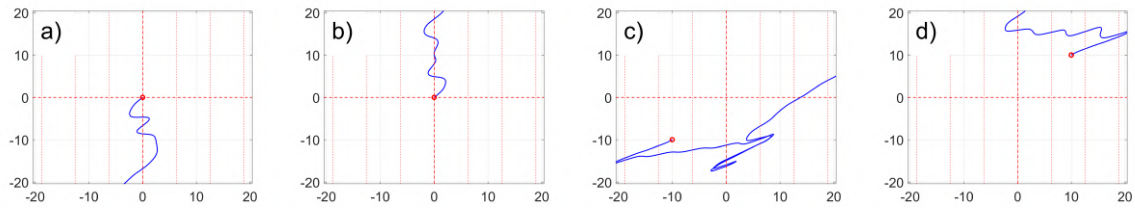
dla:  $m_A = a_2 + a_3 + a_4 + L_1 L_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) + L_1(L_2 m_3 + L_{c2} m_2) \cos q_2 + 2L_2 L_{c3} m_3 \cos q_3$ ,  
 $m_B = a_3 + L_1 L_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) + L_2 L_{c3} m_3 \cos q_3$ ,  
 $W_y = \dot{q}_2^2 (L_1 L_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) + (m_2 L_{c2} + m_3 L_2) L_1 \sin q_2) +$   
 $+ \dot{q}_3 (L_1 L_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 L_{c3} m_3 \sin q_3) + g(m_2 L_{c2} + m_3 L_2) \sin q_2 + g m_3 L_{c3} \sin(q_2 + q_3)$ ,  
 jest poszukiwaną **dynamiką zerową**.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Dokonajmy bliźniaczej analizy jak w rozdziale 4.5.3. Wartości własne zlinearyzowanej dynamiki (4.396) równe  $[4.2460i, -4.2460i, 0, 0]^T$  nie pozwalają bezpośrednio określić stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

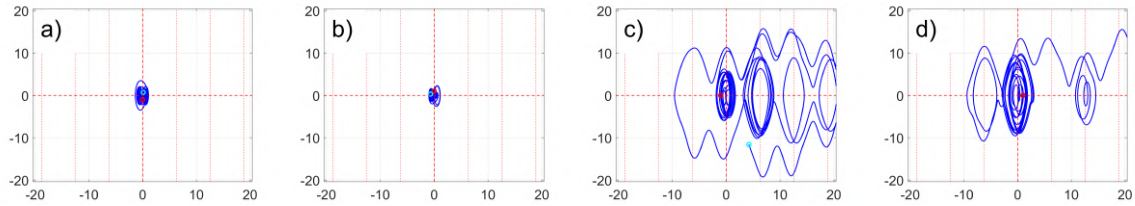
W tym przypadku analityczne wyznaczenie trajektorii układu na dynamice zerowej jest trudne. Rozwiązanie można uzyskać symulacyjnie. Przykładową interpretację rozwiązania tej dynamiki przedstawiono na rysunkach 4.37-4.42, dla różnych zestawów warunków początkowych. Dla zaproponowanych warunków początkowych żaden z przedstawionych przebiegów nie stanowi krzywej zamkniętej, co potwierdza wniosek o niestabilności prezentowanej dynamiki zerowej.



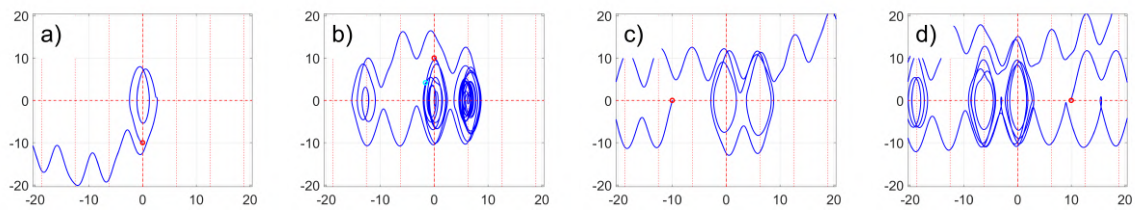
**Rysunek 4.37:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, -1, 0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, 1, 0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0, -1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [1, 0, 1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $q_3$ .



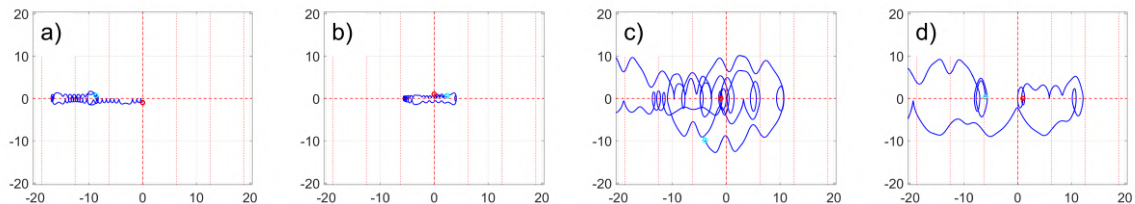
**Rysunek 4.38:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, -10, 0, -10]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, 10, 0, 10]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0, -10, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [10, 0, 10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $q_3$ .



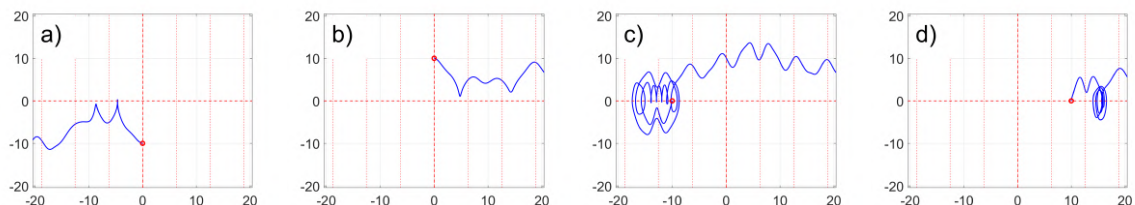
**Rysunek 4.39:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , rzędnych:  $\dot{q}_2$ .



**Rysunek 4.40:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -10]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 10]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-10, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , rzędnych:  $\dot{q}_2$ .



**Rysunek 4.41:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -1]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 1]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_3$ , rzędnych:  $\dot{q}_3$ .



**Rysunek 4.42:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -10]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 10]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .

### 4.5.6 Częściowa linearyzacja: sterowania – $\tau_1$

Przejdźmy do analizy częściowej linearyzacji dla pierwszego ze scenariuszy, w którym zakładamy, że napędy umieszczone są w pierwszym złączu. Szczegółową postać równania dynamiki (4.3)-(4.4) dla analizowanego wahadła trójczłonowego możemy zapisać więc w następującej formie

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \mu_1 + G_1 = \tau_1 & (4.397) \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + \mu_2 + G_2 = 0 & (4.398) \\ m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \mu_3 + G_3 = 0, & (4.399) \end{cases}$$

gdzie:

$$\ddot{q}_a = \ddot{q}_1, \quad \ddot{q}_p^T = [\ddot{q}_2, \ddot{q}_3] \quad \tau = \tau_1,$$

oraz

$$M_{p1} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{a1} = \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}, \quad M_{p2} = [m_{12}, m_{13}], \quad M_{a2} = m_{11}, \\ \mu_p = [\mu_2, \mu_3]^T, \quad \mu_a = \mu_1, \quad G_p = [G_2, G_3]^T, \quad G_a = G_1.$$

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Dla modelu (4.397)-(4.399) częściowo zlinearyzowany system (4.11)-(4.12) można przedstawić w szczegółowej postaci jako:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v \\ \ddot{q}_2 = \tilde{J}\tilde{J}_a v - m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) \\ \ddot{q}_3 = \tilde{J}\tilde{J}_b v + m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) \end{cases} \quad (4.400)$$

Wprowadzając wektor stanu:

$$x = [q_1, w_1, q_2, w_2, q_3, w_3]^T \quad (4.401)$$

oraz dokonując podstawienia, takiego, że

$$\tilde{J} = (m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32})^{-1}, \quad \tilde{J}_a = m_{31}m_{23} - m_{21}m_{33}, \quad \tilde{J}_b = m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22},$$

otrzymamy model wahadła w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ -m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) \\ w_3 \\ m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \tilde{J}\tilde{J}_a \\ 0 \\ \tilde{J}\tilde{J}_b \end{bmatrix}}_{g(x)} v. \quad (4.402)$$

#### STEROWALNOŚĆ

Nawiązując do zagadnień z rozdziału 4.2.4 wyznaczmy sterowalność dla obiektu opisanego równaniem (4.402). Macierz sterowalności (4.38) przybiera postać

$$\mathcal{A}^s = [g_1, g_2, ad_f g, ad_{g_1} ad_f g_1, ad_f ad_f g_1]. \quad (4.403)$$

Dla układu (4.402) rząd

$$\text{rank } \mathcal{A}^s = 6 = n.$$

Oznacza to, że dla przyjętej transformacji układ (4.402) jest sterowalny w otoczeniu punktu równowagi

#### WARUNKI LINEARYZACJI

Z równania (4.402) wynika, że model wahadła po transformacji opisywany jest przez 3-wymiarowy podsystem liniowy, oraz 3-wymiarowy system nieliniowy. Dokonajmy formalnego sprawdzenia największego linearyzowalnego podsystemu dla układu (4.402). Odwołajmy się do metody wyznacza-

nia wymiaru dynamiki, która może być zlinearyzowana, opisanej w rozdziale 3.3.1. Procedurę tą można przedstawić w następujących krokach:

1. Krok pierwszy – wyznaczmy  $r_0$

$$r_0 = \dim \mathcal{G}_0 = 1$$

$$\text{dla } \mathcal{G}_0 = \text{span}\{g\}$$

2. Krok drugi – wyznaczmy  $r_1$

$$r_1 = \dim Q_1 - \dim \bar{\mathcal{G}}_0 = 2 - 1 = 1$$

$$\bar{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G}_0, \text{ tak więc } \dim \bar{\mathcal{G}}_0 = \dim \mathcal{G}_0 = 1$$

$$Q_1 = \text{span}\{ad_f \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_0\} = \text{span}\{ad_f g, g\} = \mathcal{G}_1$$

3. Krok trzeci – wyznaczmy  $r_2$

$$r_2 = \dim Q_2 - \dim \bar{\mathcal{G}}_1 = 4 - 3 = 1$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{span}\{g, ad_{G_f} g\}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_1 = \text{span}\{g, ad_{G_f} g, ad_g ad_{G_f} g\}$$

$$Q_2 = \text{span}\{ad_f^2 \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_1\}$$

4. Krok czwarty – wyznaczmy  $r_3$

$$r_3 = \dim Q_3 - \dim \bar{\mathcal{G}}_2 = 6 - 6 = 0$$

$$\mathcal{G}_2 = \text{span}\{\mathcal{G}_1, \{ad_{G_f} \bar{\mathcal{G}}_1\}\}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_2 = \text{span}\{\mathcal{G}_1, \{ad_{G_f} \bar{\mathcal{G}}_1\}, ad_{ad_{G_f} \mathcal{G}_0} ad_{G_f} \bar{\mathcal{G}}_1, ad_{ad_{G_f} \mathcal{G}_0} ad_{G_f} (ad_{\mathcal{G}_0} ad_{G_f} \mathcal{G}_0)\}$$

$$Q_3 = \text{span}\{ad_f^3 \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_2\}.$$

Nie ma potrzeby liczenia pozostałych wskaźników  $r_i$ , jako, że są one dodatnie i nierosnące. W efekcie indeksy  $K_j$ ,  $j \geq 1$  są następujące:

$$\begin{aligned} K_1 &= \#\{r_i \geq 1, \forall i \geq 0\} = 3 \\ K_2 &= \#\{r_i \geq 2, \forall i \geq 0\} = 0. \end{aligned} \quad (4.404)$$

Oznacza to, że największy linearyzowalny podsystem dla rozpatrywanego układu jest wymiaru 3. Występujące powyżej nawiasy Liego zostały wyznaczone symbolicznie i ze względu na swoją zawiłą postać, nie zostaną przedstawione w postaci jawnej.

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego z rozdziału 4.5.2 przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**PRZYKŁAD.** Istnieje wiele wariantów funkcji wyjścia  $h(q)$  danej zależnością (4.278), których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_{11}, k_{12}, k_{13}$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek, zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób.

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.278) są następujące:

$$k_{11} = 1, \quad k_{12} = 0, \quad k_{13} = 0. \quad (4.405)$$

Równanie (4.280) przybiera więc postać

$$v = 1(u - 0) = u, \quad (4.406)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_1 - K_p (q_1 - q_1^d), \quad (4.407)$$

natomiast zmienne stanu (4.287) przybierają formę

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 - q_1^d & z_2 &= \dot{q}_1 \\ \eta_1 &= q_2 & \eta_2 &= \dot{q}_2 \\ \eta_3 &= q_3 & \eta_4 &= \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (4.408)$$

Wynikowa dynamika układu zamkniętego dla powyżej określonych zmiennych stanu może być



zapisana jako

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \ddot{q}_2 = -m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}\tilde{J}_a v \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 &= \ddot{q}_3 = m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}\tilde{J}_b v.\end{aligned}\quad (4.409)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.407) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$\left(\ddot{q}_1^d, \dot{q}_1^d, q_1^d\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \quad (4.410)$$

to dynamika (4.409) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_p z_1 - K_d z_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}\tilde{J}_a(K_p z_1 + K_d z_2) \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 &= m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}\tilde{J}_b(K_p z_1 + K_d z_2)\end{aligned}\quad (4.411)$$

Dynamika wewnętrzna dana jest jako

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}\tilde{J}_a(K_p z_1 + K_d z_2) \\ \eta_4 \\ m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}\tilde{J}_b(K_p z_1 + K_d z_2) \end{bmatrix}. \quad (4.412)$$

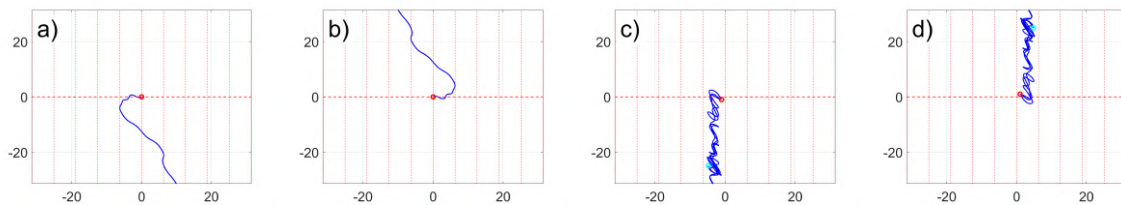
Mając na uwadze wartości referencyjne (4.410) zależności  $\dot{\eta}_2$  i  $\dot{\eta}_4$  z (4.412)

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}\tilde{J}_a(K_p z_1 + K_d z_2) \\ m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}\tilde{J}_b(K_p z_1 + K_d z_2) \end{bmatrix} \Big|_{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d, q_1 = q_1^d} \quad (4.413)$$

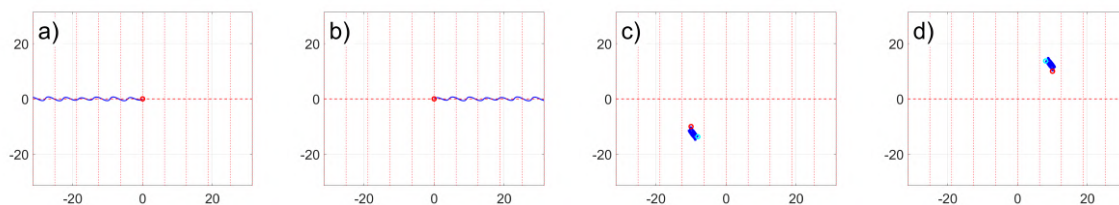
definiują **dynamikę zerową**.

**STABILNOŚĆ ZLINEARYZOWANEJ DYNAMIKI ZEROWEJ** Ze względu na zawiłą postać zlinearyzowanej dynamiki (4.413) w otoczeniu punktu równowagi wyznaczono i podano jedynie jej wartości własne. Wynoszą one  $[-8.6087, -4.5444, 8.6087, 4.5444]^T$  pozwalają postawić hipotezę o braku stabilności dynamiki zerowej w otoczeniu punktu równowagi.

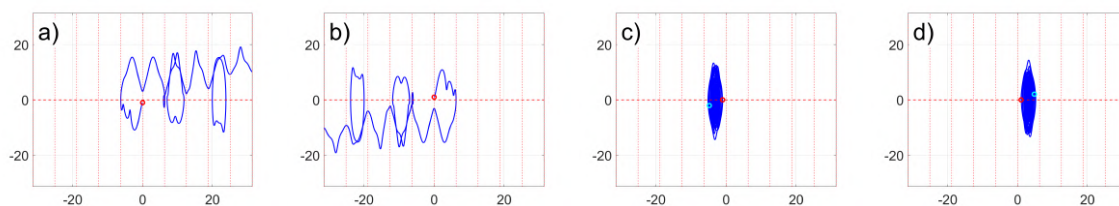
Ze względu na zawiłą postać, szczegółową formą zostanie pominięta. Rysunki (4.43-4.48) stanowią graficzną interpretację otrzymanego wyniku, uzyskaną drogą numerycznych symulacji, dla różnych zestawów warunków początkowych. Przyjęto horyzont czasu  $T_{\text{sim}} = 10\text{s}$ . Czerwony okrąg  $\circ$  oznacza początek, zaś  $\circ$  oznacza koniec trajektorii.



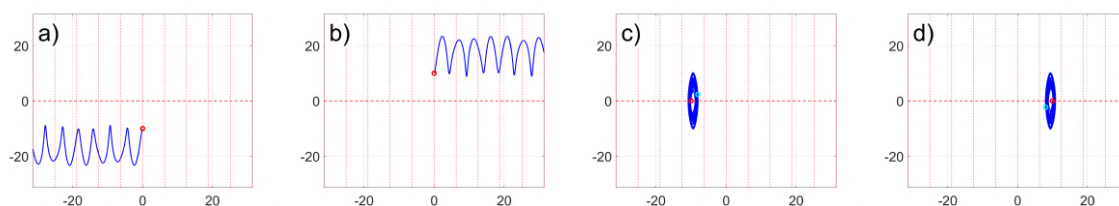
**Rysunek 4.43:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, -1, 0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, 1, 0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0, -1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [1, 0, 1, 0]$ . Oś odciętych odpowiada zmiennej  $q_2$ , oś rzędnych:  $q_3$ .



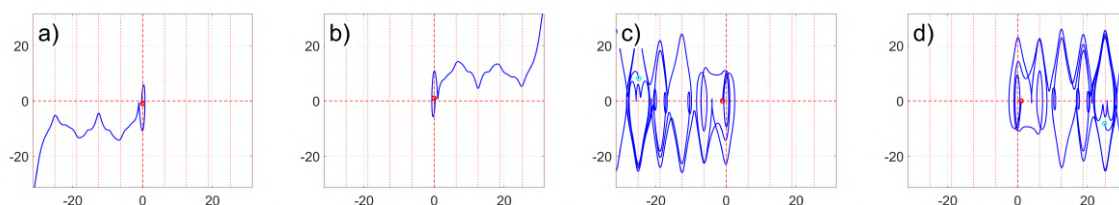
**Rysunek 4.44:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, -10, 0, -10]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0, 10, 0, 10]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0, -10, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [10, 0, 10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $q_3$ .



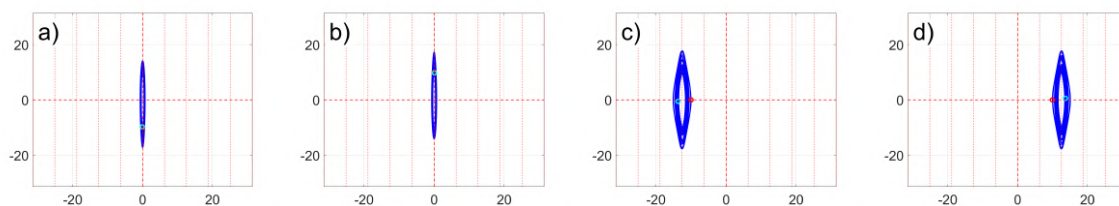
**Rysunek 4.45:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -1]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 1]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-1, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_2$ .



**Rysunek 4.46:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, -10]$ , b)  $[q_2, \dot{q}_2] = [0, 10]$ , c)  $[q_2, \dot{q}_2] = [-10, 0]$ , d)  $[q_2, \dot{q}_2] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_2$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_2$ .



**Rysunek 4.47:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -1]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 1]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-1, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [1, 0]$ . Oś odciętych:  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .



**Rysunek 4.48:** Trajektorie układu na dynamice zerowej dla warunków początkowych: a)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, -10]$ , b)  $[q_3, \dot{q}_3] = [0, 10]$ , c)  $[q_3, \dot{q}_3] = [-10, 0]$ , d)  $[q_3, \dot{q}_3] = [10, 0]$ . Oś odciętych:  $q_3$ , oś rzędnych:  $\dot{q}_3$ .



## LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

W przypadku linearyzacji typu nieskojarzonego zachodzi zależność  $m \leq l$ , czyli liczba napędzanych stopni swobody jest mniejsza od liczby pasywnych stopni swobody. Oznacza to brak możliwości wyznaczenia zależności (4.14), tj.  $M_{a1}^\dagger$ . Zgodnie z Uwagą z rozdziału 4.2.2 niemożliwym jest więc przeprowadzenie w tym przypadku tego typu linearyzacji.

## 4.5.7 Dynamika zerowa – podsumowanie

Przedstawiona graficzna reprezentacja dynamiki zerowej daje wgląd w obszar warunków początkowych dla których możliwe jest osiągnięcie otoczenia zadanego punktu równowagi  $(q^d, \dot{q}^d)$ . Nie jest jednak możliwym przedstawienie całego obszaru przeszukiwanych warunków dla  $q \in \mathbb{R}^3$  oraz  $\dot{q} \in \mathbb{R}^3$ , stąd też wybrano pewne reprezentacyjne przypadki. Można zauważyć, że zmieniając wartości początkowe  $(q, \dot{q})$  następuje przesuwanie się trajektorii na płaszczyźnie fazowej. Oznacza to, że mimo niestabilności badanych dynamik w otoczeniu punktu równowagi, zmiana wartości  $(q, \dot{q})$  pociąga za sobą wejście  $q$  w otoczenie  $q^d$  oraz  $\dot{q}$  w otoczenie  $\dot{q}^d$ . Należy nadmienić, że nie każdy warunek początkowy gwarantuje osiągnięcie przez dynamikę zerową stanu bliskiego  $(q^d, \dot{q}^d)$ . W otoczeniu tego punktu można rozważyć np. przełączenie trybu sterowania i stabilizacji na strategię typu LQR, której zadaniem jest stabilizacja robota w zadanym punkcie. Analiza dynamiki zerowej pozwala więc oszacować zachowanie się robota w trakcie ruchu. Pozwala też ewentualnie zdecydować np. o „wstrzyknięciu” dodatkowej energii do układu celem znalezienia się w otoczeniu equilibrium, gdyby warunek początkowy pierwotnie tego nie zapewniał. Osiągnięcie tego zadania może być realizowane np. przez dodanie trajektorii referencyjnej. Oznacza to jednak zmianę dotychczasowej dynamiki zerowej na inną, uzależnioną od nowej funkcji wyjścia. Poniżej dokonano krótkiego podsumowania graficznej reprezentacji dynamiki zerowej w zależności od sposobu umieszczenia napędów:

- $\tau_1 - \tau_2$ , *Collocated*: Rysunki 4.19-4.20 przedstawiają wpływ zmian warunków początkowych  $(q_3, \dot{q}_3)$  na potok dynamiki zerowej. Analizując przedstawione przebiegi można zauważyć, że dla ustalonych wartości  $q_1 = q_1^d$ ,  $q_2 = q_2^d$ , zmienna  $q_3$  wielokrotnie przyjmuje wartość  $q_3^d = 0$  dla różnych warunków początkowych. Oznacza to, że dynamika zerowa, mimo iż niestabilna, wielokrotnie przechodzi w pobliżu punktu  $q^d$ . W momencie wejścia stanu dynamiki w otoczenie  $(q^d, \dot{q}^d)$  zasadnym jest więc przełączenie strategii sterowania na opartą na regulatorze typu LQR.
- $\tau_1 - \tau_2$ , *Non-collocated*: Niestabilna dynamika zerowa jest wymiaru 4. Rysunki (4.21-4.26) dobitnie pokazują, że zmiana warunków początkowych powoduje przesuwanie się trajektorii na płaszczyźnie czy to  $q_1 - q_2$ , czy fazowych  $q_1 - \dot{q}_1$  oraz  $q_2 - \dot{q}_2$ , powodując w efekcie, że stan  $(q, \dot{q})$  przechodzi przez otoczenie  $(q^d, \dot{q}^d)$ . Można zaobserwować wręcz szereg zbiorów warunków początkowych, dla których rozpatrywana dynamika zerowa wielokrotnie w trakcie symulacji przechodzi przez zbiór w otoczeniu punktu zadanego.
- $\tau_1 - \tau_3$ , *Collocated*: Sytuacja analogiczna do przypadku  $\tau_1 - \tau_2$ , *Collocated*, z tą różnicą, że dla ustalonych wartości  $q_1 = q_1^d$ ,  $q_3 = q_3^d$ , zmienna  $q_2$  wielokrotnie przyjmuje wartość  $q_2^d = 0$ , dla różnych warunków początkowych.
- $\tau_1 - \tau_3$ , *Non-collocated*: Sytuacja analogiczna do przypadku  $\tau_1 - \tau_2$ , *Non-collocated*, z tą różnicą, że trajektorie fazowe zmiennych  $q_1 - \dot{q}_1$  oraz  $q_3 - \dot{q}_3$  przybierają bardziej fazyjne kształty, świadczące o bardziej intensywnym ruchu poszczególnych złączy.
- $\tau_2 - \tau_3$ , *Collocated*: Trajektorie fazowe dla rozpatrywanych warunków początkowych tworzą każdorazowo krzywe zamknięte. Podobnie jak w poprzednich przypadkach zmiana warunków początkowych pociąga za sobą zbliżanie się stanu do wartości zadanych, co dobrze obrazuje chociażby rysunek 4.36, na którym ukazano trajektorie fazowe  $q_1 - \dot{q}_1$  po trzykrotnym zwiększeniu współrzędnych warunku początkowego w stosunku do przypadku z rysunku 4.35. W efekcie zmienna  $q_1$  dla odpowiedniego warunku początkowego wielokrotnie osiąga wartość zadaną  $q_1^d$ .
- $\tau_2 - \tau_3$ , *Non-collocated*: Takie umiejscowienie napędów wpływa na bardzo intensywne zmiany  $q_2, q_3$ . Ruch wahadła przy  $q_1 = q_1^d = \frac{\pi}{2}$  dla drugiego i trzeciego złącza jest złożony, jednakże stan układu wielokrotnie przechodzi przez otoczenie  $(q_2^d, q_3^d)$ .

## 4.6 Częściowa linearyzacja manipulatora 3-DOF z wykorzystaniem pseudoprędkości

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie propozycji podejścia do zagadnienia sterowania i stabilizacji potrójnego wahadła wokół jego górnego niestabilnego punktu równowagi w oparciu o formalizm zaprezentowany w [46], tzn. transformacji zmiennych stanu i wejścia przy zastosowaniu pseudoprędkości.

Wśród proponowanych koncepcji wyróżniamy dwie – pierwsza, dla której pseudoprędkość została wprowadzona do dynamiki obiektu na drodze transformacji zmiennych stanu, oraz druga – gdzie dodatkowo pseudoprędkość jest składową funkcji wyjścia.

Pierwotnie zaprezentowana analiza bazuje na metodach przedstawionych w rozdziale 4.2, tzn. wykorzystuje w swej strukturze częściową linearyzację typu *collocated*, a w następnym kroku dokonywana jest transformacja zmiennych stanu oraz sygnału sterującego.

Odwołując się do rozdziału 4.4.1 podjęto próbę przekształcenia układu (4.3-4.4) dla trzech złączy do formy normalnej przez prostowanie pól wektorowych związanych z wejściami. Pierwotnie założono, że wyznaczenie transformacji zmiennych będzie przebiegało analogicznie, tzn. z wykorzystaniem przekształcenia wektora konfiguracji (co dla jednego przykładowego przypadku przedstawiono w załączniku I). Jednak w wyniku tak przyjętej transformacji poszukiwanie formy normalnej analogicznej do tej rozważanej dla Pendubota lub Acrobota nie przyniosło poprawnego wyniku. W szczególności problematyczne stało się określenie analitycznego rozwiązania całek występujących w przekształceniu konfiguracji. Z tego powodu zaniechano tego podejścia i określono przekształcenie całego stanu układu, tzn. wraz z prędkościami, co zaprezentowano w poniższych rozdziałach.

### 4.6.1 Pomocnicze zadanie sterowania

W analizowanym przypadku pomocnicze zadanie sterowania jest bliźniacze do przedstawionego w rozdziale 4.2.3 z tą różnicą, że poszukiwana będzie również taka funkcja wyjścia  $y = [h_1(\tilde{x}), \dots, h_j(\tilde{x})]^T \in \mathbb{R}$ , która zależna jest od pseudoprędkości  $\dot{q}_p$ . W związku z tym dla linearyzacji typu skojarzonego przedstawionej w rozdziale 4.2.1 przyjęto dla  $j = \{1, \dots, m\}$ , że

$$h_j(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n k_{ji} (q_i - q_i^d) + k_j \dot{q}_p. \quad (4.414)$$

### 4.6.2 QP: 2 sterowania – $\tau_1, \tau_2$

Prezentowane w niniejszym przykładzie wyniki stanowią autorski wkład i nie były dotychczas nigdzie publikowane.

Rozważmy następujący obiekt dany zależnością (4.296)

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= v_1 \\ \dot{q}_2 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= v_2 \\ \dot{q}_3 &= w_3 \\ \dot{w}_3 &= -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}_1 v_1 + \tilde{J}_2 v_2, \end{aligned} \quad (4.415)$$

gdzie wektor stanu dany jest zależnością:

$$x = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ w_2 \ q_3 \ w_3]^T, \quad (4.416)$$

oraz  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2$  są funkcjami stanu zdefiniowanymi w rozdziale 4.5.3.

W równaniach dynamiki (4.415) wprowadźmy pseudoprędkość  $\tilde{w}_3$  zdefiniowaną jako

$$\tilde{w}_3 = w_3 - J_1(q_2, q_3)w_1 - J_2(q_3)w_2. \quad (4.417)$$

Nowy wektor stanu przyjmie wtedy postać:

$$\tilde{x} = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ w_2 \ q_3 \ \tilde{w}_3]^T. \quad (4.418)$$

Obliczając pochodną z zależności (4.417) otrzymujemy <sup>xix</sup>

$$\dot{\tilde{w}}_3 = -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial J_1}{\partial q_2} w_2 - \left( w_1 \frac{\partial J_1}{\partial q_3} + w_2 \frac{\partial J_2}{\partial q_3} \right) (\tilde{w}_3 + J_1 w_1 + J_2 w_2). \quad (4.419)$$

W wyniku wprowadzenia pseudoprędkości obiekt (4.415) przyjmuje formę

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g_1 v_1 + g_2 v_2 \quad (4.420)$$

gdzie:

$$f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ 0 \\ \tilde{w}_3 + J_1 w_1 + J_2 w_2 \\ -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial J_1}{\partial q_2} w_2 - \left( w_1 \frac{\partial J_1}{\partial q_3} + w_2 \frac{\partial J_2}{\partial q_3} \right) (\tilde{w}_3 + J_1 w_1 + J_2 w_2) \end{bmatrix},$$

$$g_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T.$$

Dzięki wprowadzeniu pseudoprędkości pola  $g_i$  są wyprostowane.

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego (4.420) przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**FUNKCJA WYJŚCIA:  $h(x)$**  Istnieje wiele wariantów funkcji wyjścia  $h(\tilde{x})$  danej zależnością (4.414), których szczegółowa postać uzależniona jest od wartości parametrów  $k_{11}, \dots, k_{23}, k_1, k_2, k_3$ . Celem ilustracji zagadnienia przedstawiony zostanie jeden wybrany przypadek dla zmiennych naturalnych, oznaczony jako  $h(x)$ , zaś pozostałe kombinacje mogą być obliczone w analogiczny sposób. Szczegółowe zależności reprezentujące odpowiednie pochodne funkcji  $h(x)$  dla przypadku ogólnego zostały przedstawione w załączniku J.

Załóżmy, że współczynniki funkcji (4.414) są następujące:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1, & k_{12} &= 0, & k_{13} &= 0, \\ k_{21} &= 0, & k_{22} &= 1, & k_{23} &= 0, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.421)$$

tzn. funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest tylko za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_2 - q_2^d \end{bmatrix}. \quad (4.422)$$

Równanie (4.280) przybiera więc postać

$$v = [v_1, v_2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (4.423)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_2 - q_2^d \end{bmatrix} \quad (4.424)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.424) zostały określone dla przypadku trajek-

<sup>xix</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku J

torii zdegenerowanej do punktu:

$$(q_1^d, q_2^d) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (4.425)$$

to dynamika wewnętrzna równania (4.420) dana jest funkcją

$$\eta(\tilde{x}) = \left[ \begin{array}{c} \tilde{w}_3 + J_1 w_1 + J_2 w_2 \\ -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial J_1}{\partial q_2} w_2 - \left( w_1 \frac{\partial J_1}{\partial q_3} + w_2 \frac{\partial J_2}{\partial q_3} \right) (\tilde{w}_3 + J_1 w_1 + J_2 w_2) \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d, q_1 = q_1^d \\ \dot{q}_2 = \dot{q}_2^d, q_2 = q_2^d}}$$

finalnie redukując się do

$$\eta(\tilde{x}) = \left[ \begin{array}{c} w_3 \\ \frac{1}{a_3} m_3 g L_{c3} \sin q_3 \end{array} \right]. \quad (4.426)$$

Wynikowa postać dynamiki zerowej jest tożsama z dynamiką zerową ze wzoru (4.313).

**FUNKCJA WYJŚCIA:**  $h(\tilde{x})$  Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji oraz pseudoprędkości zmiennej pasywnej, tzn. której współczynniki są następujące:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1, & k_{12} &= 1, & k_{13} &= 0, \\ k_{21} &= 0, & k_{22} &= 0, & k_{23} &= 1, \\ k_1 &= 1, & k_2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.427)$$

Stosując powyższe współczynniki, funkcja  $h(\tilde{x}) = [h_1, h_2]^T$  przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} h_1 &= k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d) \\ h_2 &= k_{23}(q_3 - q_3^d) + k_2(\tilde{w}_3 - \tilde{w}_3^d). \end{aligned} \quad (4.428)$$

Równanie (4.280) zapiszmy jako

$$v = [v_1, v_2]^T = (L_g L_f h_j)^{-1} (u - L_f^2 h_j), \quad (4.429)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d L_f h_j - K_p h_j, \quad (4.430)$$

dla  $j = \{1, 2\}$ . Ze względu na funkcję  $h(\tilde{x})$  zależną od pseudoprędkości, równania (4.429) oraz (4.430) nie trywializują się jak w przypadku funkcji  $h(x)$ . Szczegółową ich postać zamieszczono w załączniku J.

Zakładając, że trajektoria referencyjna została zdegenerowana do punktu:

$$(q_1^d, q_2^d, q_3^d) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \quad (4.431)$$

dynamika wewnętrzna równania (4.420) powtórnie dana jest jako

$$\eta(\tilde{x}) = \left[ \begin{array}{c} w_3 \\ \frac{1}{a_3} m_3 g L_{c3} \sin q_3 \end{array} \right]. \quad (4.432)$$

Identyczna postać dynamiki wynika z faktu przyjęcia trajektorii referencyjnej zdegenerowanej do punktu. W przypadku zadania śledzenia trajektorii nie zaś stabilizacji w punkcie, dynamika zerowa zarówno dla (4.313) jak i dla (4.426) oraz (4.432) będą się różniły.

### 4.6.3 QP: 2 sterowania – $\tau_1, \tau_3$

Rozważmy następujący obiekt dany zależnością (4.342)

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= v_1 \\ \dot{q}_2 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) + \tilde{J}_1 v_1 + \tilde{J}_3 v_3, \\ \dot{q}_3 &= w_3 \\ \dot{w}_3 &= v_3,\end{aligned}\tag{4.433}$$

gdzie wektor stanu dany jest zależnością:

$$x = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ w_2 \ q_3 \ w_3]^T,\tag{4.434}$$

oraz  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_3$  są funkcjami stanu zdefiniowanymi w rozdziale 4.5.4.

W równaniach dynamiki (4.433) wprowadźmy pseudoprędkość  $\tilde{w}_2$  zdefiniowaną jako

$$\tilde{w}_2 = w_2 - \tilde{J}_1(q_2, q_3)w_1 - \tilde{J}_3(q_3)w_3.\tag{4.435}$$

Nowy wektor stanu przyjmie wtedy postać:

$$\tilde{x} = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ \tilde{w}_2 \ q_3 \ w_3]^T.\tag{4.436}$$

Obliczając pochodną z zależności (4.435) otrzymujemy <sup>xx</sup>

$$\dot{\tilde{w}}_2 = -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \right) w_3 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3)\tag{4.437}$$

W wyniku wprowadzenia pseudoprędkości obiekt (4.433) przyjmuje formę

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g_1 v_1 + g_2 v_3\tag{4.438}$$

gdzie

$$f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ \tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3 \\ -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \right) w_3 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3) \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego (4.438) przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**FUNKCJA WYJŚCIA:  $h(x)$**  Analogicznie jak w rozdziale 4.6.2 przedstawmy wybrany przypadek reprezentujący funkcję wyjścia uzależnioną od zmiennych naturalnych, oznaczony jako  $h(x)$ .

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.414) są następujące:

$$\begin{aligned}k_{11} &= 1, & k_{12} &= 0, & k_{13} &= 0, \\ k_{31} &= 0, & k_{32} &= 0, & k_{33} &= 1, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 0,\end{aligned}\tag{4.439}$$

tzn. funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest tylko za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_3 - q_3^d \end{bmatrix}.\tag{4.440}$$

<sup>xx</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku K

Równanie (4.280) przybiera więc postać

$$v = [v_1, v_3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (4.441)$$

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_3 - q_3^d \end{bmatrix} \quad (4.442)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.442) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$(q_1^d, q_3^d) = \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right), \quad (4.443)$$

to dynamika wewnętrzna równania (4.438) dana jest funkcją

$$\eta(\tilde{x}) = \left[ \begin{array}{c} \tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3 \\ -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \right) w_3 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3) \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{\dot{q}_1 = \dot{q}_1^d, q_1 = q_1^d \\ \dot{q}_3 = \dot{q}_3^d, q_3 = q_3^d}}$$

finalnie redukując się do

$$\eta(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_2 \\ \kappa \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (4.444)$$

dla  $\kappa = g \frac{m_2 L_{c2} + m_3 L_2 + m_3 L_{c3}}{m_2 L_{c2}^2 + I_2 + m_3 L_{c3}^2 + I_3 + m_3 L_2^2 + 2L_2 L_{c3} m_3}$ .

Wynikowa postać dynamiki zerowej jest tożsama z dynamiką zerową ze wzoru (4.352).

**FUNKCJA WYJŚCIA:**  $h(\tilde{x})$  Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji oraz pseudoprędkości zmiennej pasywnej, tzn. której współczynniki są następujące:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1, & k_{12} &= 0, & k_{13} &= 1, \\ k_{31} &= 0, & k_{32} &= 1, & k_{33} &= 0, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.445)$$

Stosując powyższe współczynniki, funkcja  $h(\tilde{x}) = [h_1, h_3]^T$  przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} h_1 &= k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{13}(q_3 - q_3^d) \\ h_3 &= k_{32}(q_2 - q_2^d) + k_2(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_2^d). \end{aligned} \quad (4.446)$$

Równanie (4.280) zapiszmy jako

$$v = [v_1, v_3]^T = (L_g L_f h_j)^{-1} (u - L_f^2 h_j), \quad (4.447)$$

gdzie sygnał  $u$  dany jest zależnością

$$u = \ddot{y}^d + K_d(\dot{y}^d - L_f h_j) + K_p(y^d - h_j), \quad (4.448)$$

dla  $j = \{1, 3\}$ . Ze względu na funkcję  $h(\tilde{x})$  zależną od pseudoprędkości, równania (4.447) oraz (4.448) nie trywializują się jak w przypadku funkcji  $h(x)$ . Szczegółową ich postać zamieszczono w załączniku K.

Zakładając, że trajektoria referencyjna została zdegenerowana do punktu:

$$(q_1^d, q_2^d, q_3^d) = \left( \frac{\pi}{2}, 0, 0 \right), \quad (4.449)$$

równanie (4.447) w szczegółowej postaci przedstawia się następująco

$$v = [v_1, v_3]^T = -(L_g L_f h_j)^{-1} (L_f^2 h_j + K_d L_f h_j + K_p h_j), \quad (4.450)$$

natomiast dynamika wewnętrzna równania (4.438) powtórnie dana jest jako

$$\eta(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_2 \\ \kappa \sin q_2 \end{bmatrix}. \quad (4.451)$$

Identyczna postać dynamiki wynika z faktu przyjęcia trajektorii referencyjnej zdegenerowanej do punktu. W przypadku zadania śledzenia trajektorii nie zaś stabilizacji w punkcie, dynamika zerowa zarówno dla (4.352) jak i dla (4.444) oraz (4.451) będą się różniły.

#### 4.6.4 QP: 2 sterowania – $\tau_2, \tau_3$

Rozważmy następujący obiekt dany zależnością (4.372)

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) + \tilde{J}_2 v_2 + \tilde{J}_3 v_3, \\ \dot{q}_2 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= v_2 \\ \dot{q}_3 &= w_3 \\ \dot{w}_3 &= v_3,\end{aligned}\tag{4.452}$$

gdzie wektor stanu dany jest zależnością:

$$x = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ w_2 \ q_3 \ w_3]^T,\tag{4.453}$$

oraz  $\tilde{J}_2, \tilde{J}_3$  są funkcjami stanu zdefiniowanymi w rozdziale 4.5.5.

W równaniach dynamiki (4.452) wprowadźmy pseudoprędkość  $\tilde{w}_1$  zdefiniowaną jako

$$\tilde{w}_1 = w_1 - \tilde{J}_2(q_2, q_3)w_2 - \tilde{J}_3(q_2, q_3)w_3.\tag{4.454}$$

Nowy wektor stanu przyjmie wtedy postać:

$$\tilde{x} = [q_1 \ \tilde{w}_1 \ q_2 \ w_2 \ q_3 \ w_3]^T.\tag{4.455}$$

Obliczając pochodną z zależności (4.454) otrzymujemy <sup>xxi</sup>

$$\dot{\tilde{w}}_1 = -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2^2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_2} - w_2 w_3 \left( \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_2} \right) - w_3^2 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3}.\tag{4.456}$$

W wyniku wprowadzenia pseudoprędkości obiekt (4.452) przyjmuje formę

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g_1 v_2 + g_2 v_3\tag{4.457}$$

gdzie

$$f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 + \tilde{J}_2 w_2 + \tilde{J}_3 w_3 \\ -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2^2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_2} - w_2 w_3 \left( \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_2} \right) - w_3^2 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \\ w_2 \\ 0 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \quad g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego (4.457) przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**FUNKCJA WYJŚCIA:  $h(x)$**  Analogicznie jak w rozdziale 4.6.2 przedstawmy wybrany przypadek reprezentujący funkcję wyjścia uzależnioną od zmiennych naturalnych, oznaczony jako  $h(x)$ .

Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.414) są następujące:

$$\begin{aligned}k_{21} &= 0, & k_{22} &= 1, & k_{23} &= 0, \\ k_{31} &= 0, & k_{32} &= 0, & k_{33} &= 1, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 0,\end{aligned}\tag{4.458}$$

tzn. funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest tylko za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = \begin{bmatrix} q_2 - q_2^d \\ q_3 - q_3^d \end{bmatrix}.\tag{4.459}$$

<sup>xxi</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku L

Równanie (4.280) przybiera więc postać

$$v = [v_2, v_3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (4.460)$$

gdzie sygnał  $u$  dany możemy zapisać jako

$$u = \ddot{y}^d + K_d \left( \dot{y}^d - \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \right) + K_p \left( y^d - \begin{bmatrix} q_2 - q_2^d \\ q_3 - q_3^d \end{bmatrix} \right). \quad (4.461)$$

Zakładając ponadto, że wartości referencyjne dla (4.461) zostały określone dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do punktu:

$$(q_2^d, q_3^d) = (0, 0), \quad (4.462)$$

to dynamika wewnętrzna równania (4.457) dana jest funkcją

$$\eta(\tilde{x}) = \left[ \begin{array}{c} \tilde{w}_1 + \tilde{J}_2 w_2 + \tilde{J}_3 w_3 \\ -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2^2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_2} - w_2 w_3 \left( \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_2} \right) - w_3^2 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{\dot{q}_2 = \dot{q}_2^d, q_2 = q_2^d \\ \dot{q}_3 = \dot{q}_3^d, q_3 = q_3^d}}$$

finalnie redukując się do

$$\eta(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ \rho \sin q_1 \end{bmatrix}. \quad (4.463)$$

Wynikowa postać dynamiki zerowej jest tożsama z dynamiką zerową ze wzoru (4.382).

**FUNKCJA WYJŚCIA:**  $h(\tilde{x})$  Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji oraz pseudoprędkości zmiennej pasywnej, tzn. której współczynniki są następujące:

$$\begin{aligned} k_{21} &= 0, & k_{22} &= 1, & k_{23} &= 1, \\ k_{31} &= 1, & k_{32} &= 0, & k_{33} &= 0, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.464)$$

Stosując powyższe współczynniki, funkcja  $h(\tilde{x}) = [h_2, h_3]^T$  przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} h_2 &= k_{22}(q_2 - q_2^d) + k_{23}(q_3 - q_3^d) \\ h_3 &= k_{31}(q_1 - q_1^d) + k_2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_1^d). \end{aligned} \quad (4.465)$$

Równanie (4.280) zapiszmy jako

$$v = [v_2, v_3]^T = (L_g L_f h_j)^{-1} (u - L_f^2 h_j), \quad (4.466)$$

gdzie sygnał  $u$  dany jest zależnością

$$u = \ddot{y}^d + K_d(\dot{y}^d - L_f h_j) + K_p(y^d - h_j), \quad (4.467)$$

dla  $j = \{2, 3\}$ . Ze względu na funkcję  $h(\tilde{x})$  zależną od pseudoprędkości, równania (4.466) oraz (4.467) nie trywializują się jak w przypadku funkcji  $h(x)$ . Szczegółową ich postać zamieszczono w załączniku L.

Zakładając, że trajektoria referencyjna została zdegenerowana do punktu:

$$(q_1^d, q_2^d, q_3^d) = \left( \frac{\pi}{2}, 0, 0 \right), \quad (4.468)$$

równanie (4.466) w szczegółowej postaci przedstawia się następująco

$$v = [v_2, v_3]^T = -(L_g L_f h_j)^{-1} (L_f^2 h_j + K_d L_f h_j + K_p h_j), \quad (4.469)$$

natomiast dynamika wewnętrzna równania (4.457) powtórnie dana jest jako

$$\eta(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ \rho \sin q_1 \end{bmatrix}. \quad (4.470)$$

Identyczna postać dynamiki wynika z faktu przyjęcia trajektorii referencyjnej zdegenerowanej do punktu. W przypadku zadania śledzenia trajektorii nie zaś stabilizacji w punkcie, dynamika zerowa zarówno dla (4.382) jak i dla (4.463) oraz (4.470) będą się różniły.



#### 4.6.5 QP: 2 sterowania – $\tau_1$

Rozważmy następujący obiekt dany zależnością (4.402)

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= v \\ \dot{q}_2 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= -m_{33}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) + m_{23}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}\tilde{J}_a v \\ \dot{q}_3 &= w_3 \\ \dot{w}_3 &= m_{32}\tilde{J}(\mu_2 + G_2) - m_{22}\tilde{J}(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}\tilde{J}_b v,\end{aligned}\quad (4.471)$$

gdzie wektor stanu dany jest zależnością:

$$x = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ w_2 \ q_3 \ w_3]^T, \quad (4.472)$$

oraz  $\tilde{J}_2, \tilde{J}_3$  są funkcjami stanu zdefiniowanymi w rozdziale 4.5.6.

W równaniach dynamiki (4.471) wprowadźmy pseudoprędkości  $\tilde{w}_2$  i  $\tilde{w}_3$  zdefiniowane jako

$$\begin{aligned}\tilde{w}_2 &= w_2 - \tilde{J}\tilde{J}_a w_1, \\ \tilde{w}_3 &= w_3 - \tilde{J}\tilde{J}_b w_1.\end{aligned}\quad (4.473)$$

Nowy wektor stanu przyjmie wtedy postać:

$$\tilde{x} = [q_1 \ w_1 \ q_2 \ \tilde{w}_2 \ q_3 \ \tilde{w}_3]^T. \quad (4.474)$$

Obliczając pochodną z zależności (4.473) otrzymujemy <sup>xxii</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{w}}_2 &= -m_{33}J(\mu_2 + G_2) + m_{23}J(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}_a w_1 \frac{d\tilde{J}}{dt} - \tilde{J} w_1 \frac{d\tilde{J}_a}{dt} \\ \dot{\tilde{w}}_3 &= m_{32}J(\mu_2 + G_2) - m_{22}J(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}_b w_1 \frac{d\tilde{J}}{dt} - \tilde{J} w_1 \frac{d\tilde{J}_b}{dt}\end{aligned}\quad (4.475)$$

gdzie:  $\frac{d\tilde{J}}{dt} = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial q_2} w_2 + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial q_3} w_3$ ,  $\frac{d\tilde{J}_a}{dt} = \frac{\partial \tilde{J}_a}{\partial q_2} w_2 + \frac{\partial \tilde{J}_a}{\partial q_3} w_3$ ,  $\frac{d\tilde{J}_b}{dt} = \frac{\partial \tilde{J}_b}{\partial q_2} w_2 + \frac{\partial \tilde{J}_b}{\partial q_3} w_3$ .

W wyniku wprowadzenia pseudoprędkości obiekt (4.471) przyjmuje formę

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + gv, \quad (4.476)$$

$$\text{gdzie: } f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ \tilde{w}_2 + \tilde{J}\tilde{J}_a w_1 \\ \dot{\tilde{w}}_2 \\ \tilde{w}_3 + \tilde{J}\tilde{J}_b w_1 \\ \dot{\tilde{w}}_3 \end{bmatrix}, \quad g = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

#### DYNAMIKA ZEROWA

Bazując na zależnościach opisujących dynamikę układu zamkniętego (4.476) przejdźmy do analizy dynamiki zerowej, dla różnych postaci funkcji wyjścia.

**FUNKCJA WYJŚCIA:**  $h(x)$  Przyjmijmy, że współczynniki funkcji (4.414) są następujące:

$$\begin{aligned}k_{11} &= 1, & k_{12} &= 0, & k_{13} &= 0, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 0,\end{aligned}\quad (4.477)$$

tzn. funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest tylko za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = q_1 - q_1^d. \quad (4.478)$$

Równanie (4.280) przybiera więc postać

$$v = 1(u - 0) = u \quad (4.479)$$

<sup>xxii</sup>Szczegółowe wyprowadzenia znajdują się w załączniku M

gdzie sygnał  $u$  możemy zapisać jako

$$u = -K_d \dot{q}_1 - K_p q_1. \quad (4.480)$$

Dalsze rozważania prowadzą do podobnych wniosków jak w rozdziałach 4.6.2-4.6.4, włącznie z wnioskiem dotyczącym postaci dynamiki zerowej, która tożsama jest z dynamiką zerową ze wzoru (4.413).

**FUNKCJA WYJŚCIA:  $h(\tilde{x})$**  Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.414) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji oraz pseudoprędkości zmiennej pasywnej, tzn. której współczynniki są następujące:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1, & k_{12} &= 1, & k_{13} &= 1, \\ k_1 &= 1, & k_2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.481)$$

Stosując powyższe współczynniki, funkcja  $h(\tilde{x}) = h_1$  przyjmuje następującą postać:

$$h_1 = k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d) + k_{13}(q_3 - q_3^d) + k_1(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_2^d) + k_2(\tilde{w}_3 - \tilde{w}_3^d). \quad (4.482)$$

Równanie (4.280) zapiszmy jako

$$v = (L_g L_f h_j)^{-1}(u - L_f^2 h_j), \quad (4.483)$$

gdzie sygnał  $u$  dany jest zależnością

$$u = -K_d L_f h - K_p h. \quad (4.484)$$

Ze względu na funkcję  $h(\tilde{x})$  zależną od pseudoprędkości, równania (4.483) oraz (4.484) nie trywializują się jak w przypadku funkcji  $h(x)$ . Szczegółową ich postać zamieszczono w załączniku M. Zakładając, że trajektoria referencyjna została zdegenerowana do punktu:

$$(q_1^d, q_2^d, q_3^d) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0), \quad (4.485)$$

równanie (4.483) w szczegółowej postaci przedstawia się następująco

$$v = [v_2, v_3]^T = -(L_g L_f h_j)^{-1}(L_f^2 h_j + K_d L_f h_j + K_p h_j), \quad (4.486)$$

natomiast dynamika wewnętrzna równania (4.476) powtórnie dana jest jako (4.412).

Identyczna postać dynamiki wynika z faktu przyjęcia trajektorii referencyjnej zdegenerowanej do punktu. W przypadku zadania śledzenia trajektorii nie zaś stabilizacji w punkcie, dynamika zerowa zarówno dla (4.413) jak i dla  $h(x)$  oraz  $h(\tilde{x})$  będą się różniły.

## ROZDZIAŁ 5

### Wyniki badań symulacyjnych dla 2 DOF

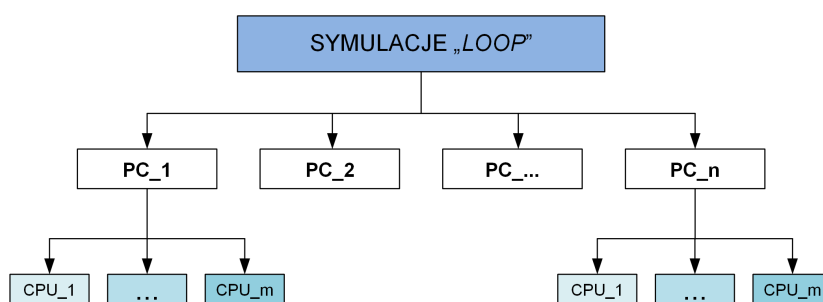
W tym rozdziale przedstawione zostaną wyniki badań symulacyjnych ilustrujących wybrane zagadnienia omówione w rozdziałach teoretycznych rozprawy. Badania przeprowadzone były z wykorzystaniem kilku narzędzi informatycznych, wśród których wyróżnić można:

- kompilator C++
- interpreter Python
- środowisko Matlab.

Do rozwiązywania równań różniczkowych wykorzystywana była metoda zmiennokrokowa typu *ode45*, zaimplementowana w języku C++ z wykorzystaniem biblioteki *Eigen* [6].

Symulacje numeryczne prowadzone były przy użyciu komputerów klasy PC z procesorami czterodzeniowymi o architekturze x86/x64 wspierającymi obliczenia 8-wątkowe.

Symulacje wykonywane były według dwóch schematów, które oznaczono jako *LOOP* oraz *SOLO*. Schemat prac symulacyjnych typu *LOOP* można przedstawić następująco. Dla wybranego algorytmu sterowania dokonywano wyboru przedziału poszukiwania rozwiązań, zarówno w przestrzeni konfiguracyjnej robota, jak również w przestrzeni parametrów, jeśli takie były rozważane. Celem przyspieszenia obliczeń dokonano zrównoleglenia wykonywanych symulacji poprzez podział wybranego zakresu poszukiwań między procesory logiczne CPU, jak również pomiędzy dodatkowe komputery PC, co zostało zobrazowane na rysunku 5.1.



Rysunek 5.1: Schemat obrazujący zrównoleglenie obliczeń

Uzyskane wyniki symulacji typu *LOOP* były następnie analizowane za pomocą procedur napisanych w języku *Python* celem przedstawienia tzw. obszarów zbieżności.

Symulacje typu *SOLO* odpowiadają dogłębnej analizie wybranego przypadku ze zbioru dostępnych rozwiązań (obszaru zbieżności) i prowadzone były jednowątkowo, tzn. przy wykorzystaniu jednego komputera PC (Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1620 v3 @ 3.50GHz, 12 GB RAM, Windows 10). W ramach poszerzonej analizy przedstawiono przebiegi w czasie zmiennych konfiguracyjnych robota oraz sygnału wejściowego. Szczegółowa analiza typu *SOLO* dla robota 2 DOF została powiązana z weryfikacją eksperymentalną i znajduje się w rozdziale 7.

## 5.1 Opis procedury symulacji

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiona analiza algorytmów, które zostały przedstawione w rozdziałach 4.3-4.4. Przedmiotem zainteresowania jest również ocena użyteczności badanych metod uwzględniająca przesłanki praktyczne takie jak ograniczenia sygnałów wejściowych oraz ograniczenia nałożone na stan, które wynikają z konstrukcji mechanicznej systemu.

Analiza wyników symulacyjnych została przeprowadzona dla wszystkich rozpatrywanych algorytmów według następującego schematu. W pierwszej kolejności przedstawiono zbiory warunków początkowych, dla których dany algorytm osiąga założony cel sterowania, tj. określono tzw. *obszar zbieżności*. Następnie analizowano wskaźniki opisujące jakość regulacji dla zastosowanych praw sterowania celem wzajemnego porównania rozpatrywanych algorytmów.

W symulacjach rozpatruje się zadanie stabilizacji robota w pozycji wyprostowanej, przedstawionej na rysunku 4.3a, tzn. zadana pozycja określona jest przez  $(q_1^d, q_2^d) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Analizowane warunki początkowe zakładają, że prędkości w złączach są zerowe. Przyjęcie takiego scenariusza symulacji nie oznacza uproszczenia procesu stabilizacji, jako że układ w początkowej fazie sterowania nie posiada żadnej energii kinetycznej. Oznacza to, że algorytm musi niejako „wstrzyknąć” pewną ilość energii wymaganą do rozpoczęcia ruchu, przy jednoczesnym utrzymaniu jego konfiguracji w przedziale, w którym uzyskanie stabilizacji jest możliwe.

Wielu badaczy, por. [39, 79, 99, 101, 105, 106], analizuje proces stabilizacji dla warunków początkowych, które znajdują się bardzo blisko pozycji zadanej (błąd konfiguracji w poszczególnych złączach nie przekracza kilku stopni). W tej pracy założono sprawdzenie zbioru warunków początkowych w całej przestrzeni konfiguracyjnej, zdefiniowanych w dziedzinie dyskretnej na siatce 2D. Rozdzielczość przestrzenna siatki została ustawiona na  $2^\circ$  bądź  $4^\circ$ , co wynikało z wniosków wstępnych symulacji mających na celu znalezienie kompromisu między wymaganą dokładnością a czasem trwania symulacji. Każda komórka siatki odpowiada jednemu warunkowi początkowemu  $(q_{01}, q_{02})$  przyjmowanemu w danej próbie symulacyjnej. Próbę uznajemy za udaną, jeżeli w założonym horyzoncie czasowym równym  $T_{sim} = 10s$  norma z sumy błędów pozycji kątowej w obu złączach będzie mniejsza niż  $0.01^\circ$ . W szczególnych przypadkach horyzont symulacji został wydłużony. Udaną próbę na wykresie przedstawiającym *obszary zbieżności* oznaczono kolorem niebieskim, natomiast kolor biały oznacza warunek początkowy dla którego odnotowano niepowodzenie, tj. brak stabilizacji układu zamkniętego przy spełnieniu założonych kryteriów.

Zakres kątów  $q_{01}$  oraz  $q_{02}$  został określony w granicach od  $-180^\circ$  do  $180^\circ$ , co daje od ok. 8100 do 32400 prób symulacyjnych (w zależności od przyjętej rozdzielczości siatki) dla każdego algorytmu, bez uwzględnienia zmian innych parametrów w trakcie symulacji. Przyjęcie takich warunków początkowych oznacza, że problem podniesienia wahadła (*swing-up*) jest również rozpatrywany.

W przypadku, gdy badany algorytm posiada parametry, np. wzmocnienia, pozwalające na jego strojenie, były one dodatkowo uwzględniane w procesie poszukiwania rozwiązania. W tym celu przyjęto podejście probabilistyczne, w którym wartości parametrów opisane zostały przez zmienne losowe o rozkładzie równomiernym  $U(a, b)$ , gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają wartości graniczne. Dla każdej pary warunków początkowych  $(q_{01}, q_{02})$  zdefiniowanych na siatce, prowadzono symulacje dla różnych wartości tych parametrów wyznaczanych za pomocą funkcji numerycznych estymujących rozkład równomierny. Przykładowo są to parametry  $k_P, k_D, \omega_0, k_E$ , itp. dla odpowiednich algorytmów sterowania. W tenże sposób można uzyskać bliskie optymalnym wartości parametrów dla wybranego warunku początkowego, zapewniające najlepszą (z punktu widzenia przyjętych kryteriów) jakość regulacji. Wadą przyjętego schematu optymalizacji jest znaczna liczba iteracji wymagana do badania danego algorytmu, sięgająca od blisko 1 do ponad 3 milionów symulacji dla rozważanego przypadku (w zależności od przyjętej rozdzielczości przeszukiwań siatki i liczby zmian danego parametru).

Celem uzyskania obiektywnych kryteriów porównawczych wprowadzono kilka wskaźników. Pierwszym z nich jest wskaźnik opisujący procentowy udział warunków początkowych dla których osiągnięto stabilizację, odniesiony do całej przeszukiwanej przestrzeni warunków początkowych

– wskaźnik ten w dalszej części pracy oznaczono jako *Area*. Następnie, jako kryteria efektywności energetycznej zostały użyte dwa klasyczne wskaźniki [1]:

$$J_m = \int_0^{t_{\max}} V_m^2 dt, \quad (5.1)$$

oraz

$$J_e = \int_0^{t_{\max}} \|e_p\|^2 dt, \quad (5.2)$$

definiowane odpowiednio jako całka z kwadratu napięcia wejściowego, oraz całka z kwadratu uchybu przejściowego uwzględniającego stan. Występujący we wzorze 5.1 symbol  $V_m$  oznacza napięcie wejściowe. Wykorzystanie napięcia zamiast momentu generowanego przez silnik wynika z konieczności dostosowania się do rzeczywistego stanowiska laboratoryjnego, opisanego w rozdziale 7, dla którego sygnałem wejściowym jest właśnie napięcie. Przeliczenia wartości momentu napędowego na wartość napięcia zasilającego silnik opisane jest wg. zależności zawartych w [71]. Ponadto dla zbioru uzyskanych wskaźników energetycznych wyznaczano wartość średnią i odchylenie standardowe w serii. Rozpatrywane wskaźniki zostały wyliczone dla każdej próby, w której badano algorytm.

W przypadku, gdy dla danego warunku początkowego  $(q_{01}, q_{02})$  zastosowano dodatkowo poszukiwanie nastaw algorytmu, do prezentacji wyników wybierano przypadek dla którego  $J_m$  bądź  $J_e$  jest najmniejszy. Otrzymane wartości wskaźników przedstawiane są następnie w formie wykresów słupkowych, dla wszystkich udanych prób dotyczących danego algorytmu. Na podstawie tych kryteriów można wyciągnąć wnioski odnośnie właściwości układu zamkniętego. Dla przykładu wskaźnik  $J_e$  daje pewne przesłanki do oceny ruchu złączy robota podczas całego procesu stabilizacji. Duża wartość tego wskaźnika oznacza, że ruch robota jest ekstensywny, charakteryzuje się znacznymi zmianami wartości kątów w złączach i trwa długo, podczas gdy mała wartość oznacza, że ruch jest „szybki i krótki”, tzn. podczas procesu osiągnięcia punktu zadanego złącza nie wykonują nadmiernych ruchów. Zauważono także na podstawie analizowanych przypadków, że dla danego algorytmu mniejsza wartość  $J_e$  wiąże się z reguły z krótszym czasem symulacji konkretnego przypadku (rzędu 1-2 sekund), podczas gdy jego duża wartość może oznaczać, że czas symulacji zbliża się do zakładanego maksymalnego czasu  $T_{\text{sim}}$ . Wartości „duża” i „mała” odnoszą się stricte do danego algorytmu i nie można ich porównywać między algorytmami. Przykładowo dla algorytmu opisanego w rozdziale 5.2.2 mała wartość  $J_e$  jest rzędu jednościami, a duża rzędu 37. Natomiast algorytm opisany w rozdziale 5.2.5 charakteryzuje się wskaźnikiem  $J_e$  na poziomie 1.5 oraz 2000, dla odpowiednio „małych” i „dużych” wartości wskaźnika. Na tej podstawie można określić np. który zakres warunków początkowych jest bardziej wymagający pod względem energetycznym, co może być pomocne przy planowaniu prób eksperymentalnych.

#### PORÓWNANIE DANYCH SYMULACYJNYCH

Celem porównania poszczególnych algorytmów sterowania rozważa się każdorazowo tzw. **przypadek nominalny**, dla którego przyjęto zestaw znormalizowanych parametrów symulacji. W przypadku tym założono, że maksymalna wartość bezwzględna napięcia wejściowego silnika jest ograniczona do 10V, co wynika z charakterystyki elementu wykonawczego wykorzystywanego na stanowisku laboratoryjnym. Ponadto na ruch robota nie nałożono dodatkowych ograniczeń, takich jak maksymalna liczba obrotów pierwszego i drugiego złącza, czy zakres dozwolonych prędkości kątowych w stanie przejściowym. Taką nominalną symulację oznaczono każdorazowo jako `sim_1` i dla niej wykreślono zbiór dodatkowych wskaźników charakteryzujących zachowanie się układu zamkniętego. Wśród tych wskaźników możemy wyróżnić obszary zbieżności, histogramy wskaźników energetycznych, graficzną reprezentację tychże wskaźników w odniesieniu do zbioru warunków początkowych, czy też histogramy opisujące rozkład parametrów odpowiednich algorytmów w odniesieniu do wszystkich udanych prób.

Dodatkowo badano algorytmy przy różnym ograniczeniu sygnału wejściowego (napięcia dostarczanego do silnika), w zakresie od 1 do  $10^3$  V, wyznaczając każdorazowo obszar zbieżności dla danego przypadku.

Strojenie sterownika  $u_{\text{stab}}$  odpowiadającego za stabilizację w punkcie przebiegało wg tej samej procedury, chyba że zaznaczono inaczej. Dla modeli wyrażonych za pomocą zmiennych naturalnych optymalne wartości wzmocnień  $K$  uzyskano dla liniowej aproksymacji równań ruchu w punkcie równowagi  $(q_1^d, q_2^d) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ , przy założeniu następujących postaci macierzy  $Q = \text{diag}\{50, 50, 0.01, 0.01\}$  i  $R = 100$ .

Dla modeli wyrażonych w zmiennych przekształconych – pseudoprędkościach – uwzględniono zaś transformacje macierzy  $Q$  i  $R$  wynikające z transformacji zmiennych konfiguracyjnych, opisane w rozdziałach 4.4.3 i 4.4.6.

Przyjęta metodyka zapewniła podobną dynamikę układu zamkniętego w otoczeniu punktu zadanego dla każdego algorytmu co pozwoliło na ich obiektywne porównanie.

### 5.1.1 Opis parametrów symulacji

W niniejszym rozdziale przedstawiono opis parametrów symulacji numerycznych użytych do badania algorytmów sterowania opisanych w rozdziałach 4.3-4.4 dla robota o dwóch stopniach swobody. Dla wybranych scenariuszy badań symulacyjnych zamieszczono tabele z parametrami. Standardowa interpretacja tych parametrów jest następująca (chyba, że dla danych przypadków szczególnych zaznaczono inaczej):

- *solver* – w procesie całkowania równań ruchu zastosowano metodę o zmiennym kroku całkowania, typu *Runge-Kutta Dormand-Prince 5 (RKDP5)*,
- $T_{\text{sim}}$  – czas symulacji (maksymalny czas przeznaczony na całkowanie równań ruchu jednego przypadku),
- $dt$  – krok całkowania metody numerycznej (*solvera*),
- zakres przeszukiwanych kątów  $q_1$  oraz  $q_2$  znajdował się w zbiorze od  $-180^\circ$  do  $+180^\circ$ , dla każdego ze złączy,
- *grid*  $\boxtimes$  – rozdzielczość przeszukiwania siatki wyrażona w  $[\circ]$ ,
- *absolute error tolerance* oraz *relative error tolerance* – parametry *solvera* zmiennokrokowego,

Dla niektórych algorytmów zastosowano dodatkowe parametry, jak:

- $\Delta_q$  – zakres działania regulatora linowego wyrażony w  $[\circ]$ ,
- *rand* – liczba losowań parametru w danym przedziale, np. parametrów regulatora  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\xi$ ,  $k_P$ ,  $k_D$ ,  $k_E$ , itp.

Tabele o nazwie *Wyniki symulacji* przedstawiają zebrane wyniki dla symulacji robota typu Acrobot bądź Pendubot. W tabelach tych użyto następujących skrótów:

- $V_{\text{max}}$  – jest maksymalną wartością bezwzględną napięcia wejściowego silnika,
- *Ograniczenia* – dotyczy sytuacji w której narzucamy ograniczenie na wykonanie symulacji, tzn. czy uwzględniamy możliwość zakończenia procesu symulacji wcześniej niż wynika to z  $T_{\text{sim}}$ . Uzyskanie rozwiązań w rozważanych przypadkach potrafi być czasochłonne. Wprowadzenie ograniczeń umożliwia więc otrzymanie rozwiązań w czasie krótszym niż nominalny. W trakcie symulacji możemy narzucić dwa dodatkowe warunki na zakończenie działania programu, takie jak ograniczenie liczby obrotów złącza pierwszego bądź drugiego (określamy wtedy maksymalną liczbę obrotów danego złącza), lub ograniczenie prędkości kątowej jaką może osiągnąć dane złącze.
- Uwagi – w przypadku zmian domyślnych parametrów symulacji dodawano odpowiedni komentarz,
- *Area* [%] – procentowy udział warunków, dla których osiągnięto zadany stan odniesiony do całej przeszukanej przestrzeni,
- $J_e = \int \|e_p\|^2 dt$  – całka z kwadratu uchybu przejściowego dla stanu,
- $J_m = \int V_m^2 dt$  – całka z kwadratu napięcia wejściowego,
- $\overline{J_e}$  – wartość średnia z parametru  $J_e$ ,
- $\overline{J_m}$  – wartość średnia z parametru  $J_m$ ,
- $\sigma(J_e)$  – odchylenie standardowe dla serii parametrów  $J_e$ ,

- $\sigma(J_m)$  – odchylenie standardowe dla serii parametrów  $J_m$ ,
- $T_{crit}$  – założony maksymalny czas trwania obliczeń rzędu 24h.

## 5.2 Wyniki numeryczne symulacji

Niniejszy rozdział odnosi się do rozważań przedstawionych w części 4 i stanowi symulacyjną egzemplifikację zawartych tam metod sterowania dla robota o dwóch stopniach swobody.

Wyniki zostaną przedstawione w sekwencji związanej z zastosowanym prawem sterowania, odpowiednio dla robota typu Acrobot oraz Pendubot. Tytuły poniższych podrozdziałów oznaczają skrótowo zastosowany algorytm sterowania i należy odczytywać je zgodnie z tabelą 5.1 w sposób, który zostanie omówiony na dwóch przykładach:

- *MCG: Acrobot* – symulacja dla robota typu Acrobot, przy wykorzystaniu modelu dynamiki wyrażonego we współrzędnych naturalnych i zastosowaniu wyłącznie sterownika  $u_{stab}$ ,
- *QPZ+Energy: Pendubot* – symulacja dla robota typu Pendubot, przy wykorzystaniu modelu dynamiki wyrażonego we współrzędnych przekształconych – quasi-prędkościach i zastosowaniu sterownika hybrydowego.

Tabela 5.1: Wykaz badanych algorytmów

Algorytm	Robot	Zmienne	$u_{stab}$	$u_{swing}$
MCG: Acrobot	Acrobot	naturalne	+	–
MCG: Pendubot	Pendubot	naturalne	+	–
MCG+Energy: Pendubot	Pendubot	naturalne	+	+
Spong: Acrobot	Acrobot	naturalne	+	+
Spong: Pendubot	Pendubot	naturalne	+	+
QPZ: Acrobot	Acrobot	quasi-prędkości	+	–
QPZ: Pendubot	Pendubot	quasi-prędkości	+	–
QPZ+Energy: Pendubot	Pendubot	quasi-prędkości	+	+
PN-QP: Acrobot	Acrobot	quasi-prędkości	+	+
PN-QP+LQR: Pendubot	Pendubot	quasi-prędkości	+	–
PN-QP: Pendubot	Pendubot	quasi-prędkości	+	+

Wspólne parametry symulacji (chyba, że zaznaczono inaczej) przedstawiono w tabeli 5.2. Opis wykorzystanych symboli znajduje się w rozdziale 5.1.1.

Tabela 5.2: Parametry symulacji

<i>solver</i>	$T_{sim}$	$dt$	$q_1[^\circ]$	$q_2[^\circ]$	$\Delta_q$	$\boxplus$	<i>absolute/relative error tolerance</i>
RKDP5	10	0.01	$\pm 180$	$\pm 180$	90	2	$10^{-6}$

Algorytmy *MCG:Acrobot* oraz *MCG:Pendubot* nie zostały szczegółowo opisane w niniejszej pracy. Wynika to z ich prostoty, jako że algorytmy te uwzględniają tylko model dynamiki robota danego zależnościami (4.50-4.51) oraz (4.104-4.105) dla odpowiednio Pendubota i Acrobota, oraz sterownika  $u_{stab}$  opisanego w rozdziale 4.1.

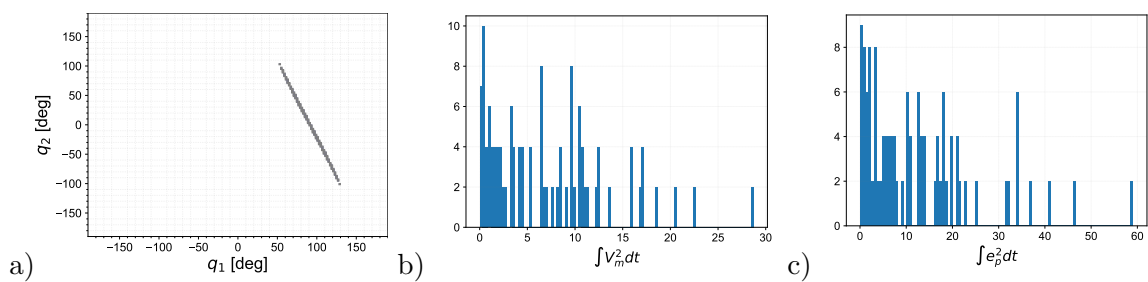


## 5.2.1 MCG: Acrobot

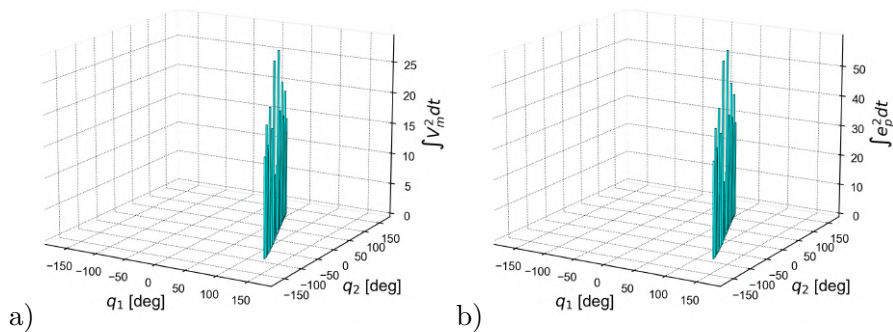
Tabela 5.3: Wyniki symulacji: MCG: Acrobot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.040	0.680	0.600	0.305	0.241
sim_1	10	–	–		0.417	12.443	12.308	6.871	6.171
sim_2	$10^2$	–	–		0.503	25.802	30.225	23.026	31.868
sim_3	$10^3$	–	–		0.503	25.802	30.225	23.026	31.868
sim_4	$10^6$	+	–	a	0.503	25.802	30.225	23.026	31.868

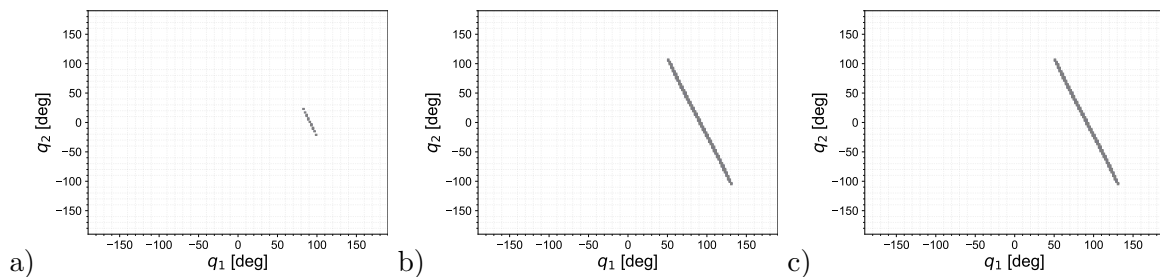
Uwaga a: brak ograniczenia na  $q$  dla  $V_{\max} = 10^6$  skutkuje  $T_{\text{sim}} > T_{\text{crit}}$



Rysunek 5.2: MCG: Acrobot, dla sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.3: MCG: Acrobot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$



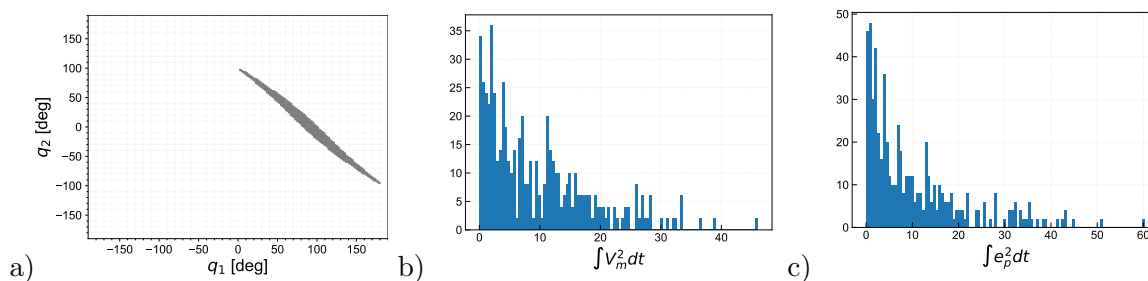
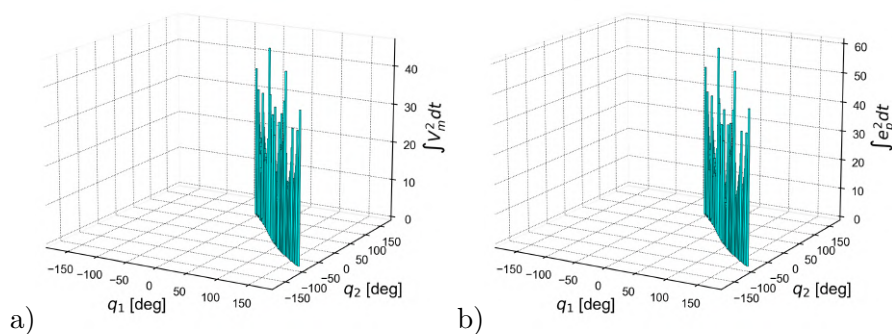
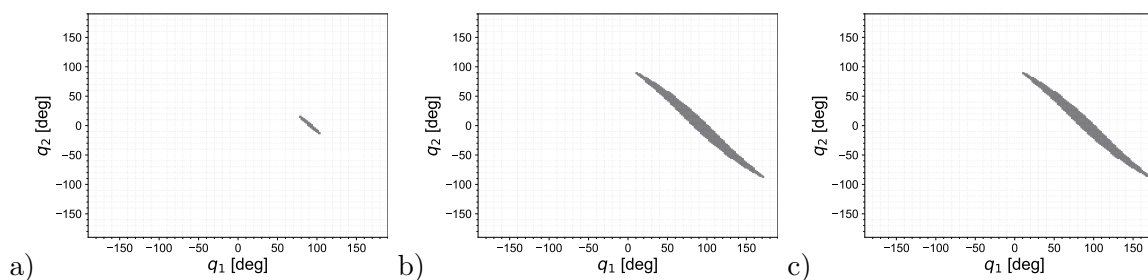
Rysunek 5.4: MCG: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



## 5.2.2 MCG: Pendubot

Tabela 5.4: Wyniki symulacji: MCG: Pendubot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	-	-	$T_{\text{sim}} = 20\text{s}$	0.083	0.304	0.219	0.261	0.173
sim_1	10	-	-		1.719	10.373	11.017	9.604	8.766
sim_2	$10^2$	-	-		1.806	13.934	17.919	17.439	23.985
sim_3	$10^3$	-	-		1.806	13.934	17.919	17.439	23.985
sim_4	10	+	-		1.719	10.373	11.017	9.604	8.766
sim_5	$10^2$	+	-		1.806	13.934	17.919	17.439	23.985
sim_8	$10^3$	+	-	$T_{\text{sim}} = 50\text{s}$	1.806	13.934	17.919	17.439	23.985

Rysunek 5.5: MCG: Pendubot, dla sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.6: MCG: Pendubot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ 

Rysunek 5.7: MCG: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

### 5.2.3 MCG+Energy: Pendubot

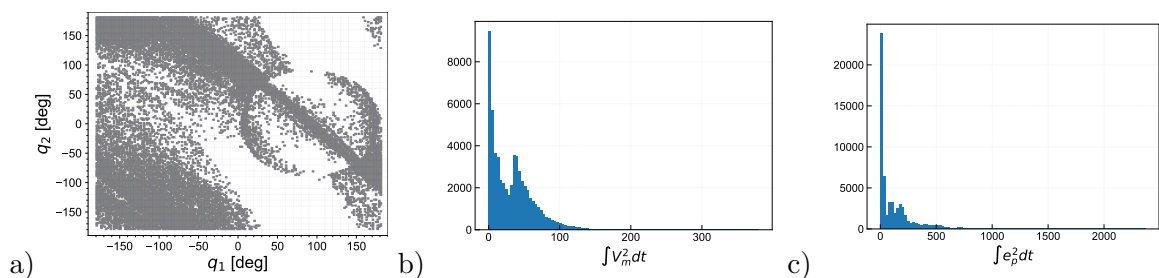
Dodatkowe parametry badanego algorytmu względem tych zawartych w tabeli 5.2 zostały przedstawione w tabeli 5.5.

Tabela 5.5: Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: MCG+Energy: Pendubot

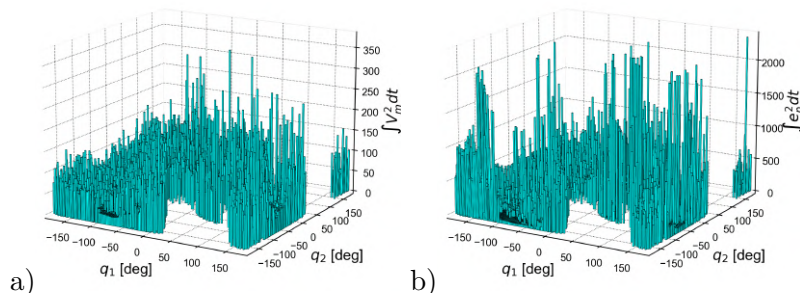
$k_P$	$k_D$	$k_E$	rand
0.1 ÷ 1	0.1 ÷ 1	0.01 ÷ 1	50

Tabela 5.6: Wyniki symulacji: MCG+Energy: Pendubot

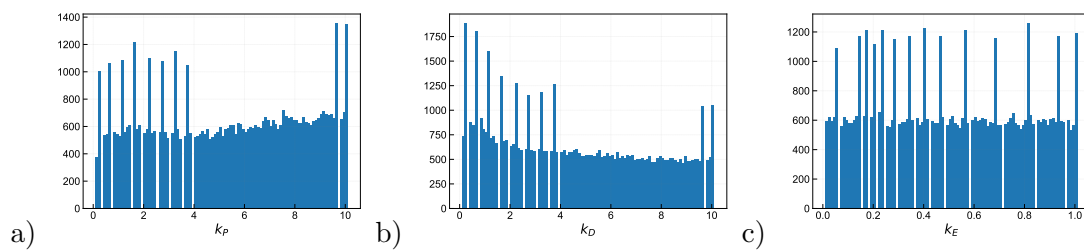
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.08	0.30	0.22	0.26	0.17
sim_1	10	–	–		36.97	211.65	250.68	52.16	32.29
sim_1x	10	–	–	⊞ = 4	36.68	206.74	233.15	52.02	32.23
sim_2	$10^2$	–	–		25.86	229.07	375.97	102.76	189.05
sim_3	$10^3$	–	–		25.68	223.21	368.80	105.54	221.28
sim_0a	1	–	–	rand=20	0.083	0.304	0.219	0.261	0.173
sim_1a	10	–	–	rand=20	24.207	208.453	267.132	50.045	31.358
sim_2a	$10^2$	–	–	rand=20	16.333	196.752	310.377	83.374	155.179
sim_3a	$10^3$	–	–	rand=20	16.358	199.154	341.422	87.540	185.404
sim_0b	1	+	–	rand=20	0.083	0.304	0.219	0.261	0.173
sim_1b	10	+	–	rand=20	24.207	208.453	267.132	50.045	31.358
sim_2b	$10^2$	+	–	rand=20	16.333	196.752	310.377	83.374	155.179
sim_3b	$10^3$	+	–	rand=20	16.358	199.154	341.422	87.540	185.404



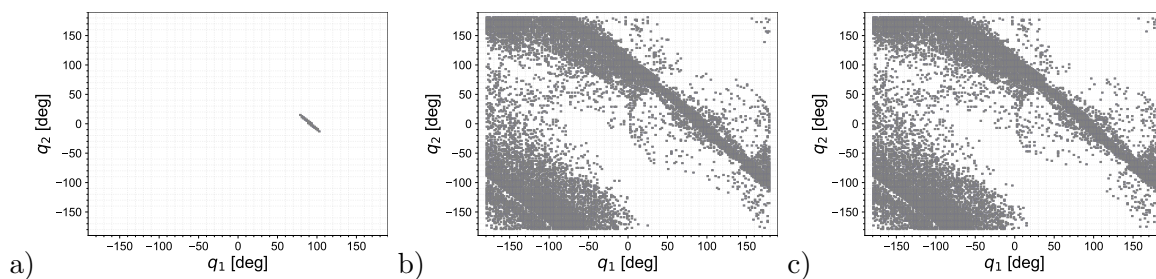
Rysunek 5.8: MCG+Energy: Pendubot, dla sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.9: MCG+Energy: Pendubot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.10: MCG+Energy: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $k_P$ , b)  $k_D$ , c)  $k_E$



Rysunek 5.11: MCG+Energy: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

### 5.2.4 Spong: Acrobot

Dodatkowe parametry badanego algorytmu względem tych zawartych w tabeli 5.2 zostały przedstawione w tabeli 5.7.

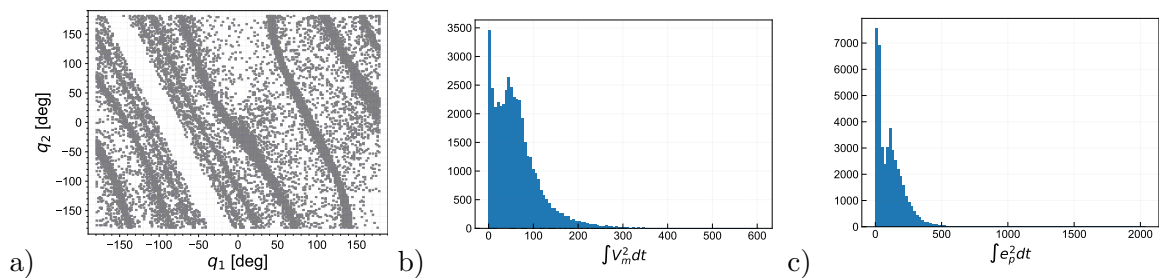
Tabela 5.7: Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach

rand	$\boxplus$	$\alpha$	$\omega$	$\xi$	absolute/relative error tolerance
50	2	$\frac{\pi}{3}$	$0 \div 50$	$0.1 \div 2.0$	$10^{-4}$

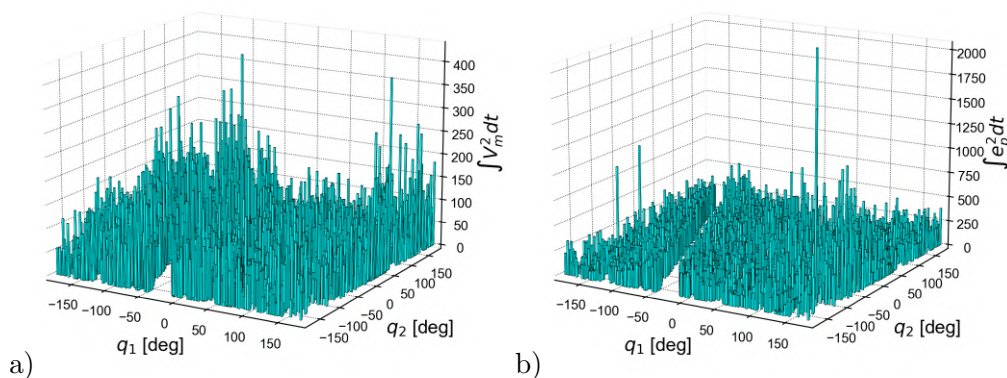
### COLLOCATED

Tabela 5.8: Wyniki symulacji: Spong: Collocated: Acrobot

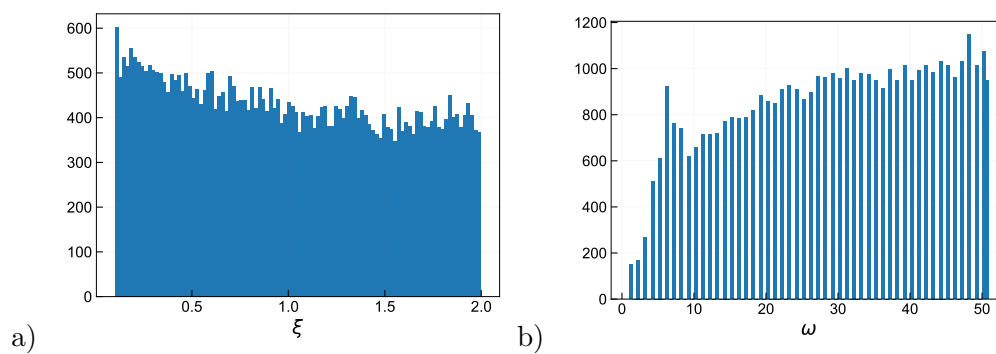
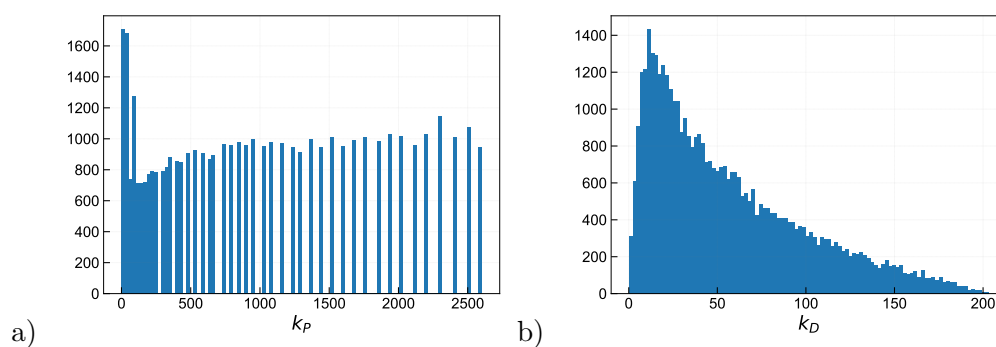
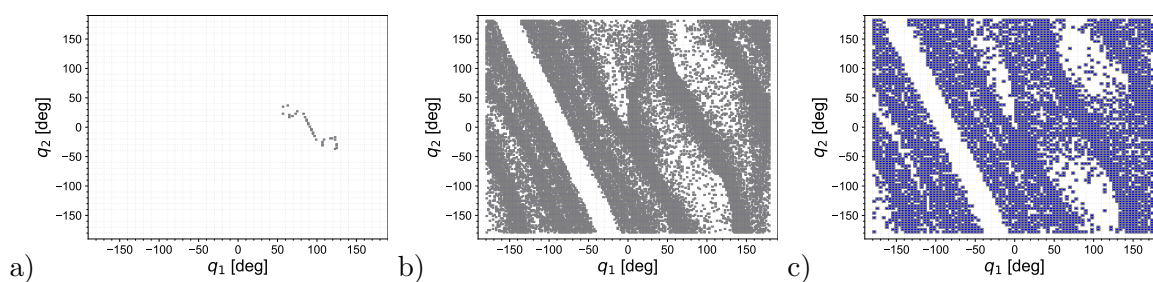
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.102	73.191	59.041	1.674	1.199
sim_1	10	–	–		27.466	163.646	94.204	67.846	35.022
sim_2	$10^2$	–	–		53.373	398.616	582.262	612.733	668.007
sim_3	$10^3$	–	–	$\boxplus = 4$	61.531	686.981	930.379	2924.615	3917.524



Rysunek 5.12: Spong - Coll: Acrobot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.13: Spong - Coll: Acrobot, sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$

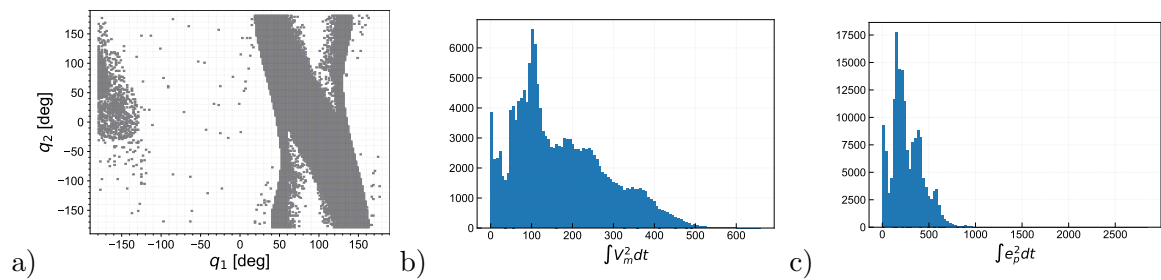
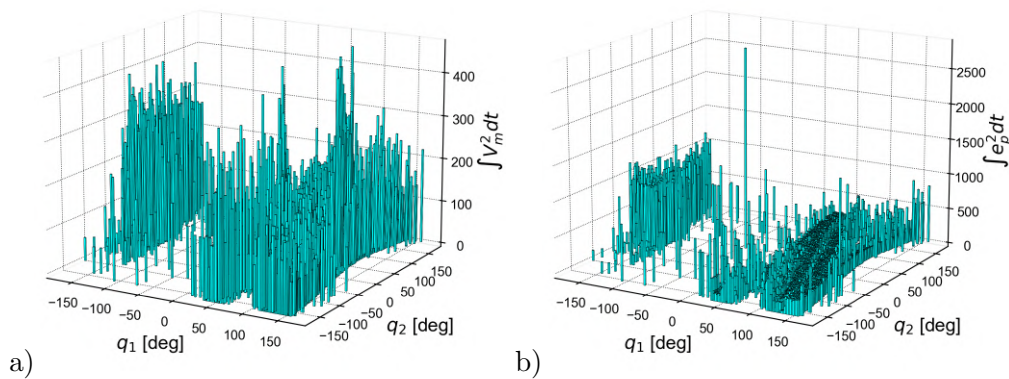
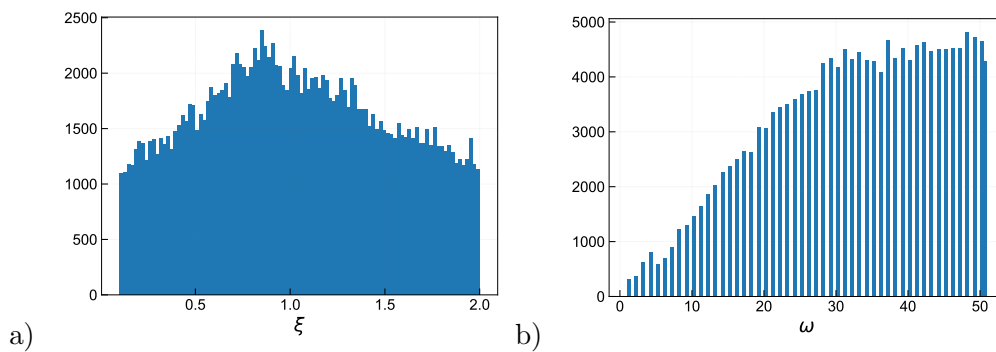
Rysunek 5.14: Spong - Coll: Acrobot, sim\_1. Histogram: a)  $\xi$ , b)  $\omega_0$ Rysunek 5.15: Spong - Coll: Acrobot, sim\_1. Histogram: a)  $k_P$ , b)  $k_D$ 

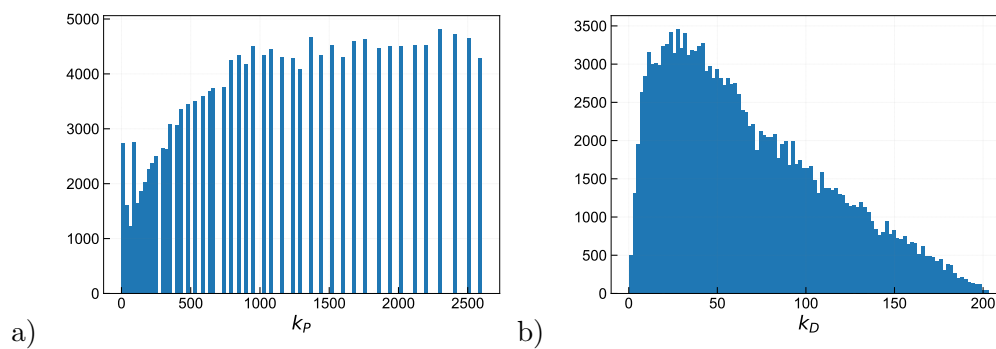
Rysunek 5.16: Spong - Coll: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

## NON-COLLOCATED

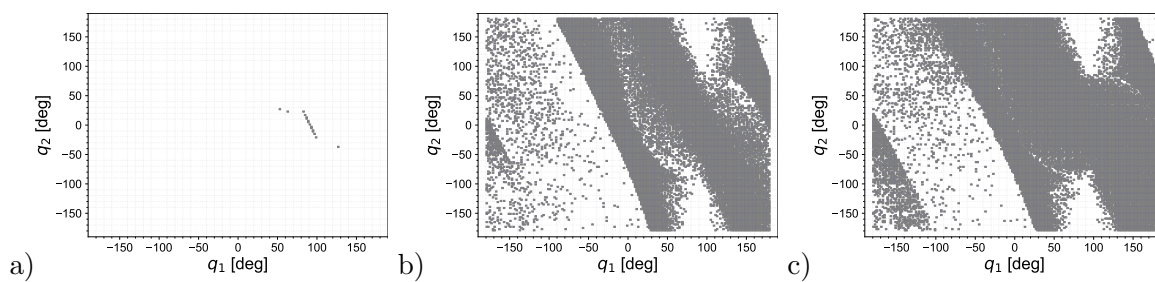
Tabela 5.9: Wyniki symulacji: Spong; NonCollocated; Acrobot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	-	-		0.05	22.28	45.36	0.70	0.87
sim_1	10	-	-		25.45	202.72	188.24	103.76	64.00
sim_2	$10^2$	-	-		43.76	852.14	1238.28	1198.33	1369.04
sim_3	$10^3$	+	-		53.95	1256.51	1684.64	4325.27	6582.93

Rysunek 5.17: Spong - NonColl: Acrobot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.18: Spong - NonColl: Acrobot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.19: Spong - NonColl: Acrobot, sim\_1. Histogram: a)  $\xi$ , b)  $\omega_0$



Rysunek 5.20: Spong - NonColl: Acrobot, sim\_1. Histogram: a)  $k_P$ , b)  $k_D$



Rysunek 5.21: Spong - NonColl: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



### 5.2.5 Spong: Pendubot

Dodatkowe parametry badanego algorytmu względem tych zawartych w tabeli 5.2 zostały przedstawione w tabeli 5.10.

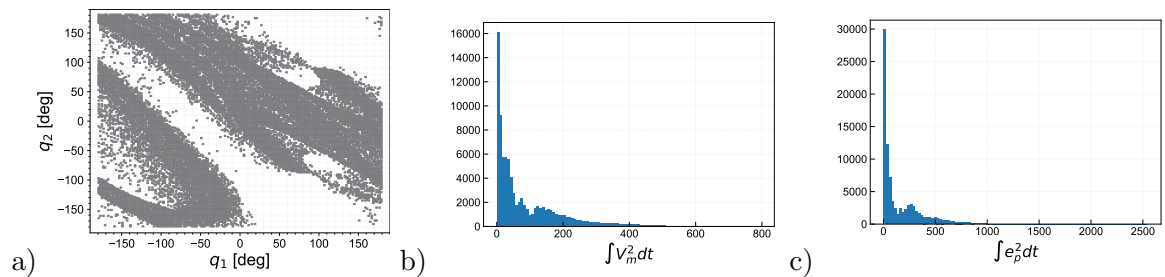
Tabela 5.10: Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach

rand	$\omega$	$\xi$
50	0 ÷ 50	0.1 ÷ 2.0

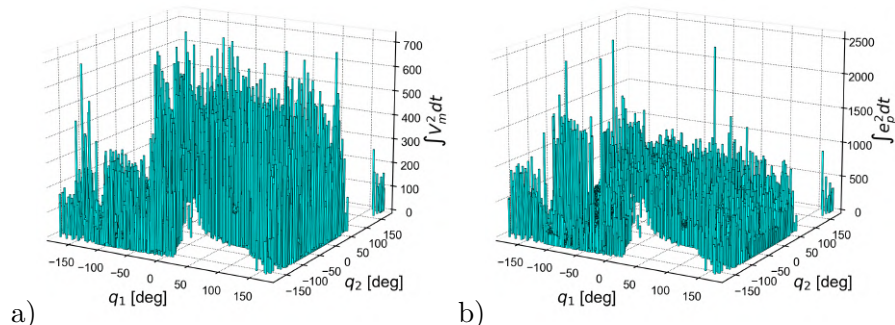
### COLLOCATED

Tabela 5.11: Wyniki symulacji: Spong: Collocated: Pendubot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.08	0.30	0.22	0.23	0.17
sim_1	10	–	–		44.78	247.83	201.13	131.63	104.61
sim_2	$10^2$	–	–		59.59	360.39	350.07	1319.98	1386.47
sim_3	$10^3$	–	–		60.37	427.18	500.73	3062.79	5266.35

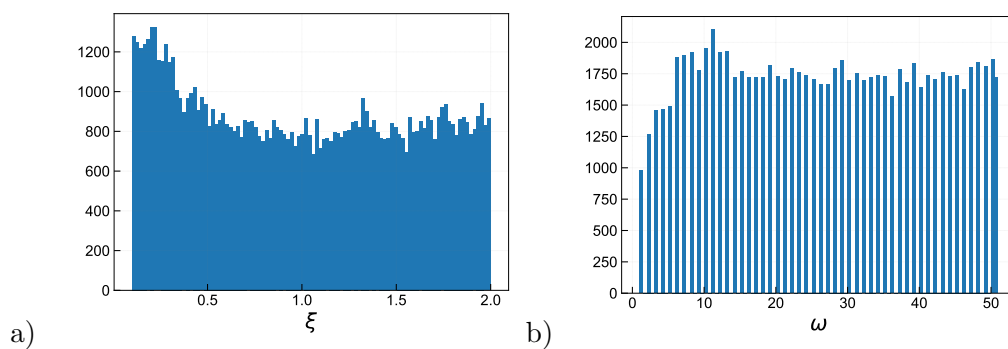
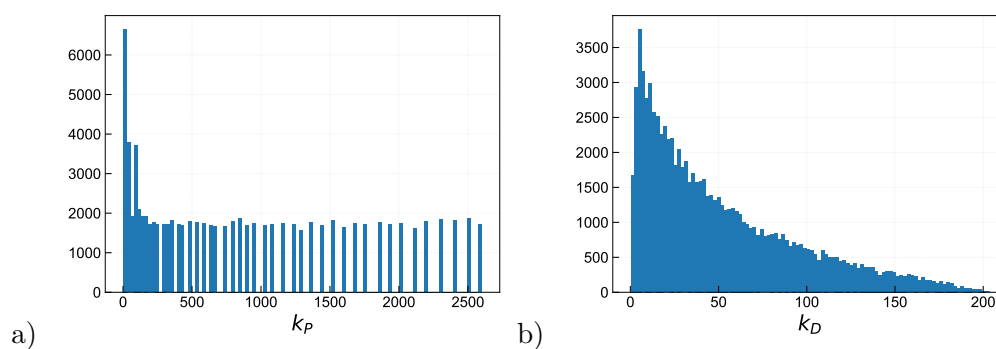
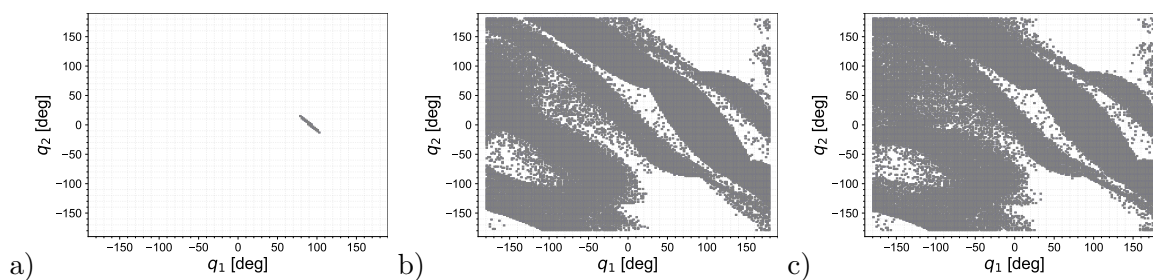


Rysunek 5.22: Spong - Coll: Pendubot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.23: Spong - Coll: Pendubot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$



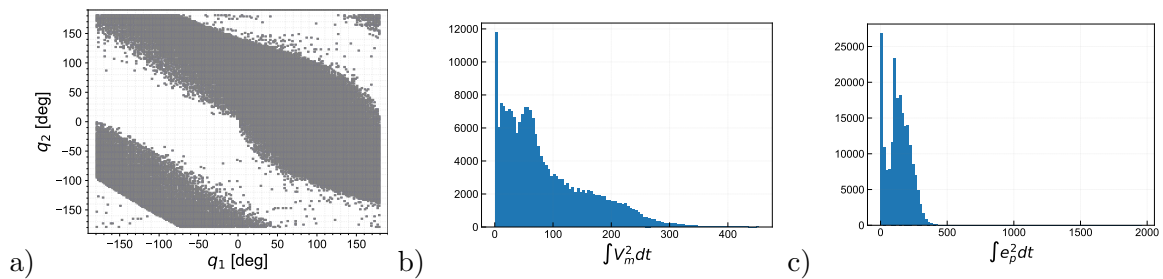
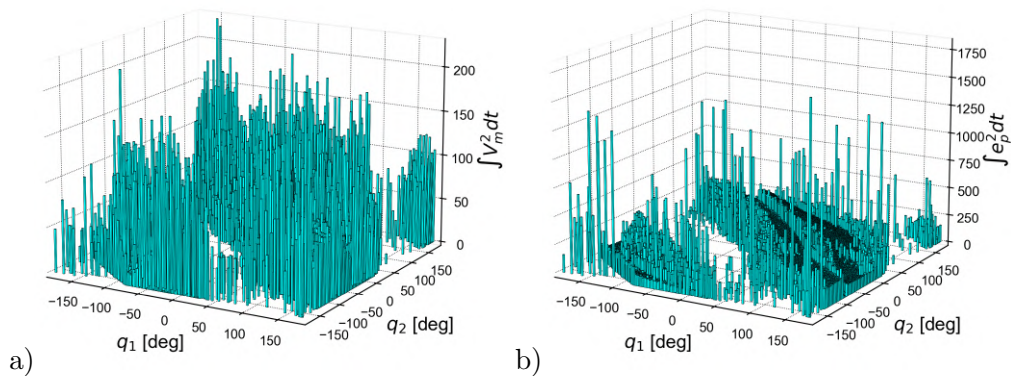
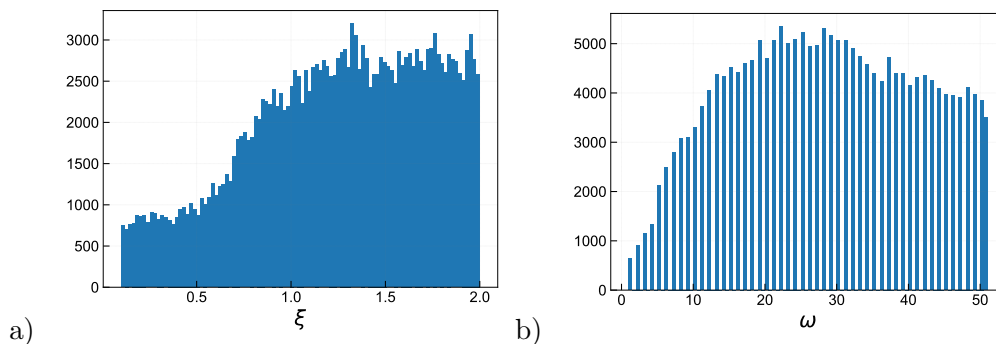
Rysunek 5.24: Spong - Coll: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $\xi$ , b)  $\omega_0$ Rysunek 5.25: Spong - Coll: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $k_P$ , b)  $k_D$ 

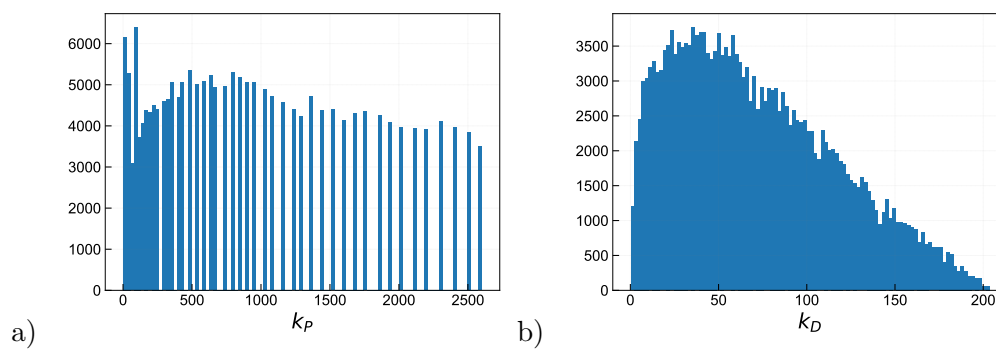
Rysunek 5.26: Spong - Coll: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

## NON-COLLOCATED

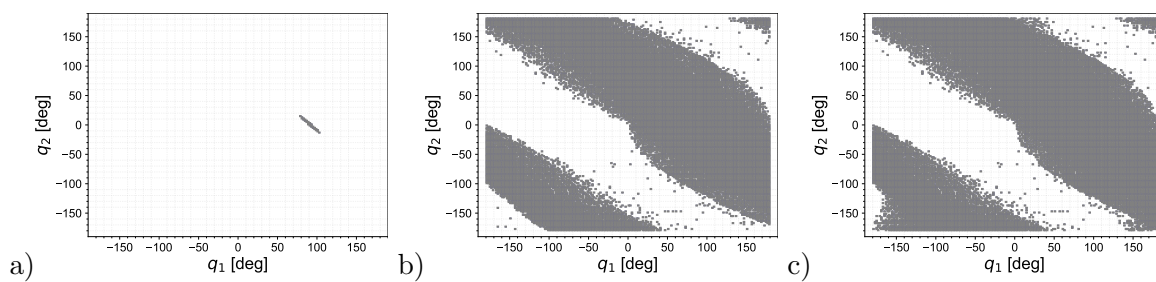
Tabela 5.12: Wyniki symulacji: Spong: Non-Collocated: Pendubot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.08	0.30	0.22	0.23	0.17
sim_1	10	–	–		51.26	121.68	76.52	49.62	29.05
sim_2	$10^2$	–	–		54.90	171.19	139.50	536.93	572.98
sim_3	$10^3$	–	–		57.90	206.89	252.70	1664.53	3366.35

Rysunek 5.27: Spong - NonColl: Pendubot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.28: Spong - NonColl: Pendubot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.29: Spong - Non-Coll: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $\xi$ , b)  $\omega_0$



Rysunek 5.30: Spong - NonColl: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $k_P$ , b)  $k_D$

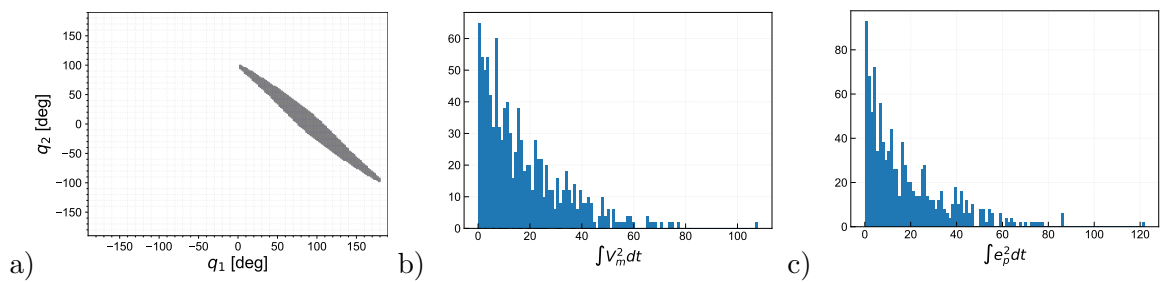
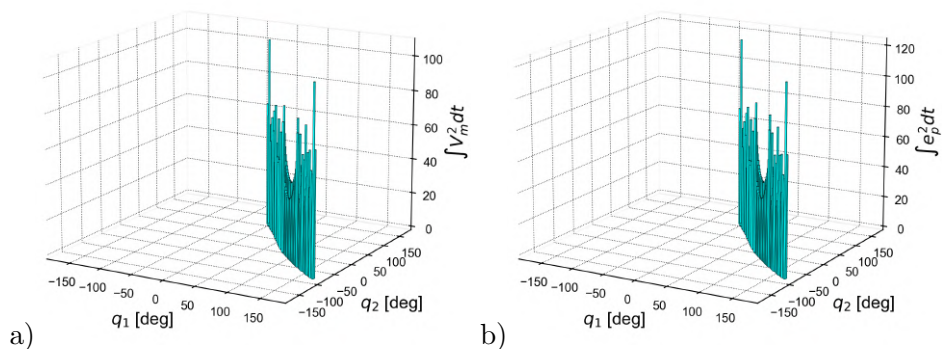
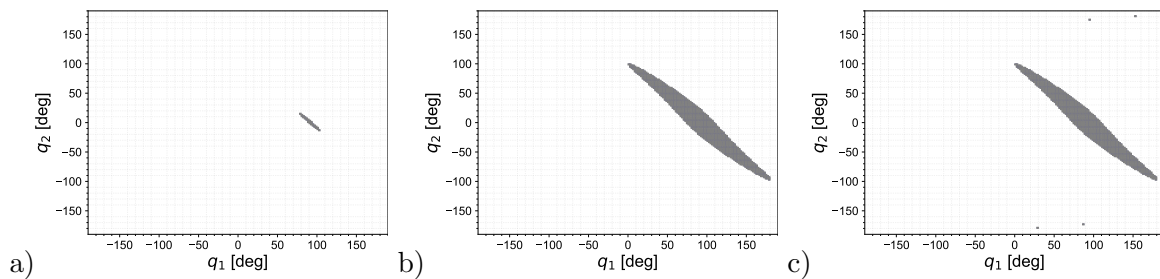


Rysunek 5.31: Spong - Non-Collocated: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

## 5.2.6 QPZ+LQR: Pendubot

Tabela 5.13: Wyniki symulacji: QPZ+LQR: Pendubot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\overline{J_e}$	$\sigma(J_e)$	$\overline{J_m}$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.08	0.28	0.19	0.28	0.17
sim_1	10	–	–		3.22	18.29	17.92	17.74	16.05
sim_2	$10^2$	–	–		3.75	22.40	21.52	22.28	20.09
sim_3	$10^3$	–	–		3.76	73.69	894.17	65.41	751.93

Rysunek 5.32: QPZ+LQR: Pendubot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.33: QPZ+LQR: Pendubot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ 

Rysunek 5.34: QPZ+LQR: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

### 5.2.7 QPZ+Energy: Pendubot

Dodatkowe parametry badanego algorytmu względem tych zawartych w tabeli 5.2 zostały przedstawione w tabeli 5.14.

Tabela 5.14: Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: QPZ+Energy: Pendubot

$k_P$	$k_D$	$k_E$	rand	$\boxplus$
0.1 ÷ 1	0.1 ÷ 1	0.01 ÷ 0.1	50	2

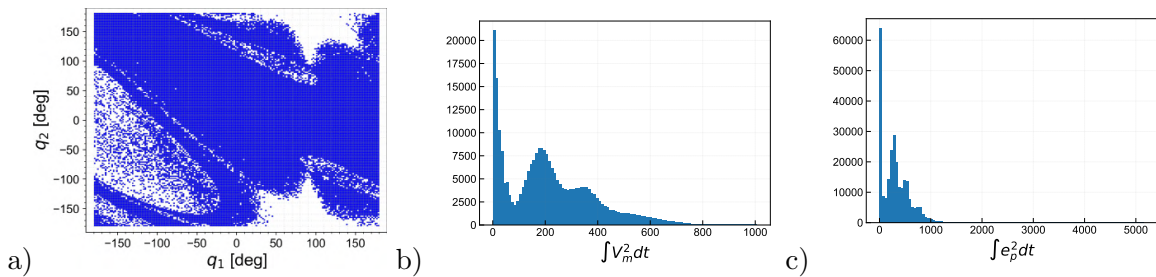
Tabela 5.15: Wyniki symulacji: QPZ+Energy – Pendubot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.08	0.28	0.19	0.28	0.17
sim_1	10	–	–		77.79	341.09	440.38	172.35	97.12
sim_1a	10	–	–	a	78.40	352.96	462.46	173.46	97.20
sim_2	$10^2$	–	–	a, b	61.69	952.76	2126.36	1153.80	1672.18
sim_3	$10^3$	–	–	a	62.83	981.32	2164.67	10715.10	98040.06

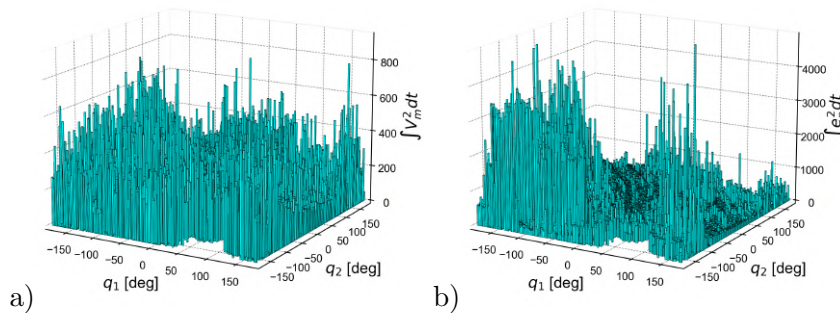
Zebrane *Uwagi* zostały przedstawione w tabeli 5.16

Tabela 5.16: QPZ+Energy – Pendubot – Uwagi do tabeli 5.15

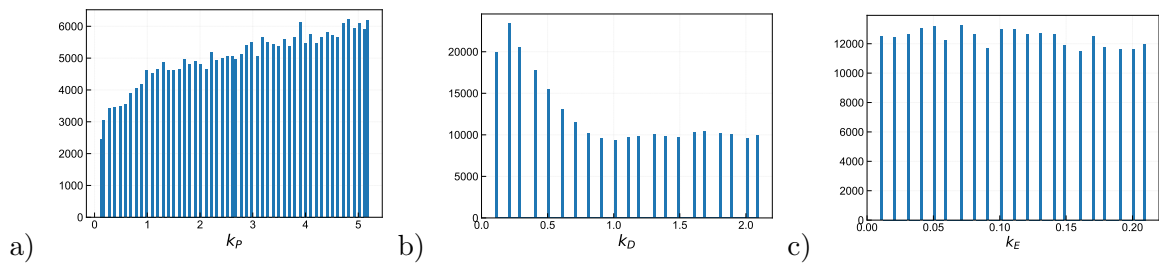
a	$\boxplus = 4^\circ$
b	$\text{reitol} = 10^{-5}$ , $T_{\text{sim}} > T_{\text{crit}}$ , brak wyników



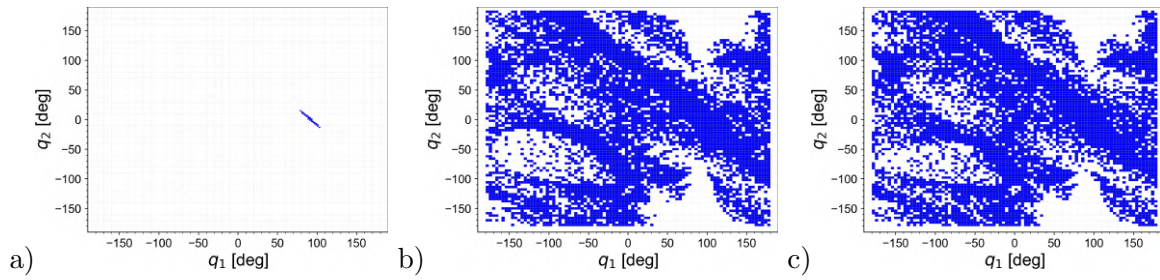
Rysunek 5.35: QPZ+Energy: Pendubot, dla sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.36: QPZ+Energy: Pendubot, sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.37: QPZ+Energy: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $k_P$ , b)  $k_D$ , c)  $k_E$

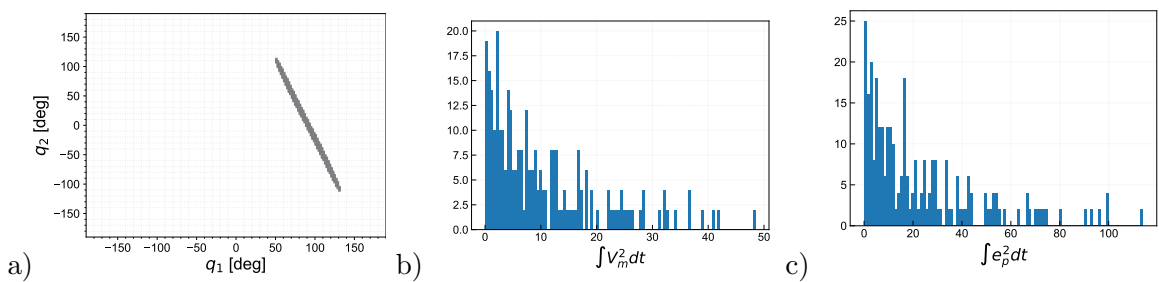
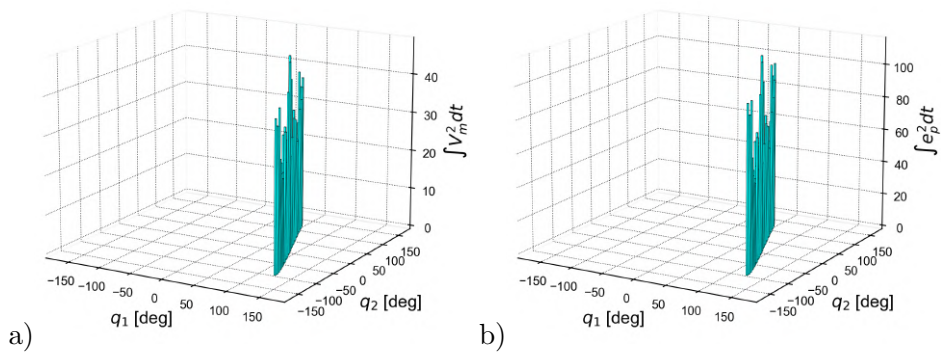
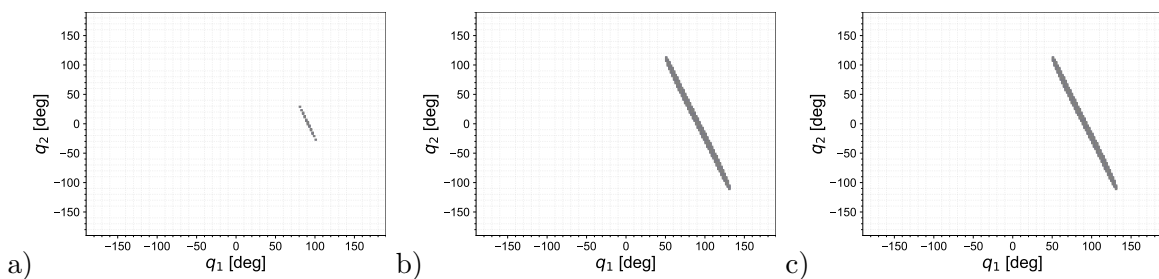


Rysunek 5.38: QPZ+Energy: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

## 5.2.8 QPZ+LQR: Acrobot

Tabela 5.17: Wyniki symulacji: QPZ+LQR: Acrobot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.06	0.51	0.41	0.39	0.31
sim_1	10	–	–		1.01	23.55	24.41	10.49	10.21
sim_2	$10^2$	–	–		1.01	23.55	24.41	10.49	10.21
sim_3	$10^3$	–	–		1.01	23.55	24.41	10.49	10.21

Rysunek 5.39: QPZ+LQR: Acrobot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.40: QPZ+LQR: Acrobot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ 

Rysunek 5.41: QPZ+LQR: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



### 5.2.9 PN-QP: Acrobot

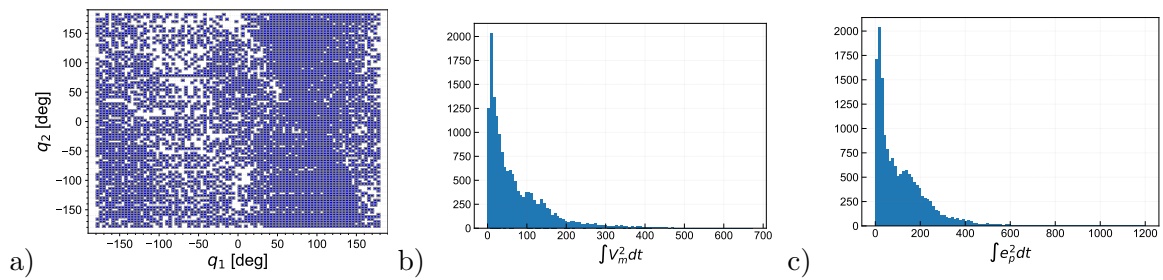
Dodatkowe parametry badanego algorytmu względem tych zawartych w tabeli 5.2 zostały przedstawione w tabeli 5.18.

Tabela 5.18: Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: PN-QP: Acrobot

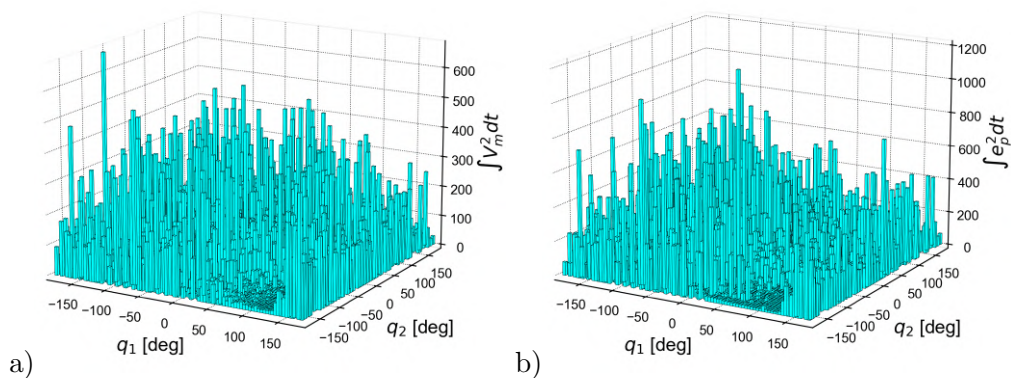
$\alpha_k$	$k_1$	$k_2$	rand	$\boxplus$	absolute/relative error tolerance
$0 \div \frac{\pi}{2}$	$\sin \alpha_k$	$\cos \alpha_k$	50	4	$10^{-4}$

Tabela 5.19: Wyniki symulacji: PN-QP: Acrobot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.09	0.58	0.44	0.44	0.31
sim_1	10	–	–		69.53	135.51	113.93	87.93	75.04
sim_2	$10^2$	–	–		80.43	268.56	344.99	1580.13	3165.13
sim_3	$10^3$	–	–		76.78	402.96	727.12	21210.39	76469.90

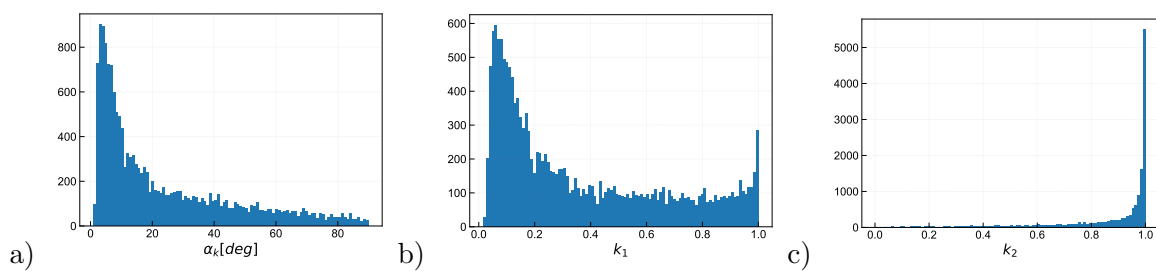


Rysunek 5.42: PN-QP: Acrobot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$

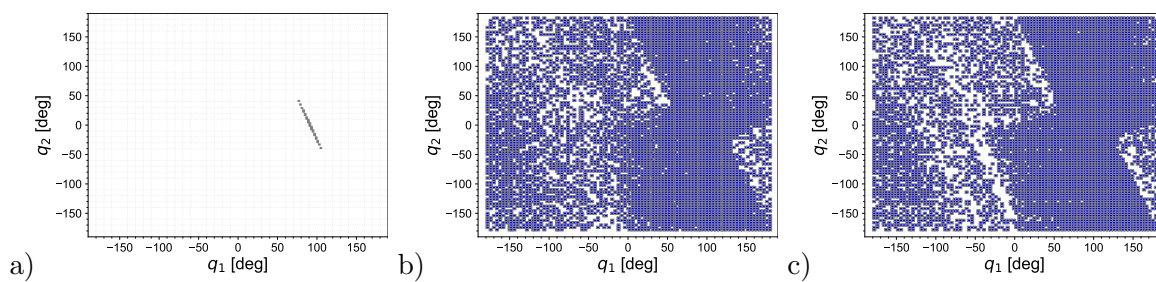


Rysunek 5.43: PN-QP: Acrobot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$





Rysunek 5.44: PN-QP: Acrobot, sim\_1. Histogram: a)  $\alpha_k$  b)  $k_1$ , c)  $k_2$

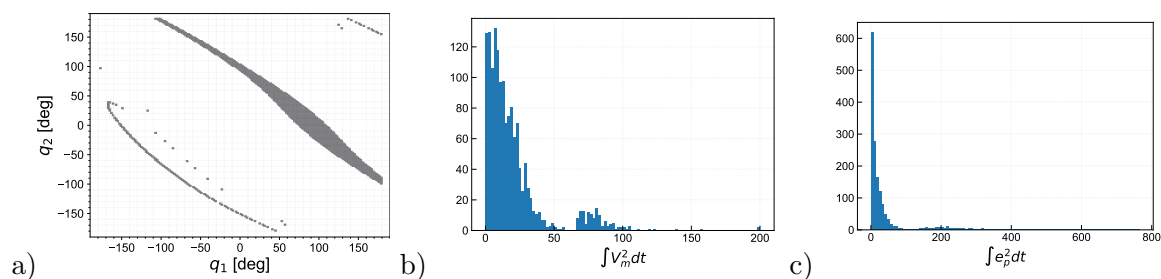
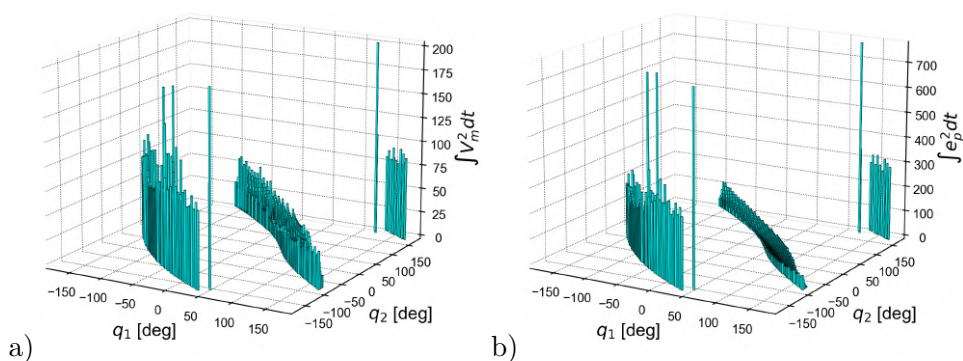
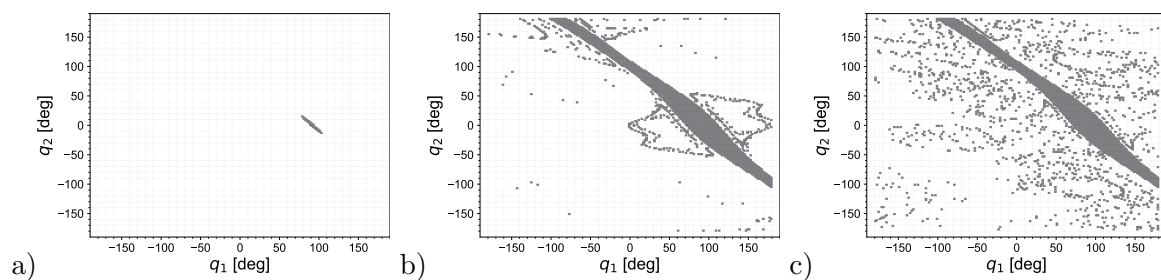


Rysunek 5.45: PN-QP: Acrobot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

## 5.2.10 PN-QP+LQR: Pendubot

Tabela 5.20: Wyniki symulacji: PN-QP+LQR: Pendubot

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.08	0.27	0.18	0.24	0.15
sim_1	10	–	–		4.71	34.92	70.49	20.02	22.83
sim_2	$10^2$	–	–		7.58	581.35	1319.57	1190.99	2643.30
sim_3	$10^3$	–	–		10.35	8920.58	19016.65	76078.24	142710.28

Rysunek 5.46: PN-QP+LQR: Pendubot, sim\_1. a) Obszar zbieżności. Histogram: b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 5.47: PN-QP+LQR: Pendubot, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ 

Rysunek 5.48: PN-QP+LQR: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

### 5.2.11 PN-QP: Pendubot

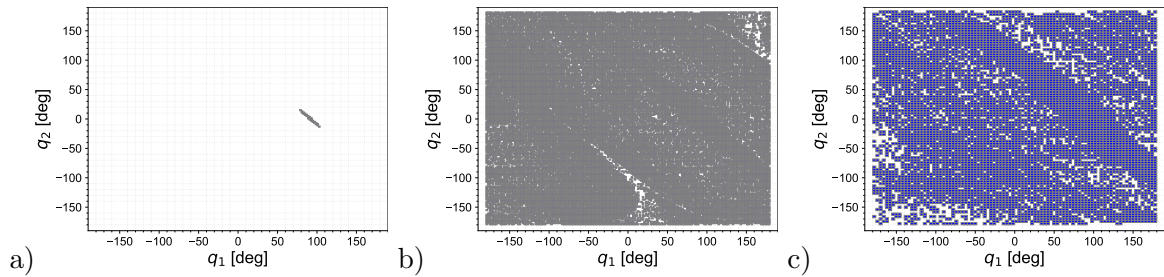
Dodatkowe parametry badanego algorytmu względem tych zawartych w tabeli 5.2 zostały przedstawione w tabeli 5.21.

Tabela 5.21: Parametry i ich zakresy użyte w symulacjach: PN-QP: Pendubot

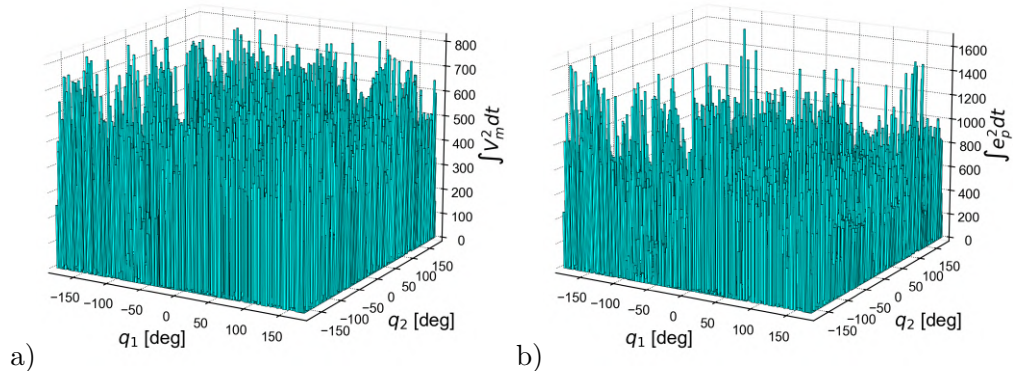
$\omega_0$	$\epsilon$	rand	$\boxplus$	absolute/relative error tolerance
0 ÷ 50	$10^{-4}$	50	4	$10^{-4}$

Tabela 5.22: Wyniki symulacji: PN-QP: Pendubot

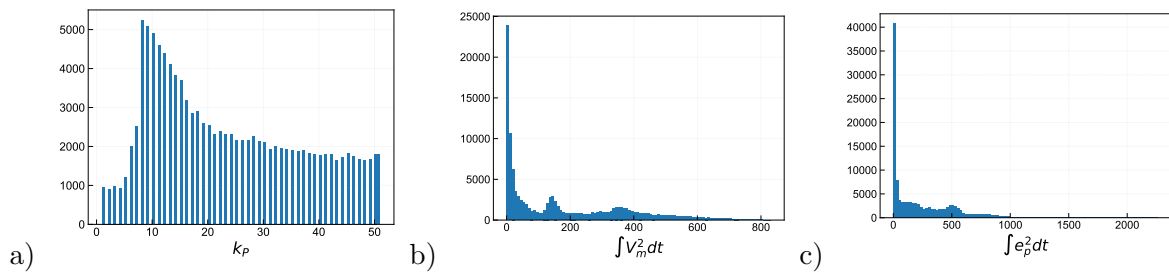
Nazwa	$V_{\max}$	$\theta_{1_{\text{ref}}}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
			$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	$0 - \pi$	-	-	$\boxplus = 2$	0.08	0.27	0.18	0.24	0.15
sim_1	10	$0 - \pi$	-	-	$\boxplus = 2$	83.76	280.80	235.79	211.40	151.76
sim_2	$10^2$	$0 - \pi$	+	+		80.81	915.79	943.82	10369.6	10080.6
sim_1a	10	$\frac{\pi}{2}$	-	-	rand=20	21.85	325.34	341.53	238.32	219.59
sim_1b	10	$\frac{\pi}{3}$	-	-	rand=20	50.14	315.66	290.58	233.94	187.13
sim_1c	10	$\frac{2\pi}{3}$	-	-	rand=20	43.05	422.94	287.84	312.46	186.00
sim_a	1	$\frac{\pi}{2}$	-	-		0.10	0.38	0.12	0.30	0.11
sim_b	10	$\frac{\pi}{2}$	-	-		35.25	349.07	338.59	254.89	216.40
sim_c	$10^2$	$\frac{\pi}{2}$	-	-		42.00	817.09	1294.65	12722.3	15732.2
sim_d	10	$0 - \pi$	-	-	rand=100	97.89	254.16	220.13	191.90	135.05



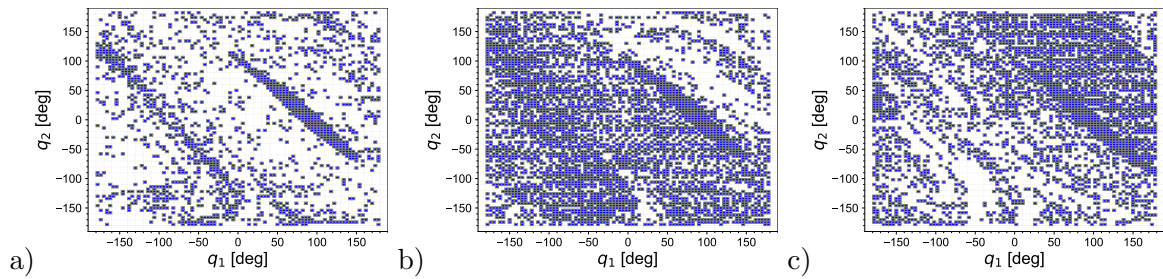
Rysunek 5.49: PN-QP: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_1, c) sim\_2



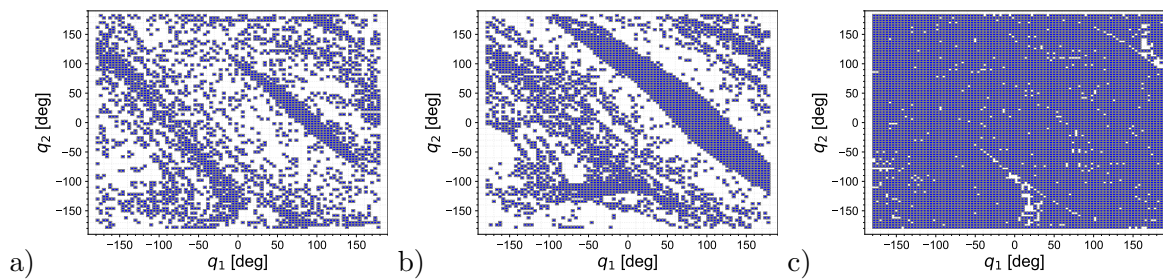
Rysunek 5.50: PN-QP: Pendubot, sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.51: PN-QP: Pendubot, sim\_1. Histogram: a)  $\omega$  b)  $\int V_m^2 dt$ , c)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 5.52: PN-QP: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_1a, b) sim\_1b, c) sim\_1c



Rysunek 5.53: PN-QP: Pendubot. Obszar zbieżności: a) sim\_b, b) sim\_c, c) sim\_d

## 5.3 Wnioski

Wnioski dotyczące przeanalizowanych symulacji można podzielić na dwie grupy.

Pierwsza dotyczy kwestii stricte implementacyjnych. Dzięki zastosowaniu języka *C++* zamiast środowiska *Matlaba* otrzymanie wyników symulacji możliwe jest w wymiennie krótszym czasie. Dla wielu analizowanych przypadków bazujących na algorytmie PN-QP zaobserwowano taką własność, że czas potrzebny do wyliczenia jednej pętli algorytmu, przy użyciu jednakowych parametrów algorytmów całkowania numerycznego, w środowisku *Matlab* trwa ok. 17 minut, podczas gdy skompilowany kod źródłowy w *C++* wykonywany jest w przybliżeniu w czasie 1 sekundy. Należy podkreślić, że choć ta informacja wydaje się mieć tylko znaczenie techniczne, to jednak warunkuje możliwość przeprowadzenia testów symulacyjnych. Wykonując w trakcie jednej próby około 500 tys. do miliona pętli symulacji, łączny czas obliczeń w *Matlabie* to około 16 lat, podczas gdy zrównoleżone obliczenia w *C++*, tylko na 1 komputerze zajmują około doby. Dzieląc zakres poszukiwań na wiele wątków i kilka komputerów, czas ten skracamy wielokrotnie. Podobne zwiększenie efektywności obliczeń jest trudne do uzyskania w środowisku *Matlab*, chociażby ze względu na fakt, że uruchomienie wielu instancji tej aplikacji wykorzystuje znaczną ilość pamięci RAM a czas trwania elementarnej symulacji nie ulega skróceniu.

To samo dotyczy późniejszej obróbki danych. Próba numerycznego przeanalizowania pół miliona wyników, np. poprzez wyrysowanie wykresu, który jest wynikiem przeanalizowania macierzy składającej się z setek tysięcy wierszy i kilkunastu kolumn w *Matlabie* trwa około 20 minut (komputer klasy PC, procesor XEON, 12 GB RAM), podczas gdy *Python* z pakietem *Pandas* potrzebuje na ten sam cel około 5-10 sekund.

Druga grupa wniosków dotyczy konkretnie wpływu zastosowanego prawa sterowania na zachowanie się rozpatrywanego robota o 2 DOF i bardziej szczegółowo zostanie przedstawiona w poniższych rozdziałach.

Dokonując zgrubnej analizy prezentowanych wyników można zauważyć, że zwiększanie dostępnego zakresu sygnału wejściowego, bądź narzucanie dodatkowych ograniczeń, nie zawsze zmienia liczbę dostępnych rozwiązań.

Ponadto, analizując histogramy parametrów regulatorów można ocenić trudność strojenia algorytmów i wstępnie oszacować wrażliwość algorytmu na dobór parametrów. Duży rozrzut parametrów utrudnia wybór odpowiedniego zestawu nastaw, podczas gdy węższy zakres zmian skupiony wokół pewnej stałej sugeruje mniej złożony proces doboru wzmocnień.

## PENDUBOT

Tabela 5.23 przedstawia zbiorcze porównanie różnych algorytmów podlegających weryfikacji symulacyjnej, dla robota typu Pendubot. W tabeli przedstawiono dane dla warunków nominalnych oznaczanych każdorazowo jako *sim\_1*.

Na podstawie podanych wskaźników można wysnuć wniosek, że zastosowanie transformacji zmiennych stanu pozytywnie wpływa na zwiększenie liczby dopuszczalnych warunków początkowych, tj. poszerzenie zakresu zbieżności. Dla tych samych strategii sterowania, tzn. zarówno zawierających sam regulator  $u_{stab}$ , czy dodatkowo sterownik energetyczny, liczba warunków początkowych zakończonych sukcesem wzrasta dwukrotnie. Największy natomiast przyrost wyników obserwujemy przy zastosowaniu formy normalnej, oznaczonej skrótem PN-QP.

Parametry przedstawiające energochłonność procesu sterowania robota wskazują na wzrost tego kosztu co można wytłumaczyć faktem, że większy obszar zbieżności oznacza większy zakres kątów początkowych z których możemy ustabilizować robota, a co bezpośrednio się z tym wiąże, odległość kątowa jaką muszą przebyć złącza robota wzrasta.

Poniżej przedstawiono uszczegółowienie wniosków z podziałem na poszczególne analizowane algorytmy.



Tabela 5.23: Porównanie algorytmów – Pendubot, dla przypadków `sim_1`

Algorytm	Area[%]	$\overline{J_e}$	$\overline{J_m}$
MCG + LQR	1.72	10.37	9.60
QPZ + LQR	3.22	18.29	17.74
PN-QP + LQR	4.71	34.92	20.02
MCG + Energy	36.97	211.65	52.16
QPZ + Energy	77.79	341.09	172.35
Collocated	44.78	247.83	131.63
Non-Collocated	51.26	121.68	49.62
PN-QP	83.76	280.80	211.40

## MCG

Analizując obszary zbieżności podane w tabeli 5.4 możemy zauważyć, że zmiana wartości parametru określającego maksymalną wartość modułu napięcia wejściowego silnika nie zmienia znacząco liczby dostępnych rozwiązań. W przypadku  $V_{\max} \geq 100V$  zmiany nie są wręcz obserwowalne, nawet mimo wydłużenia czasu trwania symulacji. Podobnie nałożenie bądź usunięcie ograniczeń na maksymalną dozwoloną liczbę obrotów w złączach nie zmienia dostępnej liczby rozwiązań. Potwierdza się zatem znana własność, że użycie sterownika uwzględniającego tylko stabilizator  $u_{\text{stab}}$  nie gwarantuje uzyskania celu jakim jest stabilizacja w punkcie equilibrium dla szerokiego spektrum warunków początkowych. W prezentowanym algorytmie liczba dostępnych rozwiązań nie rośnie wraz ze wzrostem czasu symulacji  $T_{\text{sim}}$ . Wydłużenie 5-krotnie  $T_{\text{sim}}$  nie wpłynęło na liczbę dostępnych rozwiązań (przypadek oznaczony jako `sim_8`). Na wykresach opisujących zależności  $\int V_m^2 dt$  i  $\int \|e_p\|^2 dt$  możemy zauważyć, że ruch robota w kierunku pozycji docelowej charakteryzuje się niewielką energochłonnością, szczególnie w porównaniu z innymi opisywanymi w pracy algorytmami, co po części wynika z ograniczenia obszaru zbieżności, który obejmuje stosunkowo proste przypadki.

## MCG - ENERGY

Zastosowanie dodatkowego sterownika typu *swing-up* zwiększyło ponad 20-krotnie liczbę dostępnych rozwiązań dla nominalnej wartości napięcia zasilającego  $V_{\max}$ , względem sterownika zawierającego sam regulator  $u_{\text{stab}}$ . Analizując tabelę 5.6 interesującym jest zaobserwowana tendencja, że zwiększanie dostępnego zakresu sygnału wejściowego, nie zwiększa liczby dostępnych rozwiązań, a wręcz je ogranicza. Wynika to z tego, że zwiększając dostępny sygnał sterujący dla sterownika typu  $u_{\text{swing}}$ , ograniczamy jednocześnie możliwość przyciągania trajektorii stanu przez sterownik  $u_{\text{stab}}$  m.in. z uwagi na wzrost prędkości. Należy bowiem zauważyć, że dla zastosowanego sterownika zbiór prędkości, które leżą w obszarze zbieżności jest ograniczony. Na zbiór dopuszczalnych prędkości w otoczeniu punktu zadanego można częściowo wpłynąć poprzez zmianę wzmocnień sterownika  $u_{\text{stab}}$ . Może to zwiększyć dostępną liczbę rozwiązań, ale kosztem naruszenia warunków symulacji przyjętych w pracy w celu uzyskania możliwie obiektywnego porównania właściwości różnych algorytmów. Rozkład wartości nastaw regulatora  $u_{\text{swing}}$  jest stosunkowo równomierny, przez co trudno wskazać na zakresy dominujące, co w konsekwencji utrudnia ich wybór. Podobnie jak poprzednio, nałożenie ograniczeń na maksymalną dozwoloną liczbę obrotów w złączach nie wpływa na liczbę dostępnych rozwiązań.

## SPONG

Analizując oba podejścia oparte na algorytmie Sponga (tabele 5.11 i 5.12) można zauważyć podobną liczbę dostępnych rozwiązań, w szczególności dla wyższych napięć zasilających. W warunkach, które były przedmiotem bardziej szczegółowej analizy, tzn. gdy  $V_{\max} = 10V$ , metoda *Non-Collocated* zapewnia większą liczbę rozwiązań, przy jednoczesnym kilkukrotnie mniejszym koszcie energetycznym. Oznacza to, że sterowanie z punktu widzenia nienapędzanego złącza  $q_2$ , czyli metody *Non-Collocated* jest korzystniejsze, zarówno z uwagi na aspekt energetyczny, jak również uzyskanie bardziej zwartej zbioru dopuszczalnych warunków początkowych.

## QPZ

Wyrażenie dynamiki robota w *QPZ* zwiększa ponad dwukrotnie zakres dostępnych rozwiązań (tabela 5.13), w stosunku do stosowania naturalnych zmiennych konfiguracyjnych. Jednocześnie rośnie średnia energochłonność podejścia co należy tłumaczyć większą liczbą prób udanych. Energochłonność wynikająca z analizy minimalnych wartości wskaźników energetycznych pozostaje na zbliżonym poziomie, z uwzględnieniem faktu, że podejście *QPZ* generuje więcej nowych rozwiązań. Zwiększenie dostępnego sygnału sterującego powoduje dwukrotne zwiększenie liczby rozwiązań, lecz również w tym przypadku osiągamy ich kres, ograniczony właściwościami regulatora  $u_{\text{stab}}$ .

## QPZ+ENERGY

Zastosowanie sterownika  $u_{\text{swing}}$  spowodowało ponad 24-krotny wzrost liczby rozwiązań w stosunku do przypadku użycia samego regulatora  $u_{\text{stab}}$ , oraz ponad 2-krotny wzrost w stosunku do sterownika hybrydowego wykorzystującego pompowanie energii z rozdziału 4.3.4, wyrażonego w zmiennych naturalnych. Zauważalny jest również ponad 3-krotny wzrost energochłonności tegoż podejścia, co po części tłumaczyć należy zwiększeniem liczby warunków początkowych gwarantujących sukces. Dane z tabeli 5.15 wskazują na podobne zjawisko jak dla innych algorytmów, polegające na niezwiększaniu się liczby dostępnych rozwiązań wraz ze wzrostem dostępnego zakresu sygnału wejściowego.

## PN-QP + LQR

Tabela 5.20 przedstawia wyniki stosowania transformacji zmiennych stanu oraz przekształcenia do formy normalnej rozważanej dynamiki obiektu oraz związanej z nim strategii sterowania. W stosunku do zmiennych naturalnych obserwujemy ponad 3-krotny wzrost liczby dostępnych warunków początkowych wieńczących się sukcesem, natomiast względem *QPZ* wzrost ten oscyluje w okolicach dwudziestu procent, dla przypadku nominalnego. Zauważalna jest natomiast tendencja do zwiększania się liczby dostępnych rozwiązań wraz ze wzrostem zakresu sygnału wejściowego. Okupione jest to jednakże znaczącym skokiem obu wskaźników energetycznych, co umniejsza zasadność stosowania tej metody przy wyższych napięciach zasilających (sygnale sterującym).

## PN-QP

W tabeli 5.22 przedstawiono wyniki symulacyjne dla różnych wartości maksymalnego napięcia zasilającego, jak również różnej wartości kąta  $\theta_{1,\text{ref}}$ .

W pracy [46] wykazano, że przekształcenie (4.171) nie jest dobrze określone dla żadnego z punktów równowagi. Prowadzi to do zasadniczego problemu jakim jest niemożność zastosowania rozważanej metody do stabilizacji robota w jakimkolwiek punkcie równowagi. W rozdziale 4.4.1 pokazano, że w punkcie  $(q_1, q_2) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  nie istnieje przekształcenie zmiennych stanu (4.171), jak również zanika dynamika zerowa. Z tego powodu użyto sterownika hybrydowego, który dzięki regulatorowi  $u_{\text{stab}}$  pozwala na stabilizację układu w punkcie równowagi.

Prowadząc wstępne analizy i badania symulacyjne uznano, że wartość kąta  $\theta_{1_{ref}}$  będącego referencyjną wartością nowego kąta  $\theta_1$ , winna wynosić  $\frac{\pi}{2}$ , jako wartość odpowiadająca pozycji wyprostowanej dla pierwszego złącza. Jednak z uwagi na to, że sterownik  $u_{swing}$  nie zapewnia stabilizacji, autor tej rozprawy uznał, że założenie stałej wartości  $\theta_{1_{ref}}$  występującej w funkcji wyjścia  $h$  jest zbyt ograniczające. Zastosowano więc podejście polegające na zmianie wartości referencyjnej kąta  $\theta_{1_{ref}}$ , mając na uwadze, że zerowanie się funkcji wyjścia  $h$  nie prowadzi do osiągnięcia pożądanego stanu równowagi, a jedynie stanowi sposób na wprowadzenie energii do układu, tj. rozkołysanie robota rozpoczynającego swój ruch z różnych pozycji początkowych. Podobny efekt obserwujemy przy zastosowaniu rozważanego w rozdziale 4.3.4 algorytmu energetycznego Sponga [21].

Zmieniając wartości  $\theta_{1_{ref}}$  otrzymujemy różne obszary zbieżności.

W jednej z prób, określonej symbolem `sim_d` dokonano ponadto zmiany kąta  $\theta_{1_{ref}}$  polegającej na losowym przeszukiwaniu zbioru  $[0, \pi]$ , celem maksymalizacji obszaru zbieżności rozpatrywanego algorytmu. Podczas tej próby zwiększono liczbę zmian parametrów  $\omega_0$  oraz  $\theta_{1_{ref}}$  do wartości  $rand = 100$ . W wyniku otrzymano obszar zbieżności hybrydowego sterownika pokrywający niemalże całą przestrzeń konfiguracyjną, co oznacza, że stabilizacja w pozycji zadanej będzie możliwa niemal dla dowolnej wartości kątów początkowych. Należy też zauważyć, że dla stosunkowo nielicznych przypadków negatywnych oznaczonych na rys. 5.52c) przez komórki białe można oczekiwać znalezienia takich wartości parametrów, dla których stabilizacja będzie możliwa. Wymaga to jednak zwiększenia liczby prób lub zmiany zakresu wybieranych parametrów.

## ACROBOT

Tabela 5.24 przedstawia zbiorcze porównanie różnych algorytmów podlegających weryfikacji symulacyjnej, dla robota typu Acrobot. W tabeli przedstawiono dane dla warunków nominalnych oznaczanych każdorazowo jako `sim_1`.

Tabela 5.24: Porównanie algorytmów – Acrobot, dla przypadków `sim_1`

Algorytm	Area[%]	$\bar{J}_e$	$\bar{J}_m$
MCG + LQR	0.42	12.44	6.87
QPZ + LQR	1.01	23.55	10.49
Collocated	27.47	163.65	67.85
Non-Collocated	25.45	202.72	103.76
PN-QP	69.53	135.51	87.93

Na podstawie uzyskanych wyników, podobnie jak miało to miejsce dla robota Pendubot, można zauważyć, że zastosowanie transformacji zmiennych stanu pozytywnie wpływa na liczbę przypadków, dla których warunek początkowy ( $q_{01}, q_{02}$ ) gwarantuje osiągnięcie stanu zadanego.

Dla strategii sterowania zawierających sam regulator  $u_{stab}$ , lub zbliżonych do siebie strategii Sponga bądź PN-QP (które odpowiadają strategiom typu  $u_{swing}$ ) liczba warunków początkowych zakończonych sukcesem wzrasta dwukrotnie.

Podobnie jak dla Pendubota, większy obszar zbieżności pociąga za sobą wzrost parametrów przedstawiających energochłonność procesu sterowania.

Poniżej przedstawiono uszczegółowienie wniosków z podziałem na poszczególne analizowane algorytmy.

## MCG

Podobnie jak miało to miejsce dla robota typu Pendubot i sterownika  $u_{stab}$ , dla Acrobota zwiększenie sygnału sterującego nie zmienia znacząco liczby dostępnych rozwiązań (tabela 5.3). W przypadku znacznego zwiększenia sygnału wejściowego (`sim_4`) istnieje konieczność wprowadzenia ograni-



czenia na liczbę obrotów złączy. W przeciwnym razie numeryczne poszukiwanie rozwiązania trwa niewspółmiernie długo.

### SPONG

---

Wyniki numeryczne symulacji zostały przedstawione w tabelach 5.8 oraz 5.9 odpowiednio dla metody *Collocated* oraz *Non-Collocated*. Symulacje dla metody *Collocated* zostały przeprowadzone dla kąta  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , zgodnie z pracą [83]. Wzrost liczby dostępnych rozwiązań jest ponad 60-krotny w stosunku do zastosowania samego regulatora  $u_{\text{stab}}$  dla zmiennych naturalnych. Oba podejścia Sponga wykazują znaczny przyrost liczby warunków początkowych kończących się sukcesem, wraz ze wzrostem wartości dostępnego sygnału sterującego. Analizując obie tabele możemy zauważyć, że podejście *Non-Collocated* jest prawie dwukrotnie bardziej wymagające energetycznie zarówno pod względem kryterium  $\bar{J}_e$ , jak również co do wartości średniej z całki z kwadratu napięcia wejściowego, przy zbliżonych wartościach parametrów *Area*.

### QPZ

---

Zastosowanie przekształcenia opierającego się o *QPZ* i sterownik  $u_{\text{stab}}$  zwiększa ponad dwukrotnie liczbę dostępnych rozwiązań w stosunku do modelu wyrażonego w zmiennych naturalnych i ze sterownikiem  $u_{\text{stab}}$ . Dalsze zwiększanie zakresu dostępnego sygnału sterującego nie wpływa w żaden sposób na dostępność nowych rozwiązań, jedynie prowadzi do wydłużenia realnego czasu symulacji.

### PN-QP

---

Zastosowanie przekształcenia zmiennych stanu zaproponowane w pracy [46] i przedstawione w rozdziale 4.4.2 prowadzi do znacznego przyrostu liczby dostępnych rozwiązań, względem dotychczas rozpatrywanych algorytmów. Porównując zbliżoną strategię Sponga do algorytmu opartego o formę normalną i pseudoprędkości PN-QP, można zaobserwować, że liczba warunków początkowych zakończonych sukcesem wzrasta dwukrotnie. Ponadto wraz ze wzrostem wartości sygnału sterującego rośnie parametr *Area*, do momentu, gdy sygnał wejściowy przyjmujemy  $= 100V$ . Dla tej wartości obserwujemy spadek parametru *Area*, co zapewne związane jest to z niemożnością ustabilizowania robota ze względu na pojawienie się znacznych prędkości kątowych w złączach.



## ROZDZIAŁ 6

### Wyniki badań symulacyjnych dla 3 DOF

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie wyników symulacyjnych dotyczących zadania stabilizacji potrójnego wahadła w górnym niestabilnym punkcie równowagi, omówionego w rozdziałach 4.5-4.6. Prace opierają się o formalizm zaprezentowany w [81, 46], dodatkowo uwzględniając ograniczenia wynikające z przesłanek praktycznych (podobnie jak miało to miejsce w rozdziale 5). Wśród rozpatrywanych algorytmów możemy wyróżnić pierwszą grupę bazującą na częściowej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne typu *collocated* oraz *noncollocated* przy dodatkowym wsparciu ze strony regulatora LQR, mającego na celu stabilizację wokół punktu równowagi, oraz drugą grupę wykorzystującą transformację zmiennych stanu i wejścia przy zastosowaniu pseudoprędkości.

#### 6.1 Opis procedury symulacji

Poniższy rozdział zawierający opis przeprowadzonych prac symulacyjnych dla robota o 3 DOF jest analogiczny do tego zaprezentowanego w rozdziale 5. Wyszczególniono jedynie zmiany w stosunku do opisu z rozdziału dotyczącego robota o dwóch złączach.

Oznacza to, że podobnie jak poprzednio w pierwszej kolejności przedstawiono zbiory warunków początkowych, dla których dany algorytm osiąga założony cel sterowania (*obszar zbieżności*). Następnie przeanalizowano wskaźniki opisujące jakość regulacji dla zastosowanych praw sterowania celem wzajemnego porównania rozpatrywanych algorytmów.

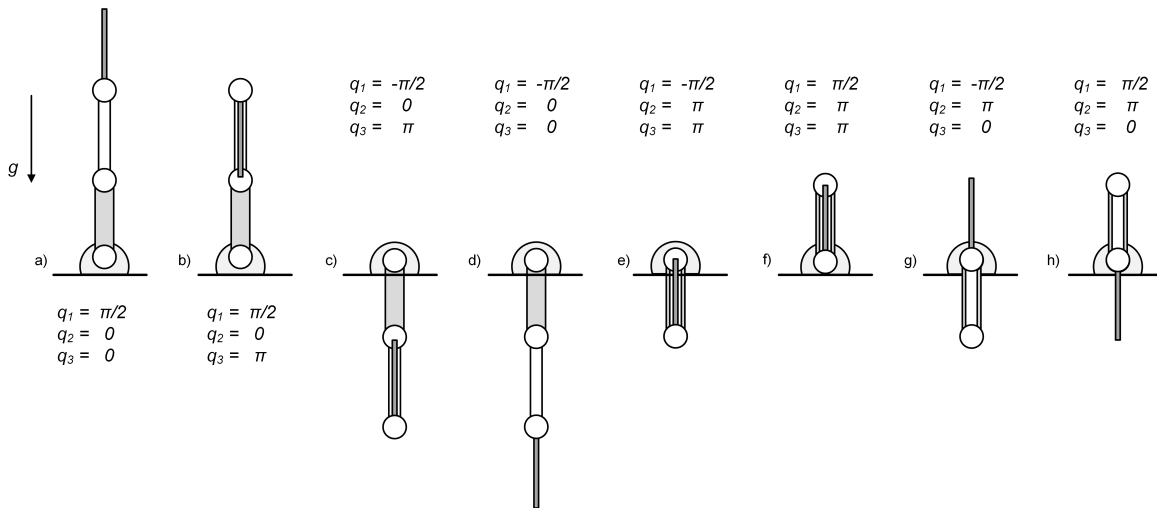
Podobnie jak dla robota 2 DOF, w symulacjach rozpatruje się zadanie stabilizacji robota w pozycji wyprostowanej, przedstawionej na rysunku 4.18a, tzn. zadana pozycja określona jest przez  $(q_1^d, q_2^d, q_3^d) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ .

Analizowane warunki początkowe również zakładają zerowe prędkości w złączach.

W tej pracy założono sprawdzenie zbioru warunków początkowych w całej przestrzeni konfiguracji, zdefiniowanych w dziedzinie dyskretnej na siatce 3D. Rozdzielczość przestrzenna siatki została ustawiona na  $10^\circ$ . Każda komórka siatki odpowiada jednemu warunkowi początkowemu  $(q_{01}, q_{02}, q_{03})$  przyjmowanemu w danej próbie symulacyjnej. Próbę uznajemy za udaną, jeżeli w założonym horyzoncie czasowym równym  $T_{\text{sim}} = 10s$  norma z sumy błędów pozycji kątowej w obu złączach będzie mniejsza niż  $0.01^\circ$ . Udaną próbę na wykresie przedstawiającym *obszary zbieżności* oznaczono niebieskim sześcianem, natomiast kolor biały (pusta przestrzeń) oznacza warunek początkowy dla którego odnotowano niepowodzenie, tj. brak stabilizacji układu zamkniętego przy spełnieniu założonych kryteriów.

Zakres kątów  $q_{01}$ ,  $q_{02}$  oraz  $q_{03}$  został określony w granicach od  $-180^\circ$  do  $180^\circ$ , co daje ok. 47000 prób symulacyjnych dla każdego algorytmu, bez uwzględnienia zmian innych parametrów w trakcie symulacji. Zakładając 10 zmian parametrów dla każdego warunku początkowego liczba prób rośnie do niecałych 470000. Przyjęcie takich warunków początkowych oznacza, że problem podniesienia wahadła (*swing-up*) jest rozpatrywany.

Analogicznie do rozdziału 5.1 wprowadzono trzy wskaźniki, celem uzyskania obiektywnych



Rysunek 6.1: Punkty równowagi dla robota o 3 złączach, przy zerowym wymuszeniu

kryteriów porównawczych. Są to wskaźniki – *Area*, będący procentowym udziałem warunków początkowych dla których osiągnięto stabilizację, odniesionym do całej przeszukiwanej przestrzeni warunków początkowych, oraz dwa będące kryteriami efektywności energetycznej  $J_m$  oraz  $J_e$ , dane odpowiednio równaniami (5.1) oraz (5.2)

#### PORÓWNANIE DANYCH SYMULACYJNYCH

Również w tym wariantcie zastosowano tzw. **przypadek nominalny** (oznaczony jako *sim\_1*) celem porównania poszczególnych algorytmów sterowania, dla którego założono, że maksymalna wartość bezwzględna napięcia wejściowego silnika jest ograniczona do 10V.

Strojenie sterownika  $u_{stab}$  odpowiadającego za stabilizację w punkcie przebiegało wg. procedury omówionej w rozdziale 5.1, przy czym dla modeli wyrażonych za pomocą zmiennych naturalnych optymalne wartości wzmocnień  $K$  uzyskano dla liniowej aproksymacji równań ruchu w punkcie równowagi  $(q_1^d, q_2^d, q_3^d) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ , przy założeniu następujących postaci macierzy  $Q = \text{diag}\{50, 50, 50, 0.01, 0.01, 0.01\}$  i  $R = 100$ .

Dla modeli wyrażonych w zmiennych przekształconych – uwzględniających pseudoprędkości – rozpatrywano również transformacje macierzy  $Q$  i  $R$  wynikające z transformacji zmiennych konfiguracyjnych, opisane w rozdziale 4.4.3.

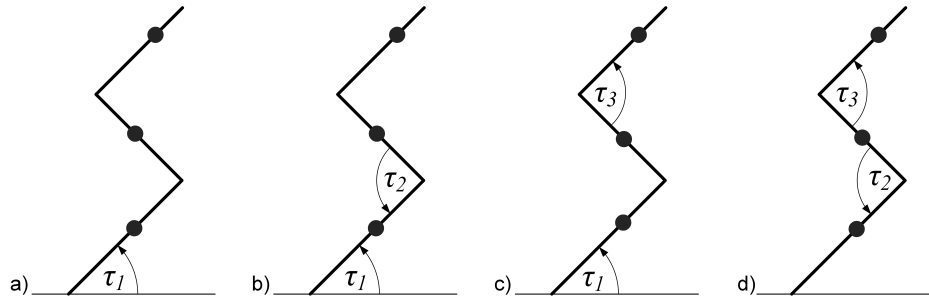
## 6.2 Wyniki numeryczne symulacji

Niniejszy rozdział odnosi się do sterowania robotem o 3 stopniach swobody przedstawionych w części 4 i stanowi symulacyjną egzemplifikację zawartych tam metod sterowania.

Wyniki zostaną przedstawione w sekwencji związanej z zastosowanym prawem sterowania, dla robota o rozmieszczeniu napędów zgodnym z rysunkiem 6.2.

Tytuły poniższych podrozdziałów oznaczają skrótowo zastosowany algorytm sterowania i należy odczytywać je zgodnie z tabelą 6.1 w sposób, który zostanie omówiony na dwóch przykładach:

- *MCG*:  $\tau_1, \tau_2$  – symulacja dla robota o rozmieszczeniu napędów zgodnym z rysunkiem 6.2b), przy wykorzystaniu modelu dynamiki wyrażonego we współrzędnych naturalnych i zastosowaniu wyłącznie sterownika  $u_{stab}$ ;
- *PN-QP*: *Lin*:  $\tau_2, \tau_3$  – symulacja dla robota o rozmieszczeniu napędów zgodnym z rysunkiem 6.2d), przy wykorzystaniu modelu dynamiki wyrażonego we współrzędnych przekształconych – quasi-prędkościach i zastosowaniu sterownika hybrydowego.



Rysunek 6.2: Rozmieszczenie napędów w analizowanych przypadkach

Tabela 6.1: Wykaz badanych algorytmów

Napędy	Algorytm	Zmienne	$u_{\text{stab}}$	$u_{\text{swing}}$
$\tau_1$	MCG+LQR	naturalne	+	-
$\tau_1$	QP+LQR	quasi-prędkości	+	-
$\tau_1$	Spong: Collocated	naturalne	+	+
$\tau_1$	QP: Lin	quasi-prędkości	+	+
$\tau_1, \tau_2$	MCG	naturalne	+	-
$\tau_1, \tau_3$	MCG	naturalne	+	-
$\tau_2, \tau_3$	MCG	naturalne	+	-
$\tau_1, \tau_2$	Spong: Collocated	naturalne	+	+
$\tau_1, \tau_3$	Spong: Collocated	naturalne	+	+
$\tau_2, \tau_3$	Spong: Collocated	naturalne	+	+
$\tau_1, \tau_2$	Spong: Non-Collocated	naturalne	+	+
$\tau_1, \tau_3$	Spong: Non-Collocated	naturalne	+	+
$\tau_2, \tau_3$	Spong: Non-Collocated	naturalne	+	+
$\tau_1, \tau_2$	QP	quasi-prędkości	+	-
$\tau_1, \tau_3$	QP	quasi-prędkości	+	-
$\tau_2, \tau_3$	QP	quasi-prędkości	+	-
$\tau_1, \tau_2$	QP: Lin	quasi-prędkości	+	+
$\tau_1, \tau_3$	QP: Lin	quasi-prędkości	+	+
$\tau_2, \tau_3$	QP: Lin	quasi-prędkości	+	+

Wspólne parametry symulacji (chyba, że zaznaczono inaczej) zestawiono w tabeli 6.2. Opis wykorzystanych symboli znajduje się w rozdziale 5.1.1.

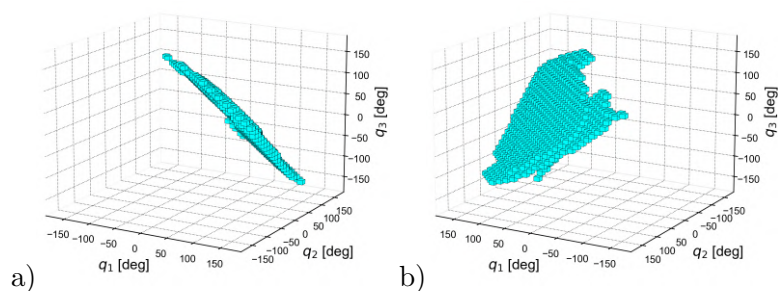
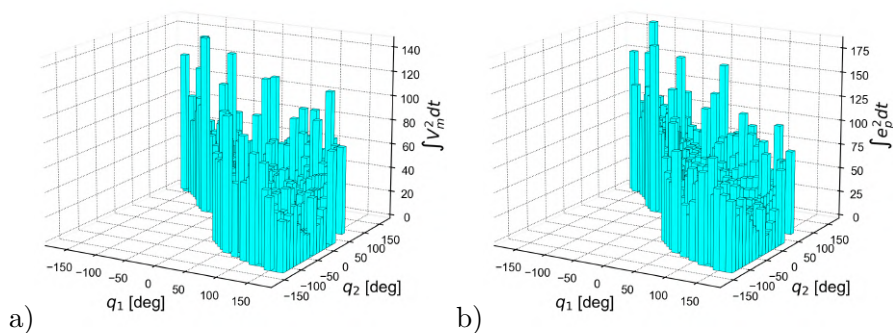
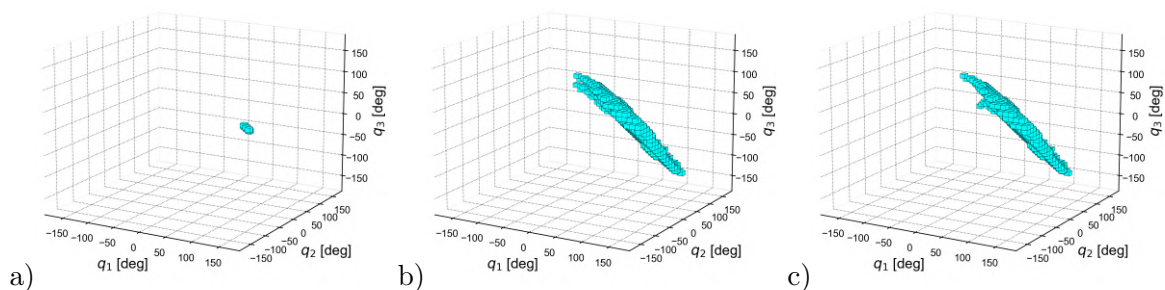
Tabela 6.2: Parametry symulacji

$solver$	$T_{\text{sim}}$	$dt$	$q_1 [^\circ]$	$q_2 [^\circ]$	$\Delta_q$	$\boxplus$	absolute/relative error tolerance
RKDP5	10	0.01	$\pm 180$	$\pm 180$	90	10	$10^{-4}$

Algorytmy *MCG* nie zostały szczegółowo opisane w niniejszej pracy. Wynika to z ich prostoty, jako że algorytmy te uwzględniają tylko model dynamiki robota oraz sterownika  $u_{\text{stab}}$  opisanego w rozdziale 4.1.

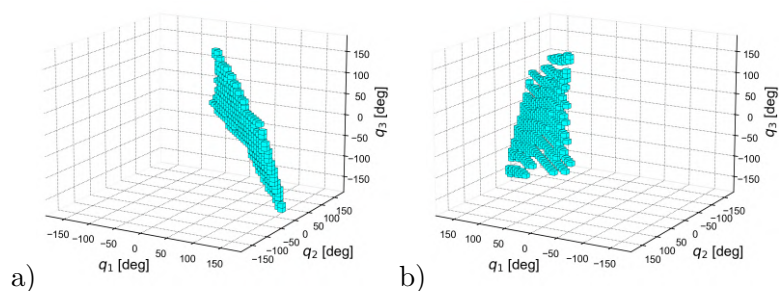
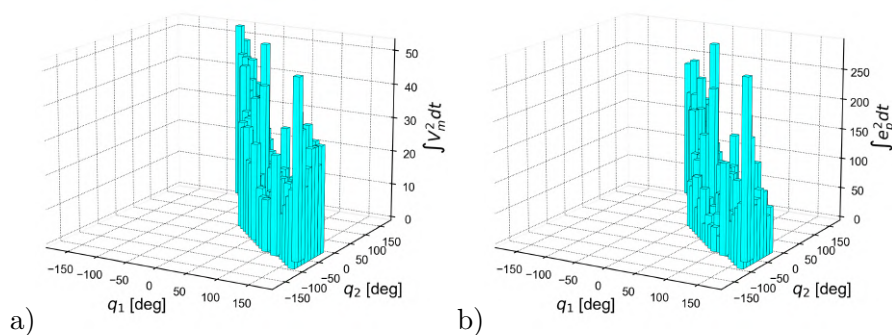
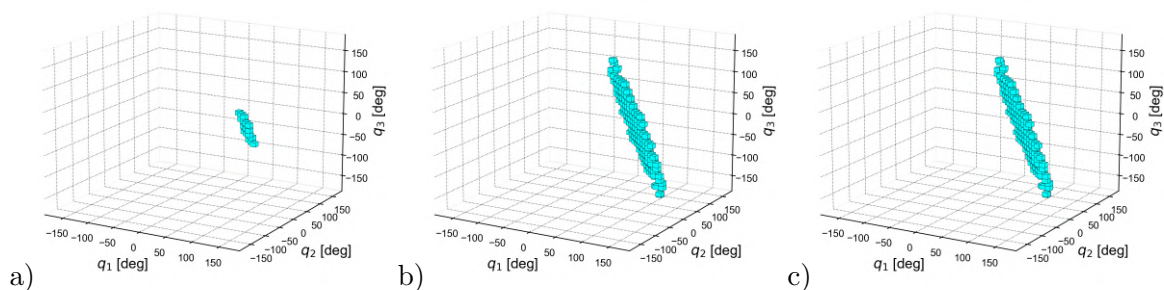
6.2.1 MCG:  $\tau_1, \tau_2$ Tabela 6.3: Wyniki symulacji: MCG:  $\tau_1, \tau_2$ 

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.02	0.65	0.43	0.51	0.30
sim_1	10	–	–		1.85	38.29	27.66	31.16	20.99
sim_2	$10^2$	–	–		1.58	79.44	99.43	97.32	119.46
sim_3	$10^3$	–	–		1.55	73.07	89.84	92.17	117.42

Rysunek 6.3: MCG:  $\tau_1, \tau_2$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.4: MCG:  $\tau_1, \tau_2$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.5: MCG:  $\tau_1, \tau_2$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.2 MCG:  $\tau_1, \tau_3$ Tabela 6.4: Wyniki symulacji: MCG:  $\tau_1, \tau_3$ 

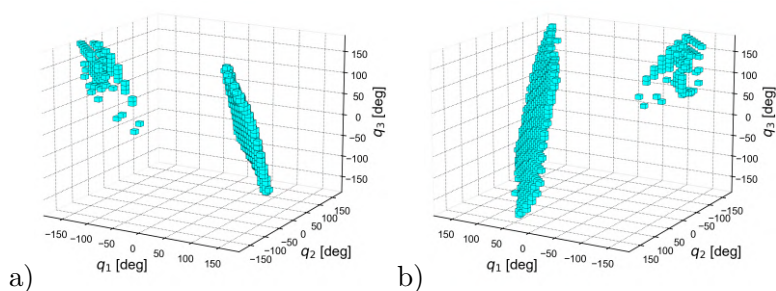
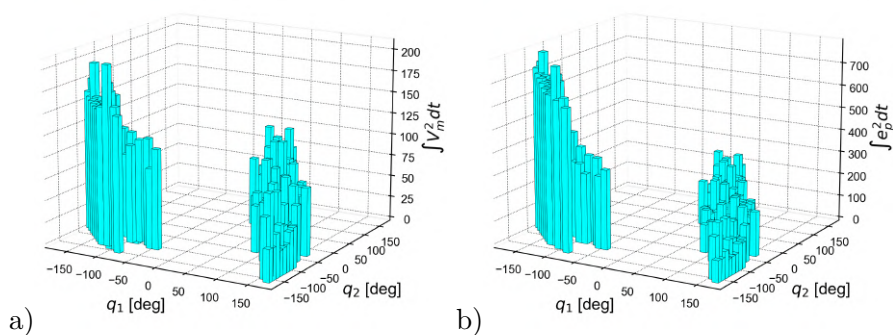
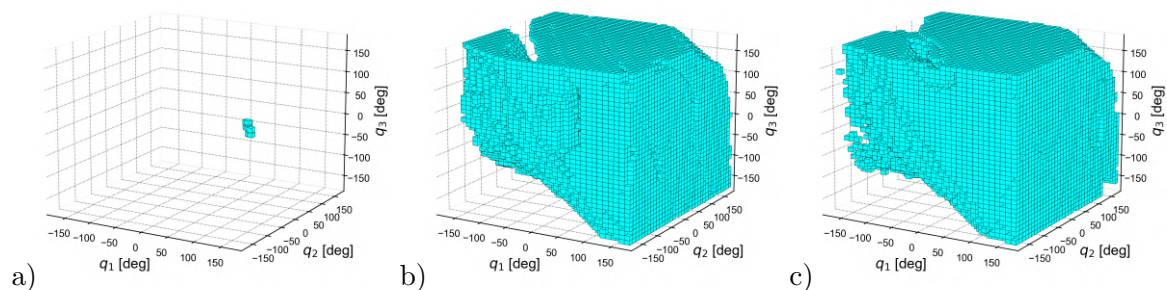
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.04	2.15	1.38	0.59	0.29
sim_1	10	–	–		0.89	59.78	48.96	15.71	11.07
sim_2	$10^2$	–	–		0.47	42.70	47.63	11.94	12.25
sim_3	$10^3$	–	–		0.47	42.70	47.63	11.94	12.25

Rysunek 6.6: MCG:  $\tau_1, \tau_3$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.7: MCG:  $\tau_1, \tau_3$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.8: MCG:  $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



6.2.3 MCG:  $\tau_2, \tau_3$ Tabela 6.5: Wyniki symulacji: MCG:  $\tau_2, \tau_3$ 

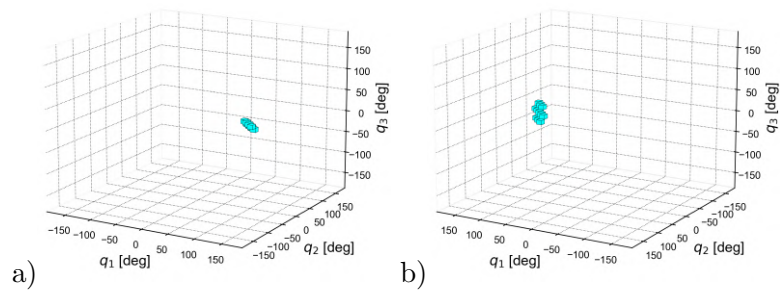
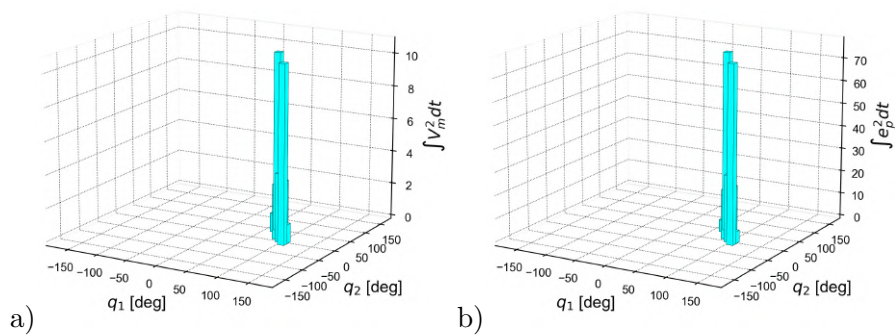
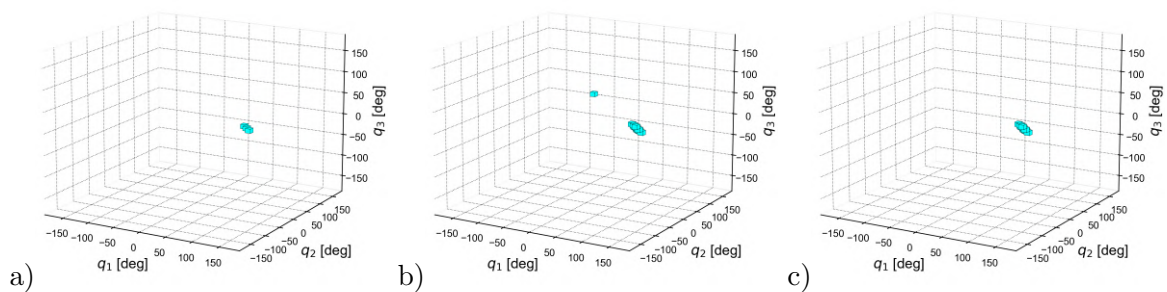
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.02	1.74	1.16	0.74	0.51
sim_1	10	–	–		1.36	132.91	174.39	42.53	42.77
sim_2	$10^2$	–	–		71.42	2944.39	1637.41	2420.45	1229.28
sim_3	$10^3$	–	–		78.37	3713.88	2925.42	5331.81	5815.92

Rysunek 6.9: MCG:  $\tau_2, \tau_3$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.10: MCG:  $\tau_2, \tau_3$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.11: MCG:  $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



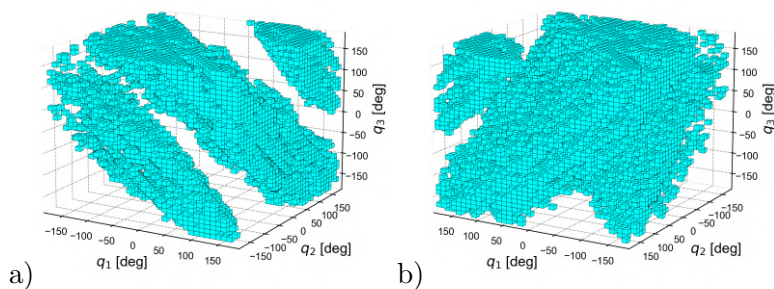
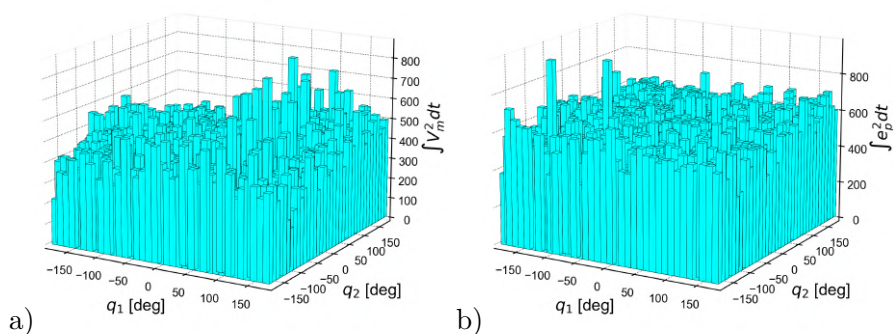
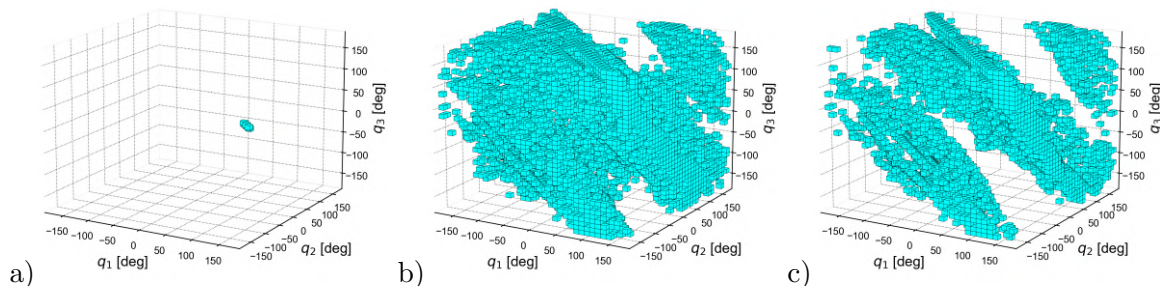
6.2.4 MCG:  $\tau_1$ Tabela 6.6: Wyniki symulacji: MCG:  $\tau_1$ 

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.01	0.48	0.34	0.14	0.10
sim_1	10	–	–		0.02	24.37	27.19	3.55	3.70
sim_2	$10^2$	–	–		0.03	132.35	206.25	42.33	86.35
sim_3	$10^3$	–	–		0.03	90.92	147.59	20.61	37.74

Rysunek 6.12: MCG:  $\tau_1$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.13: MCG:  $\tau_1$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.14: MCG:  $\tau_1$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

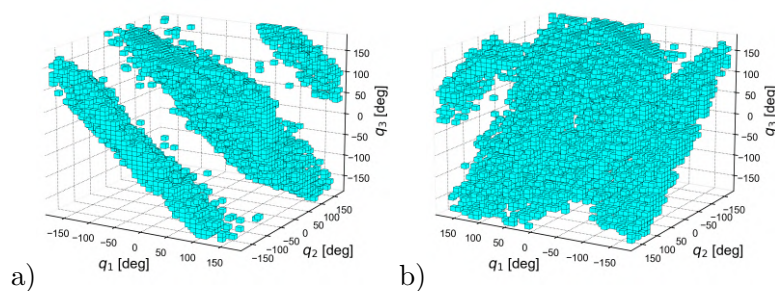
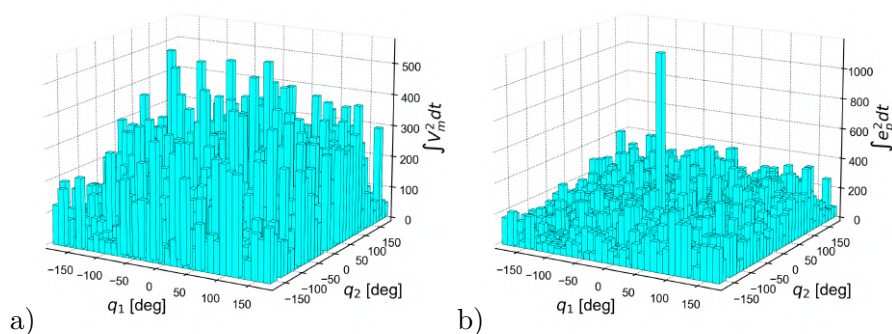
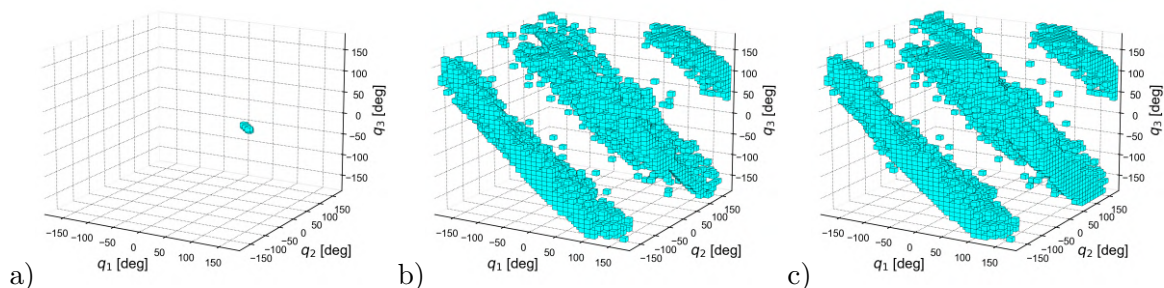
6.2.5 Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : CollocatedTabela 6.7: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : Coll

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.02	0.65	0.43	0.51	0.30
sim_1	10	–	–		27.39	319.01	168.44	230.39	126.69
sim_2	$10^2$	–	–		28.07	791.09	945.51	3629.76	6657.53
sim_3	$10^3$	–	–		16.40	518.18	858.07	5882.44	13327.01

Rysunek 6.15: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : Coll:, dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.16: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : Coll:, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e^2 dt$ Rysunek 6.17: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : Coll. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.6 Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : Non-locatedTabela 6.8: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : NonColl

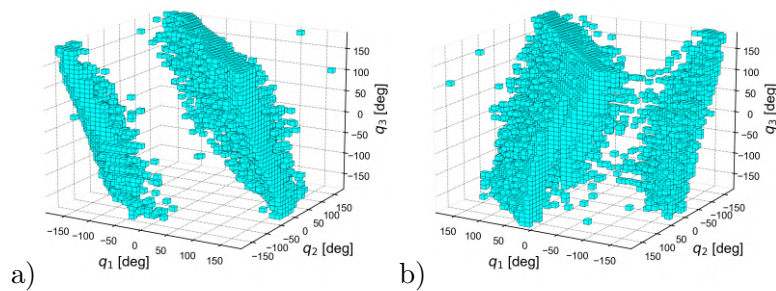
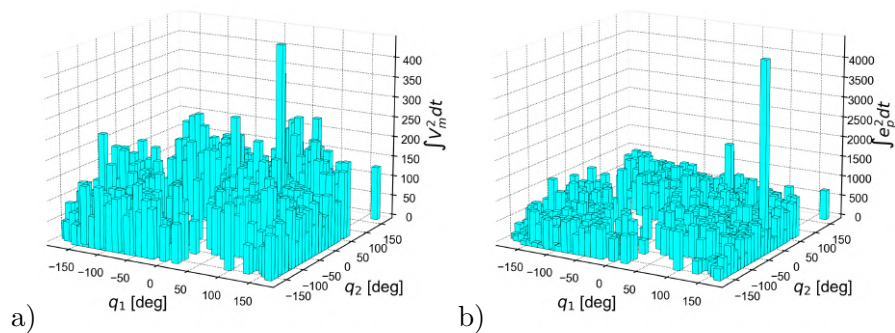
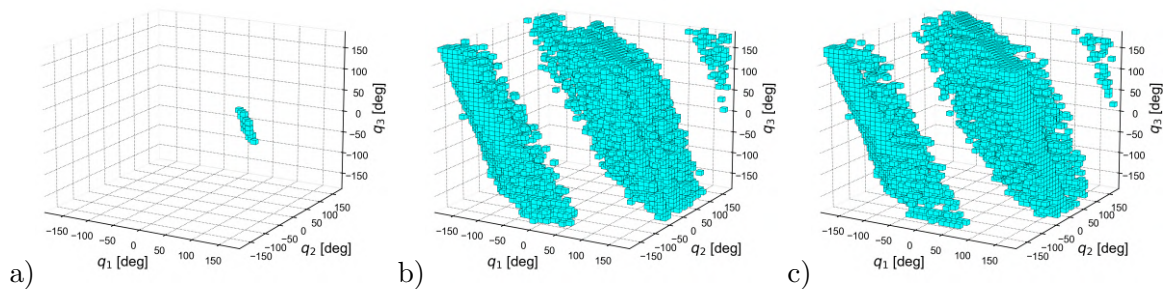
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.02	0.65	0.43	0.51	0.30
sim_1	10	–	–		14.28	107.81	68.57	92.19	66.49
sim_2	$10^2$	–	–		11.92	111.52	169.31	221.02	389.32
sim_3	$10^3$	–	–		16.60	136.70	710.09	9458.33	

Rysunek 6.18: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : NonColl., dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.19: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : NonColl., dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.20: Spong:  $\tau_1, \tau_2$ : NonColl. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



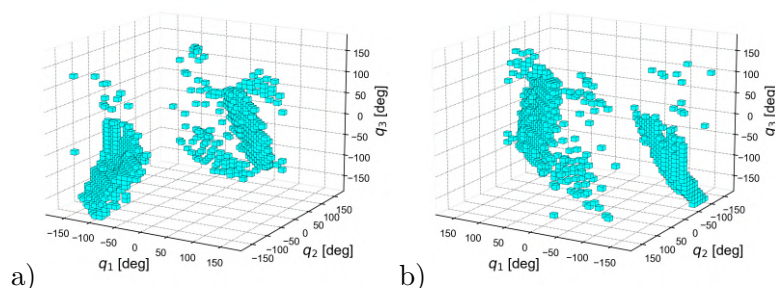
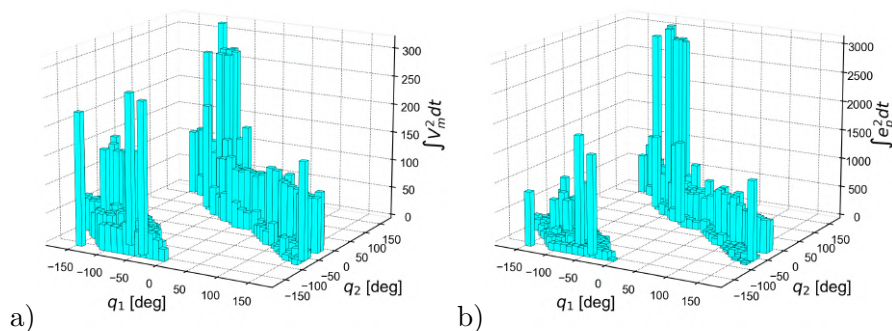
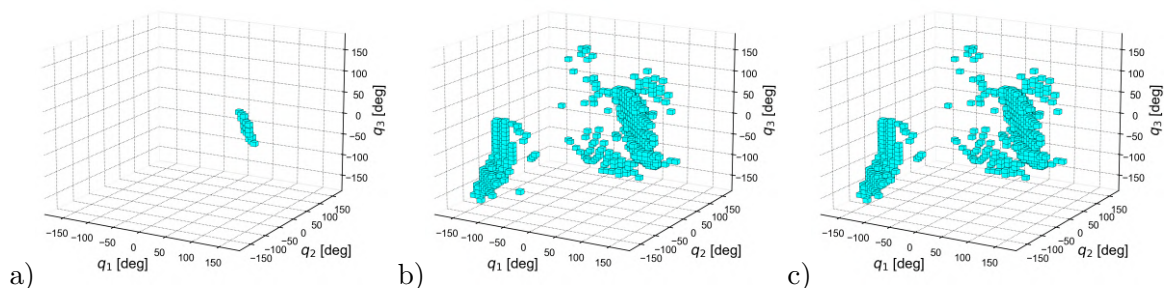
6.2.7 Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : CollocatedTabela 6.9: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : Coll

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.04	2.15	1.38	0.59	0.29
sim_1	10	–	–		11.90	248.41	207.67	54.64	38.98
sim_2	$10^2$	–	–		16.16	990.39	900.20	928.27	905.36
sim_3	$10^3$	–	–		15.84	984.70	1167.23	2226.68	3252.06

Rysunek 6.21: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : Coll:, dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.22: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : Coll:, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.23: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : Coll. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

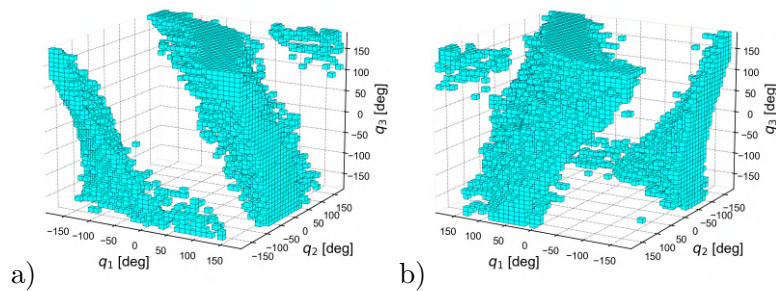
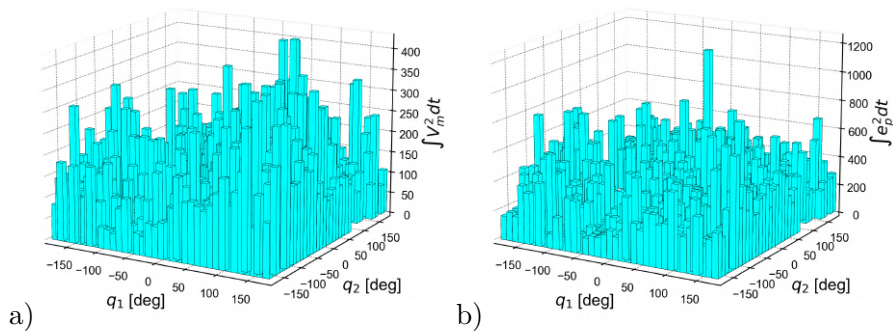
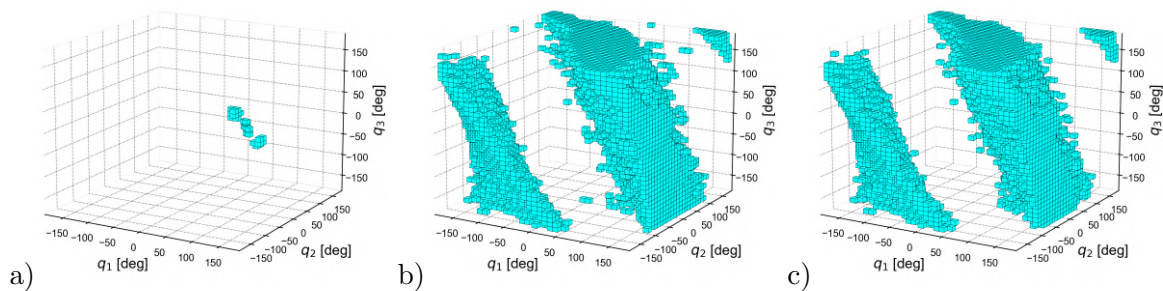
6.2.8 Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : Non-locatedTabela 6.10: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : NonColl

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.04	2.15	1.38	0.59	0.29
sim_1	10	–	–		2.12	147.09	313.45	34.90	37.47
sim_2	$10^2$	–	–		1.40	131.44	195.42	37.49	58.54
sim_3	$10^3$	–	–		1.40	129.56	182.21	37.18	63.78

Rysunek 6.24: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : NonColl., dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.25: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : NonColl., dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.26: Spong:  $\tau_1, \tau_3$ : NonColl. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.9 Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : CollocatedTabela 6.11: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : Coll

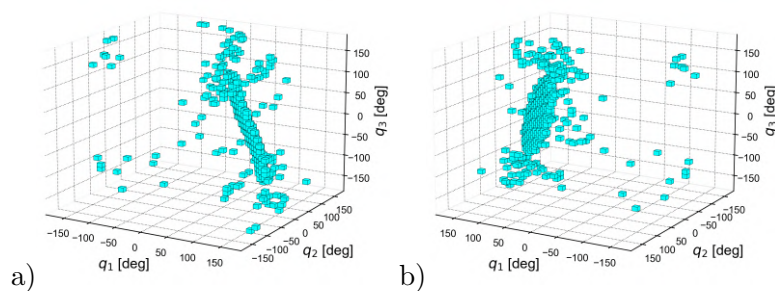
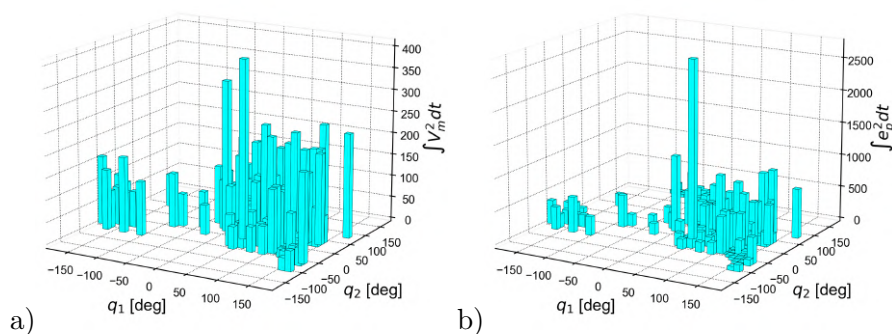
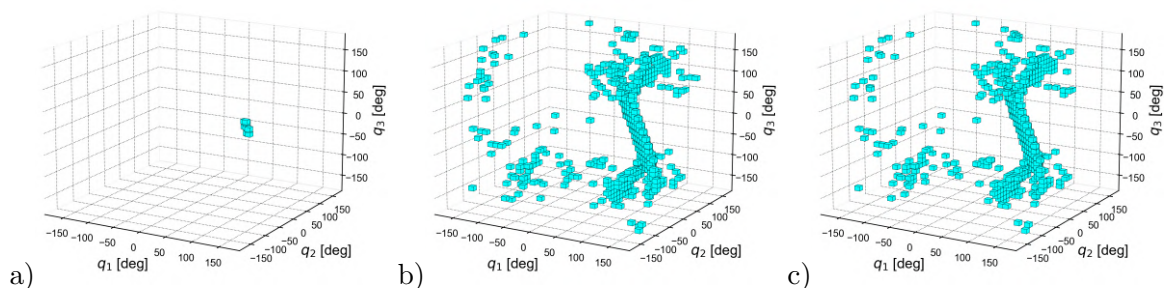
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.06	84.05	62.90	2.44	1.42
sim_1	10	–	–		21.24	178.15	95.37	75.15	45.67
sim_2	$10^2$	–	–		31.48	312.60	259.80	542.41	654.62
sim_3	$10^3$	–	–		30.35	309.47	243.75	807.45	1063.10

Rysunek 6.27: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : Coll., dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.28: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : Coll., dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.29: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : Coll. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



6.2.10 Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : Non-locatedTabela 6.12: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : NonColl

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.02	1.74	1.16	0.74	0.51
sim_1	10	–	–		0.83	136.33	235.96	45.49	58.65
sim_2	$10^2$	–	–		1.27	352.24	462.73	116.97	132.46
sim_3	$10^3$	–	–		1.22	343.71	465.95	123.04	190.63

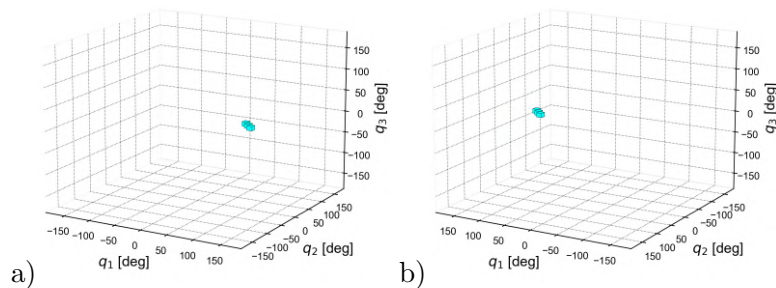
Rysunek 6.30: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : NonColl., dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.31: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : NonColl., dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.32: Spong:  $\tau_2, \tau_3$ : NonColl. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.11 Spong:  $\tau_1$ : CollocatedTabela 6.13: Wyniki symulacji: Spong:  $\tau_1$ : Coll

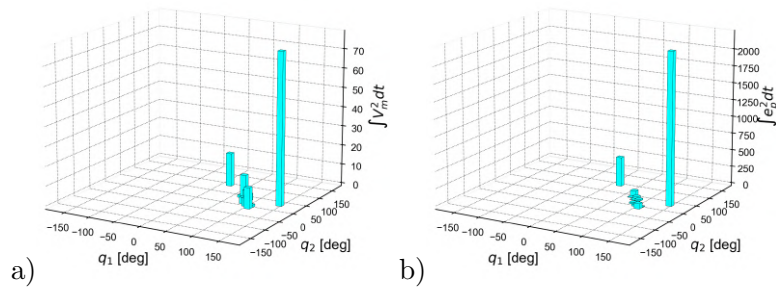
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.01	0.48	0.34	0.14	0.10
sim_1	10	–	–		0.03	224.65	587.41	10.29	20.07
sim_2	$10^2$	–	–		0.03	90.92	147.59	20.61	37.74
sim_3	$10^3$	–	–		0.03	90.92	147.59	20.61	37.74
sim_0a	1	–	–	#	0.01	0.48	0.34	0.14	0.10
sim_1a	10	–	–	#	0.02	24.37	27.19	3.55	3.70
sim_2a	$10^2$	–	–	#	0.03	90.92	147.59	20.61	37.74
sim_3a	$10^3$	–	–	#	0.03	90.92	147.59	20.61	37.74

# – symulacja przeprowadzona dla funkcji (4.406) postaci:

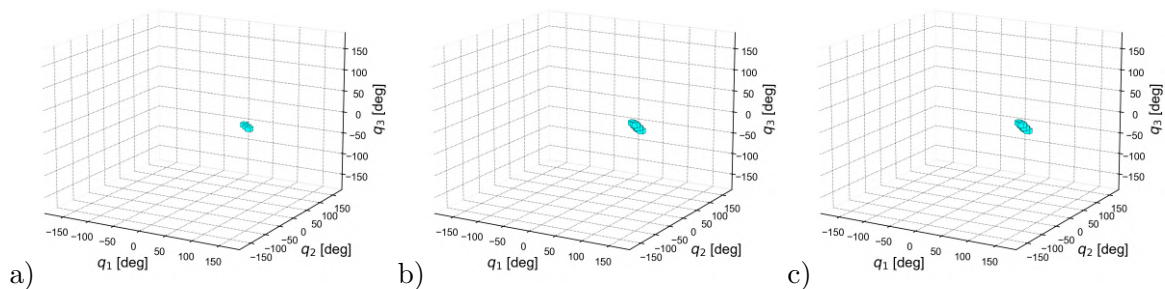
$$v_1 = K_{p1}(q_1^d - q_1) + K_{d1}(\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + K_{p2}(q_2^d - q_2) + K_{d2}(\dot{q}_2^d - \dot{q}_2) + K_{p3}(q_3^d - q_3) + K_{d3}(\dot{q}_3^d - \dot{q}_3)$$



Rysunek 6.33: Spong:  $\tau_1$ : Coll, dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.



Rysunek 6.34: Spong:  $\tau_1$ : Coll, dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$

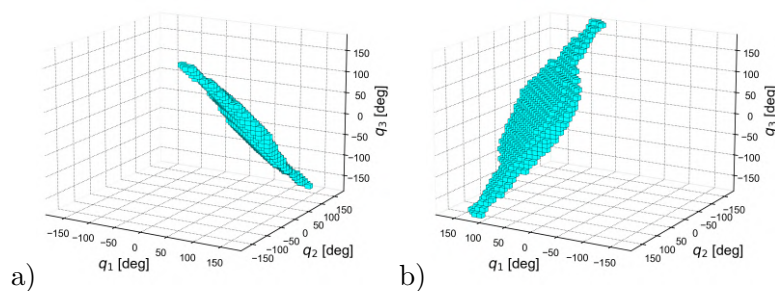
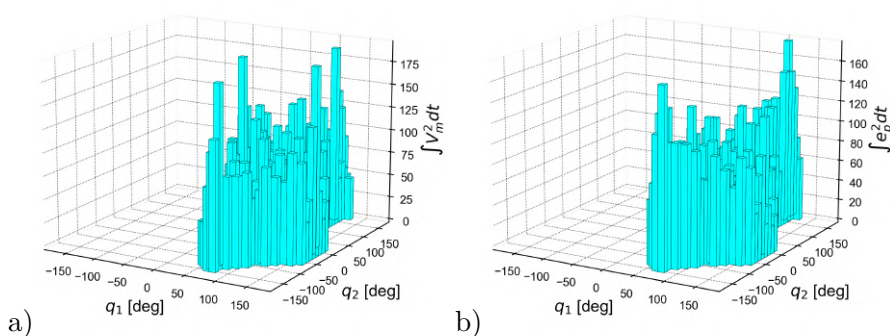
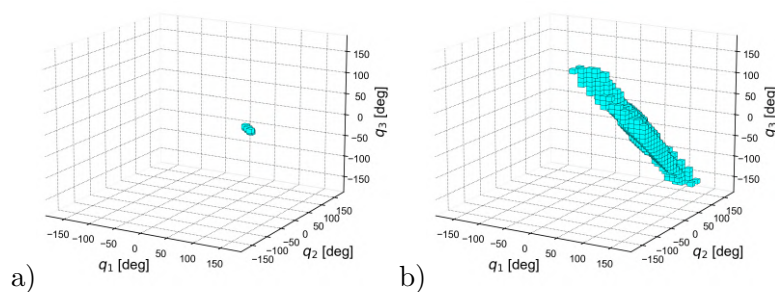


Rysunek 6.35: Spong:  $\tau_1$ : Coll. Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



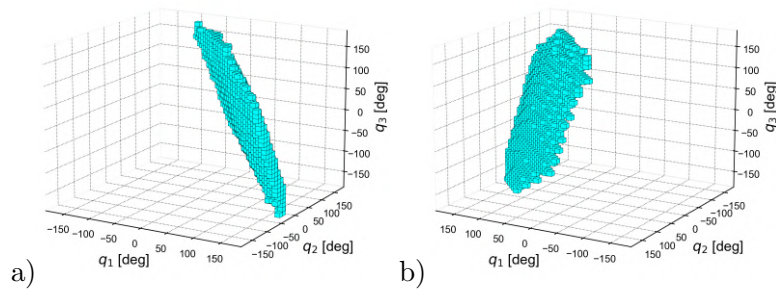
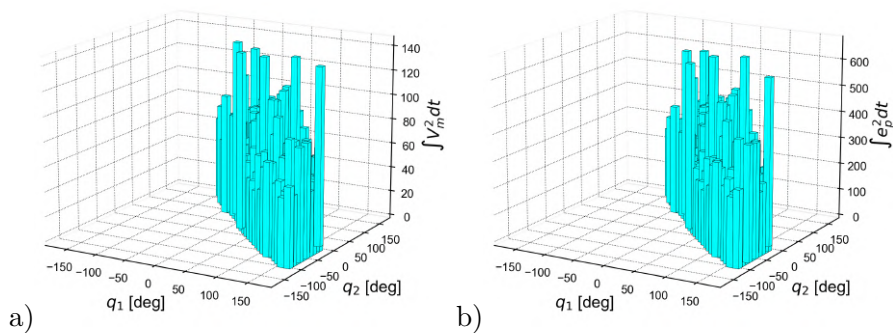
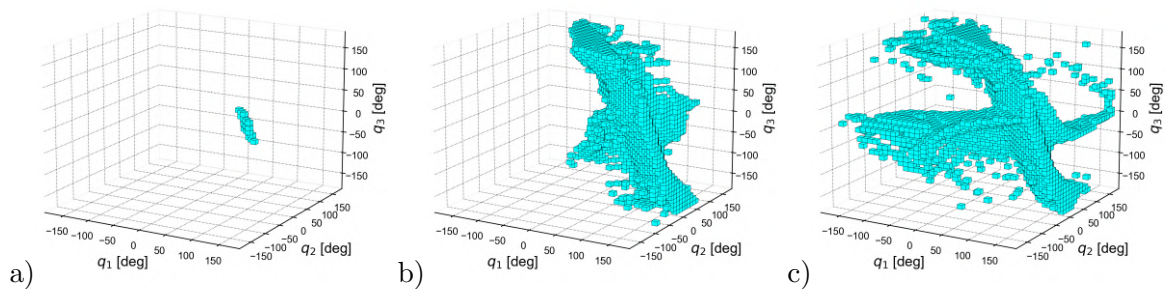
6.2.12 QP+LQR:  $\tau_1, \tau_2$ Tabela 6.14: Wyniki symulacji: QP+LQR:  $\tau_1, \tau_2$ 

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.02	0.57	0.32	0.41	0.19
sim_1	10	+	-		2.12	35.88	26.96	40.43	29.27
sim_2	$10^2$	+	-		2.99	68.52	59.75	120.17	144.97
sim_3	$10^3$	+	-		3.30	83.49	73.13	193.20	273.55

Rysunek 6.36: QP:  $\tau_1, \tau_2$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.37: QP:  $\tau_1, \tau_2$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.38: QP:  $\tau_1, \tau_2$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.13 QP+LQR:  $\tau_1, \tau_3$ Tabela 6.15: Wyniki symulacji: QP+LQR:  $\tau_1, \tau_3$ 

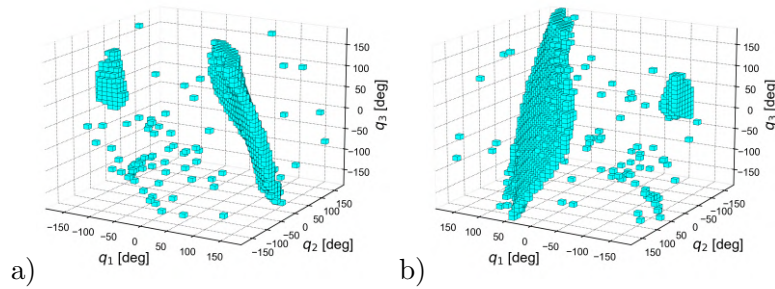
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.04	1.97	1.16	0.57	0.27
sim_1	10	+	-		3.66	127.20	102.21	30.33	21.86
sim_2	$10^2$	+	-		8.20	600.89	759.49	351.25	479.45
sim_3	$10^3$	+	-		11.01	1549.39	2591.86	6200.44	12930.55

Rysunek 6.39: QP+LQR:  $\tau_1, \tau_3$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.40: QP+LQR:  $\tau_1, \tau_3$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.41: QP+LQR:  $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

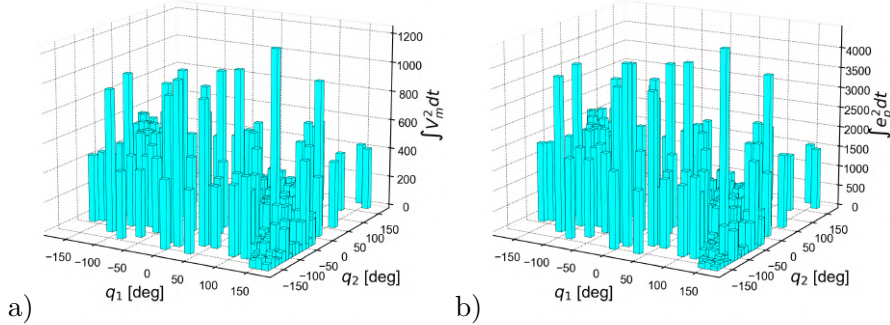
6.2.14 QP+LQR:  $\tau_2, \tau_3$

Tabela 6.16: Wyniki symulacji: QP+LQR:  $\tau_2, \tau_3$

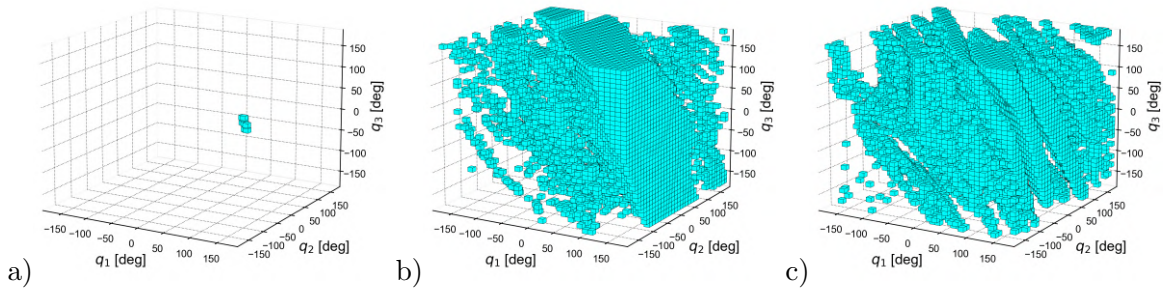
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	–	–		0.02	1.81	1.18	0.77	0.49
sim_1	10	–	–		3.61	227.24	507.52	74.29	131.51
sim_2	$10^2$	–	–		41.56	3971.44	4545.29	3199.39	3565.58
sim_3	$10^3$	–	–		30.80	9322.06	12964.16	29240.88	44732.48



Rysunek 6.42: QP+LQR:  $\tau_2, \tau_3$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.



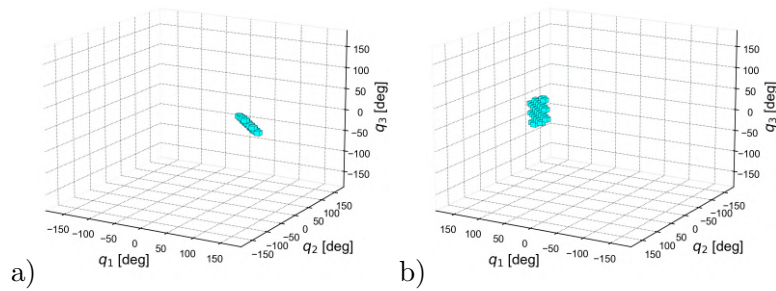
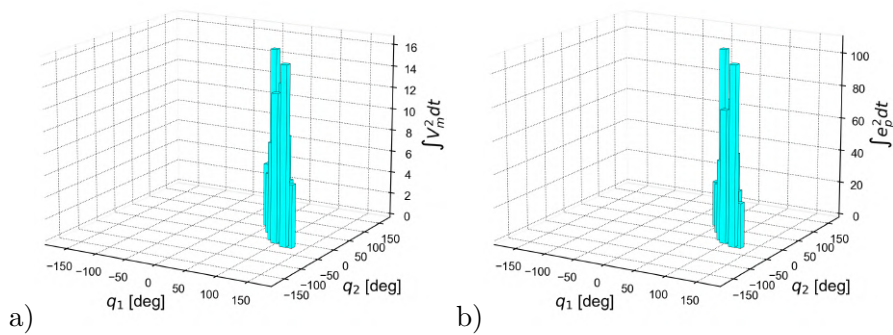
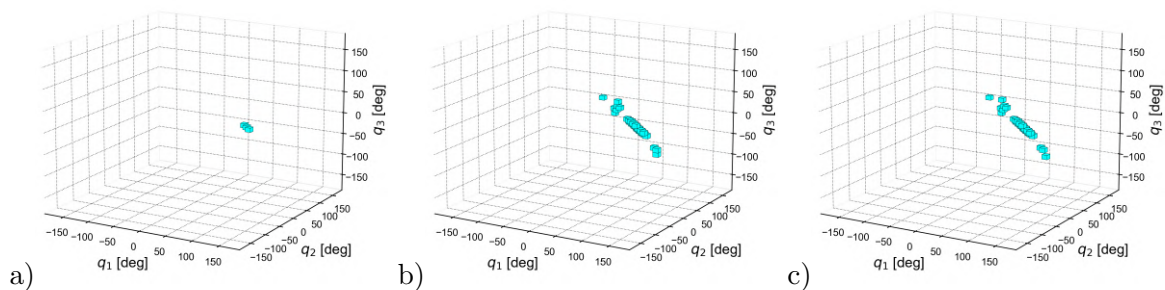
Rysunek 6.43: QP+LQR:  $\tau_2, \tau_3$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$



Rysunek 6.44: QP+LQR:  $\tau_2, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.15 QP+LQR:  $\tau_1$ Tabela 6.17: Wyniki symulacji: QP+LQR:  $\tau_1$ 

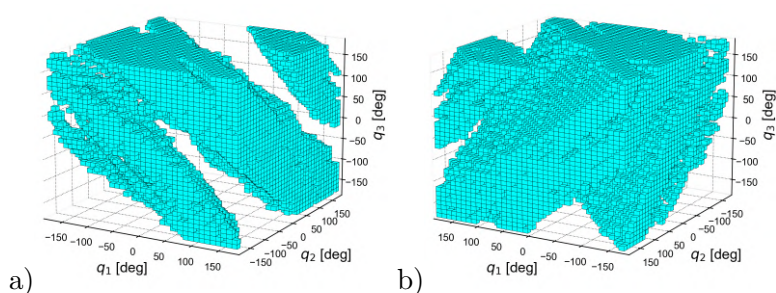
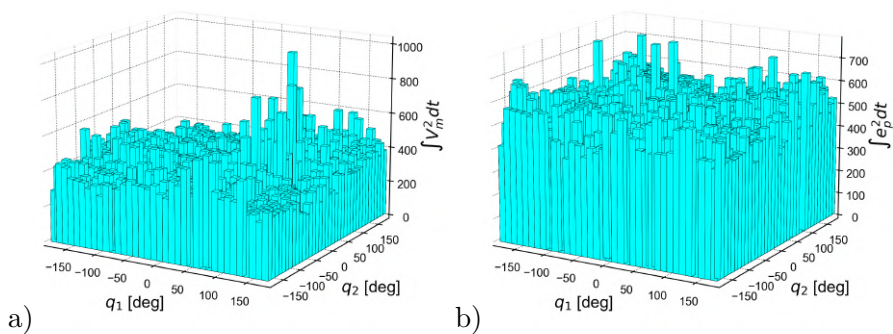
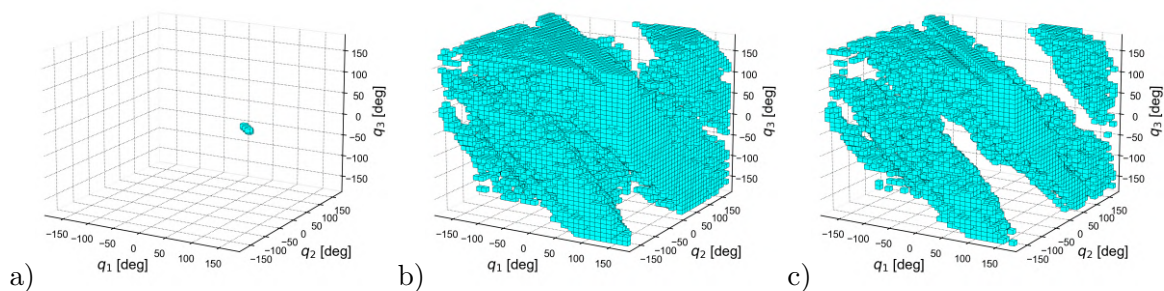
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.01	0.47	0.33	0.14	0.10
sim_1	10	+	-		0.05	33.86	31.41	5.75	4.86
sim_2	$10^2$	+	-		0.08	129.54	167.27	53.56	71.93
sim_3	$10^3$	+	-		0.08	122.43	162.83	63.16	100.08

Rysunek 6.45: QP+LQR:  $\tau_1$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.46: QP+LQR:  $\tau_1$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.47: QP+LQR:  $\tau_1$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



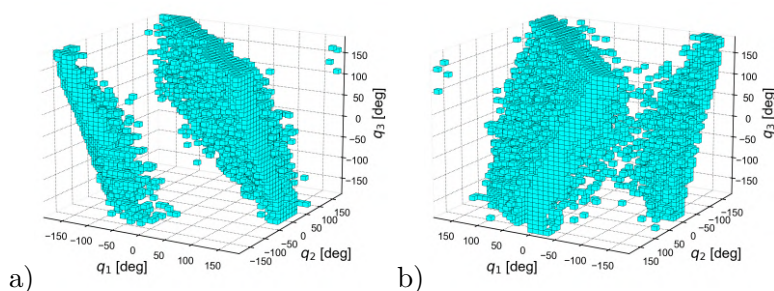
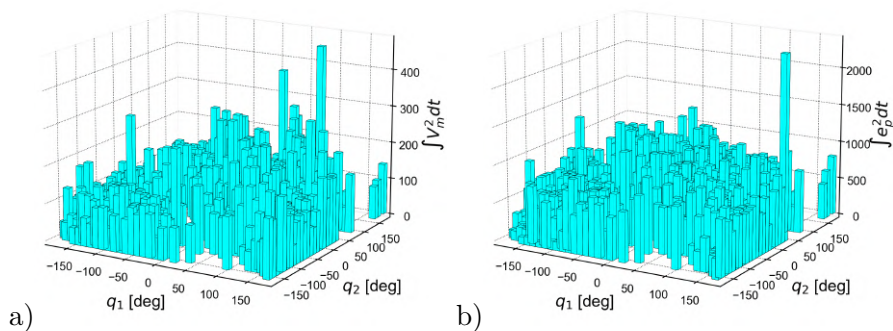
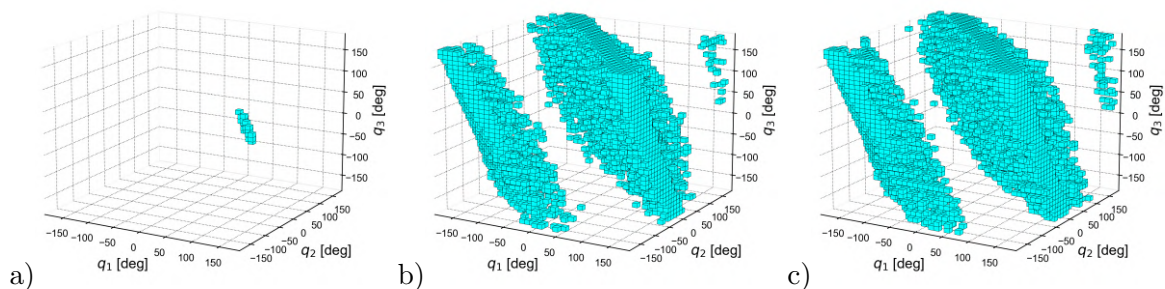
6.2.16 QP+Lin+h(x):  $\tau_1, \tau_2$ Tabela 6.18: Wyniki symulacji: QP+Lin:  $\tau_1, \tau_2$ 

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.02	0.57	0.32	0.41	0.19
sim_1	10	+	-		49.48	261.04	129.28	180.14	103.10
sim_1a	10	+	-	RK4=0.001	50.35	260.93	129.06	184.13	107.46
sim_1b	10	+	-	RK4=0.0001	49.46	261.07	129.34	180.25	103.22
sim_2	$10^2$	+	-		48.32	622.11	850.21	2784.11	6111.06
sim_3	$10^3$	+	-		26.82	464.01	900.35	5099.62	18045.98

Rysunek 6.48: QP Lin:  $\tau_1, \tau_2$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.49: QP Lin:  $\tau_1, \tau_2$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.50: QP Lin:  $\tau_1, \tau_2$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

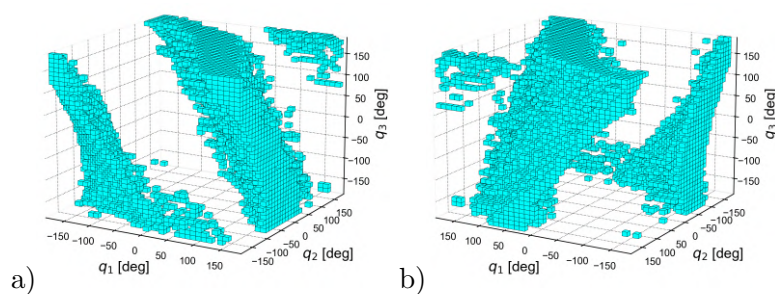
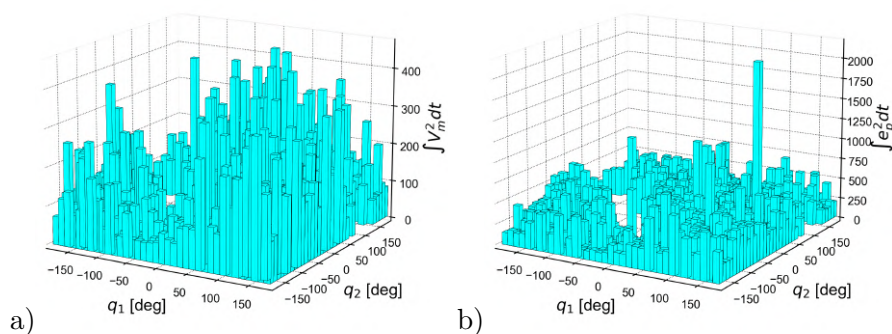
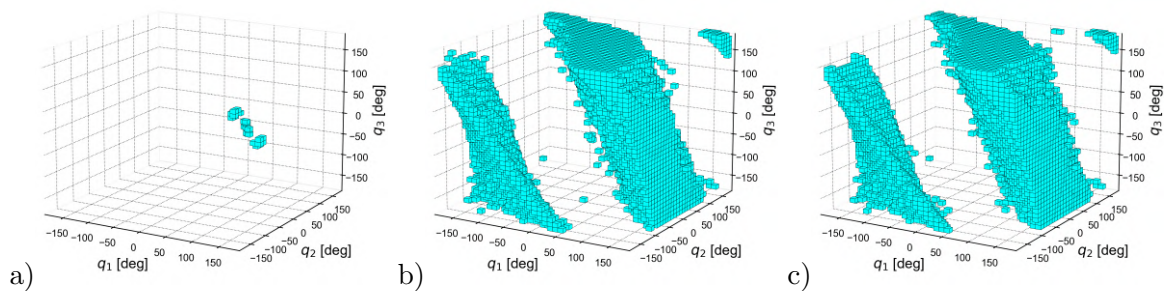
6.2.17 QP+Lin+h(x):  $\tau_1, \tau_3$ Tabela 6.19: Wyniki symulacji: QP+Lin:  $\tau_1, \tau_3$ 

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.05	2.12	1.32	0.57	0.31
sim_1	10	+	-		13.79	257.78	218.96	57.09	43.89
sim_1	10	+	-	RK4=0.0001	13.96	255.16	212.83	56.27	42.13
sim_2	$10^2$	+	-		17.18	538.25	698.52	390.98	502.64
sim_3	$10^3$	+	-		20.04	754.19	954.26	895.72	1253.19

Rysunek 6.51: QP Lin:  $\tau_1, \tau_3$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.52: QP Lin:  $\tau_1, \tau_3$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.53: QP Lin:  $\tau_1, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.18 QP+Lin+h(x):  $\tau_2, \tau_3$ Tabela 6.20: Wyniki symulacji: QP+Lin:  $\tau_2, \tau_3$ 

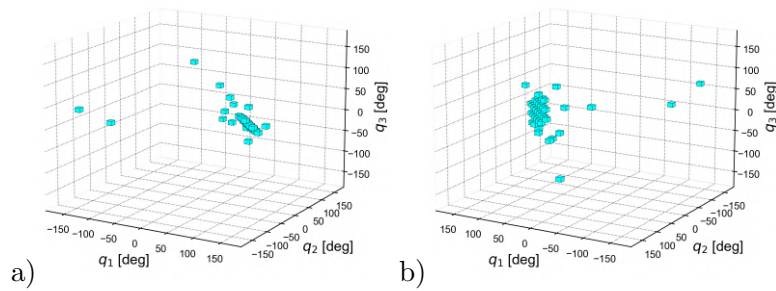
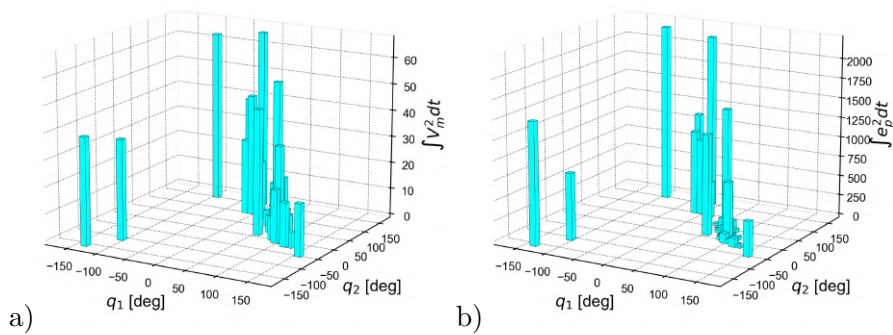
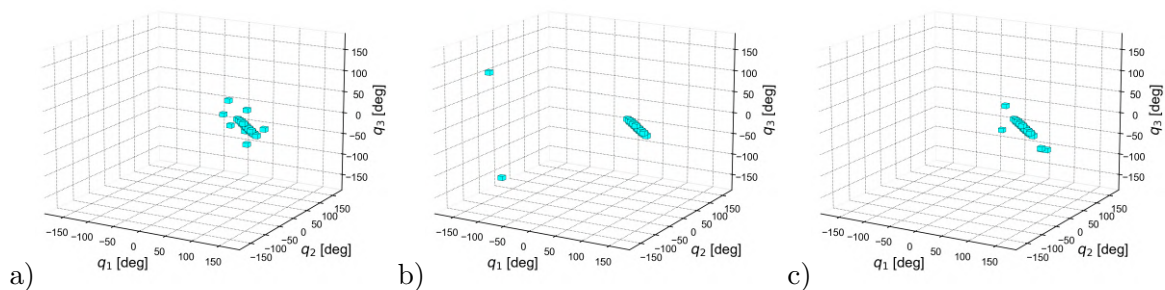
Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.05	76.75	56.35	2.24	1.17
sim_1	10	+	-		22.08	166.13	98.46	68.05	43.96
sim_2	$10^2$	+	-		29.82	485.17	369.28	798.99	710.68
sim_3	$10^3$	+	-		33.16	597.70	1289.21	1140.44	1267.05

Rysunek 6.54: QP Lin:  $\tau_2, \tau_3$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.55: QP Lin:  $\tau_2, \tau_3$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.56: QP Lin:  $\tau_2, \tau_3$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3



6.2.19 QP+Lin+h(x):  $\tau_1$ Tabela 6.21: Wyniki symulacji: QP+Lin:  $\tau_1$ 

Nazwa	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
sim_0	1	+	-		0.07	215.81	378.96	12.99	14.56
sim_1	10	+	-		0.08	415.65	618.51	18.14	18.78
sim_2	$10^2$	+	-		0.07	154.89	344.61	78.24	335.35
sim_3	$10^3$	+	-		0.07	145.63	271.25	111.85	274.08

Rysunek 6.57: QP Lin:  $\tau_1$ , dla sim\_1. Obszar zbieżności. a) Widok 'z przodu', b) Widok 'z tyłu'.Rysunek 6.58: QP Lin:  $\tau_1$ , dla sim\_1. Minimalne wartości wskaźników energetycznych: a)  $\int V_m^2 dt$ , b)  $\int e_p^2 dt$ Rysunek 6.59: QP Lin:  $\tau_1$ . Obszar zbieżności: a) sim\_0, b) sim\_2, c) sim\_3

6.2.20 QP+Lin+h( $\tilde{x}$ )

Niniejszy podrozdział prezentuje zbiorcze wyniki dla przypadku  $h(\tilde{x})$ , tzn. gdy funkcja wyjścia zależna jest od pseudoprędkości. Ze względu na mnogość dostępnych kombinacji i wariantów funkcji  $h(\tilde{x})$ , przyjęto kilka przykładowych rozwiązań, wśród których dominują te oparte o wzory 4.428, 4.446, 4.465, jako, wg. autora, najbardziej zbliżone do tych z rozdziałów 4.6.2, 4.6.3, 4.6.4.

Tabela 6.22: Wyniki symulacji: QP+Lin+h( $\tilde{x}$ )

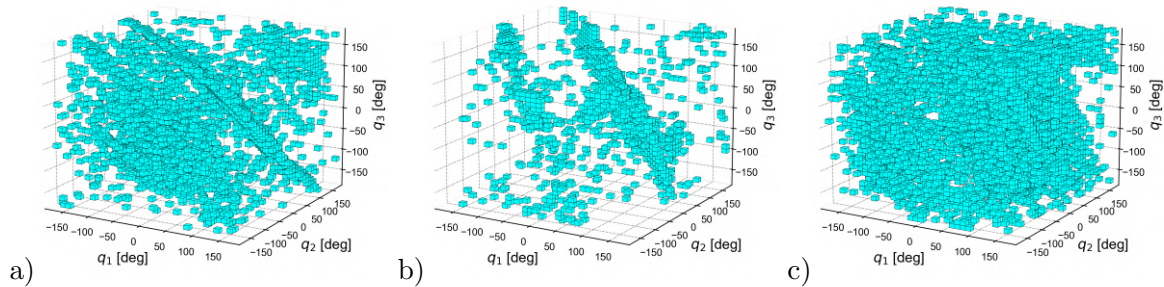
Napęd	$V_{\max}$	Ograniczenia		Uwagi	Area %	$\bar{J}_e$	$\sigma(J_e)$	$\bar{J}_m$	$\sigma(J_m)$
		$q$	$\dot{q}$						
$\tau_1, \tau_2$	10	+	-	rys a)	7.72	377.75	546.59	277.18	285.92
$\tau_1, \tau_2$	10	+	-	A	9.52	419.26	410.73	382.69	331.55
$\tau_1, \tau_3$	10	+	-	rys b)	3.04	280.52	286.01	197.78	229.59
$\tau_2, \tau_3$	10	+	-	rys c)	11.84	916.71	750.50	507.72	328.05
$\tau_1$	10	+	-		0.05	318.27	759.31	48.72	111.25

Uwagi:

A: funkcja wyjścia postaci:

$$h_1 = k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d) + k_1(\tilde{w}_3 - \tilde{w}_3^d)$$

$$h_2 = k_{21}(q_1 - q_1^d) + k_{22}(q_2 - q_2^d) + k_{23}(q_3 - q_3^d).$$

Rysunek 6.60: QP Lin  $h(\tilde{x})$ : Obszar zbieżności: a)  $\{\tau_1, \tau_2\}$ , b)  $\{\tau_1, \tau_3\}$ , c)  $\{\tau_2, \tau_3\}$

## 6.3 Wnioski

Tabela 6.23 przedstawia zbiorcze porównanie rozważanych algorytmów podlegających weryfikacji symulacyjnej. W tabeli tej przedstawiono dane dla warunków nominalnych, oznaczanych każdorazowo jako *sim\_1*.

Tabela 6.23: Porównanie algorytmów – 3 DOF, dla przypadków *sim\_1*

Napędy	Algorytm	Area [%]	$\bar{J}_e$	$\bar{J}_m$
$\tau_1, \tau_2$	MCG+LQR	1.85	38.29	31.16
$\tau_1, \tau_2$	QP+LQR	2.12	35.88	40.43
$\tau_1, \tau_2$	Collocated	27.39	319.01	230.39
$\tau_1, \tau_2$	Non-Collocated	14.28	107.81	92.19
$\tau_1, \tau_2$	QP: Lin + $h(x)$	49.48	261.04	180.14
$\tau_1, \tau_2$	QP: Lin + $h(\tilde{x})$	7.72	377.75	277.18
$\tau_1, \tau_3$	MCG+LQR	0.89	59.78	15.71
$\tau_1, \tau_3$	QP+LQR	3.66	127.20	30.33
$\tau_1, \tau_3$	Collocated	11.90	248.41	54.64
$\tau_1, \tau_3$	Non-Collocated	2.12	147.09	34.90
$\tau_1, \tau_3$	QP: Lin+ $h(x)$	13.79	257.78	57.09
$\tau_1, \tau_3$	QP + Lin + $h(\tilde{x})$	3.04	280.52	197.78
$\tau_2, \tau_3$	MCG+LQR	1.36	132.91	42.53
$\tau_2, \tau_3$	QP+LQR	3.61	227.24	74.29
$\tau_2, \tau_3$	Collocated	21.24	178.15	75.15
$\tau_2, \tau_3$	Non-Collocated	0.83	136.33	45.49
$\tau_2, \tau_3$	QP: Lin+ $h(x)$	22.08	166.13	68.05
$\tau_2, \tau_3$	QP: Lin+ $h(\tilde{x})$	11.84	916.71	507.72
$\tau_1$	MCG+LQR	0.02	24.37	3.55
$\tau_1$	QP+LQR	0.05	33.86	5.75
$\tau_1$	Collocated	0.03	224.65	10.29
$\tau_1$	QP: Lin+ $h(x)$	0.08	415.65	18.14
$\tau_1$	QP: Lin+ $h(\tilde{x})$	0.05	318.27	48.72

Na podstawie podanych wskaźników można wysnuć ogólny wniosek, że zastosowanie transformacji zmiennych stanu pozytywnie wpływa na zwiększenie liczby dopuszczalnych warunków początkowych, tj. poszerzenie zakresu zbieżności.

Wnioski szczegółowe dotyczące przeanalizowanych symulacji można podzielić ze względu na:

- rozmieszczenie napędów
- zastosowaną strategię sterowania.

### PORÓWNANIE ALGORYTMÓW ZE WZGLĘDU NA ZASTOSOWANĄ STRATEGIĘ STEROWANIA

Analizując tabele 6.24-6.29 można zauważyć, że dla strategii sterowania wykorzystujących linearyzację zastosowanie quasi-prędkości daje zbliżone, lub lepsze rezultaty od sterowania opartego o formalizm Sponga typu *Collocated*.

Bazując na samym sterowaniu  $u_{\text{stab}}$  obserwujemy natomiast 2-krotne zwiększenie parametru *Area*.

Skutkiem zwiększenia liczby dostępnych warunków początkowych jest jednak wzrost parametrów energetycznych  $\overline{J}_e$  i  $\overline{J}_m$ .

Na oddzielny komentarz zasługuje strategia sterowania  $QP+Lin+h(\tilde{x})$ , która wykorzystuje w swej strukturze funkcję wyjścia zależną od pseudoprędkości. Ze względu na mnogość możliwych kombinacji przyjęto pewną referencyjną jej postać opisaną dla każdego typu rozmieszczenia napędów w rozdziale 4.6. Dla sterowania  $\{\tau_1, \tau_2\}$  przeprowadzono dodatkowe symulacje z uwzględnieniem innej formy funkcji  $h(\tilde{x})$ , co uwzględniono w komentarzu do tabeli 6.22. Zmiana formy funkcji  $h(\tilde{x})$  nie wpływa znacząco na parametr *Area*.

Względem koncepcji opartej o wykorzystanie w sterowaniu linearyzującym funkcji wyjścia opartej na zmiennych naturalnych  $h(x)$ , nie obserwujemy zwiększenia liczby dostępnych warunków początkowych gwarantujących sukces, natomiast obserwujemy znaczne rozproszenie wyników w całej analizowanej przestrzeni. Wyniki te nie są ułożone w żadne zwarte zbiory, co istotnie utrudnia wykorzystanie tego podejścia również w kontekście wstępu do potencjalnych badań eksperymentalnych.

Dla przyjętej struktury mechanicznej najwięcej rozwiązań otrzymano dla sterowania  $\{\tau_2, \tau_3\}$ , co nie odbiega od wniosków dotyczących pozostałych analizowanych przypadków.

Tabela 6.24: Strategia sterowania: MCG+LQR

Napędy	Area [%]	$\overline{J}_e$	$\overline{J}_m$
$\tau_1, \tau_2$	1.85	38.29	31.16
$\tau_2, \tau_3$	1.36	132.91	42.53
$\tau_1, \tau_3$	0.89	59.78	15.71
$\tau_1$	0.02	24.37	3.55

Tabela 6.25: Strategia sterowania: QP+LQR

Napędy	Area [%]	$\overline{J}_e$	$\overline{J}_m$
$\tau_1, \tau_3$	3.66	127.20	30.33
$\tau_2, \tau_3$	3.61	227.24	74.29
$\tau_1, \tau_2$	2.12	35.88	40.43
$\tau_1$	0.05	33.86	5.75

Tabela 6.26: Strategia sterowania: Spong; Collocated

Napędy	Area [%]	$\overline{J}_e$	$\overline{J}_m$
$\tau_1, \tau_2$	27.39	319.01	230.39
$\tau_2, \tau_3$	21.24	178.15	75.15
$\tau_1, \tau_3$	11.90	248.41	54.64
$\tau_1$	0.03	224.65	10.29

Tabela 6.27: Strategia sterowania: Spong: Non-Collocated

Napędy	Area [%]	$\bar{J}_e$	$\bar{J}_m$
$\tau_1, \tau_2$	14.28	107.81	92.19
$\tau_1, \tau_3$	2.12	147.09	34.90
$\tau_2, \tau_3$	0.83	136.33	45.49

Tabela 6.28: Strategia sterowania: QP: Lin +  $h(x)$ 

Napędy	Area [%]	$\bar{J}_e$	$\bar{J}_m$
$\tau_1, \tau_2$	49.48	261.04	180.14
$\tau_2, \tau_3$	22.08	166.13	68.05
$\tau_1, \tau_3$	13.79	257.78	57.09
$\tau_1$	0.08	415.65	18.14

Tabela 6.29: Strategia sterowania: QP: Lin+ $h(\tilde{x})$ 

Napędy	Area [%]	$\bar{J}_e$	$\bar{J}_m$
$\tau_2, \tau_3$	11.84	916.71	507.72
$\tau_1, \tau_2$	7.72	377.75	277.18
$\tau_1, \tau_3$	3.04	280.52	197.78
$\tau_1$	0.05	318.27	48.72

#### PORÓWNANIE ALGORYTMÓW ZE WZGLĘDU NA ROZMIESZCZENIE NAPĘDÓW

Poniżej przedstawiono uszczegółowienie wniosków według kryterium rozmieszczenia napędów. Wspólną cechą zastosowanych strategii sterowania jest fakt, że przyjęcie sygnału wejściowego na poziomie 1V w znaczący sposób uniemożliwia stabilizację robota. Dla takiego zakresu napięcia parametr *Area* oscyluje w przedziale (0.01% – 0.07%).

#### STEROWANIE $\tau_1$

Komentarz dotyczy tabel 6.6, 6.13, 6.17, 6.21.

Umieszczenie napędu wyłącznie w pierwszym złączu praktycznie uniemożliwia stabilizację robota. Współczynnik sukcesu (parametr *Area*) oscyluje w otoczeniu (0.01% – 0.08%), bez względu na rodzaj zastosowanej strategii sterowania, czy na wartość sygnału wejściowego.

#### STEROWANIE $\tau_1, \tau_2$

Komentarz dotyczy tabel 6.3, 6.7, 6.8, 6.14, 6.18.

Analiza rozpatrywanych tabel prowadzi do wniosku, że zwiększanie zakresu dostępnego sygnału sterującego w ogólności zmniejsza liczbę dostępnych warunków początkowych kończących się stabilizacją robota. Zmiana ta często jest niewielka i oscyluje w zakresie 1%, chociaż dla przypadku strategii QP+Lin dla  $V_{\max} = 10^3$  spadek ten jest prawie 2-krotny w stosunku do napięcia nominalnego. Zmiany parametru *Area* są więc ilościowe, nie zaś jakościowe. Parametrami ulegającymi zmianie są natomiast wartości wskaźników energetycznych. Zwiększenie dostępnego zakresu sygnału sterującego mimo, iż nie powoduje jakościowej zmiany w liczbie dostępnych warunków

początkowych sprawia, że koszt energetyczny reprezentowany przez parametry  $\overline{J_e}$ ,  $\overline{J_m}$  znacząco różnie o rzędy wielkości.

#### STEROWANIE $\tau_1, \tau_3$

Komentarz dotyczy tabel 6.4, 6.9, 6.10, 6.15, 6.19.

Zwiększanie zakresu dostępnego sygnału wejściowego przy zastosowaniu naturalnych zmiennych stanu nie powoduje jakościowej zmiany parametru *Area*. Jedynie w przypadku algorytmu typu *Collocated* obserwujemy nieznaczny wzrost liczby dostępnych warunków początkowych. Pozostałe dwie strategie: *MCG+LQR* oraz *NonCollocated* charakteryzują się nieznacznym spadkiem współczynnika *Area*, co wiąże się z jednoczesnym spadkiem wydatku energetycznego.

Dla zmiennych uwzględniających pseudoprędkości obserwowany jest natomiast wzrost parametru *Area* wraz ze wzrostem wartości  $V_{\max}$ .

#### STEROWANIE $\tau_2, \tau_3$

Komentarz dotyczy tabel 6.5, 6.11, 6.12, 6.16, 6.20.

Przypadek ten jest wariantem najciekawszym. Dla każdego zestawu strategii sterowania wraz ze wzrostem  $V_{\max}$  rośnie wartość parametru *Area*. Dotyczy to zarówno zastosowania do opisu układu zmiennych naturalnych jak i zmiennych transformowanych. Jedynie zastosowanie takiego układu napędów zapewnia stabilizację na poziomie ponad 70% przy wykorzystaniu samego sterownika  $u_{\text{stab}}$  dla wartości  $V_{\max} \geq 100V$ .

Z analizy tabel 6.24-6.29 wynika, że rozmieszczenie napędów w złączach pierwszym i drugim ( $\tau_1, \tau_2$ ) gwarantuje w ogólności największą liczbę warunków początkowych kończących się sukcesem w postaci stabilizacji robota w pozycji wyprostowanej. Wnioski te są zgodne z intuicyjnym pojmowaniem zagadnienia stabilizacji tego typu mechanizmów. Im niżej w strukturze mechanicznej umieścimy napęd, tym łatwiej jest sterować pozostałymi wyżej położonymi członami.

Kolejną preferowaną konfiguracją napędów gwarantującą dobre wyniki jest rozmieszczenie typu ( $\tau_2, \tau_3$ ). Obserwacja ta jest o tyle ciekawa, że częściowo przeczy powyższemu wnioskowi. Wg. autora można to tłumaczyć rodzajem „współpracy” obu położonych obok siebie napędów, celem wyprostowania i uniesienia struktury mechanicznej do pozycji zadanej. Podobnego efektu natomiast nie obserwujemy dla zestawu ( $\tau_1, \tau_3$ ).

Podsumowując można zauważyć, że umieszczenie napędów w ( $\tau_1, \tau_2$ ) zbliżone jest do robota typu *Pendubot*, natomiast w ( $\tau_2, \tau_3$ ) do robota typu *Acrobot*, czym należy zapewne tłumaczyć znaczną liczbę uzyskiwanych pozytywnych wyników.





# ROZDZIAŁ 7

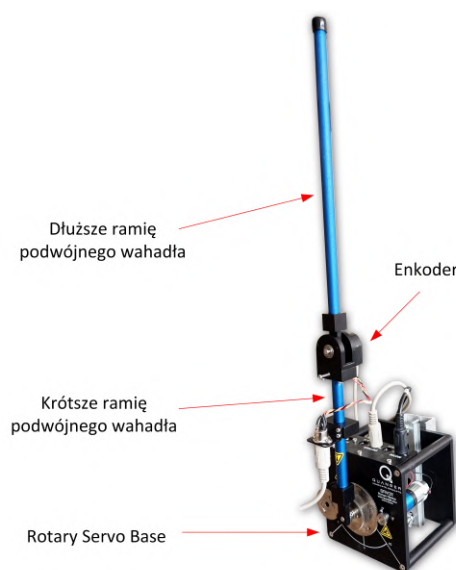
## Badania eksperymentalne

### 7.1 Obiekt sterowania i stanowisko laboratoryjne

#### 7.1.1 Stanowisko eksperymentalne – robot typu Pendubot

##### OPIS ROBOTA

Jednym z celów postawionych podczas realizacji niniejszej pracy było przygotowanie stanowiska laboratoryjnego, które pozwoliłoby na weryfikację eksperymentalną pewnej grupy algorytmów. W tym celu zmodyfikowano komercyjnie dostępny układ do prac eksperymentalnych z robotem typu underactuated. Prace eksperymentalne wykonane zostały przy użyciu zestawu z podwójnym wahadłem, zaprezentowanym na rysunku 7.1. Wspomniany robot jest zmodyfikowaną konstrukcją



Rysunek 7.1: Robot typu Pendubot

firmy Quanser – obrotowego podwójnego wahadła (ang. *Rotary Double Inverted Pendulum* [69]), przedstawionego na rysunku 7.2. Po przeprowadzonych modyfikacjach układ mechaniczny jest tożsamy z podwójnym odwróconym wahadłem. Parametry obiektu zebrano w Tabeli 7.1.

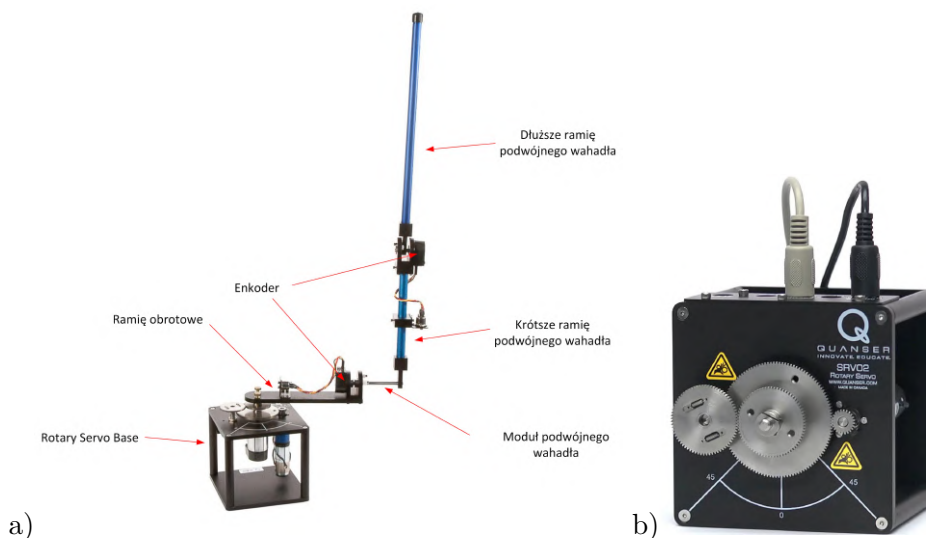
Analizowany układ eksperymentalny składa się z jednostki głównej (*Rotary Servo Base Unit* [70] – rys. 7.2b), zawierającej silnik, przekładnię z układem kasowania luzu, i enkoder sprzęgnięty z silnikiem oraz pasywnego *Modułu podwójnego wahadła*. Względem oryginalnego systemu z rysunku 7.2a, analizowany układ został pozbawiony „pierwszego” ramienia obrotowego, aby zapewnić bezpośrednie połączenie wału napędowego z krótszym ramieniem podwójnego wahadła.

Tabela 7.1: Parametry robota typu Pendubot

Ogniwo $i$	Masa $m_i$ [kg]	Długość ogniwa $L_i$ [m]	Środek masy $L_{c_i}$ [m]	Mom. bezwł. $I_i$ [kg m <sup>2</sup> ]
1	0.097	0.20	0.1635	0.0069*
2	0.127	0.3365	0.1778	0.0048

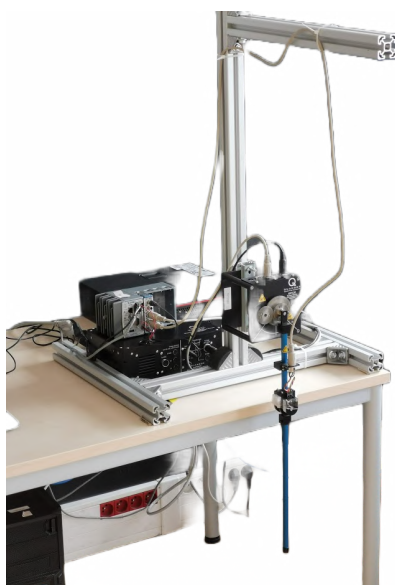
\* Moment bezwładności  $I_1$  uwzględnia masę enkodera  $m_{enc} = 0.141$  kg.

Uzyskujemy w ten sposób realizację struktury mechanicznej typu *Pendubot* – podwójnego wahadła z napędem w pierwszym złączu obrotowym.



Rysunek 7.2: a) Oryginalny system z obrotowym podwójnym wahadłem, przed modyfikacjami. b) Jednostka główna *Rotary Servo Base Unit* [70]

Ze względu na niską masę wahadła, wpływ na dynamikę np. przewodu od enkodera okazuje się na tyle znaczący, że istniała potrzeba jego „kompensacji”, jak to zostało przedstawione na rysunku 7.3, tzn. poprzez zastosowanie wysięgnika.



Rysunek 7.3: Robot typu Pendubot – Stanowisko testowe

Parametry elektromechaniczne jednostki głównej zawarto w tabeli 7.2.

Do implementacji na sprzęcie wykorzystano dedykowane środowisko *LabView*, oferowane wraz z systemem przez firmę *Quanser*.

Tabela 7.2: Parametry jednostki bazowej Servo

Symbol	Opis	Wartość
$V_{nom}$	Nominalne napięcie wejściowe	6.0 V
$R_m$	Rezystancja uzwojenia	2.6 $\Omega$
$L_m$	Indukcyjność uzwojenia	0.18 mH
$k_t$	Stała momentowa	$7.68 \times 10^{-3}$ Nm/A
$k_m$	Stała napięciowa	$7.68 \times 10^{-3}$ V/(rad/s)
$K_g$	Przełożenie przekładni	70
$\eta_m$	Sprawność silnika	0.69
$\eta_g$	Sprawność przekładni	0.90
$K_{enc}$	Rozdzielczość enkodera	4096 imp/obr

#### OGÓLNA STRUKTURA UKŁADU STEROWANIA

Algotmy stabilizacji zaprezentowane w rozdziale 4 określone są w funkcji czasu ciągłego. Celem praktycznej realizacji należy przejść do postaci dyskretniej, jako że sygnał sterowania obliczany jest przez system mikroprocesorowy w określonych, stałych odstępach czasu. W rozważanej aplikacji oprócz komputera PC, który wykorzystywany jest do wysokopoziomowego programowania robota (środowisko *LabView*), wykorzystywany jest również dedykowany sterownik wraz ze wzmacniaczem (Rys. 7.4), konieczny do generowania odpowiedniego poziomu napięć podawanych na silnik robota. Opracowano następującą architekturę układu sterowania:

- Komputer klasy PC odpowiada za:
  - nadzór nad eksperymentem oraz rejestrowanie danych;
- Dedykowany sterownik odpowiada za:
  - komunikację z komputerem PC oraz realizację algorytmu sterowania na poziomie dynamiki (obliczanie napięć sterujących, estymat parametrów, itd.).



Rysunek 7.4: a) Sterownik *Quanser Q1-cRIO* [68], b) Wzmacniacz mocy *VoltPAQ-X1 Amplifier* [72]

## 7.2 Wyniki eksperymentalne

Niniejszy rozdział przedstawia wyniki eksperymentalne dla algorytmów prezentowanych w rozdziałach 4.3-4.4. Podobnie jak miało to miejsce w części 5.2, wyniki zostaną przedstawione w sekwencji związanej z zastosowanym prawem sterowania, jednakże wyłącznie w odniesieniu do robota typu Pendubot.

Procedura badań eksperymentalnych była następująca. Na podstawie danych uzyskanych w rozdziale 5.2 i wyznaczonych dla zestawu oznaczonego jako *sim\_1* obszarów zbieżności, wybrano początkową konfigurację mechaniczną robota dla analizowanych algorytmów, a następnie dokonano symulacji jego ruchu.

Ten sam warunek początkowy był następnie warunkiem startu dla próby eksperymentalnej.

Prezentacja wyników przedstawia się następująco. Dla każdego z rozpatrywanych przypadków przedstawiono tabelę zawierającą warunki symulacji i eksperymentu, oraz schematyczną wizualizację pozycji początkowej robota. Wspomniana tabela zawiera zarówno nastawy regulatorów użyte podczas symulacji, jak również odpowiadające im nastawy użyte w eksperymencie. W kolejnym kroku przedstawiono obszar zbieżności dla danej metody sterowania i warunków *sim\_1* z rozdziału 5.2.

Stawiając za cel wzajemne porównanie wyników symulacyjnych oraz eksperymentalnych, zestawiono ze sobą przebiegi wynikające z symulacji numerycznych, oraz te otrzymane w wyniku działania na fizyczny obiekt odpowiedniego prawa sterowania. Porównaniu podlegają przebiegi kątów w złączach, jak również przebieg sygnału wejściowego.

Dla algorytmów, dla których parametr *Area* jest mniejszy od 3% prezentacji podlega jeden wybrany warunek początkowy. Dla pozostałych algorytmów badano kilka przypadków, celem sprawdzenia ich działania dla różnych warunków początkowych.

Zasadnicza prezentacja wyników to rysunki zatytułowane *Położenia kątowe* oraz *Sygnał wejściowy*, przedstawiające przebiegi tychże sygnałów dla odpowiednio symulacji – rysunek „a)” – i eksperymentu – rysunek „b)”, – zestawione ze sobą celem wzajemnego ich porównania.

Skróty użyte w tabelach zatytułowanych *Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej* są następujące:

- *Typ* – oznacza rodzaj algorytmu podlegającego sprawdzeniu,
- $(q_{10}, q_{20})$  – wybrany warunek początkowy podlegający sprawdzeniu,
- $V_{\text{sat}}$  – maksymalna wartość sygnału sterującego. Odpowiada ono sytuacji *sim\_1* z rozdziału 5.2,
- *SIM* – wartości nastaw sterownika w symulacji,
- *EXP* – wartości nastaw sterownika w eksperymencie,
- $u_{\text{stab}}$  – dotyczy nastaw regulatora stabilizującego w otoczeniu pozycji zadanej,
- $k_P, k_D, k_E, \dots$  – nastawy sterownika  $u_{\text{swing}}$ .

## 7.2.1 MCG+LQR

## PRZYPADK 1

Typ	MCG+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(65, 25)$ deg	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9.8, -9, -0.6, -0.3\}$	

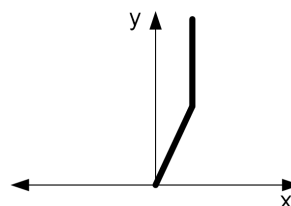
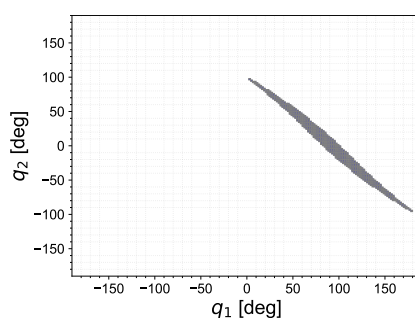
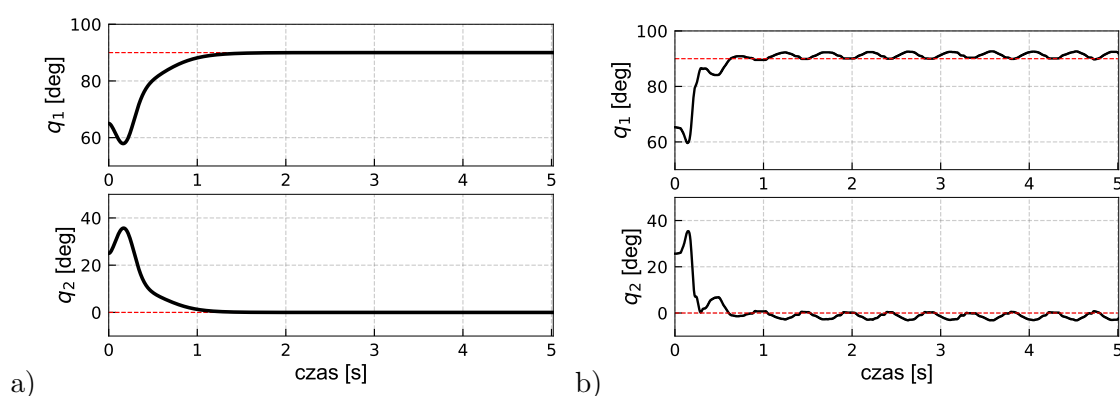


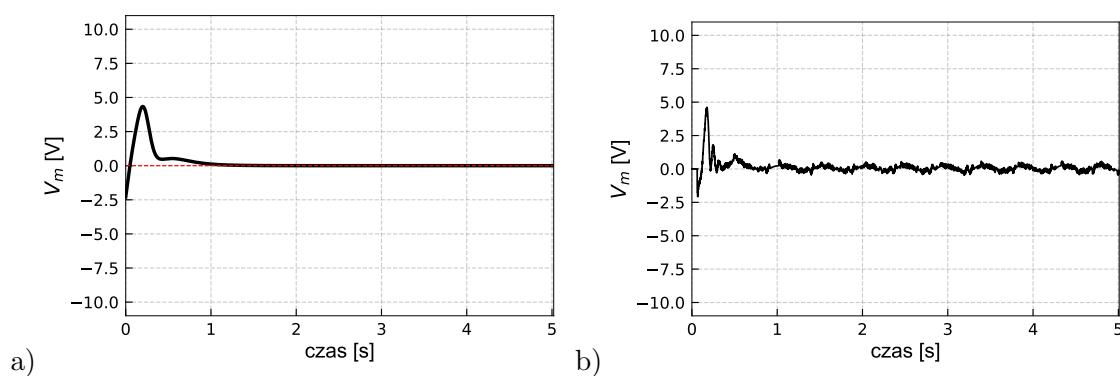
Tabela 7.3: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.5: Obszar zbieżności



Rysunek 7.6: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.7: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 2

Typ	MCG+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(130, -40)$ deg	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9.8, -9, -0.6, -0.3\}$	

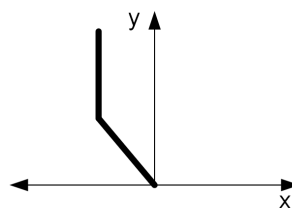
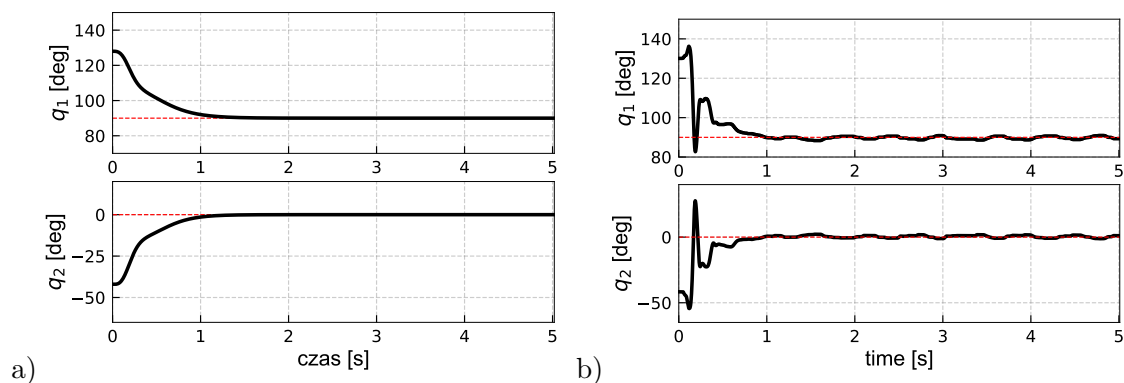
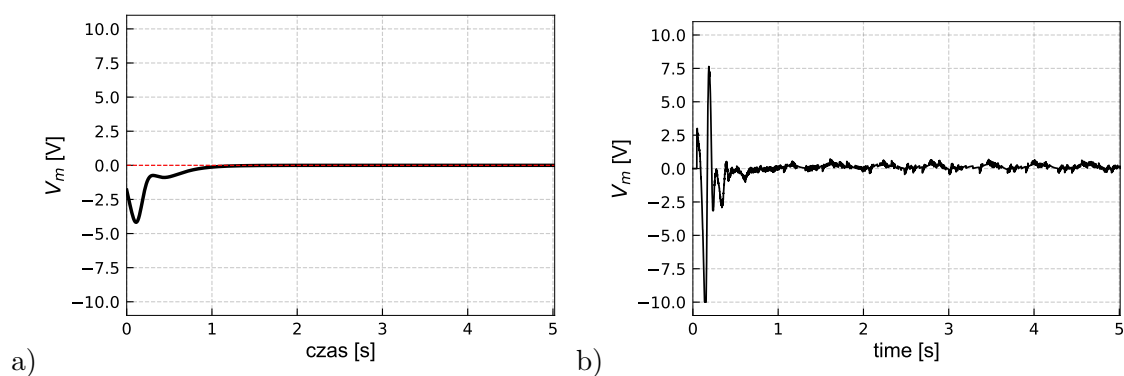


Tabela 7.4: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.8: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.9: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## 7.2.2 MCG + Energy

## PRZYPADK 1

Typ	MCG+Energy	
$(q_{1_0}, q_{2_0})$	$(180, -96) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9.8, -9, -0.6, -0.3\}$	
SIM: $k_p, k_D, k_E$	$\{5.4, 0.1, 0.31\}$	
EXP: $k_p, k_D, k_E$	$\{5.1, 0.1, 0.01\}$	

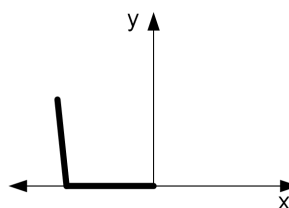
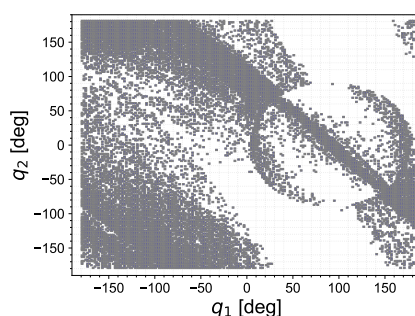
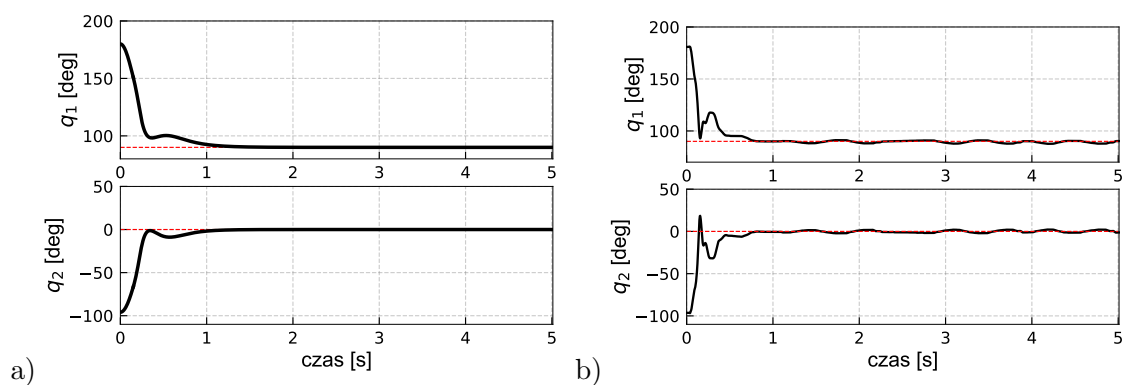


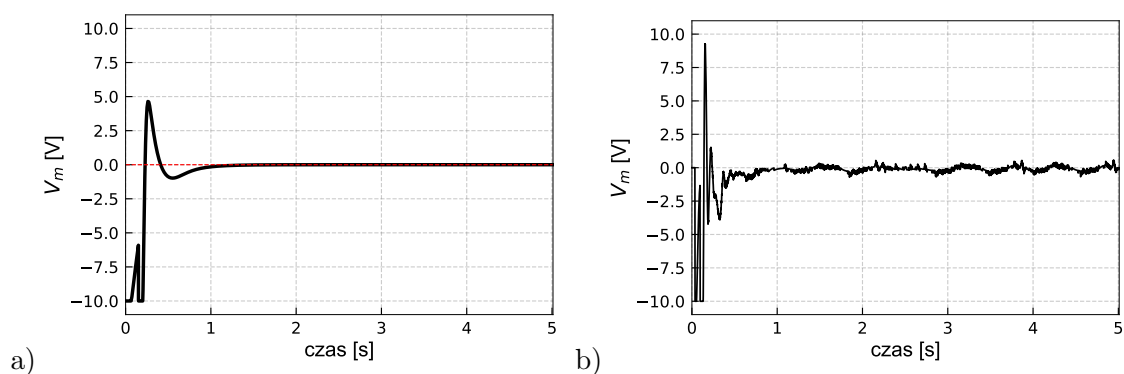
Tabela 7.5: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.10: Obszar zbieżności



Rysunek 7.11: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.12: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment



## 7.2.3 Spong + LQR

## LINEARYZACJA TYPU COLLOCATED

## PRZYPADK 1

Typ	Collocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(-52, 72) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9.8, -9, -0.6, -0.3\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{196, 10.7\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{180, 10\}$	

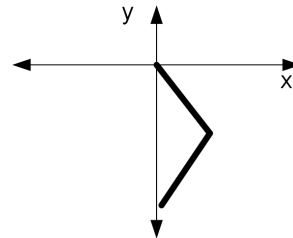
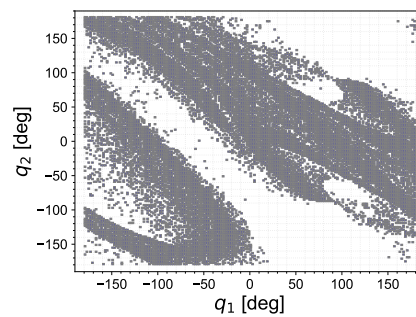
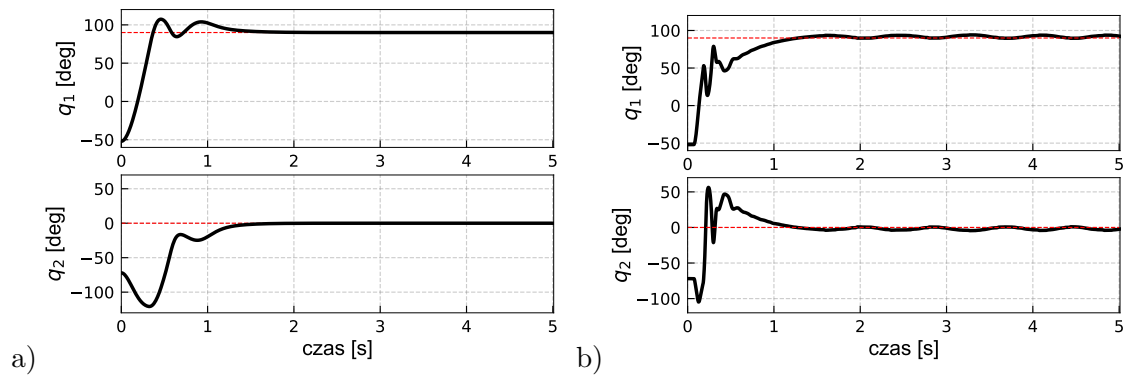


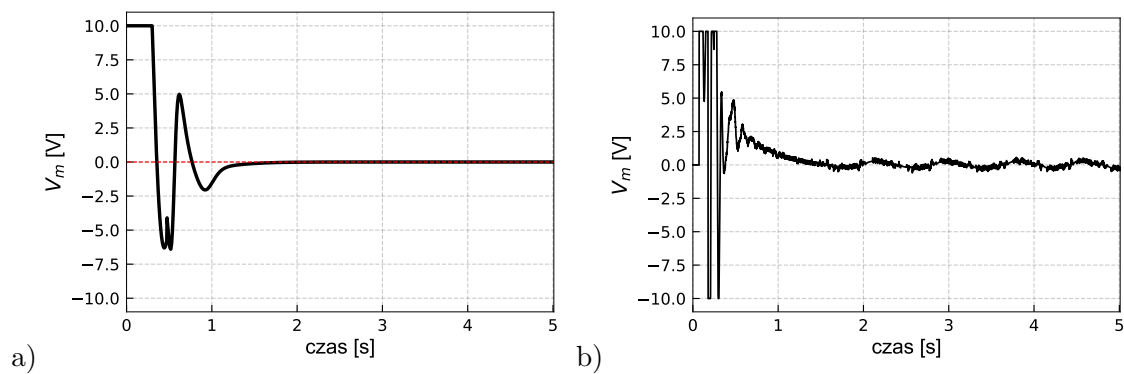
Tabela 7.6: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.13: Obszar zbieżności



Rysunek 7.14: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.15: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 2

Typ	Collocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(-10, 103) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9.8, -9, -0.6, -0.3\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{196, 10.7\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{180, 10\}$	

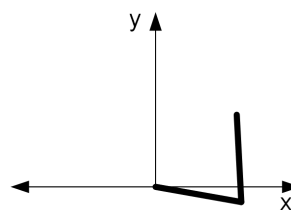
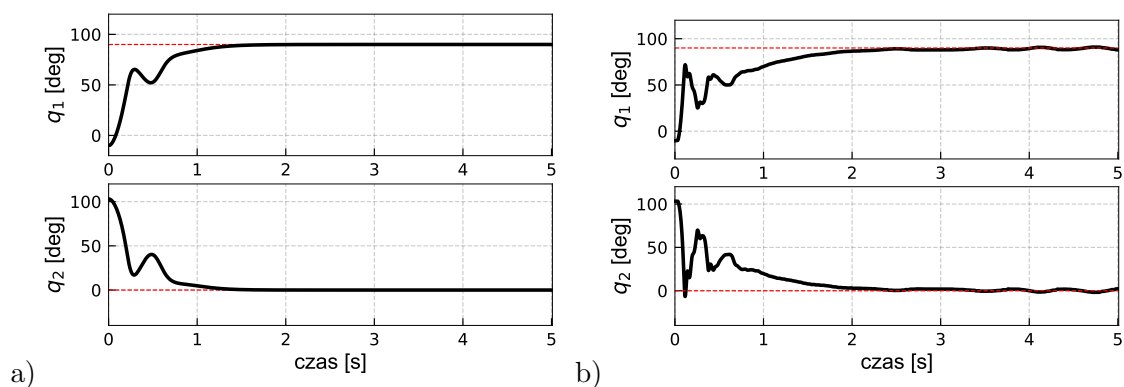
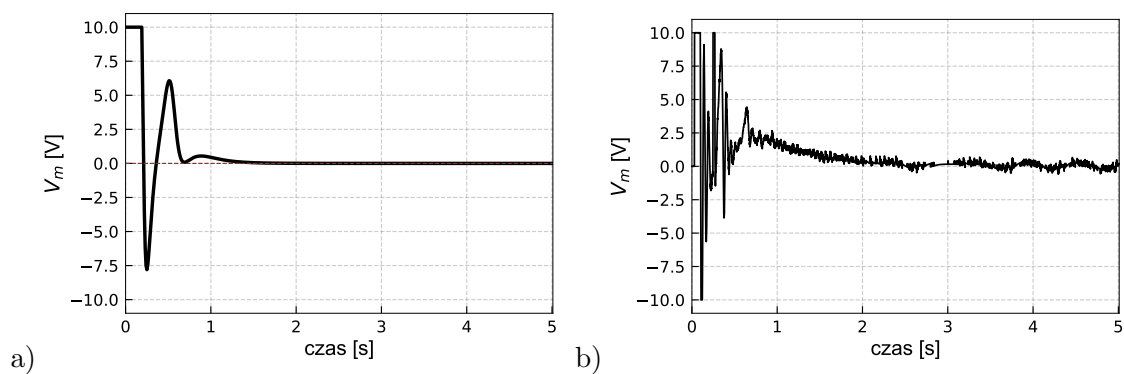


Tabela 7.7: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.16: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.17: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 3

Typ	Collocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(180, -92) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9, -9, -1, -0.6\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{256, 9.6\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{250, 15\}$	

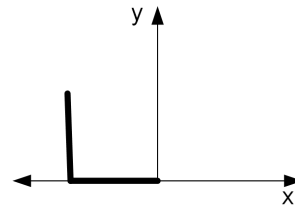
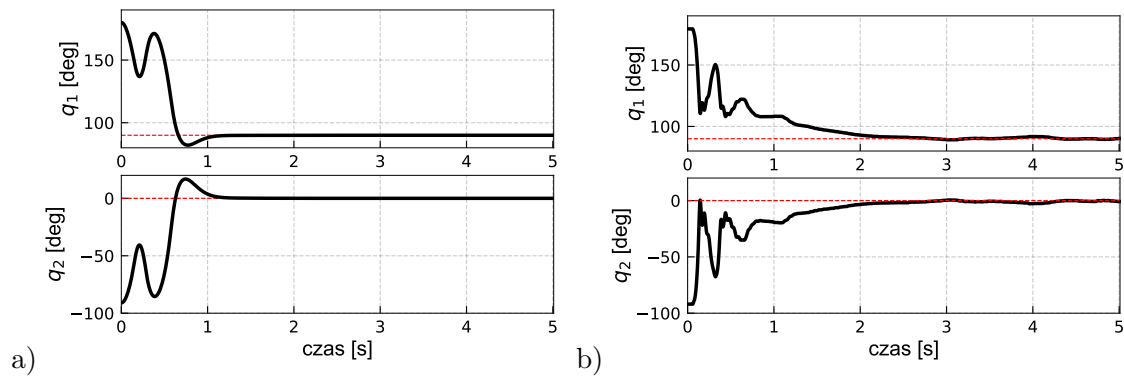
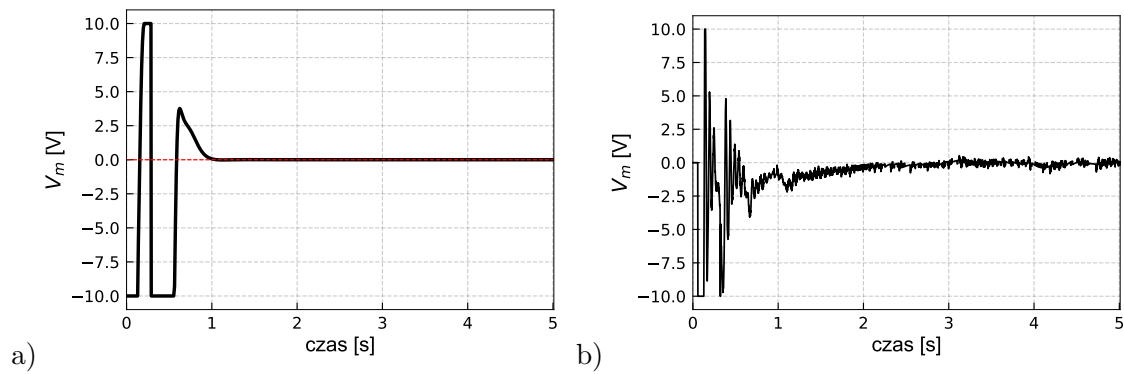


Tabela 7.8: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.18: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.19: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 4

Typ	Collocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(35, 63)$ deg	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-9, -9, -1, -0.6\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{144, 9.6\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{150, 10\}$	

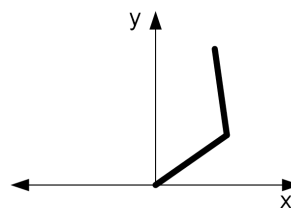
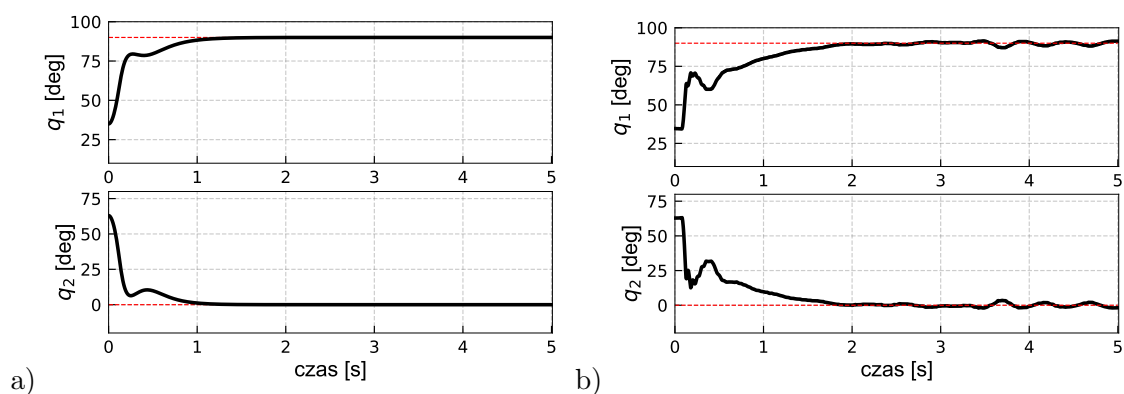
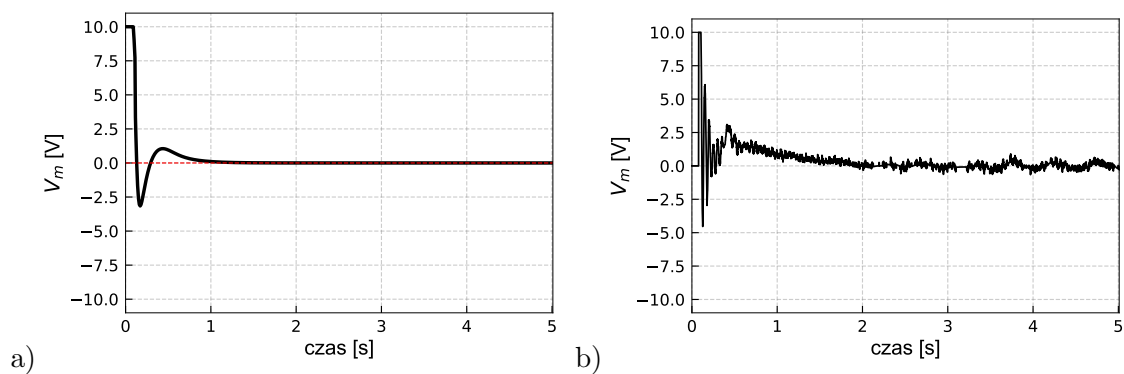


Tabela 7.9: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.20: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.21: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## LINEARYZACJA TYPU NON-COLLOCATED

## PRZYPADK 1

Typ	NonCollocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(-10, 103) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-14, -14, -0.9, -0.6\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{529, 9.2\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{550, 10\}$	

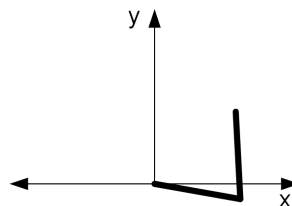
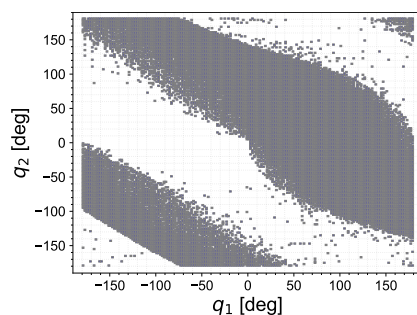
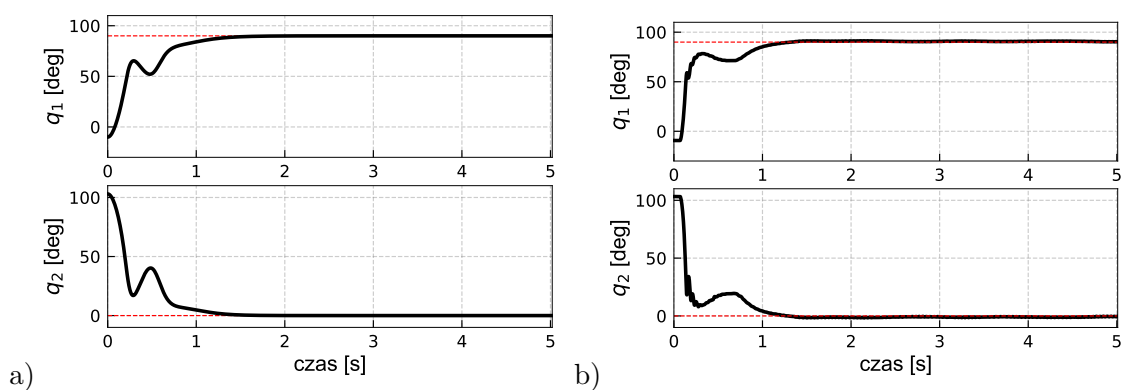


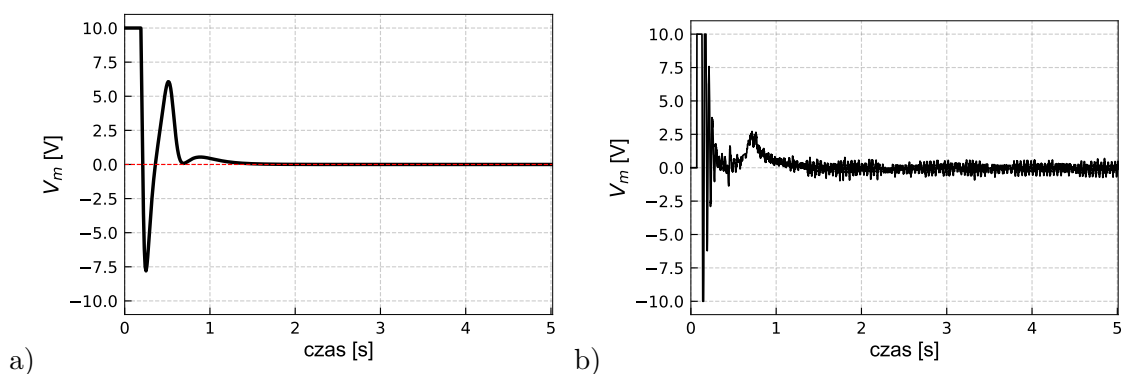
Tabela 7.10: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.22: Obszar zbieżności



Rysunek 7.23: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.24: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADEK 2

Typ	NonCollocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(0, 95) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-10.4, -9.7, -2.5, -1.9\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-11, -11, -0.6, -0.3\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{180, 10\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{180, 10\}$	

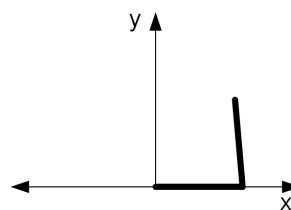
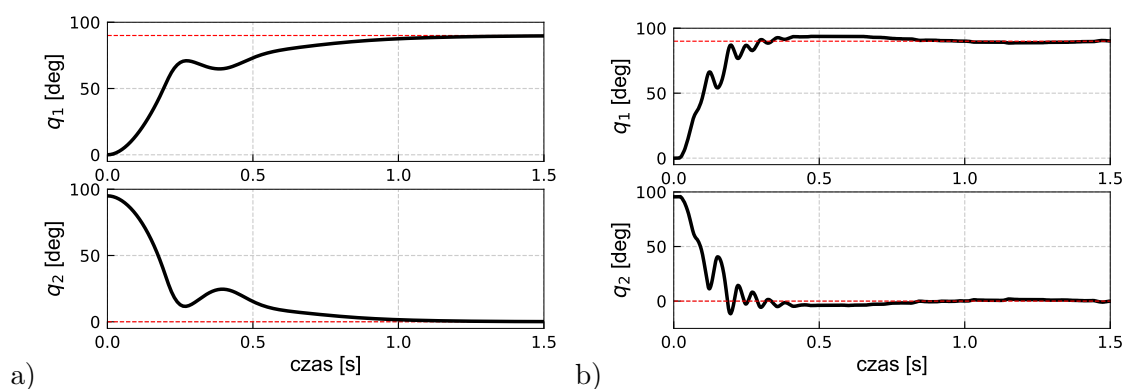
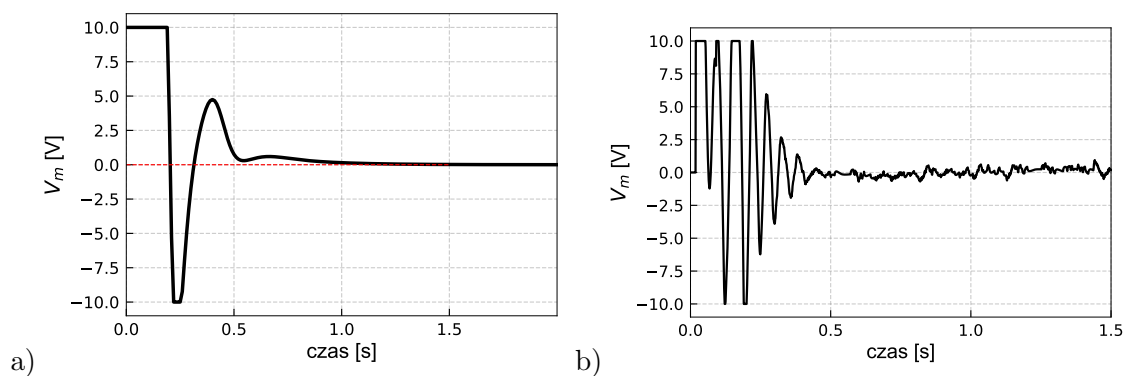


Tabela 7.11: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.25: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.26: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 3

Typ	NonCollocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(0, 92) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-24.0, -21.2, -5.9, -4.2\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-24, -21, -2.5, -1.5\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{169, 49\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{169, 49\}$	

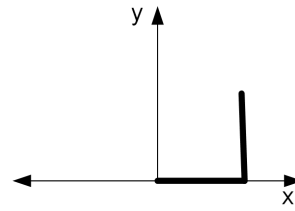
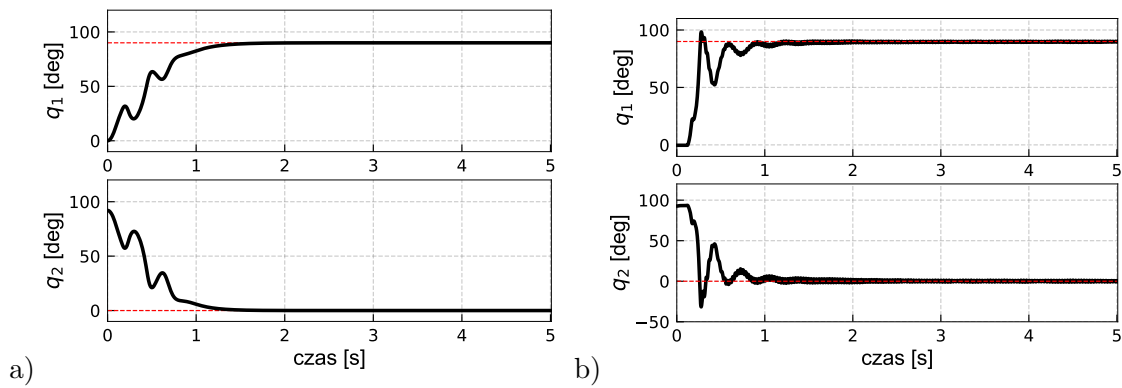
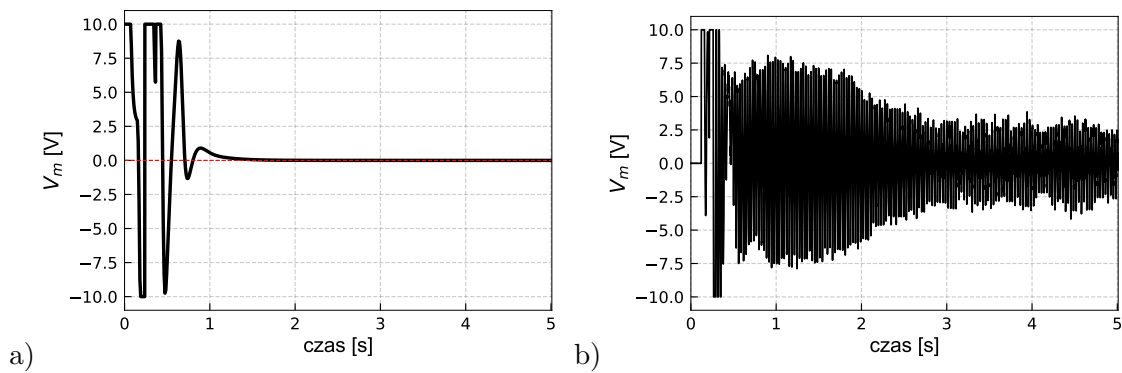


Tabela 7.12: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.27: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.28: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment



## PRZYPADEK 4

Typ	NonCollocated	
$(q_{10}, q_{20})$	$(150, -80) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-24.0, -21.2, -5.9, -4.2\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-24, -21, -2.5, -1.5\}$	
SIM: $k_p, k_D$	$\{784, 12\}$	
EXP: $k_p, k_D$	$\{784, 12\}$	

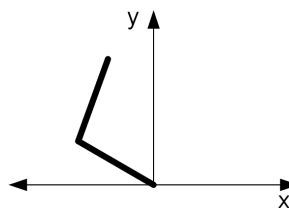
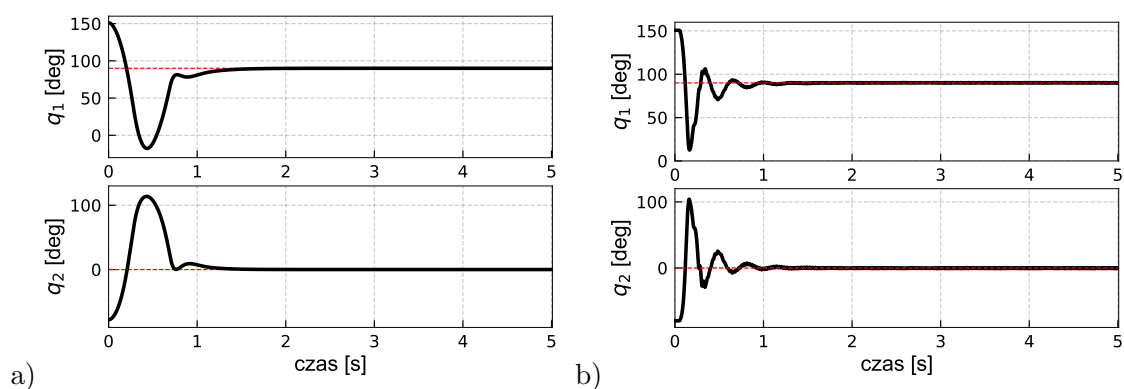
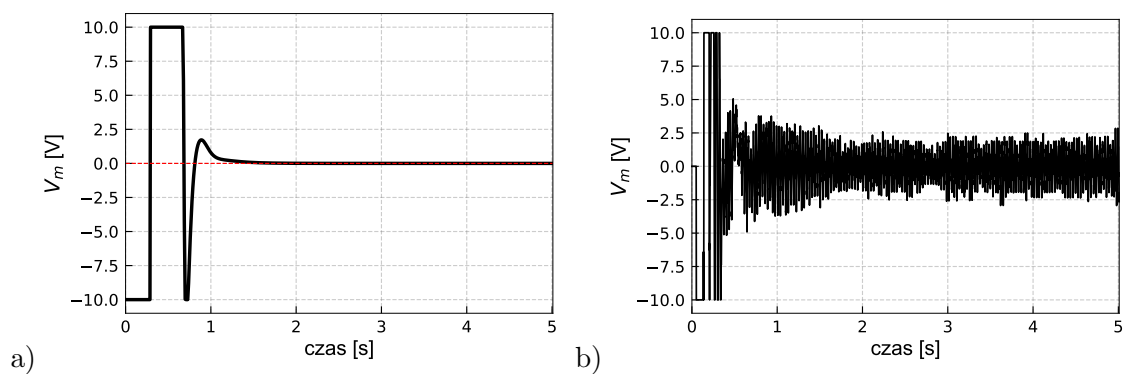


Tabela 7.13: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.29: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.30: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## 7.2.4 QPZ

## PRZYPADK 1

Typ		QPZ+LQR
$(q_{10}, q_{20})$		$(65, 25)$ deg
$V_{sat}$		10 V
SIM:	$u_{stab}$	$\{-94 - 88, 26, -184\}$
EXP:	$u_{stab}$	$\{-150, -150, 11, -100\}$

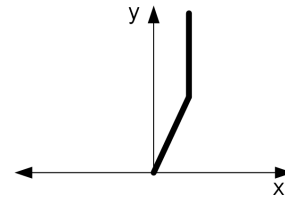
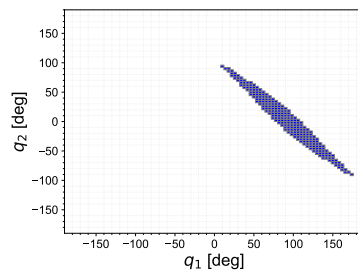
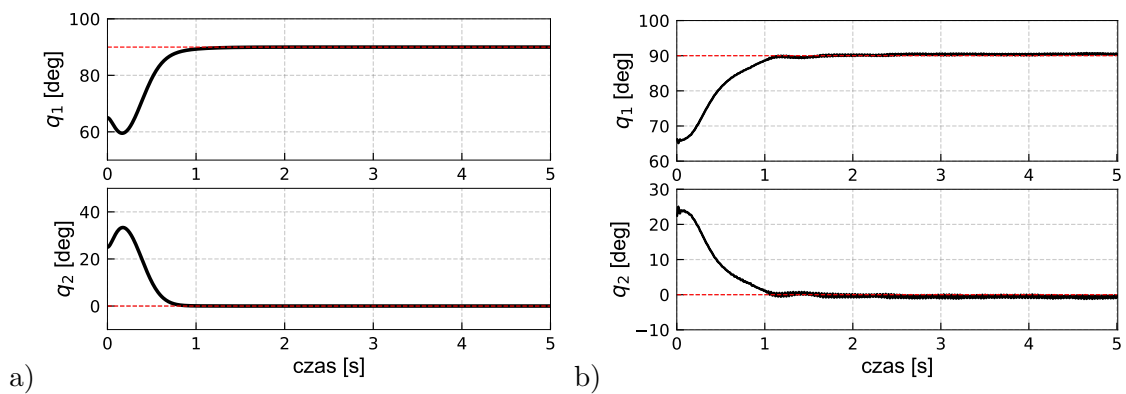


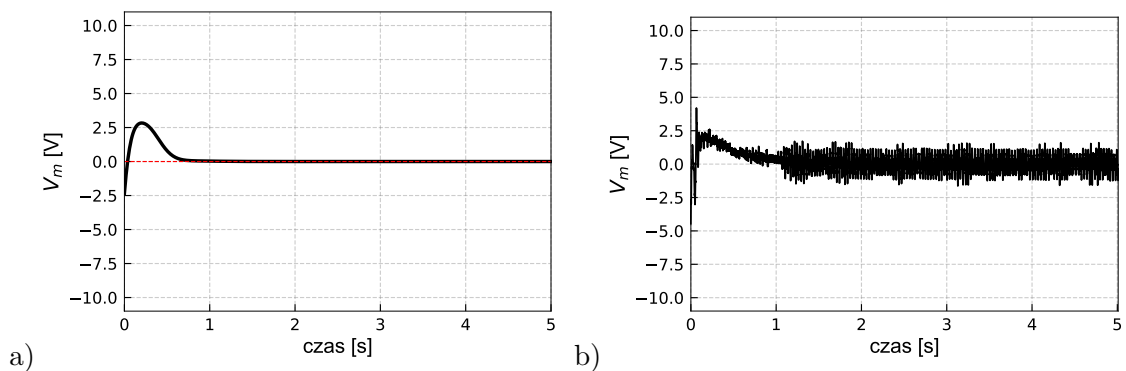
Tabela 7.14: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.31: Obszar zbieżności



Rysunek 7.32: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.33: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 2

Typ	QPZ+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(130, -40) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-94, -88, 26, -184\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-150, -150, 11, -100\}$	

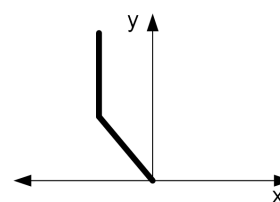
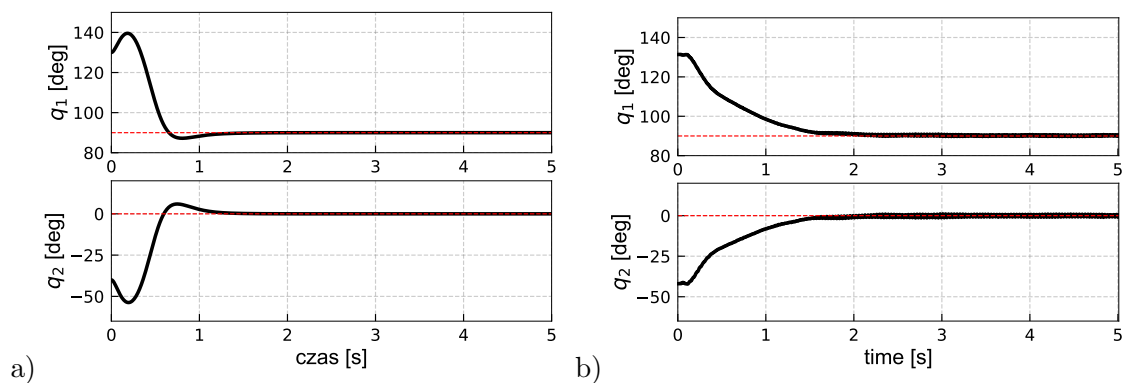
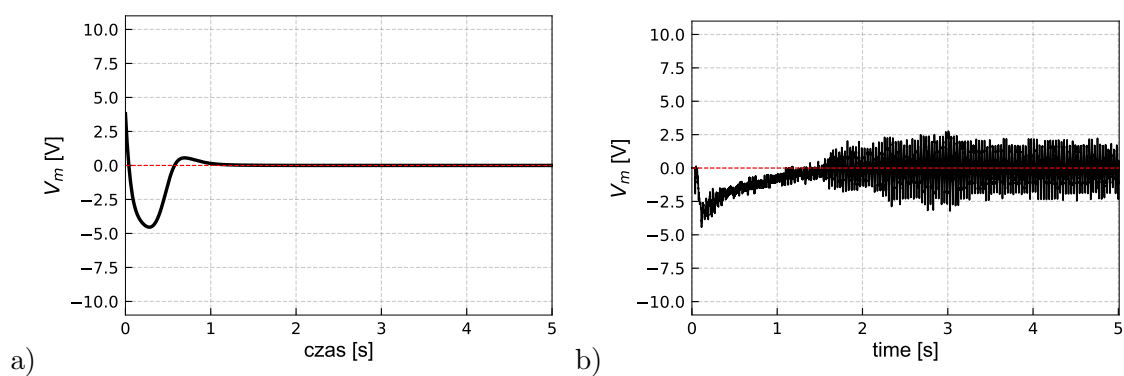


Tabela 7.15: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.34: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.35: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 3

Typ	QPZ+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(71, 20) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-164.4, -147.5, 32.7, -309.8\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-150, -150, 11, -100\}$	

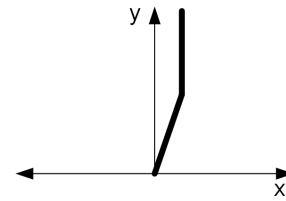
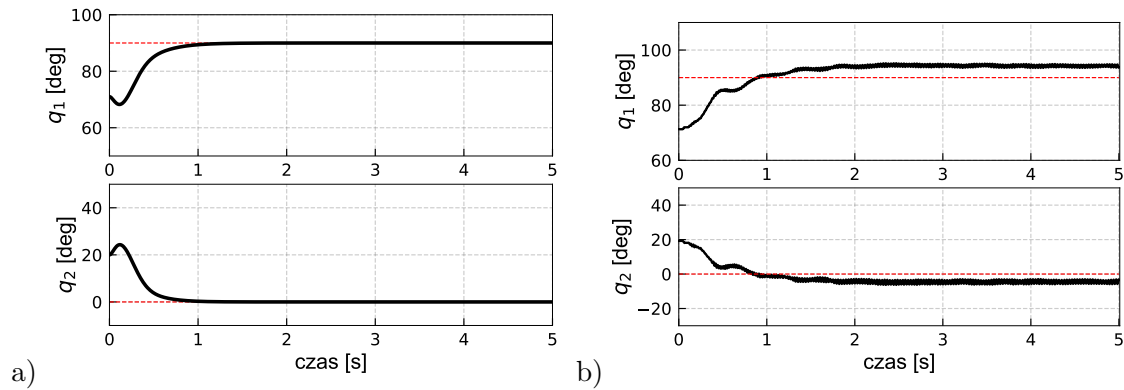
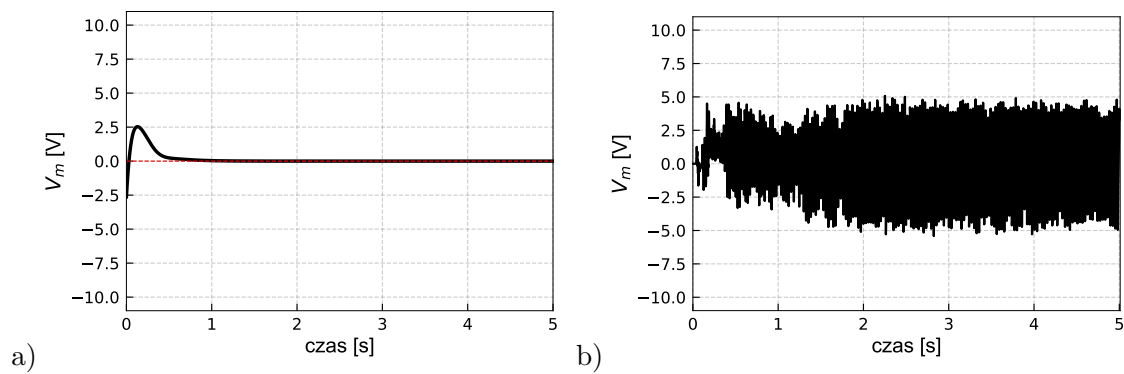


Tabela 7.16: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.36: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment

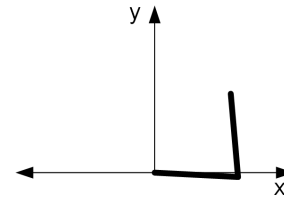


Rysunek 7.37: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

### 7.2.5 QPZ + Energy

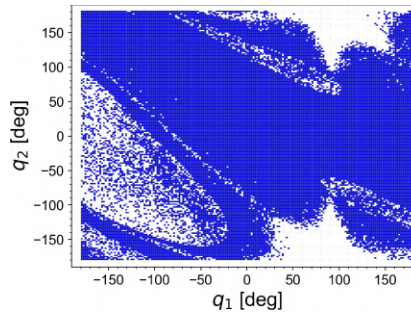
#### PRZYPADK 1

Typ		QPZ+Energy+LQR
$(q_{10}, q_{20})$		$(-3, 102) \text{ deg}$
$V_{sat}$		10 V
SIM:	$u_{stab}$	$\{-94 - 88, 26, -184\}$
EXP:	$u_{stab}$	$\{-140, -140, 11, -100\}$
SIM:	$k_p, k_D, k_E$	$\{2.1, 0.1, 0.01\}$
EXP:	$k_p, k_D, k_E$	$\{2.1, 0.1, 0.01\}$

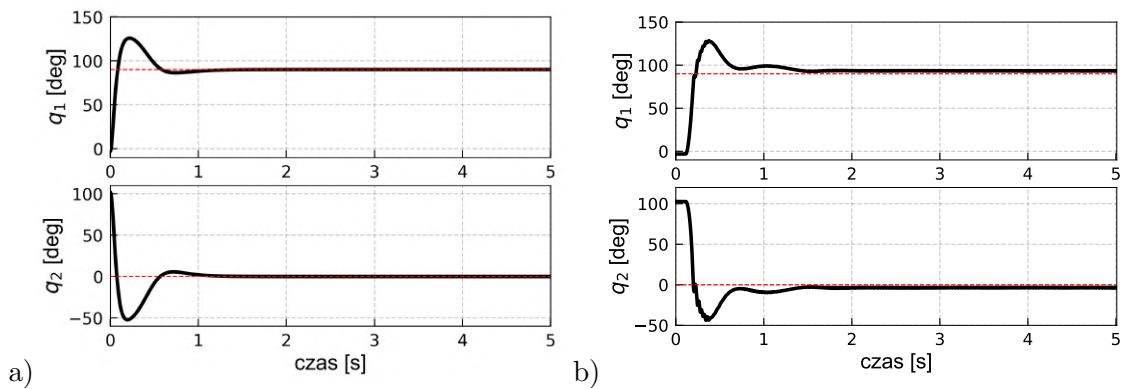


EXP:  $u_{stab} : \{-160, -150, 32, -300\}$  pojawiają się silne oscylacje w płaszczyźnie czołowej

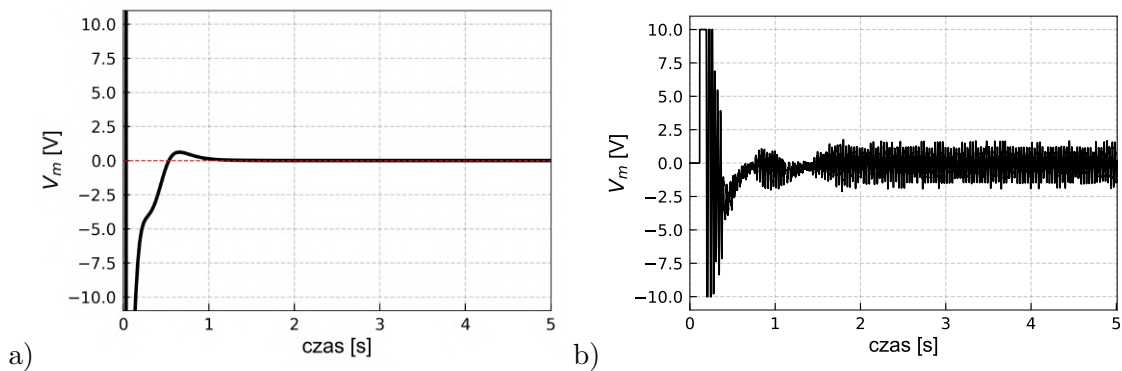
Tabela 7.17: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.38: Obszar zbieżności



Rysunek 7.39: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.40: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 2

Typ	QPZ+Energy+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(180, -100) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-164.4, -147.5, 32.7, -309.8\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-160, -150, 11, -100\}$	
SIM: $k_p, k_D, k_E$	$\{2.1, 0.1, 0.01\}$	
EXP: $k_p, k_D, k_E$	$\{2.1, 0.1, 0.01\}$	

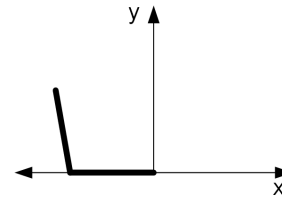
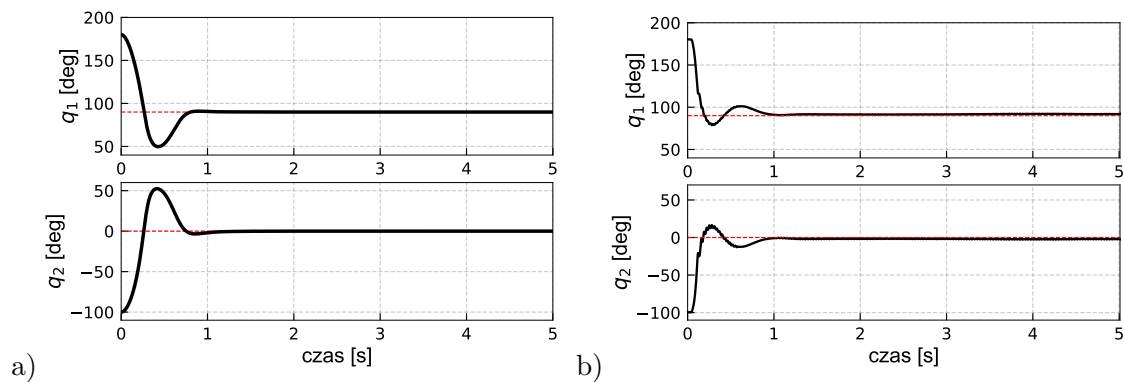
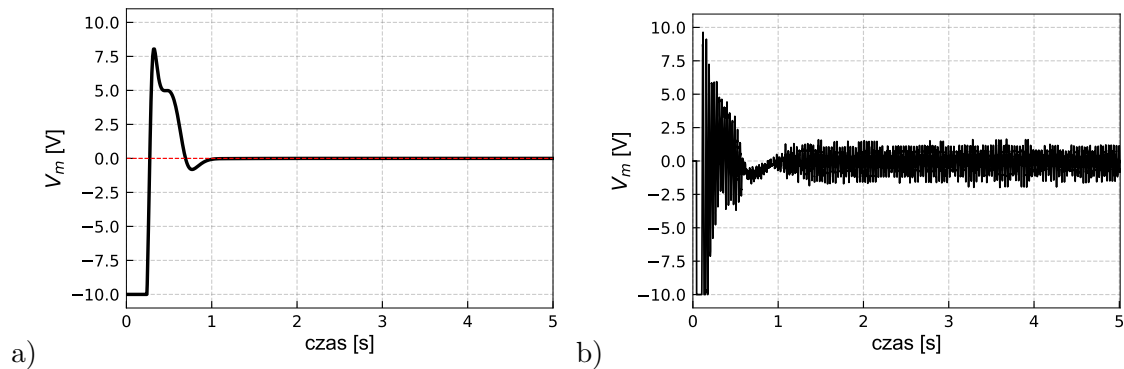


Tabela 7.18: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej

EXP:  $u_{stab} \{-160, -150, 32, -300\}$  też działa, ale pojawiają się silne oscylacje w płaszczyźnie czołowej



Rysunek 7.41: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.42: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## 7.2.6 PN-QP

## PRZYPADK 1

Typ		PN-QP+LQR
$(q_{10}, q_{20})$		$(65, 25) \text{ deg}$
$V_{sat}$		10 V
SIM:	$u_{stab}$	$\{-1187, -236, 314, 26\}$
EXP:	$u_{stab}$	$\{-1300, -130, 390, 8\}$

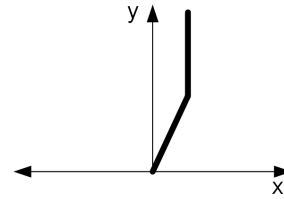
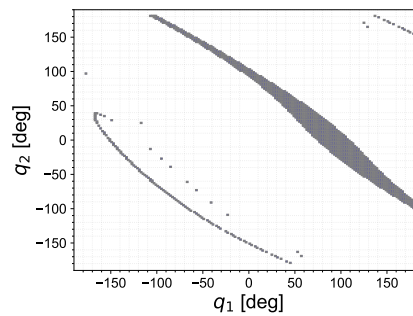
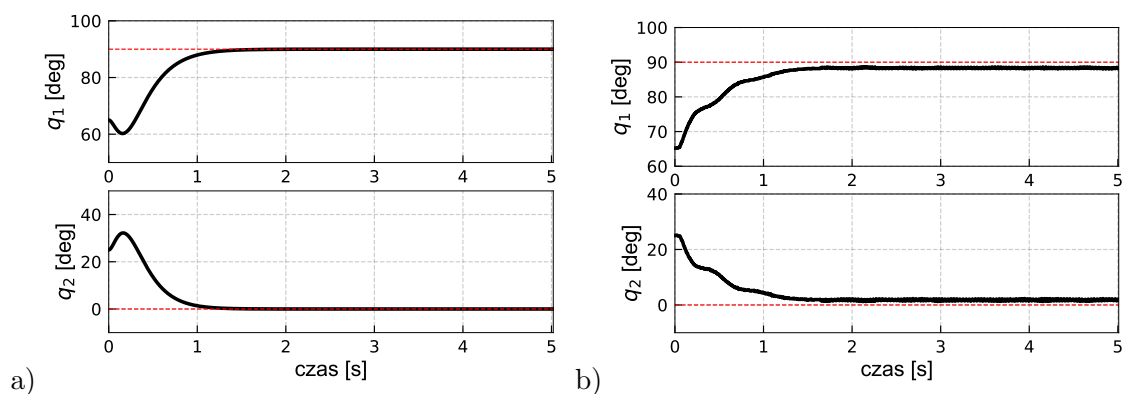


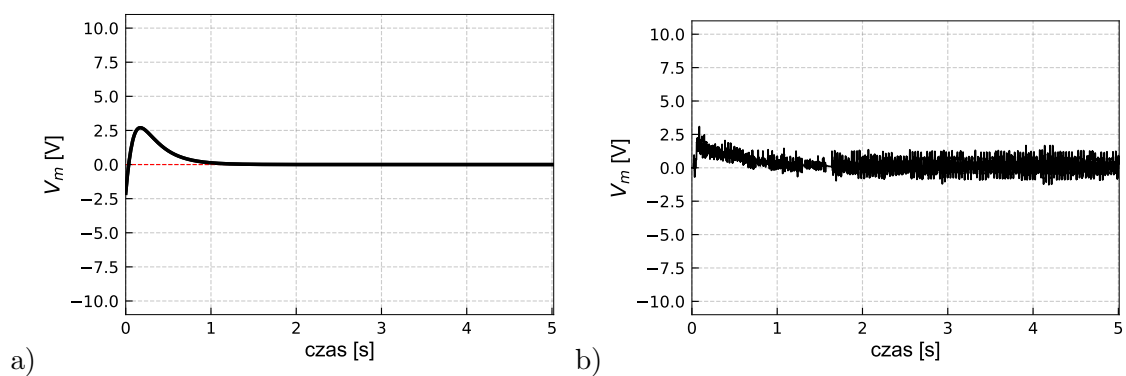
Tabela 7.19: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.43: Obszar zbieżności



Rysunek 7.44: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.45: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment



## PRZYPADEK 2

Typ	PN-QP+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(130, -40) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-1187, -236, 314, 26\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-1300, -130, 390, 8\}$	

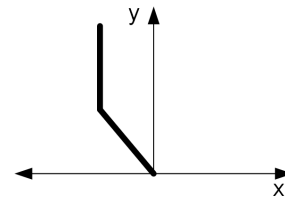
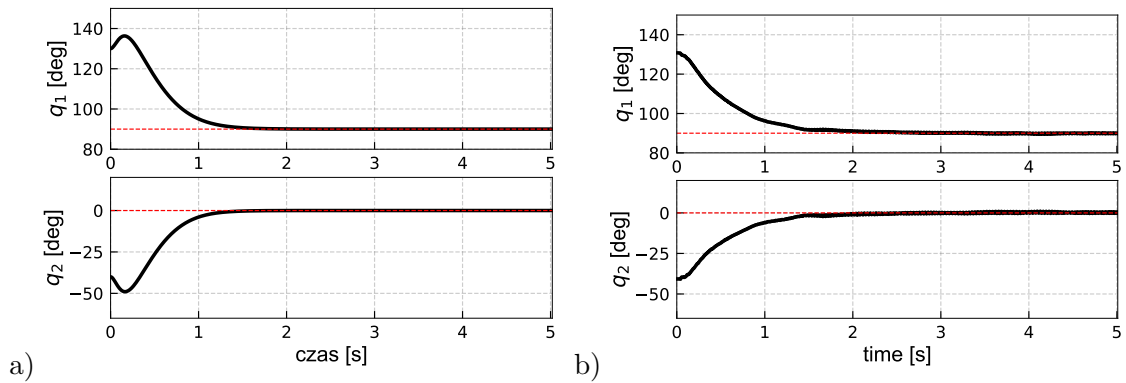
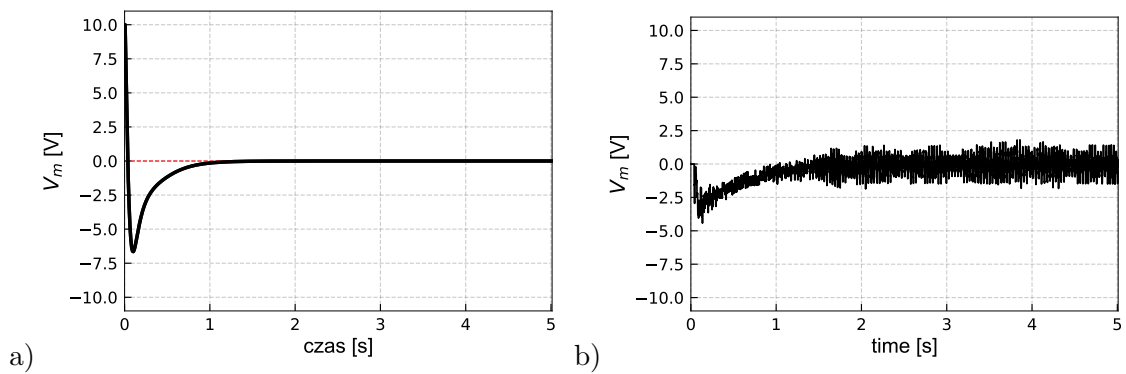


Tabela 7.20: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.46: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.47: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADEK 3

Typ	PN-QP+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(37, 67)$ deg	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-1412, -280, 360, 27\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-1000, -100, 300, 6\}$	

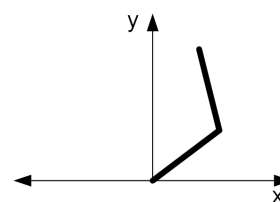
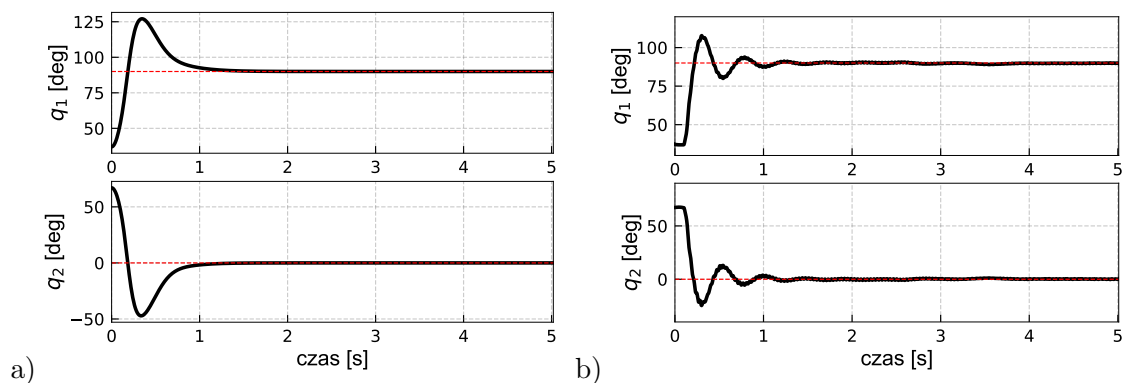
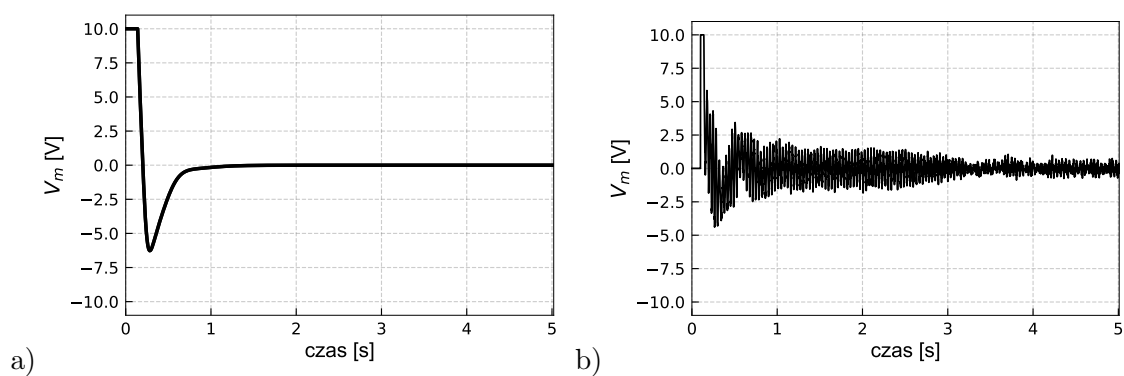


Tabela 7.21: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.48: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.49: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADEK 4

Typ	PN-QP+LQR	
$(q_{10}, q_{20})$	$(130, -42) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-1412, -280, 360, 27\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-1300, -130, 390, 8\}$	

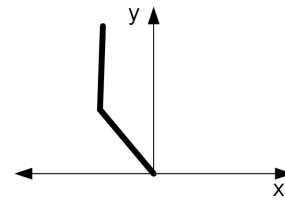
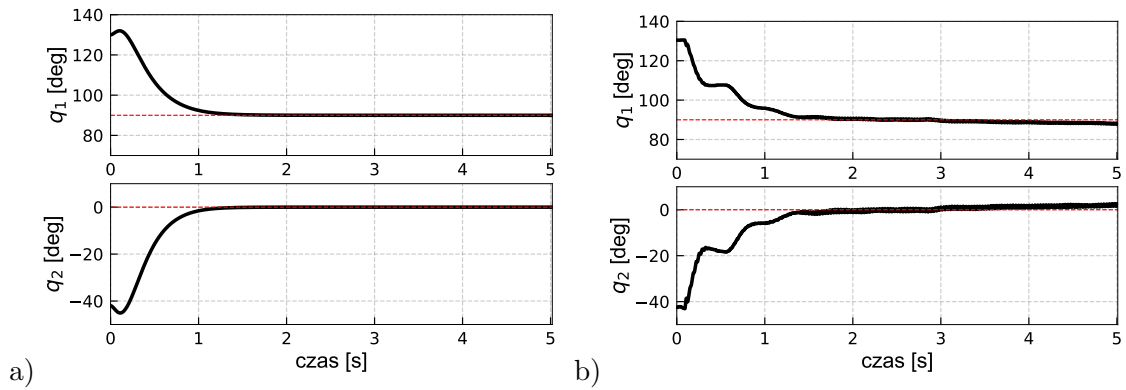
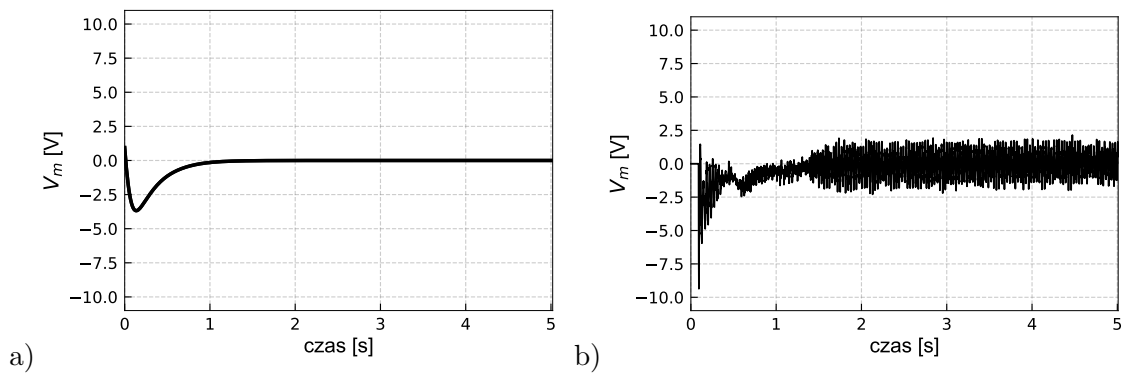


Tabela 7.22: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.50: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.51: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADK 5

Typ	PN-QP	
$(q_{10}, q_{20})$	$(20, 101) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-1187, -236, 314, 26\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-1300, -130, 390, 8\}$	

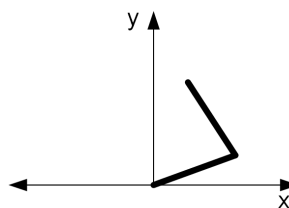
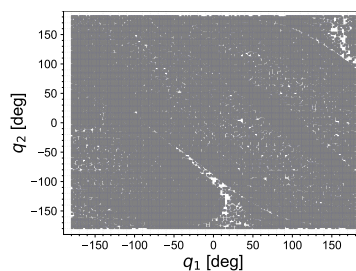
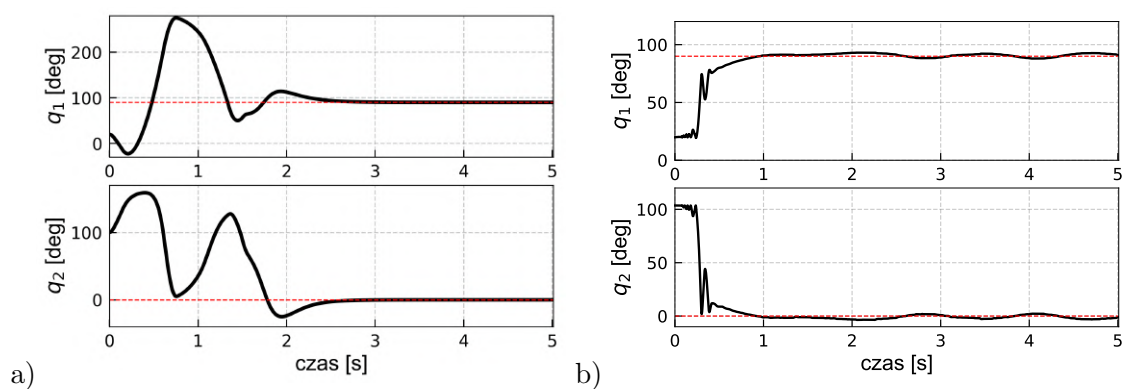


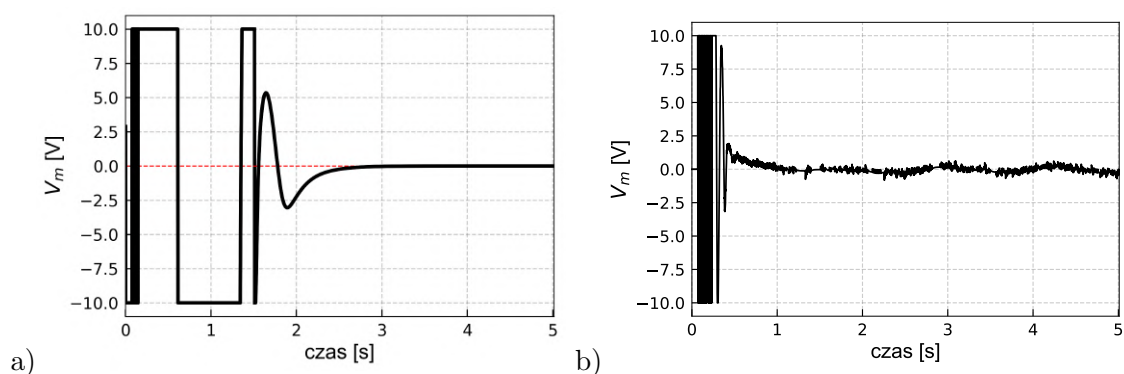
Tabela 7.23: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.52: Obszar zbieżności



Rysunek 7.53: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.54: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

## PRZYPADEK 6

Typ	PN-QP	
$(q_{10}, q_{20})$	$(181, -103) \text{ deg}$	
$V_{sat}$	10 V	
SIM: $u_{stab}$	$\{-1187, -236, 314, 26\}$	
EXP: $u_{stab}$	$\{-1300, -130, 390, 8\}$	

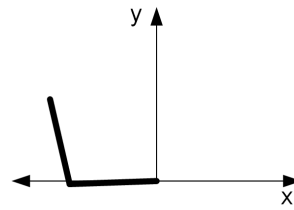
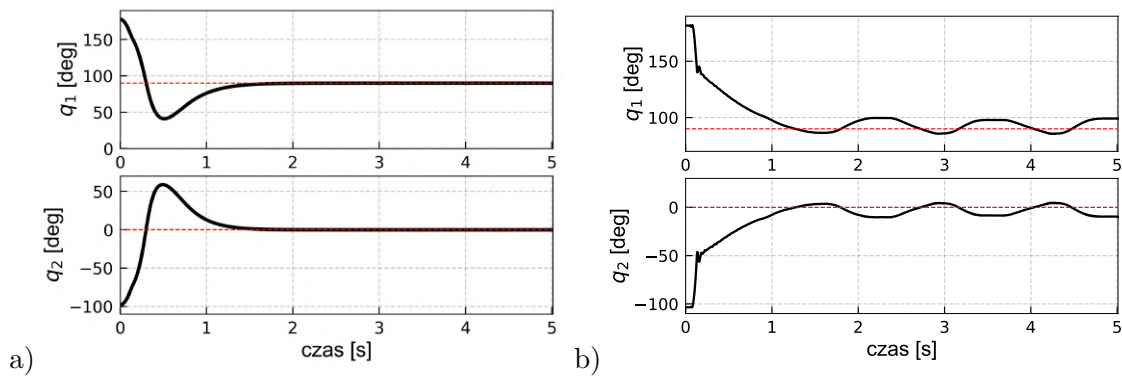
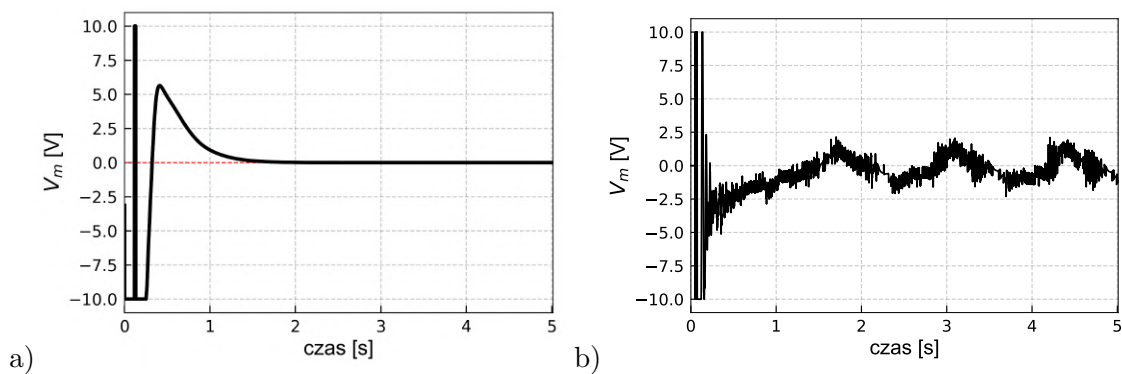


Tabela 7.24: Warunek początkowy i wizualizacja pozycji początkowej



Rysunek 7.55: Położenia kątowe: a) symulacja, b) eksperyment



Rysunek 7.56: Sygnał wejściowy: a) symulacja, b) eksperyment

### 7.3 Wnioski płynące z eksperymentu

Analizując przykłady z rozdziału 7.2 można zauważyć dużą zbieżność wyników symulacyjnych z ich odpowiednikami pochodzącymi ze stanowiska eksperymentalnego. Mimo tego niektóre przypadki wskazują na różnice między odpowiedzią układu symulacyjnego i rzeczywistego. Wynika to przede wszystkim z niepewności opisu obiektu zarówno z uwagi na parametry jak i strukturę. W trakcie symulacji pominięto wiele kwestii, jak np. tarcie, czy aerodynamiczne opory ruchu powstające podczas szybkiego wymachu wahadła. Stanowisko eksperymentalne także posiada swoje wady i ograniczenia, które rzutują na przebieg eksperymentów. Jednym z nich jest fakt, że złącze drugie nie może wykonać ruchu obrotowego przekraczającego wartość  $104^\circ$ . Ograniczenie to wynika wprost z konstrukcji mechanicznej wahadła. W efekcie niemożliwym jest wykonanie badań eksperymentalnych dla części z otrzymanych wyników symulacyjnych. Ponadto brak możliwości obrotu złącza drugiego o większy kąt uniemożliwia sprawdzenie zdolności do realizacji zadania *swing-up* z pozycji początkowej  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , jako że badania symulacyjne jasno wskazują na konieczność często więcej niż jednego obrotu, celem dźwignięcia robota ponad płaszczyznę wyznaczoną przez jego pozycję  $(q_1, q_2) = (0, 0)$ .

Pośrednio efekt podniesienia wahadła można uzyskać dopuszczając przypadki, które autor roboczo określa mianem „z odbiciami”. Oznacza to, że dopuszcza się sytuacje w których drugie ramię uderza o swój mechaniczny ogranicznik, powodując, że ruch całego mechanizmu nadal trwa. Zagadnienie to było również przedmiotem analizy symulacyjnej, jednakże ze względów praktycznych zarzucono to podejście, mając na celu niedopuszczenie do uszkodzenia wahadła. Niemniej należy podkreślić, że istnieje możliwość pewnego rozszerzenia zakresu badań eksperymentalnych, niestety kosztem zniszczenia stanowiska badawczego.

Drugim ważnym ograniczeniem rzutującym na przebieg eksperymentu jest rozdzielczość enkoderów i związana z tym kwestia estymacji prędkości. Stosunkowo niska rozdzielczość przetwornika obrotowo-impulsowego sprawia, że informacja o prędkości jest istotnie zaszumiona. W efekcie algorytmy bazujące na dynamice otrzymują nie do końca poprawną informację o aktualnej prędkości. Niemniej jednak obserwując charakter zmian położeń kątowych można zauważyć, że zachowanie się zmiennych  $(q_1, q_2)$  w trakcie symulacji i eksperymentu jest zbliżone, tzn. kierunek zmian wartości kątów w czasie jest praktycznie zawsze taki sam, a jedynie różny co do amplitudy (najczęściej w zakresie kilku, kilkunastu stopni).

Warto również zwrócić uwagę na wartości nastaw regulatorów. Zarówno nastawy dla regulatora liniowego  $u_{stab}$ , jak i regulatora  $u_{swing}$  są do siebie bardzo zbliżone, często wręcz identyczne. Potwierdza to po raz kolejny dobrą zbieżność modelu teoretycznego z obiektem rzeczywistym. Jedyna znacząca różnica w wartościach nastaw występuje dla regulatora  $u_{stab}$  w części związanej ze wzmocnieniami dla składowych prędkościowych. Wartości eksperymentalne zostały z reguły przyjęte jako dwukrotnie mniejsze niż te, wynikające z symulacji. Istnieje możliwość przyjęcia dokładnie tych samych nastaw dla części prędkościowej regulatora  $u_{stab}$ , lecz skutkuje to pojawieniem się drgań całego mechanizmu wzdłuż płaszczyzny strzałkowej – prostopadle do naturalnego ruchu wahadła, grożące jego uszkodzeniem. Z tego powodu zaistniała konieczność ręcznego dostrojenia wspomnianych parametrów.

Należy ponadto nadmienić, że wartości wzmocnień wyznaczone dla regulatora  $u_{stab}$  nie są jedynymi możliwymi, a stanowią jedynie jeden z wielu dostępnych zestawów wzmocnień. Rozdział 7.2 pokazuje również przykłady zastosowania innych nastaw, zarówno w części symulacyjnej jak i eksperymentalnej. Przykładem jest *Przypadek 2* i *Przypadek 3* z rozdziału 7.2.3 dla algorytmu *NonCollocated*. Wyraźnie widać, że zwiększenie nastaw regulatora  $u_{stab}$  wpływa na stan przejściowy zwiększając ilość oscylacji w złączach, jak również zwiększa liczbę i amplitudę przełazczy sygnału sterującego.

Algorytmy QPZ oraz QP ze względu na zastosowaną transformację zmiennych stanu i wejścia charakteryzują się natomiast znacznymi, w porównaniu do algorytmów zawierających zmienne naturalne, oscylacjami w sygnale sterującym. Powodem tego jest transformacja sygnału sterującego,

dla której znacznemu wzmocnieniu ulegają nastawy regulatora. Niemniej kształt oraz charakter przebiegów w symulacji oraz eksperymencie, dla strategii wykorzystującej pseudoprędkości, jest nadal zbliżony. Wyraźne różnice dostrzegalne są jedynie dla *Przypadku 5* z rozdziału 7.2.6. Obiekt eksperymentalny umożliwił realizację sterowania z lepszym wynikiem, co można próbować tłumaczyć wpływem niemodelowanej w symulacji dynamiki i efektem tarcia/tłumienia w rzeczywistym wahadle. Podobnie w *Przypadku 6* w testach eksperymentalnych nie występują tak silne przeregulowania jak dla scenariusza symulacyjnego, natomiast cechuje się on oscylacyjnością wokół punktu zadanego.



W pracy wykazano słuszność postawionych we *Wstępie* tez. Przy wykorzystaniu technik opartych o częściową linearyzację układów niedosterowanych osiągnięto cel jakim była stabilizacja podwójnego i potrójnego odwróconego wahadła z deficytem napędów w górnym niestabilnym punkcie równowagi.

Jednym z podejmowanych w pracy zagadnień jest koncepcja zmiany dotychczasowych naturalnych zmiennych stanu używanych do opisu matematycznego modelu robota wraz z prawem sterowania, na zmienne wykorzystujące pseudoprędkości. Według autora niniejsza dysertacja jest jedną z nielicznych prac przedstawiającą w sposób systematyczny zagadnienie modelowania oraz sterowania manipulatorów planarnych o dwóch i trzech złączach, przy wykorzystaniu transformacji stanu oraz wejścia z zastosowaniem quasi-prędkości. Analizie podlega zarówno szczegółowe wyprowadzenie przekształconego modelu, jak również synteza strategii sterowania, uwzględniająca konieczność transformacji sygnału sterującego na potrzeby wyznaczenia wzmocnień przy wykorzystaniu regulatora typu LQR. Niniejsza praca stanowi jedyną znaną autorowi pozycję prezentującą symulacyjną i eksperymentalną weryfikację koncepcji zaprezentowanej w pracy [46], jak również jedyną znaną eksperymentalną walidację dla koncepcji z prac [33, 36].

Za pomocą symulacji numerycznych i zbadania obszarów zbieżności wykazano wyższość stosowania pseudoprędkości nad zmiennymi naturalnymi do opisu modelu robota oraz strategii sterowania.

Jednym z uzyskanych celów pracy było otrzymanie spójnej metody weryfikacji badanych algorytmów wraz z wytworzeniem odpowiedniego oprogramowania do ich analizy. Mimo wykorzystania języka *C++* zastosowane podejście do analizy symulacyjnej rozważanych strategii sterowania okazało się bardzo wymagające, zarówno jeśli chodzi o zasoby sprzętowe jak i czas obliczeń. Weryfikacja dziesiątek milionów wariantów warunków początkowych i parametrów rozpatrywanych algorytmów pochłonęła miesiące ciągłych obliczeń, wykonywanych w szczytowym okresie na 72 procesorach logicznych. Efektem tych prac było określenie tzw. obszarów zbieżności, dających wgląd w skuteczność danej strategii sterowania, liczonej jako liczba warunków początkowych gwarantujących sukces w postaci stabilizacji robota.

Autor ma świadomość, że prezentowane w pracy przykłady stanowią egzemplifikację konkretnego przypadku (tzw. *case-study*) i nie można na tej podstawie wyciągać ogólnych wniosków. Jednakże pewne próby podejmowane dla obiektów o 2 złączach i odmiennych niż prezentowane w pracy parametry pokazywały, że rozważane obszary zbieżności nie różnią się jakościowo od tych zaprezentowanych w pracy, a jedynie „przesuwają” się po przestrzeni zmiennych konfiguracyjnych. Stąd też można traktować przedstawioną metodę badania tychże układów jako odpowiednią do analizy właściwości rozpatrywanej klasy układów nieliniowych.

## Kierunki dalszych badań

Cel sterowania postawiony w niniejszej dysertacji polegał na stabilizacji robota w pozycji wyprostowanej, tzn. w jego górnym niestabilnym położeniu równowagi. Oznacza to, że zadaniem była stabilizacja robota w punkcie. Sprawdzenie, czy również dla przypadku śledzenia trajektorii zastosowanie transformacji stanu oraz wejścia przy użyciu pseudoprędkości poszerza zakres zbieżności prezentowanych algorytmów wydaje się interesującym tematem.

Badania eksperymentalne zostały przeprowadzone jedynie dla robota typu *Pendubot*. Wiąże się to z dostępnością stanowiska badawczego oraz względnie prostą konstrukcją mechaniczną. Prostota tej konstrukcji, przynajmniej jej koncepcji mechanicznej, wynika z umiejscowienia silnika elektrycznego w pierwszym złączu. Dla robota typu *Acrobot* należałoby zastosować albo pewien rodzaj przekładni pasowej przekazującej napęd do drugiego złącza, albo umieścić silnik bezpośrednio w drugim złączu obrotowym. Nastręcza to niestety dodatkowych trudności natury mechanicznej, które nie były tematem prowadzonych prac. Dostępność gotowego komercyjnego stanowiska dla robota typu *Pendubot* była więc znacznym ułatwieniem. Niemniej jednak weryfikacja eksperymentalna dla *Acrobota* byłaby cennym wkładem mówiącym o skuteczności proponowanych metod opartych o transformacje wejścia i sterowań z wykorzystaniem pseudoprędkości. Możliwość egzemplifikacji rozważanych strategii dla robotów o  $N \geq 3$  DOF byłaby dopełnieniem rozważań przedstawionych w pracy.

Aktualnie sposób przejścia pomiędzy dwoma strategiami sterowania jest nieciągły. W przypadku gdy spełnienie warunku na aktywację sterownika  $u_{stab}$  (typu LQR) następuje jego załączenie bez uwzględnienia ostatniej wartości wynikającej ze sterownika  $u_{lin}$  (i odwrotnie, z  $u_{lin}$  do  $u_{stab}$ ). Podejście to zgodne jest z opisem prezentowanym w szeregu prac dotyczących sterowania *Acrobotem/Pendubotem*, stosujących przełączanie pomiędzy sterowaniem opartym o linearyzację a sterownikiem stabilizującym, niemniej jednak ma zasadniczą wadę w postaci nieciągłości sygnału sterującego. Chcąc usunąć wadę tego rozwiązania należałoby zastosować gładkie przełączanie pomiędzy obojgiem sterowań. W tym celu należałoby uwzględnić np. podejście oparte o planowanie trajektorii referencyjnych dla złączy, przy wykorzystaniu np. metod sterowania optymalnego z użyciem metody maksimum.

Mimo, iż weryfikacja eksperymentalna dla robota typu *Pendubot* wykazała znaczną zbieżność uproszczonego modelu matematycznego i modelu rzeczywistego, zasadnym byłoby podjęcie próby identyfikacji parametrów stanowiska laboratoryjnego, jak np. wzbogacenie modelu o siły dyssypatywne, celem minimalizacji niepewności parametrycznych modelu i zbliżenia modelu symulacyjnego do rzeczywistego.

## A PN-QP: całki $I_1$ i $I_2$

### Obliczenie całki $I_1(q_2)$ ze wzoru (4.196)

Całka ta ma postać:

$$I_1(q_2) = \int_0^{q_2} J_1(s) ds \quad (\text{A1})$$

dla

$$J_1(q_2) = -\frac{m_{12}}{m_{11}} = -\frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} \quad (\text{A2})$$

Obliczmy wpieryw całkę nieoznaczoną:

$$I_1(q_2) = -\int \frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} dq_2 \quad (\text{A3})$$

Możemy to zapisać jako:

$$I_1(q_2) = -\int \frac{a_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} dq_2 - \int \frac{a_3 \cos q_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} dq_2 = -a_2 I_{1A} - a_3 I_{1B} \quad (\text{A4})$$

Przejdźmy do wyliczenia całek  $I_{1A}$  oraz  $I_{1B}$

Całka  $I_{1A}$  (liczona wg. [12])

$$I_{1A} = \int \frac{1}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} dq_2 = \int \frac{1}{a_x + b_x \cos q_2} dq_2 \quad (\text{A5})$$

$$I_{1A} = \int \frac{1}{a_x + b_x \cos q_2} dq_2 = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a_x^2 - b_x^2}} \arctan \frac{(a_x - b_x) \tan \frac{q_2}{2}}{\sqrt{a_x^2 - b_x^2}}, & |a_x| > |b_x| \\ \frac{1}{\sqrt{-a_x^2 + b_x^2}} \ln \frac{(b_x - a_x) \tan \frac{q_2}{2} + \sqrt{b_x^2 - a_x^2}}{(b_x - a_x) \tan \frac{q_2}{2} - \sqrt{b_x^2 - a_x^2}}, & |a_x| < |b_x| \end{cases} \quad (\text{A6})$$

Całka  $I_{1B}$

$$I_{1B} = \int \frac{\cos q_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} dq_2 = \int \frac{\cos q_2}{a_x + b_x \cos q_2} dq_2 \quad (\text{A7})$$

$$I_{1B} = \frac{q_2}{b_x} - \frac{a_x}{b_x} \int \frac{1}{a_x + b_x \cos q_2} dq_2$$

dla  $|a_x| > |b_x|$

$$I_{1B} = \frac{q_2}{b_x} - \frac{a_x}{b_x} \frac{2}{\sqrt{a_x^2 - b_x^2}} \arctan \frac{(a_x - b_x) \tan \frac{q_2}{2}}{\sqrt{a_x^2 - b_x^2}} \quad (\text{A8})$$

$$I_{1B} = \frac{q_2}{b_x} - \frac{a_x}{b_x} I_{1A} \quad (\text{A9})$$

Wartości  $a_x$  i  $b_x$  dla Acrobota wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} a_x &= a_1 + a_2 = m_1 L_1^2 + m_2 L_1^2 + m_2 L_2^2, \\ b_x &= 2a_3 = 2m_2 L_1 L_2 \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

### Obliczenie całki $I_2(q_2)$ ze wzoru (4.171)

Całka ta ma postać:

$$I_2(q_2) = \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s) ds \quad (\text{A11})$$

dla

$$J_2(q_2) = -\frac{m_{21}}{m_{22}} = -\frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{a_2} \quad (\text{A12})$$

Obliczmy wpieryw całkę nieoznaczoną:

$$I_2(q_2) = -\int \frac{a_2}{a_2 + a_3 \cos q_2} dq_2 = -a_2 I_{2A} \quad (\text{A13})$$

gdzie całka:

$$I_{2A} = \int \frac{1}{a_2 + a_3 \cos q_2} dq_2 \quad (\text{A14})$$

liczona jest tak jak całka  $I_{1A}$  (równanie A6).

Wartości  $a_2$  i  $a_3$  dla Pendubota wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} a_2 &= m_2 L_2^2, \\ a_3 &= m_2 L_1 L_2 \end{aligned}$$

Gdy  $a_2 = a_3$  wtedy:

$$I_{2A} = \frac{1}{a_2} \int \frac{1}{1 + \cos q_2} dq_2 = \frac{1}{a_2} \tan \frac{q_2}{2} \quad (\text{A15})$$

Czyli

$$I_2(q_2) = -a_2 I_{2A} = -\tan \frac{q_2}{2} \quad (\text{A16})$$

## B PN-QP: Pendubot

### WYPROWADZENIE MODELU DYNAMIKI PRZEKSZTAŁCONEJ DLA PN-QP: PENDUBOT

Dla zdefiniowanych w pracy [46] nowych zmiennych stanu:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= q_1 - I_2(q_2) \\ v_1 &= w_1 - J_2^{-1}(q_2)w_2 \\ \theta_2 &= q_1 \\ v_2 &= w_1\end{aligned}\tag{B17}$$

gdzie:

$$I_2 = \int_0^{q_2} J_2^{-1}(s)ds, \quad \text{oraz} \quad J_2(q_2) = -\frac{m_{21}}{m_{22}},$$

wyznamy kolejne pochodne powyższego układu równań (B17). Otrzymujemy więc:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{q}_1 - \frac{d}{dt}I_2(q_2) = \dot{q}_1 - J_2^{-1}(q_2)\dot{q}_2 = v_1.$$

Następnie:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \dot{w}_1 - \frac{d}{dt}(J_2^{-1}(q_2)w_2) \\ &= \dot{w}_1 - \left[ \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2))\dot{q}_2w_2 + J_2^{-1}(q_2)\dot{w}_2 \right]\end{aligned}$$

Wykorzystując zależność (4.156) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= u - \left[ \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2))\dot{q}_2w_2 + J_2^{-1}(q_2) \left( -\frac{1}{m_{22}}(\mu_2 + G_2) + J_2(q_2)u \right) \right] \\ &= u - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2))w_2^2 + J_2^{-1}(q_2) \left( \frac{1}{m_{22}}(\mu_2 + G_2) \right) - u \\ &= J_2^{-1}(q_2) \left( \frac{1}{m_{22}}(\mu_2 + G_2) \right) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2)) \cdot w_2^2 \\ &= J_2^{-1} \left( \frac{1}{m_{22}}(\mu_2 + G_2) \right) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2)) \cdot [(w_1 - v_1)J_2]^2 \\ &= J_2^{-1} \left( \frac{1}{m_{22}}(\mu_2 + G_2) \right) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2)) \cdot [(v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2)J_2^2]\end{aligned}$$

Dokonajmy podstawień:

$$\begin{aligned}(\mu_2 + G_2) &= c_{21}\dot{q}_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2) = a_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2)) &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left( -\frac{m_{22}(q_2)}{m_{21}(q_2)} \right) = -\frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{a_2}{a_2 + a_3 \cos q_2} \right) = -\left( \frac{-a_2(-a_3 \sin q_2)}{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2} \right) = -\frac{a_2 a_3 \sin q_2}{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2}\end{aligned}$$

W wyniku uzyskujemy

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -\frac{m_{22}}{m_{21}} \left( \frac{1}{m_{22}}(\mu_2 + G_2) \right) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2)) \cdot [(v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2)J_2^2] \\ &= -\frac{m_{22}}{m_{21}} \left( \frac{1}{m_{22}}(a_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2)) \right) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_2^{-1}(q_2)) \cdot [(v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2)J_2^2] \\ &= -\frac{m_{22}}{m_{21}} \left( \frac{1}{m_{22}}(a_3 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + a_5 \cos(q_1 + q_2)) \right) + \frac{a_2 a_3 \sin q_2}{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2} \cdot [(v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2)J_2^2] \\ &= -\frac{1}{m_{21}} (a_3 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + a_5 \cos(q_1 + q_2)) + \frac{a_2 a_3 \sin q_2}{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2} \cdot [(v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2) \left( \frac{m_{21}}{m_{22}} \right)^2] \\ &= -\frac{1}{m_{21}} (a_3 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + a_5 \cos(q_1 + q_2)) + \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} \cdot [v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2] \\ &= -\frac{1}{a_2 + a_3 \cos q_2} (a_3 v_2^2 \sin q_2 + a_5 \cos(q_1 + q_2)) + \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} \cdot [v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2] \\ &= -\frac{a_3 \sin q_2}{a_2 + a_3 \cos q_2} v_2^2 - \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2} + \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} \cdot [v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2] \\ &= v_2^2 \left( \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} - \frac{a_3 \sin q_2}{a_2 + a_3 \cos q_2} \right) - \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2} + \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} \cdot [-2v_2v_1 + v_1^2]\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\dot{v}_1 = \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} v_1^2 - 2 \frac{a_3 \sin q_2}{a_2} v_1 v_2 + \frac{a_3^2 \sin q_2 \cos q_2}{a_2(a_2 + a_3 \cos q_2)} v_2^2 - \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2}$$

lub inaczej

$$\dot{v}_1 = \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta\tag{B18}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{a_3 \sin q_2}{a_2}, \quad \beta = -2 \frac{a_3 \sin q_2}{a_2}, \quad \gamma = \frac{a_3^2 \sin q_2 \cos q_2}{a_2(a_2 + a_3 \cos q_2)}, \quad \eta = -\frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2}.$$

## WYPROWADZENIE POCHODNYCH FUNKCJI WYJŚCIA DLA PN-QP: PENDUBOT

Dynamika układu dana jest zależnością:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u \quad (\text{B19})$$

dla  $x = [\theta_1 \ v_1 \ \theta_2 \ v_2]^T$ .

Funkcja wyjścia  $h$  opisana w artykule mająca właściwość maksymalnie linearyzującą ma ogólną postać:

$$h = h(\theta_1) = h(q_1 - I_2(q_2)).$$

Szczegółowa zaproponowana forma ma postać:

$$h = \theta_1 - \theta_{r1} \quad (\text{B20})$$

Przyjmując, że  $\theta_{r1} = \text{const}$ , pierwsza pochodna funkcji  $h$  ma postać

$$\dot{h} = \dot{\theta}_1 = v_1. \quad (\text{B21})$$

Druga pochodna funkcji  $h$  ma postać

$$\ddot{h} = \dot{v}_1 = \alpha(q_2)v_1^2 + \beta(q_2)v_1v_2 + \gamma(q_2)v_2^2 + \eta(q_1, q_2). \quad (\text{B22})$$

Trzecia pochodna funkcji  $h$  ma postać

$$h^{(3)} = \alpha(q_2)v_1^2 + \beta(q_2)v_1v_2 + \gamma(q_2)v_2^2 + \eta(q_1, q_2) + \beta v_1 \dot{v}_2 + 2\gamma v_2 \dot{v}_2,$$

lub inaczej:

$$h^{(3)} = \alpha(q_2)v_1^2 + \beta(q_2)v_1v_2 + \gamma(q_2)v_2^2 + \eta(q_1, q_2) + u(\beta v_1 + 2\gamma v_2). \quad (\text{B23})$$

Licząc odpowiednie pochodne Liego otrzymamy ten sam wynik, tzn.

$$\begin{aligned} L_f h &= \frac{\partial h}{\partial x} f = [1, 0, 0, 0][v_1, *, *, *]^T = v_1 \\ L_g h &= \frac{\partial h}{\partial x} g = [1, 0, 0, 0][0, 0, 0, 1]^T = 0 \\ L_g L_f h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = [0, 1, 0, 0][0, 0, 0, 1]^T = 0 \\ L_f^2 h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} f = [0, 1, 0, 0][v_1, \alpha v_1^2 + \beta v_1 v_2 + \gamma v_2^2 + \eta, v_2, 0]^T \\ &= \alpha(q_1, q_2)v_1^2 + \beta(q_1, q_2)v_1v_2 + \gamma(q_1, q_2)v_2^2 + \eta(q_1, q_2) \\ \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} v_1^2 + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} v_1 v_2 + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} v_2^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \\ 2\alpha v_1 + \beta v_2 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} v_1^2 + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} v_1 v_2 + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} v_2^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} \\ \beta v_1 + 2\gamma v_2 \end{bmatrix}^T \\ L_f^3 h &= \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} v_1^2 v_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} v_1 v_2 v_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} v_2^2 v_1 + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} v_1 + 2\alpha v_1 \dot{v}_1 + \beta v_2 \dot{v}_1 + \\ &+ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} v_1^2 v_2 + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} v_1 v_2 v_2 + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} v_2^2 v_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} v_2 \\ &= \dot{\alpha} v_1^2 + 2\alpha v_1 \dot{v}_1 + \beta v_1 v_2 + \beta \dot{v}_1 v_2 + \dot{\gamma} v_2^2 + \dot{\eta}. \\ L_g L_f^2 h &= \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} g = [-, -, -, *][0, 0, 0, 1]^T = \frac{\partial L_f^2 h}{\partial v_2} = \beta v_1 + 2\gamma v_2. \end{aligned} \quad (\text{B24})$$

Można zauważyć, że

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} v_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} v_2 \quad (\text{B25})$$

oraz odpowiednio:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} v_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} v_2 \\ \dot{\gamma} &= \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} v_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} v_2 \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} v_1 + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} v_2 \end{aligned} \quad (\text{B26})$$

gdzie:

$$q_1 = \theta_2$$

$$q_2 = 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{a_2 - a_3} \tan \left( \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{2a_2} (\theta_1 - \theta_2) \right) \right)$$

oraz

$$\frac{\partial q_2}{\partial \theta_1} = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{(1 + [\kappa_1 \tan(\kappa_2(\theta_1 - \theta_2))]^2)(\cos^2(\kappa_2(\theta_1 - \theta_2)))}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial q_2}{\partial \theta_1}$$

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{a_2 - a_3}$$

$$\kappa_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{2a_2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \theta_2} = 1.$$

Natomiast odpowiednie współczynniki są równe:

$$\alpha(q_2) = \frac{a_3 \sin q_2}{a_2}$$

$$\beta(q_2) = -2 \frac{a_3 \sin q_2}{a_2}$$

$$\gamma(q_2) = \frac{a_3^2 \sin q_2 \cos q_2}{a_2(a_2 + a_3 \cos q_2)}$$

$$\eta(q_1, q_2) = -\frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2}$$

dla których pochodne cząstkowe są następujące:

$$\frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_2} = \frac{a_3}{a_2} \cos q_2$$

$$\frac{\partial \beta(q_2)}{\partial q_2} = -2 \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial \gamma(q_2)}{\partial q_2} = \frac{a_3^2 (a_2 \cos 2q_2 + a_3 \cos^3 q_2)}{a_2^2 (a_2 + a_3 \cos q_2)^2}$$

$$\frac{\partial \eta(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \frac{a_5 \sin(q_1 + q_2)}{a_2 + a_3 \cos q_2}$$

$$\frac{\partial \eta(q_1, q_2)}{\partial q_2} = \frac{a_5 (a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_3 \sin q_1)}{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2}$$

Należy wyliczyć  $\dot{\eta}(q_1, q_2)$  według zależności B26, tzn.

$$\dot{\eta}(q_1, q_2) = \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} v_1 + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} v_2$$

Dodatkowe pochodne cząstkowe są następujące:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \eta(q_1, q_2) = \frac{\partial \eta(q_1, q_2)}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \eta(q_1, q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \eta(q_1, q_2) = \frac{\partial \eta(q_1, q_2)}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \eta(q_1, q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_2}$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \alpha(q_2) = \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \alpha(q_2) = \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \alpha(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \beta(q_2) = \frac{\partial \beta(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \beta(q_2) = \frac{\partial \beta(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \gamma(q_2) = \frac{\partial \gamma(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \gamma(q_2) = \frac{\partial \gamma(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \theta_2}.$$



## C PN-QP: Acrobot

### WYPROWADZENIA DLA WZORU (4.197) – PN-QP: ACROBOT

Dla zdefiniowanych w pracy [46] nowych zmiennych stanu:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= q_1 - I_1(q_2) \\ v_1 &= w_1 - J_1(q_2)w_2 \\ \theta_2 &= q_2 \\ v_2 &= w_2\end{aligned}\tag{C27}$$

gdzie:

$$I_1 = \int_0^{q_2} J_1(s)ds, \text{ oraz } J_1(q_2) = -\frac{m_{12}}{m_{11}},$$

wyznamy kolejne pochodne powyższego układu równań (C27). Otrzymujemy więc:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{q}_1 - \frac{d}{dt}I_1(q_2) = w_1 - J_1(q_2)\dot{q}_2 = v_1$$

Następnie:

$$\dot{v}_1 = \dot{w}_1 - \frac{d}{dt}(J_1(q_2)w_2) = \dot{w}_1 - \left[ \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2))\dot{q}_2w_2 + J_1(q_2)\dot{w}_2 \right]$$

Wykorzystując zależność (4.195) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \dot{w}_1 - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2))\dot{q}_2w_2 - J_1(q_2)\dot{w}_2 \\ &= -\frac{1}{m_{11}}(\mu_1 + G_1) + J_1(q_2)u - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2))w_2w_2 - J_1(q_2)u \\ &= -\frac{1}{m_{11}}(\mu_1 + G_1) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) \cdot w_2^2 \\ &= -\frac{1}{m_{11}}(\mu_1 + G_1) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) \cdot v_2^2\end{aligned}$$

Dokonyjmy podstawień:

$$\begin{aligned}(\mu_1 + G_1) &= c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + a_5 \cos(q_1 + q_2) \\ &= -a_3\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2 - a_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 + a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2) \\ &= -2a_3\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2 - a_3\dot{q}_2^2 \sin q_2 + a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left( -\frac{m_{12}(q_2)}{m_{11}(q_2)} \right) \\ &= -\frac{\frac{\partial m_{12}}{\partial q_2}m_{11} - m_{12}\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2}}{m_{11}^2} = -(m_{11}^2)^{-1}(-a_3m_{11} \sin q_2 + 2a_3m_{12} \sin q_2) \\ &= \frac{a_3 \sin q_2}{(m_{11}^2)}(m_{11} - 2m_{12}) = \frac{(a_1 - a_2)a_3 \sin q_2}{(a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2)^2}\end{aligned}$$

W wyniku otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -\frac{1}{m_{11}}(\mu_1 + G_1) - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) \cdot v_2^2 \\ &= -\frac{1}{m_{11}}[-2a_3\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2 - a_3\dot{q}_2^2 \sin q_2 + a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2)] - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) \cdot v_2^2 \\ &= \eta + \frac{1}{m_{11}}[2a_3w_1w_2 \sin q_2 + a_3w_2^2 \sin q_2] - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) \cdot v_2^2\end{aligned}$$

gdzie

$$\eta(q) = -\frac{1}{m_{11}}[a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2)]\tag{C28}$$

lub  $\eta(\theta) = -m_{11}^{-1}[a_4 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2)]$ .

Następnie:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \eta + m_{11}^{-1}a_3 \sin q_2[2w_1w_2 + w_2^2] - \frac{\partial(J_1(q_2))}{\partial q_2} \cdot v_2^2 \\ &= \eta + m_{11}^{-1}a_3 \sin q_2[2w_1v_2 + v_2^2] - \frac{\partial(J_1(q_2))}{\partial q_2} \cdot v_2^2\end{aligned}$$

Podstawiając:

$$w_1 = v_1 + J_1(q_2)v_2 \quad \text{oraz} \quad X = m_{11}^{-1}a_3 \sin q_2$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \eta + X[2(v_1 + J_1(q_2)v_2)v_2 + v_2^2] - \frac{\partial}{\partial q_2}(J_1(q_2)) \cdot v_2^2 \\ &= \eta + 2Xv_1v_2 + v_2^2 \left[ X(2J_1 + 1) - \frac{\partial J_1}{\partial q_2} \right]\end{aligned}$$

Można zauważyć, że:

$$\begin{aligned} X(2J_1 + 1) - \frac{\partial J_1}{\partial q_2} &= m_{11}^{-1} a_3 \sin q_2 \left( \frac{-2m_{12} + m_{11}}{m_{11}} \right) - \frac{\partial J_1}{\partial q_2} \\ &= \frac{1}{m_{11}^2} a_3 \sin q_2 (m_{11} - 2m_{12}) - \frac{1}{m_{11}^2} a_3 \sin q_2 (m_{11} - 2m_{12}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Czyli } \dot{v}_1 = \eta + 2Xv_1v_2$$

$$\dot{v}_1 = \eta + \beta v_1v_2 \quad (\text{C29})$$

$$\text{dla } \beta = 2X = 2m_{11}^{-1} a_3 \sin q_2$$

$$\beta = \frac{2a_3 \sin q_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2} \quad (\text{C30})$$

#### WYPROWADZENIA DLA WZORU (4.200)

Wyprowadzenia:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= v_1 = \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) \\ \dot{v}_1 &= (\sigma(\theta_2))' \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 = \dot{\sigma}(\theta_2) \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 \\ &= e^{\int_0^{\theta_2} \beta(s) ds} \beta(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 = \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 \\ &= \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 \end{aligned}$$

Dodatkowe wyprowadzenie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma(\theta_2) &= \dot{\sigma}(\theta_2) \dot{\theta}_2 = e^{\int_0^{\theta_2} \beta(s) ds} \beta(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ &= \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_2) &= e^{\int_0^{\theta_2} \beta(s) ds} = e^{-\ln(a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2)} \\ &= 1/(a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2) \\ \sigma(\theta_2) &= \frac{1}{m_{11}(\theta_2)} = \frac{1}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (\text{C31})$$

Wykorzystując:

$$\dot{v}_1 = \eta + \beta v_1v_2 \quad \text{oraz} \quad v_1 = \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1$$

Otrzymujemy:

$$\dot{\tilde{v}}_1 = \frac{\dot{v}_1}{\sigma(\theta_2)}$$

Następnie

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 = \eta + \beta v_1v_2 \\ &= \sigma \beta v_2 \tilde{v}_1 + \sigma \dot{\tilde{v}}_1 = \eta + \beta v_1v_2 \\ &= \sigma \beta v_2 \frac{v_1}{\sigma} + \sigma \dot{\tilde{v}}_1 = \eta + \beta v_1v_2 \\ &= \beta v_1v_2 + \sigma \dot{\tilde{v}}_1 = \eta + \beta v_1v_2 \end{aligned}$$

Co daje w rezultacie

$$\dot{v}_1 = \sigma \dot{\tilde{v}}_1 = \eta$$

W wyniku otrzymujemy

$$\dot{\tilde{v}}_1 = \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\eta(\theta_1, \theta_2)}{\sigma(\theta_2)}. \quad (\text{C32})$$

## WYPROWADZENIE POCHODNYCH FUNKCJI WYJŚCIA DLA PN-QP: ACROBOT

Dynamika układu dana jest zależnością:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) \\ \tilde{\eta} \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u \quad (\text{C33})$$

dla  $x = [\theta_1, \tilde{v}_1, \theta_2, v_2]^T$ .

Zdefiniujmy współrzędne:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h & \dot{h} & \ddot{h} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C34})$$

Funkcja wyjścia  $h$

$$h = k_1(\theta_1 - \theta_{1ref}) + k_2 \tilde{v}_1 \quad (\text{C35})$$

Kolejne pochodne:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= k_1 \dot{\theta}_1 + k_2 \dot{\tilde{v}}_1 \\ &= k_1 \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1 + k_2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{C36})$$

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= k_1 \left( \frac{d}{dt} \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1 \right) + k_2 \dot{\tilde{\eta}}(\theta_1, \theta_2) \\ &= k_1 (\sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \dot{\tilde{v}}_1) + k_2 \dot{\tilde{\eta}}(\theta_1, \theta_2) \\ &= k_1 (\sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \tilde{v}_1 + \sigma(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)) + k_2 \dot{\tilde{\eta}}(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{C37})$$

Potrzebujemy wyznaczyć  $\dot{\tilde{\eta}}(\theta_1, \theta_2)$

$$\dot{\tilde{\eta}}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_2} v_2. \quad (\text{C38})$$

W wyniku

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= k_1 (\sigma \beta \tilde{v}_1 v_2 + \sigma \tilde{\eta}) + k_2 \dot{\tilde{\eta}} \\ &= k_1 \sigma \beta \tilde{v}_1 v_2 + k_1 \sigma \tilde{\eta} + k_2 \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta_2} v_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C39})$$

Ostatecznie kolejne pochodne funkcji wyjścia są następujące:

$$\begin{aligned} y &= h \\ \dot{y} &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial x} g(x)u = L_f h + u L_g h \\ \ddot{y} &= L_f^2 h + u L_g L_f h \\ y^{(3)} &= L_f^3 h + u L_g L_f^2 h \end{aligned}$$

gdzie odpowiednie pochodne Liego:

$$\begin{aligned} L_f h &= \frac{\partial h}{\partial x} f = [k_1, k_2, 0, 0] [\tilde{v}_1 \sigma(\theta_2), \tilde{\eta}, *, *]^T = k_1 \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) \\ L_g h &= \frac{\partial h}{\partial x} g = [k_1, k_2, 0, 0] [0, 0, 0, 1]^T = 0 \\ L_f^2 h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} f \\ &= [k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}, k_1 \sigma(\theta_2), k_1 \tilde{v}_1 \frac{\partial \sigma(\theta_2)}{\partial \theta_2} + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}, 0] [\tilde{v}_1 \sigma(\theta_2), \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2), v_2, 0]^T \\ &= k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_1 \sigma(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + k_1 \tilde{v}_1 \frac{\partial \sigma(\theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 \\ &= k_1 \sigma(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2. \\ L_g L_f h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = [*, *, *, 0] [0, 0, 0, 1]^T = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_f^3 h &= \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} f \\
&= k_1 \sigma(\theta_2) \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} v_2 \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + \\
&\quad + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \sigma(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + \\
&\quad + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) v_2 + k_1 \sigma(\theta_2) \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 + \\
&\quad + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 v_2 + k_1 \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 \frac{\partial \beta(\theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 + \\
&\quad + k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 + k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} v_2 v_2 + \\
&\quad + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 \\
&= k_1 \sigma(\theta_2) \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + 2k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} v_2 \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) + \\
&\quad + 2k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \sigma(\theta_2) \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) + k_1 \sigma(\theta_2) \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 \\
&\quad + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 v_2 + k_1 \sigma(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 \frac{\partial \beta(\theta_2)}{\partial \theta_2} v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \tilde{v}_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) v_2 \\
&\quad + k_2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} v_2 v_2 + k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 v_2 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} v_2
\end{aligned}$$

$$L_g L_f^2 h = \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} g = [*, *, *, \frac{\partial L_f^2 h}{\partial v_2}] [0, 0, 0, 1]^T = k_1 \sigma(\theta_2) \beta(\theta_2) \tilde{v}_1 + k_2 \frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$$

Sterowanie ma postać:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 h} (-L_f^3 h + v) \quad (\text{C40})$$

gdzie  $v = -(\omega_0^3 h + 3\omega_0^2 L_f h + 3\omega_0 L_f^2 h)$ .

Szczegółowe postaci użyte w powyższych wzorach przedstawiają się następująco:

$\eta$  zdefiniowano jako (C28),  $\sigma$  jako (C31), oraz  $\tilde{\eta}$  jako (C32), tzn.

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(q_1, q_2) &= \eta(q_1, q_2) / \sigma(q_2) = -[a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2)] \\
\tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2) &= -[a_4 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2)]
\end{aligned}$$

Ich pochodne:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} &= a_4 \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} &= a_4 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= a_4 \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \left( \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} + 1 \right) \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \\
\frac{\partial \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} &= a_4 \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_5 \left( \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} + 1 \right) \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} &= a_4 \frac{\partial^2 I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2)) + a_4 \left( \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} \right)^2 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2)) \\
&\quad + a_5 \frac{\partial^2 I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \sin(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) + a_5 \left( \frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} + 1 \right)^2 \cos(\theta_1 + I_1(\theta_2) + \theta_2) \\
\frac{\partial I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} &= \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \int_0^{\theta_2} J_1(s) ds \right) = -\frac{a_2 + a_3 \cos \theta_2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2} \\
\frac{\partial^2 I_1(\theta_2)}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} &= \frac{\partial J_1(\theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{(a_1 - a_2) a_3 \sin \theta_2}{(a_1 + a_2 + 2a_3 \cos \theta_2)^2}
\end{aligned}$$

## D Dekompozycja macierzy mas

Rozważmy przypadek rozkładu Choleskiego macierzy mas dla manipulatora o 2 stopniach swobody, opisanego równaniem (2.15), oraz (2.18), tzn.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2 & a_2 + a_3 \cos q_2 \\ a_2 + a_3 \cos q_2 & a_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D41})$$

Jako, że macierz mas jest macierzą zarówno symetryczną, jak i macierzą dodatnio-określoną, możemy dokonać procedury rozkładu macierzy na  $M$  na iloczyn postaci

$$M = LL^T \quad (\text{D42})$$

gdzie  $L$  jest macierzą trójkątną, a  $L^T$  jej transpozycją.

### PRZEKSZTAŁCENIE I

Rozważmy sytuację, gdy macierz  $L$  jest dolną macierzą trójkątną:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{D43})$$

Wtedy podstawiając (D43) do (D42) możemy zapisać, że

$$LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{D44})$$

Na podstawie (D44) możemy znaleźć następujące współczynniki macierzy  $L$

$$l_{11} = \sqrt{m_{11}}, \quad (\text{D45})$$

$$l_{21} = \frac{m_{12}}{\sqrt{m_{11}}}, \quad (\text{D46})$$

$$l_{22} = \sqrt{m_{22} - \frac{m_{12}^2}{m_{11}}}. \quad (\text{D47})$$

### PRZEKSZTAŁCENIE II

Rozważmy sytuację, gdy macierz  $L$  jest górną macierzą trójkątną:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{D48})$$

Z czego wynika, że

$$LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 + l_{21}^2 & l_{21}l_{22} \\ l_{21}l_{22} & l_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{D49})$$

Współczynniki macierzy  $L$  są w tym przypadku równe:

$$l_{11} = \sqrt{m_{11} - \frac{m_{12}^2}{m_{22}}}, \quad (\text{D50})$$

$$l_{21} = \frac{m_{12}}{\sqrt{m_{22}}}, \quad (\text{D51})$$

$$l_{22} = \sqrt{m_{22}}. \quad (\text{D52})$$

## E QPZ: wyprowadzenia modelu dynamiki

Ze względu na inną postać macierzy  $L^T$  występującą w dynamice przekształconej z użyciem pseudo-prędkości, różna będzie wynikowa forma dynamiki w zależności od przyjętej formy diagonalizacji z rozdziału 4.4.5.

Wynika z tego, że postać wektorów  $C_\nu$  (4.240) oraz  $G_\nu$  (4.241) będzie odmienna dla przyjętej formy  $L^T$ .

Koniecznym jest więc wyznaczenie ich dokładnej formy, tj. należy obliczyć

$$\begin{aligned}\chi &= L^T M^{-1} \\ C_\nu &= \chi C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T \dot{q} \\ G_\nu &= \chi G(q)\end{aligned}$$

dla konkretnego  $L^T$ .

Wektory  $C(q, \dot{q})$  oraz  $G(q)$  są tożsame z zależnościami z rozdziału 2.2.4, tzn. wektor

$$C(q, \dot{q}) = a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{E53})$$

zaś wektor  $G$  ma postać

$$G(q) = \begin{bmatrix} a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1 \\ a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (\text{E54})$$

Na podstawie macierzy mas  $M$  dla manipulatora o 2 złączach, danej wzorem (D41), można wyznaczyć jej odwrotność otrzymując

$$M^{-1} = \frac{1}{D_1 D_2} \begin{bmatrix} a_2 & -(a_2 + a_3 \cos q_2) \\ -(a_2 + a_3 \cos q_2) & a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E55})$$

gdzie

$$D_1 = a_2, \quad D_2 = a_1 - \frac{a_3^2}{a_2} \cos^2 q_2, \quad D_3 = m_{11}. \quad (\text{E56})$$

### E.1 Przekształcenie I

Rozpatrzmy przypadek, w którym macierz  $L$  z rozdziału D jest macierzą dolno trójkątną. Oznacza to, że dla zakładanej postaci macierzy mas  $M$  danej zależnością (D41), macierz  $L^T$  dana jest jako (E57) (co wynika wprost z równań (D45) – (D47)), tj.

$$L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{D_3} & \frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{\sqrt{D_3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}} \end{bmatrix}. \quad (\text{E57})$$

natomiast odpowiednia macierz  $\chi$  otrzymana została w wyniku następujących przekształceń:

$$\begin{aligned}\chi &= L^T M^{-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} m_{22} l_{11} - l_{21} m_{11} & -l_{11} m_{12} + l_{21} m_{11} \\ -l_{22} m_{12} & l_{22} m_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} m_{22} \sqrt{m_{11}} - \frac{m_{12}^2}{\sqrt{m_{11}}} & 0 \\ -m_{12} \sqrt{m_{22} - \frac{m_{12}^2}{m_{11}}} & m_{11} \sqrt{m_{22} - \frac{m_{12}^2}{m_{11}}} \end{bmatrix}. \\ \chi &= \frac{1}{D_1 D_2} \begin{bmatrix} \frac{a_2(a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2) - (a_2 + a_3 \cos q_2)^2}{\sqrt{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2}} & 0 \\ -m_{12} \sqrt{a_2 - \frac{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2}} & D_3 \sqrt{a_2 - \frac{(a_2 + a_3 \cos q_2)^2}{a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D_1 D_2} \begin{bmatrix} \frac{D_1 D_2}{\sqrt{D_3}} & 0 \\ -m_{12} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}} & D_3 \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Postać końcową tej macierzy można przedstawić następująco

$$\chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} & 0 \\ \frac{-m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} & \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix}. \quad (\text{E58})$$

Wyznamy następnie zależność:

$$G_\nu = \chi G$$

Kolejne przekształcenia są następujące:

$$\begin{aligned} G_\nu &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} & 0 \\ \frac{-m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} & \sqrt{\frac{D_3}{D_1 D_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1 \\ a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} g \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_3}} \\ \frac{-m_{12}(a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1) + \sqrt{\frac{D_3}{D_1 D_2}} a_5 \cos(q_1 + q_2)}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} g \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_3}} \\ \frac{-m_{12}(a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1) + D_3 a_5 \cos(q_1 + q_2)}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} g \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_3}} \\ \frac{-m_{12} a_5 \cos(q_1 + q_2) - m_{12} a_4 \cos q_1 + m_{11} a_5 \cos(q_1 + q_2)}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} g \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_3}} \\ \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)(m_{11} - m_{12}) - (a_2 + a_3 \cos q_2) a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} g \\ G_\nu &= g \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_3}} \\ \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2)(a_1 + a_3 \cos q_2) - (a_2 + a_3 \cos q_2) a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E59})$$

Następnie wyznaczymy zależność

$$C_\nu = \chi C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T \dot{q}$$

$$\begin{aligned} \chi C(q, \dot{q}) &= a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_3}} & 0 \\ \frac{-m_{12}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} & \sqrt{\frac{D_3}{D_1 D_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \\ &= a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{D_1 D_2} \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \\ \frac{m_{12} \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + D_3 \dot{q}_1^2}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{D_1 D_2} \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_{12} \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + D_3 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę macierz  $L^T$  dla Przekształcenia I, tj. wzór (E57), składnik  $\dot{L}^T$  występujący w równaniu (4.240) przyjmuje następującą postać:

$$\dot{L}^T = \frac{\partial L^T}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad (\text{E60})$$

W tym celu należy wyznaczyć najpierw pochodną  $\frac{\partial L^T}{\partial q_2}$  dla  $L^T$  danej równaniem (E57) gdzie:

$$\frac{\partial L^T}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_2} \sqrt{D_3} & \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{\sqrt{\frac{D_3}{D_1 D_2}}} \right) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}} \right) \end{bmatrix},$$

przy czym

$$D_1 = a_2$$

$$D_2 = a_1 - \frac{a_3^2}{a_2} \cos^2 q_2$$

$$D_3 = m_{11} = a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2$$

oraz



$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_2} D_2 &= 2 \frac{a_3^2}{a_2} \sin q_2 \cos q_2 \\
\frac{\partial}{\partial q_2} D_3 &= -2a_3 \sin q_2 \\
\frac{\partial}{\partial q_2} \sqrt{D_3} &= -\frac{a_3}{\sqrt{D_3}} \sin q_2 \\
\frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{a_2 + a_3 \cos q_2}{\sqrt{D_3}} \right) &= \frac{-a_3 \sin q_2 \sqrt{D_3} - (a_2 + a_3 \cos q_2) \frac{\partial}{\partial q_2} \sqrt{D_3}}{D_3} \\
&= \frac{1}{D_3} \left( -a_3 \sin q_2 \sqrt{D_3} - (a_2 + a_3 \cos q_2) \left( -\frac{a_3}{\sqrt{D_3}} \sin q_2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{D_3 \sqrt{D_3}} \left( -a_3 D_3 \sin q_2 + a_2 a_3 \sin q_2 + a_3^2 \sin q_2 \cos q_2 \right) \\
&= \frac{a_3 \sin q_2}{D_3 \sqrt{D_3}} \left( -D_3 + a_2 + a_3 \cos q_2 \right) \\
\frac{\partial}{\partial q_2} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}} &= \frac{1}{2 \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{D_1 D_2}{D_3} \right) = \frac{a_2}{2 \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3}}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{D_2}{D_3} \right) \\
&= \frac{\frac{a_2 \sqrt{D_3}}{2 \sqrt{D_1 D_2}} \frac{1}{D_3^2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial q_2} D_2 \right) D_3 - \left( \frac{\partial}{\partial q_2} D_3 \right) D_2 \right)}{2 D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left( \left( \frac{\partial}{\partial q_2} D_2 \right) D_3 - \left( \frac{\partial}{\partial q_2} D_3 \right) D_2 \right) \\
&= \frac{\frac{a_2}{2 D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left( 2 \frac{a_3^2}{a_2} \sin q_2 \cos q_2 D_3 - \left( \frac{\partial}{\partial q_2} D_3 \right) D_2 \right)}{2 D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left( 2 \frac{a_3^2}{a_2} \sin q_2 \cos q_2 D_3 + 2 a_3 \sin q_2 D_2 \right) \\
&= \frac{\frac{a_2 \sin q_2}{D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left( \frac{a_3^2}{a_2} D_3 \cos q_2 + a_3 D_2 \right)}{D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left( \frac{a_3^2}{a_2} D_3 \cos q_2 + a_3 D_2 \right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie zależność  $\dot{L}^T$  dana jest jako

$$\dot{L}^T = \dot{q}_2 \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_3}} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{D_3} (a_2 + a_3 \cos q_2 - D_3) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{D_1 D_2}} \left( \frac{D_1 D_2}{D_3} + a_3 \cos q_2 \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{E61})$$

Następnie obliczmy  $\dot{L}^T \dot{q}$

$$\dot{L}^T \dot{q} = \dot{q}_2 \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_3}} \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 - \frac{\dot{q}_2}{D_3} (a_1 + a_3 \cos q_2) \\ \dot{q}_2 \frac{1}{\sqrt{D_1 D_2}} \left( \frac{D_1 D_2}{D_3} + a_3 \cos q_2 \right) \end{bmatrix} \quad (\text{E62})$$

W kolejnym kroku podstawmy powyższą zależność celem obliczenia wektora  $C_\nu$

$$C_\nu = \chi C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T \dot{q}$$

$$\begin{aligned}
C_\nu &= \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left[ -\sqrt{D_1 D_2} \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] - \dot{q}_2 \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_3}} \left[ -\dot{q}_1 - \frac{\dot{q}_2}{D_3} (a_1 + a_3 \cos q_2) \right] \\
&= \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left[ -\sqrt{D_1 D_2} \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] - \dot{q}_2 \frac{a_3 \sin q_2 \sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left[ -\dot{q}_1 - \frac{\dot{q}_2}{D_3} (a_1 + a_3 \cos q_2) \right] \\
&= \frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left[ -\sqrt{D_1 D_2} \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] + \frac{a_3 \sin q_2}{D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \left[ \dot{q}_2 \sqrt{D_1 D_2} (\dot{q}_1 D_3 + \dot{q}_2 (a_1 + a_3 \cos q_2)) \right. \\
&\quad \left. - \dot{q}_2^2 (D_1 D_2 + a_3 D_3 \cos q_2) \right].
\end{aligned}$$

Wynikowy wektor  $C_\nu$  przyjmuje postać

$$C_\nu = \frac{a_3 \sin q_2}{D_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \begin{bmatrix} \sqrt{D_1 D_2} (-D_3 \dot{q}_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \dot{q}_2^2 (a_1 + a_3 \cos q_2)) \\ -\dot{q}_2^2 (D_1 D_2 + a_3 D_3 \cos q_2) \end{bmatrix}. \quad (\text{E63})$$

## E.2 Przekształcenie II

Rozpatrzmy przypadek, w którym macierz  $L^T$  dana jest zależnością (E64), tj.

$$L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{D_2} & 0 \\ \sqrt{a_2} (1 + a_{32} \cos q_2) & \sqrt{a_2} \end{bmatrix} \quad (\text{E64})$$

W rozważanym przypadku iloczyn macierzy  $L^T M^{-1}$  przedstawia się następująco:

$$\chi = L^T M^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{D_2} & 0 \\ \sqrt{a_2} (1 + a_{32} \cos q_2) & \sqrt{a_2} \end{bmatrix} \frac{1}{D_1 D_2} \begin{bmatrix} a_2 & -(a_2 + a_3 \cos q_2) \\ -(a_2 + a_3 \cos q_2) & a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2 \end{bmatrix}$$

otrzymując w wyniku

$$\chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} & -\frac{a_2+a_3 \cos q_2}{D_1 \sqrt{D_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix}. \quad (\text{E65})$$

Wyznamy kolejną zależność, tj.

$$C_\nu = \chi C(q, \dot{q}) - \dot{L}^T \dot{q}$$

Poszczególne składowe są następujące:

$$\begin{aligned} \chi C(q, \dot{q}) &= a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} & -\frac{a_2+a_3 \cos q_2}{D_1 \sqrt{D_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \\ &= a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} \frac{-\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{\sqrt{D_2}} & -\frac{\dot{q}_1^2(a_2+a_3 \cos q_2)}{D_1 \sqrt{D_2}} \\ \frac{\dot{q}_1^2}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix} \\ &= a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} \frac{-\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - \dot{q}_1^2(1 + \frac{a_3}{a_2} \cos q_2)}{\sqrt{D_2}} \\ \frac{\dot{q}_1^2}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę macierz  $L^T$  dla *Przekształcenia II*, tj. wzór (E64), składnik  $\dot{L}^T$  występujący w równaniu (4.240) przyjmuje następującą postać:

$$\dot{L}^T = \frac{\partial L^T}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad (\text{E66})$$

$$\text{gdzie: } \frac{\partial L^T}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2 \sqrt{D_2}} a_3^2 \sin q_2 \cos q_2, & 0 \\ -\frac{a_3}{\sqrt{D_1}} \sin q_2, & 0 \end{bmatrix}$$

czyli

$$\dot{L}^T = \frac{\dot{q}_2 a_3 \sin q_2}{D_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} a_3 \cos q_2, & 0 \\ -\sqrt{D_1}, & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E67})$$

Natomiast

$$\begin{aligned} \dot{L}^T \dot{q} &= \frac{\dot{q}_2 a_3 \sin q_2}{D_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} a_3 \cos q_2, & 0 \\ -\sqrt{D_1}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\dot{q}_1 \dot{q}_2 a_3 \sin q_2}{D_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} a_3 \cos q_2 \\ -\sqrt{D_1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ostatecznie zależność  $C_\nu$  przybiera postać

$$\begin{aligned} C_\nu &= a_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} \frac{-\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - \dot{q}_1^2(1 + \frac{a_3}{a_2} \cos q_2)}{\sqrt{D_2}} \\ \frac{\dot{q}_1^2}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix} - \frac{\dot{q}_1 \dot{q}_2 a_3 \sin q_2}{D_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} a_3 \cos q_2 \\ -\sqrt{D_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_3 \sin q_2 (-D_1 \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - D_1 \dot{q}_1^2(1 + \frac{a_3}{a_2} \cos q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 a_3 \sin q_2 a_3 \cos q_2)}{D_1 \sqrt{D_2}} \\ \frac{\dot{q}_1^2 a_3 \sin q_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix}. \\ C_\nu &= \begin{bmatrix} -\frac{a_3 \sin q_2}{\sqrt{D_2}} \left( \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \dot{q}_1^2(1 + \frac{a_3}{a_2} \cos q_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \frac{a_3}{a_2} \cos q_2 \right) \\ \frac{1}{\sqrt{D_1}} a_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E68}) \end{aligned}$$

Następnie wyznaczymy zależność

$$G_\nu = \chi G$$

$$\begin{aligned} G_\nu &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} & -\frac{a_2+a_3 \cos q_2}{D_1 \sqrt{D_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{D_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1 \\ a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} g \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_5 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1}{\sqrt{D_2}} & -\frac{a_2+a_3 \cos q_2}{D_1 \sqrt{D_2}} a_5 \cos(q_1 + q_2) \\ \frac{1}{\sqrt{D_1}} a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} g. \\ G_\nu &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left( a_4 \cos q_1 - \frac{a_3}{a_2} a_5 \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{D_1}} a_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} g. \quad (\text{E69}) \end{aligned}$$

## F Linearyzacja klasyczna dla 3 DOF: pochodne Liego funkcji wyjścia

### F.1 Sterowania $\tau_1, \tau_2$

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.278) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d) + k_{13}(q_3 - q_3^d) \\ k_{21}(q_1 - q_1^d) + k_{22}(q_2 - q_2^d) + k_{23}(q_3 - q_3^d) \end{bmatrix}. \quad (\text{F70})$$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (F70), dla obiektu opisanego dynamiką (4.296).

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} L_f h_1 \\ L_f h_2 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{h} = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1 + L_{g_1} L_f h_1 v_1 + L_{g_2} L_f h_1 v_2 \\ L_f^2 h_2 + L_{g_1} L_f h_2 v_1 + L_{g_2} L_f h_2 v_2 \end{bmatrix}.$$

Zapisując powyższe zależności macierzowo otrzymujemy:

$$\ddot{h} = L_f^2 h + L_g L_f h v \quad (\text{F71})$$

gdzie:

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & k_{13} & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & k_{23} & 0 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} k_{11} w_1 + k_{12} w_2 + k_{13} w_3 \\ k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + k_{23} w_3 \end{bmatrix},$$

$$L_f^2 h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & k_{23} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} k_{13}(R_3 - J_1 R_1 - J_2 R_2) \\ k_{23}(R_3 - J_1 R_1 - J_2 R_2) \end{bmatrix},$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} k_{11} + J_1 k_{13} & k_{12} + J_2 k_{13} \\ k_{21} + J_1 k_{23} & k_{22} + J_2 k_{23} \end{bmatrix}.$$

W celu odsprężenia dynamiki (F71) określmy następujący sygnał wejściowy

$$v = [v_1, v_2]^T = (L_g L_f h)^{-1} (u - L_f^2 h), \quad (\text{F72})$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym przez

$$u = \ddot{y}_r + K_d(\dot{y}_r - L_f h) + K_p(y_r - h), \quad (\text{F73})$$

przy czym  $\ddot{y}_r, \dot{y}_r, y_r$  wynikają z trajektorii funkcji wyjścia  $h$ , zaś  $K_p = \text{diag}\{K_{p1}, K_{p2}\}$ ,  $K_d = \text{diag}\{K_{d1}, K_{d2}\}$  są dodatnio określonymi macierzami wzmocnień.

Z równania (F72) wynika, że jako wyjścia częściowo linearyzujące można wziąć dowolną parę funkcji  $(h_1, h_2)$  takich, że <sup>xxiii</sup>

$$\text{rg}(L_g L_f h) = 2. \quad (\text{F74})$$

W konsekwencji  $h$  zbiega wykładniczo do  $y_r$  jeżeli  $L_g L_f h \neq 0$  dla  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^4$ .

**SPRAWDZENIE WARUNKU ISTNIENIA ROZWIĄZANIA.** Przyjmując postaci funkcji  $h_1$  oraz  $h_2$  jako (F70), warunkiem istnienia sterowania (F72) jest odwracalność macierzy  $L_g L_f h$ , co przekłada się na zależność

$$\det \begin{vmatrix} k_{11} + k_{13} J_1 & k_{12} + k_{13} J_2 \\ k_{21} + k_{23} J_1 & k_{22} + k_{23} J_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{F75})$$

Powyższy wyznacznik zeruje się w przypadku, gdy zachodzi:

$$\bar{k}_1 + J_1 \bar{k}_2 + J_2 \bar{k}_3 = 0 \quad (\text{F76})$$

dla  $\bar{k}_1 = k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}$ ,  $\bar{k}_2 = k_{13} k_{22} - k_{12} k_{23}$ ,  $\bar{k}_3 = k_{11} k_{23} - k_{13} k_{21}$ .

<sup>xxiii</sup> $\text{rg}$  zdefiniowano w rozdziale 3.1

## LINEARYZACJA TYPU NIESKOJARZONEGO

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.283) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d) + k_{13}(q_3 - q_3^d). \quad (\text{F77})$$

Wyznaczmy kolejne pochodne funkcji (F77), dla obiektu opisanego dynamiką (4.319).

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h, \\ \ddot{h} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_g L_f h v_1, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} L_f h &= \frac{\partial h}{\partial x} f = [k_{11} \ 0 \ k_{12} \ 0 \ k_{13} \ 0] f = k_{11} w_1 + k_{12} w_2 + k_{13} w_3 \\ L_f^2 h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} f = [0 \ k_{11} \ 0 \ k_{12} \ 0 \ k_{13}] f = k_{11} \tilde{\mathcal{J}}_1 (\mu_3 + G_3) + k_{12} \tilde{\mathcal{J}}_2 (\mu_3 + G_3) \\ L_g L_f h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = \frac{\partial L_f h}{\partial w_1} \tilde{\mathcal{J}}_1 m_{33} + \frac{\partial L_f h}{\partial w_2} \tilde{\mathcal{J}}_2 m_{33} + \frac{\partial L_f h}{\partial w_3} \\ &= k_{11} a_3 \tilde{\mathcal{J}}_1 + k_{12} a_3 \tilde{\mathcal{J}}_2 + k_{13} \end{aligned}$$

W celu odsprzęgnięcia dynamiki  $\ddot{h}$  określmy następujący sygnał wejściowy

$$v = (L_g L_f h)^{-1} (u - L_f^2 h), \quad (\text{F78})$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym następująco

$$u = \ddot{y}_r + K_d(\dot{y}_r - L_f h) + K_p(y_r - h), \quad (\text{F79})$$

oraz  $\ddot{y}_r, \dot{y}_r, y_r$  są zadanymi wartościami odpowiednio przyspieszenia, prędkości oraz funkcji wyjścia  $h$ , zaś  $K_p, K_d$  są dodatnimi wzmocnieniami.

Z równania (F78), że jako wyjście częściowo linearyzujące można wziąć dowolną funkcję  $h$  taką, że

$$L_g L_f h \neq 0. \quad (\text{F80})$$

W konsekwencji  $h$  zmierza wykładniczo do  $y_r$  jeżeli  $L_g L_f h^{-1} \neq 0$  dla  $x \in X \subset \mathbb{R}^2$ .

## F.2 Sterowania $\tau_1, \tau_3$

### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.278) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}(q_1 - q_1^d) + k_{12}(q_2 - q_2^d) + k_{13}(q_3 - q_3^d) \\ k_{31}(q_1 - q_1^d) + k_{32}(q_2 - q_2^d) + k_{33}(q_3 - q_3^d) \end{bmatrix}. \quad (\text{F81})$$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (F81), dla obiektu opisanego dynamiką (4.342).

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} L_f h_1 \\ L_f h_3 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{h} = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1 + L_{g_1} L_f h_1 v_1 + L_{g_2} L_f h_1 v_3 \\ L_f^2 h_3 + L_{g_1} L_f h_3 v_1 + L_{g_2} L_f h_3 v_3 \end{bmatrix}.$$

Zapisując powyższe zależności macierzowo otrzymujemy:

$$\ddot{h} = L_f^2 h + L_g L_f h v \quad (\text{F82})$$

gdzie:

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & k_{13} & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{32} & 0 & k_{33} & 0 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} k_{11} w_1 + k_{12} w_2 + k_{13} w_3 \\ k_{31} w_1 + k_{32} w_2 + k_{33} w_3 \end{bmatrix},$$

$$L_f^2 h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{31} & 0 & k_{32} & 0 & k_{33} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} k_{12}(R_2 - J_1 R_1 - J_2 R_2) \\ k_{32}(R_2 - J_1 R_1 - J_2 R_2) \end{bmatrix},$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} k_{11} + J_1 k_{12} & k_{13} + J_2 k_{12} \\ k_{31} + J_1 k_{32} & k_{33} + J_2 k_{32} \end{bmatrix}.$$

W celu odsprężania dynamiki (F82) określmy następujący sygnał wejściowy

$$v = [v_1, v_3]^T = (L_g L_f h)^{-1} (u - L_f^2 h), \quad (\text{F83})$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym przez

$$u = \ddot{y}_r + K_d(\dot{y}_r - L_f h) + K_p(y_r - h), \quad (\text{F84})$$

przy czym  $\ddot{y}_r, \dot{y}_r, y_r$  wynikają z trajektorii funkcji wyjścia  $h$ , zaś  $K_p = \text{diag}\{K_{p1}, K_{p2}\}$ ,  $K_d = \text{diag}\{K_{d1}, K_{d2}\}$  są dodatniookreślonymi macierzami wzmocnień.

Z równania (F83) wynika, że jako wyjścia częściowo linearyzujące można wziąć dowolną parę funkcji  $(h_1, h_3)$ , takich że <sup>xxiv</sup>

$$rg(L_g L_f h) = 2. \quad (\text{F85})$$

W konsekwencji  $h$  zbiega wykładniczo do  $y_r$  jeżeli  $L_g L_f h \neq 0$  dla  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^4$ .

<sup>xxiv</sup>  $rg$  zdefiniowano w rozdziale 3.1

### F.3 Sterowania $\tau_2, \tau_3$

#### LINEARYZACJA TYPU SKOJARZONEGO

Przyjmijmy, że funkcja wyjścia (4.25) wyrażona jest za pomocą kombinacji liniowej konfiguracji:

$$h(q) = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{21}(q_1 - q_1^d) + k_{22}(q_2 - q_2^d) + k_{23}(q_3 - q_3^d) \\ k_{31}(q_1 - q_1^d) + k_{32}(q_2 - q_2^d) + k_{33}(q_3 - q_3^d) \end{bmatrix}. \quad (\text{F86})$$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (F86), dla obiektu opisanego dynamiką (4.372).

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} L_f h_1 \\ L_f h_3 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{h} = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1 + L_{g_1} L_f h_1 v_1 + L_{g_2} L_f h_1 v_3 \\ L_f^2 h_3 + L_{g_1} L_f h_3 v_1 + L_{g_2} L_f h_3 v_3 \end{bmatrix}.$$

Zapisując powyższe zależności macierzowo otrzymujemy:

$$\ddot{h} = L_f^2 h + L_g L_f h v \quad (\text{F87})$$

gdzie:

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f = \begin{bmatrix} k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & k_{23} & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{32} & 0 & k_{33} & 0 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + k_{23} w_3 \\ k_{31} w_1 + k_{32} w_2 + k_{33} w_3 \end{bmatrix},$$

$$L_f^2 h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0 & k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & k_{23} \\ 0 & k_{31} & 0 & k_{32} & 0 & k_{33} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} k_{21}(R_1 - J_1 R_2 - J_2 R_3) \\ k_{31}(R_1 - J_1 R_2 - J_2 R_3) \end{bmatrix},$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} k_{22} + J_1 k_{21} & k_{23} + J_2 k_{21} \\ k_{32} + J_1 k_{31} & k_{33} + J_2 k_{31} \end{bmatrix}.$$

W celu odsprężania dynamiki (F87) określmy następujący sygnał wejściowy

$$v = [v_2, v_3]^T = (L_g L_f h)^{-1} (u - L_f^2 h), \quad (\text{F88})$$

wraz z pomocniczym wejściem zdefiniowanym następująco

$$u = \ddot{y}_r + K_d(\dot{y}_r - L_f h) + K_p(y_r - h), \quad (\text{F89})$$

oraz  $\ddot{y}_r, \dot{y}_r, y_r$  są zadanymi wartościami odpowiednio przyspieszenia, prędkości oraz funkcji wyjścia  $h$ , zaś  $K_p = \text{diag}\{K_{p1}, K_{p2}\}$ ,  $K_d = \text{diag}\{K_{d1}, K_{d2}\}$  są dodatniookreślonymi macierzami wzmocnień.

Z równania (F88) wynika, że jako wyjścia częściowo linearyzujące można wziąć dowolną parę funkcji  $(h_2, h_3)$  takie, że <sup>xxv</sup>

$$rg(L_g L_f h) = 2. \quad (\text{F90})$$

W konsekwencji  $h \rightarrow y_r$  jeżeli istnieje takie  $L_g L_f h \neq 0$ .

<sup>xxv</sup>  $rg$  zdefiniowano w rozdziale 3.1

## G Manipulator 3 DOF: wyznaczenie najmniejszej inwolutywnej dystrybucji

### G.1 Wyznaczenie najmniejszej inwolutywnej dystrybucji dla sterowań $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0, \tau_3 = 0$

W celu znalezienia linearyzowalnego podsystemu o najwyższym rzędzie, należy przeanalizować następujące dystrybucje. Po pierwsze, należy sprawdzić dystrybucję

$$D_0 = \text{span}\{g_1, g_2\}. \quad (\text{G91})$$

Jest ona z oczywistych względów inwolutywna. Następnie rozważmy dystrybucję

$$D_1 = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2\} \quad (\text{G92})$$

Dystrybucja  $D_1$  nie jest inwolutywna ( $\text{rank}(D_1) = 4$ ), ponieważ generuje ona nowe niezależne wektory.

Zdefiniujmy nowa dystrybucję

$$D_{11} = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, ad_{g_1} ad_f g_1\} \quad (\text{G93})$$

Jej  $\text{rank}(D_{11}) = 5$  lecz nadal nie jest inwolutywna, ponieważ na jej podstawie można wygenerować kolejny kierunek. Wprowadźmy więc kolejną dystrybucję:

$$D_{12} = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, [g_1, ad_f g_2], [ad_f g_1, ad_f g_2]\} \quad (\text{G94})$$

Dopiero  $D_{12}$  jest inwolutywna, ponieważ  $\dim D_{12} = \text{rank} D_{12} = 6$ , i nie generują one nowych niezależnych wektorów.

Chcąc wyznaczyć funkcję wyjścia  $h$ , która anihiluje  $D_{12}$  należy rozwiązać więc poniższe równanie:

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \frac{\partial h}{\partial x_3} \quad \frac{\partial h}{\partial x_4} \quad \frac{\partial h}{\partial x_5} \quad \frac{\partial h}{\partial x_6} \right] \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & ad_f g_1 & ad_f g_2 & [g_1, ad_f g_2] & [ad_f g_1, ad_f g_2] \end{bmatrix} = 0$$

W wyniku otrzymujemy:

$$\frac{\partial h}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial w_2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial w_3} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial q_3} = 0. \quad (\text{G95})$$

Niestety okazuje się, że jedynym rozwiązaniem równania (G95) jest trywialne  $h = \text{const}$  ponieważ  $D_{12}$  jest pełnego rzędu = 6.

Występujące powyżej nawiasy Liego są następującej postaci:

$$\begin{aligned} [f, g_1] &= [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -J_1 \ F_{16}]^\top \\ [f, g_2] &= [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -J_2 \ F_{26}]^\top \\ [f, ad_f g_1] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \zeta_1; \zeta_2]^\top \\ [f, ad_f g_2] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \zeta_3 \ \zeta_4]^\top \\ [g_1, ad_f g_1] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_{56}(q_2, q_3)]^\top \\ [g_1, ad_f g_2] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_{66}(q_2, q_3)]^\top \\ [g_2, ad_f g_1] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_{76}(q_2, q_3)]^\top \\ [g_2, ad_f g_2] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_{86}(q_2, q_3)]^\top \\ [ad_f g_1, ad_f g_2] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_{95}(q_2) \ F_{96}(q_2, q_3, w_2)]^\top, \end{aligned} \quad (\text{G96})$$

gdzie:

$$F_{16} = \frac{1}{L_3} (L_1 \sin(q_2 + q_3) [2w_1 + w_2 + w_3] + L_2 \sin(q_3) [2w_1 + 2w_2 + w_3])$$

$$F_{26} = \frac{1}{L_3} (L_2 \sin(q_3) (2w_1 + 2w_2 + w_3))$$

$$F_{56} = -\frac{1}{L_3^2} ((\sin(2q_2 + 2q_3) L_1^2 + 2 \sin(q_2 + 2q_3) L_1 L_2 + \sin(2q_3) L_2^2))$$

$$F_{66} = -\frac{1}{L_3^2} (L_1 L_2 \sin(q_2 + 2q_3) + L_2^2 \sin(2q_3))$$

$$F_{76} = -\frac{1}{L_3^2} (L_1 L_2 \sin(q_2 + 2q_3) + L_2^2 \sin(2q_3))$$

$$F_{86} = -\frac{1}{L_3^2} L_2^2 \sin(2q_3)$$

$$F_{95} = \frac{1}{L_3^2} L_1 L_2 \sin(q_2)$$

$$F_{96} = \frac{1}{L_3^2} L_1 L_2 w_2 \cos(q_2 + 2q_3)$$

$$\zeta_1 = -(2L_3 m_3 (L_1 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_3)) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)) / a_3$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & (L_3 m_3 (L_3 m_3 \cos(2q_2 + 2q_3) L_1^2 \dot{q}_1^2 + 2L_3 m_3 \cos(q_2 + 2q_3) L_1 L_2 \dot{q}_1^2 + 2L_3 m_3 \cos(q_2 + 2q_3) L_1 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ & L_3 m_3 \cos(q_2 + 2q_3) L_1 L_2 \dot{q}_2^2 + a_3 \cos(q_2 + q_3) L_1 \dot{q}_1^2 + 2a_3 \cos(q_2 + q_3) L_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_3 \cos(q_2 + q_3) L_1 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \\ & a_3 \cos(q_2 + q_3) L_1 \dot{q}_2^2 + 2a_3 \cos(q_2 + q_3) L_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_3 \cos(q_2 + q_3) L_1 \dot{q}_3^2 - L_3 g m_3 \sin(q_1 + 2q_2 + \\ & 2q_3) L_1 + L_3 m_3 \cos(2q_3) L_2^2 \dot{q}_1^2 + 2L_3 m_3 \cos(2q_3) L_2^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + L_3 m_3 \cos(2q_3) L_2^2 \dot{q}_2^2 + a_3 \cos(q_3) L_2 \dot{q}_1^2 + \\ & 2a_3 \cos(q_3) L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_3 \cos(q_3) L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + a_3 \cos(q_3) L_2 \dot{q}_2^2 + 2a_3 \cos(q_3) L_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_3 \cos(q_3) L_2 \dot{q}_3^2 - \\ & L_3 g m_3 \sin(q_1 + q_2 + 2q_3) L_2) / a_3^2 \end{aligned}$$

$$\zeta_3 = -(2L_2 L_3 m_3 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)) / a_3$$

$$\begin{aligned} \zeta_4 = & (L_2 L_3 m_3 (a_3 \dot{q}_1^2 \cos(q_3) + a_3 \dot{q}_2^2 \cos(q_3) + a_3 \dot{q}_3^2 \cos(q_3) - L_3 g m_3 \sin(q_1 + q_2 + 2q_3) + 2a_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_3) + \\ & 2a_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_3) + 2a_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos(q_3) + L_1 L_3 \dot{q}_1^2 m_3 \cos(q_2 + 2q_3) + L_2 L_3 \dot{q}_1^2 m_3 \cos(2q_3) + L_2 L_3 \dot{q}_2^2 m_3 \cos(2q_3) + \\ & 2L_2 L_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_3 \cos(2q_3))) / a_3^2. \end{aligned}$$

## G.2 Wyznaczenie najmniejszej inwolutywnej dystrybucji dla sterowań $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = 0, \tau_3 \neq 0$

Odpowiednie nawiasy Liego są następującej postaci:

$$\begin{aligned} ad_f g_1 &= [-1 \ 0 \ -J_1 \ F_{14} \ 0 \ 0]^\top \\ ad_f g_2 &= [0 \ 0 \ -J_2 \ F_{24} \ 0 \ 0]^\top \\ ad_{g_1} ad_f g_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ F_{44} \ 0 \ 0]^\top \\ ad_{g_2} ad_f g_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ F_{54} \ 0 \ 0]^\top \\ ad_{g_2} ad_f g_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\ ad_{ad_f g_1} ad_f g_2 &= [0 \ 0 \ F_{64} \ F_{74} \ 0 \ 0]^\top, \end{aligned} \quad (G97)$$

gdzie:

$$F_{14} = \frac{1}{m_{22}} (2d_1 w_1 + d_1 w_2 + L_1 L_3 w_3 m_3 \sin(q_2 + q_3))$$

$$F_{24} = \frac{1}{m_{22}} (L_2 L_3 w_3 m_3 \sin q_3)$$

$$F_{34} = -\frac{L_1^2}{m_{22}^2} [L_2^2 \sin(2q_2) (m_2 + m_3)^2 + 2L_2 L_3 m_3 (m_2 + m_3) \sin(2q_2 + q_3) + L_3^2 m_3^2 \sin(2q_2 + 2q_3)]$$

$$F_{44} = -\frac{1}{m_{22}^2} [d_1 (a_3 + r_3)]$$

$$F_{54} = -\frac{1}{m_{22}^2} [d_1 (a_3 + r_3)]$$

$$F_{64} = -\frac{1}{m_{22}^2} [d_1 (a_3 + r_3)]$$

$$F_{74} = -\frac{1}{m_{22}^2} [(a_3 + d_3) (r_1 (2w_1 + w_2 + w_3) + r_2 (2w_1 + w_2)) + d_1 d_3 w_3],$$

dla  $a_2, d_1, d_3, r_1, r_2$  zdefiniowanych w rozdziale 2.2.5.

## G.3 Wyznaczenie najmniejszej inwolutywnej dystrybucji dla sterowań $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0, \tau_3 \neq 0$

$$\text{rank}(D_0) = 2$$

$$D_0 = \text{span}\{g_1, g_2\} \quad (G98)$$

$$\text{rank}(D_1) = 4$$

$$D_1 = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2\} \quad (G99)$$

$$\text{rank}(D_{11}) = 4$$

$$D_{11} = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, ad_{g_1} ad_f g_1\} \quad (G100)$$

$$\text{rank}(D_{12}) = 5$$

$$D_{12} = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, [g_1, ad_f g_2], [ad_f g_1, ad_f g_2]\} \quad (G101)$$

Dopiero

$$D_{13} = \text{span}\{g_1, g_2, ad_f g_1, ad_f g_2, [f, ad_f g_1], [f, ad_f g_2]\} \quad (G102)$$



daje  $\text{rank}(D_{13}) = 6$ .

Występujące powyżej nawiasy Liego są następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 [f, g_1] &= [-J_1 \ F_{12} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\
 [f, g_2] &= [-J_2 \ F_{22} \ 0 \ 0 \ -1 \ 0]^\top \\
 [f, ad_f g_1] &= [F_{31} \ F_{32} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\
 [f, ad_f g_2] &= [F_{41} \ F_{42} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\
 [g_1, ad_f g_2] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\
 [g_2, ad_f g_1] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\
 [g_2, ad_f g_2] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \\
 [ad_f g_1, ad_f g_2] &= [F_{91} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top,
 \end{aligned} \tag{G103}$$

gdzie:

$$F_{12} = -\frac{1}{m_{11}}(2d_1w_1 + d_1w_2 + w_3L_1L_3m_3 \sin(q_2 + q_3))$$

$$F_{22} = -\frac{1}{m_{11}}(2d_2w_1 + w_3(d_2 + d_3) + w_2L_1L_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2L_3m_3 \sin q_2)$$

$$F_{91} = -\frac{1}{m_{11}^2}(2L_1L_2L_3m_3(L_1m_1 \sin q_3 + L_3m_2 \sin q_2)),$$

$F_{31}, F_{32}, F_{41}, F_{42}$  są funkcjami zależnymi od  $(q_1, q_2, q_3, w_1, w_2, w_3)$ , lecz ze względu na skomplikowaną, długą postać, ich zapis zostanie pominięty.

## H Linearyzacja klasyczna dla 3 DOF: $\tau_1, \tau_2$

Wyprowadzenie zależności (4.305)

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= v_1 = u_1 = \ddot{y}_1^r + K_{d1}(0 - \dot{q}_1) + K_{p1}[0 - (q_1 - q_1^d)] \\
 &= -K_{p1}z_1 - K_{d1}z_2 \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= u_2 = -K_{p2}z_3 - K_{d2}z_4 \\
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \ddot{q}_3 = -m_{33}^{-1}(m_{31}v_1 + m_{32}v_2 + \mu_3 + G_3) \\
 &= m_{33}^{-1}[m_{31}(K_{p1}z_1 + K_{d1}z_2) + m_{32}(K_{p2}z_3 + K_{d2}z_4) - \mu_3 - G_3] \\
 \tilde{y}_1 &= z_1 \\
 \tilde{y}_2 &= z_3
 \end{aligned}$$

DYNAMIKA ZEROWA dla (4.310)

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_{33}}[\mu_3(q_2^d, \eta_1, \dot{q}_1^d, \dot{q}_2^d, \eta) + G_3(q_1^d, q_2^d, \eta_1)] \end{bmatrix} \quad (\text{H104})$$

Podstawiając:

$$\begin{aligned}
 \mu_3(q_2^d, \eta_1, \dot{q}_1^d, \dot{q}_2^d, \eta) &= c_{31}(q_2^d, q_3)\dot{q}_1^d + c_{32}(q_3)\dot{q}_2^d + c_{33}\dot{q}_3 \\
 &= c_{31}(q_2^d, \eta_1)\dot{q}_1^d + c_{32}(\eta_1)\dot{q}_2^d + c_{33}\eta_2 \\
 &= 0 \\
 G_3(q_1^d, q_2^d, \eta_1) &= gm_3L_3 \cos(q_1^d + q_2^d + q_3) \\
 &= gm_3L_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \\
 &= -gm_3L_3 \sin \eta_1
 \end{aligned}$$

dla  $c_{33} = 0$ ,  $m_{33} = a_3$ , otrzymujemy

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \frac{1}{a_3}gm_3L_3 \sin \eta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{H105})$$

będącą poszukiwaną dynamiką zerową.

## I QP: 3 DOF – $\tau_2, \tau_3$ , prostowanie pola wektorowego

Rozważmy model robota o trzech złączach przedstawiony w rozdziale 4.5.5

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) \\ w_2 \\ 0 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_1(x)} v_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2(x)} v_3. \quad (\text{I106})$$

Wprowadźmy alternatywny zapis

$$\begin{aligned} \dot{q} &= w \\ \dot{w} &= f(q, w) + g_2(q)v_2 + g_3(q)v_3 \end{aligned}$$

gdzie  $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ ,  $w = [w_1, w_2, w_3]^T$ .

Poszukujemy przekształcenia zmiennych konfiguracyjnych

$$\theta = \Psi(q), \quad (\text{I107})$$

dla którego model (I106) można przedstawić przy zastosowaniu formy normalnej.

Obliczmy kolejne pochodne równania (I107):

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial q} \dot{q} = \frac{\partial \psi}{\partial q} w \quad (\text{I108})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \ddot{q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial \psi}{\partial q} f(q, w) + \frac{\partial \psi}{\partial q} g_2(q)v_2 + \frac{\partial \psi}{\partial q} g_3(q)v_3. \quad (\text{I109})$$

Na podstawie powyższego równania dokonajmy wyprostowania pola wektorowego  $g$ . Poszukujemy więc rozwiązania dwóch zestawów następujących układów równań  $\frac{\partial \psi}{\partial q} g_2(q)$  oraz  $\frac{\partial \psi}{\partial q} g_3(q)$ .

Pierwszy zestaw:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2(q_2, q_3) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daje w wyniku równania:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} J_2(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} J_2(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} = 1$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial q_1} J_2(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_3}{\partial q_2} = 0$$

Z powyższego zestawu możemy wnioskować, że  $\psi_2 = q_2$  oraz, że  $\psi_2$  nie zależy od  $q_1, q_3$ .

Następnie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_3(q_2, q_3) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

prowadzi do układu:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} J_3(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} J_3(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_2}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial q_1} J_3(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_3}{\partial q_3} = 1$$

Podobnie jak poprzednio, możemy zakładać, że  $\psi_3 = q_3$ , oraz że  $\psi_3$  nie zależy od  $q_1, q_2$

W celu wyznaczenia zależności opisującej  $\psi_1$  należy rozwiązać poniższe równania:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} J_2(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2} = 0, \quad (\text{I110})$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} J_3(q_2, q_3) + \frac{\partial \psi_1}{\partial q_3} = 0. \quad (\text{I111})$$

Zadanie to jest problemem nietrywialnym i według wiedzy autora nieposiadającym jednej analitycznej postaci. Utrudnia to jednoznaczne określenie dokładnej postaci wyrażenia (I107).

## J QP: 3 DOF – $\tau_1, \tau_2$

### PRZEKSZTAŁCENIE STANU

Obliczmy pochodną z (4.419)

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{w}}_3 &= \dot{w}_3 - \frac{d}{dt}(\tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_2 w_2) \\
 &= \dot{w}_3 - w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_1 - \tilde{J}_1 \frac{d}{dt} w_1 - w_2 \frac{d}{dt} \tilde{J}_2 - \tilde{J}_2 \frac{d}{dt} w_2 \\
 &= -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) + \cancel{\tilde{J}_1 \dot{v}_1} + \cancel{\tilde{J}_2 \dot{v}_2} - w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_1 - \cancel{\tilde{J}_1 \frac{d}{dt} w_1} - w_2 \frac{d}{dt} \tilde{J}_2 - \cancel{\tilde{J}_2 \frac{d}{dt} w_2} \\
 &= -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_1 - w_2 \frac{d}{dt} \tilde{J}_2 \\
 &= -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_i} \dot{q}_i - w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} \dot{q}_3 \quad (i = 2, 3) \\
 &= -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} \dot{q}_3 - w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} \dot{q}_3 \\
 &= -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} w_2 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} w_3 - w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} w_3
 \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\dot{\tilde{w}}_3 = -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} w_2 - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} \right) (\tilde{w}_3 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_2 w_2). \quad (\text{J112})$$

### FUNKCJA WYJŚCIA: $h(\tilde{x})$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (4.428), dla obiektu opisanego dynamiką (4.420):

$$\dot{h}_j = \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f h_j$$

$$\ddot{h}_j = \frac{\partial L_f h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f^2 h_j + \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_1} v_1 + \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_2} v_2$$

dla  $j = \{1, 2\}$ , gdzie:

$$L_f h_1 = [k_{11} \ 0 \ k_{12} \ 0 \ k_{13} \ k_1] f = k_{11} w_1 + k_{12} w_2 + k_{13} (\tilde{w}_3 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_2 w_2) + k_1 F_6$$

$$L_f h_2 = [k_{21} \ 0 \ k_{22} \ 0 \ k_{23} \ k_2] f = k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + k_{23} (\tilde{w}_3 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_2 w_2) + k_2 F_6$$

$$L_f^2 h_1 = \left[ k_1 \frac{\partial F_6}{\partial q_1}, *, k_{13} \frac{\partial w_3(\tilde{w}_3)}{\partial q_2} + k_1 \frac{\partial F_6}{\partial q_2}, *, k_{13} \frac{\partial w_3(\tilde{w}_3)}{\partial q_3} + k_1 \frac{\partial F_6}{\partial q_3}, k_{13} + k_1 \frac{\partial F_6}{\partial w_3} \right] f$$

$$L_f^2 h_2 = \left[ k_2 \frac{\partial F_6}{\partial q_1}, *, k_{23} \frac{\partial w_3(\tilde{w}_3)}{\partial q_2} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial q_2}, *, k_{23} \frac{\partial w_3(\tilde{w}_3)}{\partial q_3} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial q_3}, k_{23} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial w_3} \right] f$$

$$L_{g_1} L_f h_1 = k_{11} + k_{13} \tilde{J}_1 + k_1 \frac{\partial F_6}{\partial w_1}$$

$$L_{g_1} L_f h_2 = k_{21} + k_{23} \tilde{J}_1 + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial w_1}$$

$$L_{g_2} L_f h_1 = k_{12} + k_{13} \tilde{J}_2 + k_1 \frac{\partial F_6}{\partial w_2}$$

$$L_{g_2} L_f h_2 = k_{22} + k_{23} \tilde{J}_2 + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial w_2}$$

$$F_6 = -m_{33}^{-1}(\mu_3 + G_3) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} w_2 - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} \right) (\tilde{w}_3 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_2 w_2)$$

## K QP: 3 DOF – $\tau_1, \tau_3$

### PRZEKSZTAŁCENIE STANU

Obliczmy pochodną z (4.435)

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{w}}_2 &= \dot{w}_2 - \frac{d}{dt}(\tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3) \\
 &= \dot{w}_2 - w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_1 - \tilde{J}_1 \frac{d}{dt} w_1 - w_3 \frac{d}{dt} \tilde{J}_3 - \tilde{J}_3 \frac{d}{dt} w_3 \\
 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) + \tilde{J}_1 u_1 + \tilde{J}_3 u_3 - w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_1 - \tilde{J}_1 \frac{d}{dt} w_1 - w_3 \frac{d}{dt} \tilde{J}_3 - \tilde{J}_3 \frac{d}{dt} w_3 \\
 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_1 - w_3 \frac{d}{dt} \tilde{J}_3 \\
 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_i} \dot{q}_i - w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (i = 2, 3) \\
 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} w_2 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} w_3 - w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} w_3 \\
 \dot{\tilde{w}}_2 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \right) w_3 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3) \quad (\text{K113})
 \end{aligned}$$

### FUNKCJA WYJŚCIA: $h(\tilde{x})$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (4.446), dla obiektu opisanego dynamiką (4.438):

$$\dot{h}_j = \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f h_j$$

$$\ddot{h}_j = \frac{\partial L_f h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f^2 h_j + \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_1} v_1 + \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_3} v_3$$

dla  $j = \{1, 3\}$ , gdzie:

$$\begin{aligned}
 L_f h_1 &= [k_{11} \ 0 \ k_{12} \ k_1 \ k_{13} \ 0] f = k_{11} w_1 + k_{12} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3) + k_{13} w_3 + k_1 F_4 \\
 L_f h_3 &= [k_{31} \ 0 \ k_{32} \ k_2 \ k_{33} \ 0] f = k_{31} w_1 + k_{32} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3) + k_{33} w_3 + k_2 F_4 \\
 L_f^2 h_1 &= [k_1 \frac{\partial F_4}{\partial q_1}, *, k_{12} \frac{\partial w_2(\tilde{w}_2)}{\partial q_2} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial q_2}, k_{12} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{w}_2}, k_{12} \frac{\partial w_2(\tilde{w}_2)}{\partial q_3} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial q_3}, * ] f \\
 L_f^2 h_3 &= [k_2 \frac{\partial F_4}{\partial q_1}, *, k_{32} \frac{\partial w_2(\tilde{w}_2)}{\partial q_2} + k_2 \frac{\partial F_4}{\partial q_2}, k_{32} + k_2 \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{w}_2}, k_{32} \frac{\partial w_2(\tilde{w}_2)}{\partial q_3} + k_2 \frac{\partial F_4}{\partial q_3}, * ] f \\
 L_{g_1} L_f h_1 &= k_{11} + k_{12} \tilde{J}_1 + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial w_1} \\
 L_{g_1} L_f h_3 &= k_{31} + k_{32} \tilde{J}_1 + k_2 \frac{\partial F_4}{\partial w_1} \\
 L_{g_2} L_f h_1 &= k_{13} + k_{12} \tilde{J}_3 + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial w_3} \\
 L_{g_2} L_f h_3 &= k_{33} + k_{32} \tilde{J}_3 + k_2 \frac{\partial F_4}{\partial w_3} \\
 F_4 &= -m_{22}^{-1}(\mu_2 + G_2) - \left( w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_3} + w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} \right) w_3 - w_1 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial q_2} (\tilde{w}_2 + \tilde{J}_1 w_1 + \tilde{J}_3 w_3)
 \end{aligned}$$

## L QP: 3 DOF – $\tau_2, \tau_3$

### PRZEKSZTAŁCENIE STANU

Obliczmy pochodną z (4.454)

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= \dot{w}_1 - \frac{d}{dt}(\tilde{J}_2 w_2 + \tilde{J}_3 w_3) \\
 &= \dot{w}_1 - w_2 \frac{d}{dt} \tilde{J}_2 - \tilde{J}_2 \frac{d}{dt} w_2 - w_3 \frac{d}{dt} \tilde{J}_3 - \tilde{J}_3 \frac{d}{dt} w_3 \\
 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) + \tilde{J}_2 w_2 + \tilde{J}_3 w_3 - w_2 \frac{d}{dt} \tilde{J}_2 - \tilde{J}_2 \frac{d}{dt} w_2 - w_3 \frac{d}{dt} \tilde{J}_3 - \tilde{J}_3 \frac{d}{dt} w_3 \\
 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2 \frac{d}{dt} \tilde{J}_2 - w_3 \frac{d}{dt} \tilde{J}_3 \\
 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_i} \dot{q}_i - w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (i = 2, 3) \\
 \dot{w}_1 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_2} w_2 - w_2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} w_3 - w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_2} w_2 - w_3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3} w_3 \quad (L114)
 \end{aligned}$$

### FUNKCJA WYJŚCIA: $h(\tilde{x})$

Wyznamy kolejne pochodne funkcji (4.465), dla obiektu opisanego dynamiką (4.457):

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_j &= \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f h_j \\
 \ddot{h}_j &= \frac{\partial L_f h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f^2 h_j + \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_2} v_2 + \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_3} v_3
 \end{aligned}$$

dla  $j = \{2, 3\}$ , gdzie:

$$\begin{aligned}
 L_f h_2 &= [k_{21} \ k_1 \ k_{22} \ 0 \ k_{23} \ 0] f = k_{21}(\tilde{w}_1 + \tilde{J}_2 w_2 + \tilde{J}_3 w_3) + k_{22} w_2 + k_{23} w_3 + k_1 F_2 \\
 L_f h_3 &= [k_{31} \ k_2 \ k_{32} \ 0 \ k_{33} \ 0] f = k_{31}(\tilde{w}_1 + \tilde{J}_2 w_2 + \tilde{J}_3 w_3) + k_{32} w_2 + k_{33} w_3 + k_2 F_2 \\
 L_f^2 h_2 &= [k_1 \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, k_{21} + k_1 \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{w}_1}, k_{21} \frac{\partial w_1(\tilde{w}_1)}{\partial q_2} + k_1 \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, *, k_{21} \frac{\partial w_1(\tilde{w}_1)}{\partial q_3} + k_1 \frac{\partial F_2}{\partial q_3}, *] f \\
 L_f^2 h_3 &= [k_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, k_{31} + k_2 \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{w}_1}, k_{31} \frac{\partial w_1(\tilde{w}_1)}{\partial q_2} + k_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, *, k_{31} \frac{\partial w_1(\tilde{w}_1)}{\partial q_3} + k_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_3}, *] f \\
 L_{g_1} L_f h_2 &= k_{22} + k_{21} \tilde{J}_2 + k_1 \frac{\partial F_2}{\partial w_2} \\
 L_{g_1} L_f h_3 &= k_{32} + k_{31} \tilde{J}_2 + k_2 \frac{\partial F_2}{\partial w_2} \\
 L_{g_2} L_f h_2 &= k_{23} + k_{21} \tilde{J}_3 + k_1 \frac{\partial F_2}{\partial w_3} \\
 L_{g_2} L_f h_3 &= k_{33} + k_{31} \tilde{J}_3 + k_2 \frac{\partial F_2}{\partial w_3} \\
 F_2 &= -m_{11}^{-1}(\mu_1 + G_1) - w_2^2 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_2} - w_2 w_3 \left( \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial q_3} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_2} \right) - w_3^2 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial q_3}
 \end{aligned}$$

## M QP: 3 DOF – $\tau_1$

### PRZEKSZTAŁCENIE STANU

Obliczmy pochodną z (4.473)

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{w}}_2 &= \dot{w}_2 - \frac{d}{dt}(\tilde{J}\tilde{J}_a w_1) \\
 &= \dot{w}_2 - \left( w_1 \tilde{J}_a \frac{d}{dt} \tilde{J} + w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_a + \tilde{J} \tilde{J}_a \frac{d}{dt} w_1 \right) \\
 &= -m_{33}J(\mu_2 + G_2) + m_{23}J(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}\tilde{J}_a v - \left( w_1 \tilde{J}_a \frac{d}{dt} \tilde{J} + w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_a + \tilde{J}\tilde{J}_a v \right) \\
 &= -m_{33}J(\mu_2 + G_2) + m_{23}J(\mu_3 + G_3) - \left( w_1 \tilde{J}_a \frac{d}{dt} \tilde{J} + w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_a \right) \\
 \dot{\tilde{w}}_2 &= -m_{33}J(\mu_2 + G_2) + m_{23}J(\mu_3 + G_3) - w_1 \tilde{J}_a \frac{d}{dt} \tilde{J} - w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_a \quad (M115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{w}}_3 &= \dot{w}_3 - \frac{d}{dt}(\tilde{J}\tilde{J}_b w_1) \\
 &= \dot{w}_3 - \left( w_1 \tilde{J}_b \frac{d}{dt} \tilde{J} + w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_b + \tilde{J}\tilde{J}_b \frac{d}{dt} w_1 \right) \\
 &= m_{32}J(\mu_2 + G_2) - m_{22}J(\mu_3 + G_3) + \tilde{J}\tilde{J}_b v - \left( w_1 \tilde{J}_b \frac{d}{dt} \tilde{J} + w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_b + \tilde{J}\tilde{J}_b v \right) \\
 &= m_{32}J(\mu_2 + G_2) - m_{22}J(\mu_3 + G_3) - \left( w_1 \tilde{J}_b \frac{d}{dt} \tilde{J} + w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_b \right) \\
 \dot{\tilde{w}}_3 &= m_{32}J(\mu_2 + G_2) - m_{22}J(\mu_3 + G_3) - w_1 \tilde{J}_b \frac{d}{dt} \tilde{J} - w_1 \tilde{J} \frac{d}{dt} \tilde{J}_b \quad (M116)
 \end{aligned}$$

### FUNKCJA WYJŚCIA: $h(\tilde{x})$

Wyznaczmy kolejne pochodne funkcji (4.482), dla obiektu opisanego dynamiką (4.476):

$$\dot{h}_j = \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f h_j$$

$$\ddot{h}_j = \frac{\partial L_f h_j}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = L_f^2 h_j + L_g L_f h v$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 L_f h &= [k_{11} \ 0 \ k_{12} \ k_1 \ k_{13} \ k_2] f \\
 &= k_{11} w_1 + k_{12} w_2(q_2, q_3, w_1, \tilde{w}_2) + k_1 F_4(\tilde{x}) + k_{13} w_3(q_2, q_3, w_1, \tilde{w}_3) + k_2 F_6(\tilde{x}) \\
 L_f^2 h &= [k_1 \frac{\partial F_4}{\partial q_1} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial q_1}, \ k_{11} + k_{12} \frac{\partial w_2}{\partial w_1} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial w_1} + k_{13} \frac{\partial w_3}{\partial w_1} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial w_1}, \\
 &\quad k_{12} \frac{\partial w_2}{\partial q_2} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial q_2} + k_{13} \frac{\partial w_3}{\partial q_2} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial q_2}, \ k_{12} \frac{\partial w_2}{\partial \tilde{w}_2} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{w}_2} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial \tilde{w}_2}, \\
 &\quad k_{12} \frac{\partial w_2}{\partial q_3} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial q_3} + k_{13} \frac{\partial w_3}{\partial q_3} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial q_3}, \ k_{13} \frac{\partial w_3}{\partial \tilde{w}_3} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{w}_3} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial \tilde{w}_3} ] f \\
 L_g L_f h &= \frac{\partial L_f h_j}{\partial w_1} = k_{11} + k_{12} \frac{\partial w_2}{\partial w_1} + k_1 \frac{\partial F_4}{\partial w_1} + k_{13} \frac{\partial w_3}{\partial w_1} + k_2 \frac{\partial F_6}{\partial w_1}, \\
 F_4(\tilde{x}) &= \dot{\tilde{w}}_2 = -m_{33}J(\mu_2 + G_2) + m_{23}J(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}_a w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J} - \tilde{J} w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_a \\
 F_6(\tilde{x}) &= \dot{\tilde{w}}_3 = m_{32}J(\mu_2 + G_2) - m_{22}J(\mu_3 + G_3) - \tilde{J}_b w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J} - \tilde{J} w_1 \frac{d}{dt} \tilde{J}_b
 \end{aligned}$$



---

## Bibliografia

---

- [1] K. Abdel-Malek, J. Arora. *Human Motion Simulation: Predictive Dynamics*. Elsevier Inc., 06 2013.
- [2] E. Alcala, V. Puig, J. Quevedo, T. Escobet, R. Comasolivas. Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control Engineering Practice*, 73:1–12, 2018.
- [3] M. Anderle, S. Celikovský. Acrobot stable walking in hybrid systems notation. *2014 UKSim-AMSS 16th International Conference on Computer Modelling and Simulation*, strony 200–205, March 2014.
- [4] K. Åström, K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2):287–295, 2000.
- [5] J. G. Batista, D. A. Souza, L. L. dos Reis, L. V. Filgueiras, K. M. Ramos, A. B. Junior, W. B. Correia. Performance comparison between the PID and LQR controllers applied to a robotic manipulator joint. *IECON 2019 - 45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, wolumen 1, strony 479–484, 2019.
- [6] J. Benoît, G. Gaël. Eigen C++ library. <https://eigen.tuxfamily.org>.
- [7] M. Berkemeier, R. Fearing. Sliding and hopping gaits for the underactuated acrobot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(4):629–634, 1998.
- [8] J. Bernat, J. Kołota, S. Stępień, P. Superczyńska. Suboptimal control of nonlinear continuous-time locally positive systems using input-state linearization and SDRE approach. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 66(No 1):17–22, 2018.
- [9] A. Bloch, M. Reyhanoglu, N. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1746–1757, 1992.
- [10] D. Block. Mechanical design and control of the Pendubot. Praca magisterska, University of Illinois, 1991.
- [11] W. Bolek, T. Wiśniewski. *Linearyzacja przez sprzężenie zwrotne w syntezie algorytmów regulacji dla obiektów termoenergetycznych*. Politechnika Wrocławska, 2006.
- [12] I. Bronsztejn, K. Siemiendajew, G. Musiol, H. Muhlig. *Nowoczesne kompendium matematyki*. Wydaw. Naukowe PWN, Warszawa, 2004. Tyt. oryg.: Taschenbuch der Mathematik, 2001.
- [13] C. Chevallereau, G. Abba, Y. Aoustin, F. Plestan, E. R. Westervelt, C. Canudas-De-Wit, J. W. Grizzle. RABBIT: a testbed for advanced control theory. *Control Systems Magazine, IEEE*, 23(5):57–79, 2003.

- [14] K. Cimborová, S. Jadlovská. Modeling of benchmark underactuated systems via different approaches. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):8935–8940, 2020. 21st IFAC World Congress.
- [15] A. Cunha, M. Shao, Y. Huang, V. V. Silberschmidt. Intelligent manipulator with flexible link and joint: Modeling and vibration control. *Shock and Vibration*, 2020, 2020.
- [16] Dancer.com. Arabesques. <https://dancer.com/ballet-info/in-the-studio/terms-positions/>.
- [17] R. De Almeida, O. Nyandoro. Swing-up control of the Acrobot using noncollocated partial feedback linearisation: An algorithmic approach. *2017 Pattern Recognition Association of South Africa and Robotics and Mechatronics (PRASA-RobMech)*, strony 98–103, Nov 2017.
- [18] A. De Luca, S. Iannitti. A simple STLC test for mechanical systems underactuated by one control. *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)*, wolumen 2, strony 1735–1740 vol.2, 2002.
- [19] M. Deng, S. Kubota. Nonlinear control system design of an underactuated robot based on operator theory and isomorphism scheme. *Axioms*, 10(2), 2021.
- [20] K. Eltohamy, C.-Y. Kuo. Nonlinear optimal control of a triple link inverted pendulum with single control input. *International Journal of Control*, 69(2):239–256, 1998.
- [21] I. Fantoni, R. Lozano, M. Spong. Energy based control of the Pendubot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):725–729, 2000.
- [22] R. Fierro, F. L. Lewis. Control of a nonholomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. *Journal of Robotic Systems*, 14(3):149–163, 1997.
- [23] E. Franco. Energy-based design of elastic joints for inverted pendulum systems with input saturation. *2019 27th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, strony 7–12, July 2019.
- [24] K. Furuta, T. Ochiai, N. Ono. Attitude control of a triple inverted pendulum. *International Journal of Control*, 39(6):1351–1365, 1984.
- [25] W. Giernacki, S. Stępień, M. Chodnicki, A. Wróblewska. Hybrid quasi-optimal PID-SDRE quadrotor control. *Energies*, 15(12), 2022.
- [26] T. Glück, A. Eder, A. Kugi. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. *Automatica*, 49(3):801–808, 2013.
- [27] J. Grabski, J. Strzałko, B. Mianowski. *Podstawy mechaniki analitycznej*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2016.
- [28] J. W. Grizzle, C. H. Moog, C. Chevallereau. Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):559–576, May 2005.
- [29] J. Gutebnaum. *Problemy teorii regulatorów*. WNT, 1975.
- [30] R. Gutowski. *Mechanika analityczna*. PWN, 1971.
- [31] N. Hannouda, H. Takami. Control of Acrobot using inverse linear quadratic method. *2018 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, strony 1–4, March 2018.

- [32] P. Herman. *Quasi - prędkości inercyjne oraz ich zastosowanie w badaniu dynamiki i sterowaniu manipulatorów*. Politechnika Poznańska, Poznań, 2006.
- [33] P. Herman. A controller of the Pendubot using quasi-velocities. *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, strony 1066–1070, 2008.
- [34] P. Herman. Modified set-point controller for underwater vehicles. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(12):2317–2328, 2010.
- [35] D. Jacobsen, D. Mayne. *Differential Dynamic Programming*. Elsevier, New York, 1970.
- [36] A. Jain, G. Rodriguez. Diagonalized Lagrangian robot dynamics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(4):571–584, 1995.
- [37] B. Jakubczyk, W. Respondek. On linearization of control systems. *Biuletyn Polskiej Akademii Nauk*, 28(9-10), 1980.
- [38] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [39] T. Komine, S. Suzuki, M. Iwase, K. Furuta. Swing-up and balancing control of Acrobot. *Proceedings of the SICE Annual Conference*, strony 3072–3075, 2002.
- [40] K. Kozłowski, D. Pazderski, P. Parulski, P. Bartkowiak. Stabilization of a 3-link pendulum in vertical position. A. Bartoszewicz, J. Kabzinski, J. Kacprzyk, redaktorzy, *Advanced, Contemporary Control*, strony 651–662, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [41] A. J. Krener, A. Isidori, W. Respondek. Partial and robust linearization by feedback. *The 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, strony 126–130, 1983.
- [42] H. Krishnan, M. Reyhanoglu, H. McClamroch. Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques: A nonlinear control approach based on the spacecraft attitude dynamics. *Automatica*, 30(6):1023–1027, 1994.
- [43] S. Lee, M. Eom, D. Chwa. Robust swing up and balancing control of the Acrobot based on a disturbance observer. *2015 15th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, strony 48–53, Oct 2015.
- [44] M. T. Leines, J.-S. Yang. LQR control of an under actuated planar biped robot. *2011 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, strony 1684–1689, 2011.
- [45] J.-H. Li. Dual fuzzy PD control of DSP-based Pendubot. *2011 8th Asian Control Conference (ASCC)*, strony 641–646, 2011.
- [46] S. Li, C. Moog, W. Respondek. Maximal feedback linearization and its internal dynamics with applications to mechanical systems on  $\mathbb{R}^4$ . *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 03 2019.
- [47] W. Li, E. Todorov. Iterative linear quadratic regulator design for nonlinear biological movement systems. H. Araújo, A. Vieira, J. Braz, B. Encarnaç?o, M. Carvalho, redaktorzy, *ICINCO (1)*, strony 222–229. INSTICC Press, 2004.
- [48] Y. Liu, H. Yu. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(7):921–935, 2013.
- [49] R. Marino. On the largest feedback linearizable subsystem. *Systems & Control Letters*, 6(5):345–351, 1986.

- [50] S. Mason, L. Righetti, S. Schaal. Full dynamics LQR control of a humanoid robot: An experimental study on balancing and squatting. *2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, strony 374–379, 2014.
- [51] A. Mazur. *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych. Rozprawa habilitacyjna*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2009.
- [52] G. A. Medrano-Cerda. Robust stabilization of a triple inverted pendulum-cart. *International Journal of Control*, 68(4):849–866, 1997.
- [53] L. Meirovitch. *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [54] M. M. Michałek. Cascade-like modular tracking controller for non-standard n-trailers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(2):619–627, 2017.
- [55] W. Moebs, S. Ling, J. Sanny. *University Physics. Volume 1*. OpenStax, Feb 10, 2022.
- [56] A. Morillo, M. Ríos-Bolívar, V. Acosta. Feedback stabilization of the tora system via interconnection and damping assignment control. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):3781–3786, 2008. 17th IFAC World Congress.
- [57] L. Moysis. Balancing a double inverted pendulum using optimal control and laguerre functions. Technical report, Aristotle University of Thessaloniki, 04 2016.
- [58] H. Nijmeijer, A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer New York, 2013.
- [59] R. Olfati-Saber. Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole system and the rotating pendulum. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*, wolumen 2, strony 1174–1181 vol.2, 1999.
- [60] R. Olfati-Saber. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. Praca doktorska, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2001. AAI0803036.
- [61] Y. Orlov, L. Aguilar, L. Acho. Model Orbit Robust Stabilization (MORS) of Pendubot with application to swing up control. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, strony 6164–6169, 2005.
- [62] A. Owczarkowski, D. Horla, J. Zietkiewicz. Introduction of feedback linearization to robust LQR and LQI control – analysis of results from an unmanned bicycle robot with reaction wheel. *Asian Journal of Control*, 21(2):1028–1040, 2019.
- [63] P. Parulski, P. Bartkowiak, D. Pazderski. Evaluation of linearization methods for control of the Pendubot. *Applied Sciences*, 11(16), 2021.
- [64] K. Pathak, J. Franch, S. K. Agrawal. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3):505–513, June 2005.
- [65] D. Pazderski. Application of transverse functions to control differentially driven wheeled robots using velocity fields. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 64(4):831–851, 2016.
- [66] K. Pettersen, O. Egeland. Time-varying exponential stabilization of the position and attitude of an underactuated autonomous underwater vehicle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):112–115, 1999.

- [67] L. B. Prasad, B. Tyagi, H. O. Gupta. Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and LQR: Performance analysis without and with disturbance input. *Int. J. Autom. Comput.*, 11(6):661–670, 2014.
- [68] Quanser Inc. Q1-cRIO module. <https://www.quanser.com/products/q1-crio-module/>.
- [69] Quanser Inc. Rotary double inverted pendulum. [www.quanser.com/products/rotary-double-inverted-pendulum/](http://www.quanser.com/products/rotary-double-inverted-pendulum/).
- [70] Quanser Inc. Rotary servo base unit. [www.quanser.com/products/rotary-servo-base-unit/](http://www.quanser.com/products/rotary-servo-base-unit/).
- [71] Quanser Inc. *SRV02 Base Unit Experiment For LabVIEW Users*.
- [72] Quanser Inc. VoltPAQ-X1 amplifier. <https://www.quanser.com/products/voltpaq-x1-amplifier/>.
- [73] M. Ramirez-Neria, H. Sira-Ramirez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, Z. Gao. Active disturbance rejection control for reference trajectory tracking tasks in the Pendubot system. *IEEE Access*, 9:102663–102670, 2021.
- [74] W. Respondek. Feedback classification of nonlinear control systems on  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$ . B. Jakubczyk, W. Respondek, redaktorzy, *Geometry of feedback and optimal control*, strona 347–381. Dekker, 1998.
- [75] W. Respondek. Introduction to geometric nonlinear control; linearization, observability and decoupling. *Mathematical Control Theory*, 1:169–222, 2002.
- [76] G. Rodriguez, A. Jain, K. Kreutz-Delgado. A spatial operator algebra for manipulator modeling and control. *The International Journal of Robotics Research*, 10(4):371–381, 1991.
- [77] K. Sekiguchi, M. Sampei, S. Nakaura. Parameterization of the output with respect to the relative degree. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, 3(2):137–143, 2010.
- [78] S. Sellami, S. Mamedov, R. Khusainov. A ROS-based swing up control and stabilization of the Pendubot using virtual holonomic constraints. *2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR)*, strony 1–5, 2020.
- [79] J.-H. She, X.-Z. Lai, X. Xin, L.-L. Guo. A rewinding approach to motion planning for Acrobot based on virtual friction. *2010 IEEE International Conference on Industrial Technology*, strony 471–476, 2010.
- [80] B. Siciliano, O. Khatib, redaktorzy. *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2008.
- [81] M. Spong. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'94)*, wolumen 1, strony 314–321 vol.1, Sep. 1994.
- [82] M. Spong. The swing up control problem for the Acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(1):49–55, Feb 1995.
- [83] M. Spong. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1):2828 – 2832, 1996. 13th World Congress of IFAC, 1996, San Francisco USA, 30 June - 5 July.

- [84] M. Spong. Underactuated mechanical systems. B. Siciliano, K. Valavanis, redaktorzy, *Control Problems in Robotics and Automation*, strony 135–150, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg.
- [85] M. Spong, D. Block. The Pendubot: a mechatronic system for control research and education. *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, wolumen 1, strony 555–556 vol.1, 1995.
- [86] M. W. Spong. Modeling and Control of Elastic Joint Robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109(4):310–318, 12 1987.
- [87] S. Stępień, P. Superczyńska. Modified infinite-time state-dependent Riccati equation method for nonlinear affine systems: Quadrotor control. *Applied Sciences*, 11(22), 2021.
- [88] B. N. Subudhi, A. S. Morris. Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints. *Robotics Auton. Syst.*, 41:257–270, 2002.
- [89] R. Tajima, K. Suga. Motion having a flight phase: Experiments involving a one-legged robot. *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, strony 1726–1731, 2006.
- [90] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.
- [91] E. Theodorou, Y. Tassa, E. Todorov. Stochastic differential dynamic programming. *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, strony 1125–1132, 2010.
- [92] T. Toan, T. Ha, V.-D. Tran. Hybrid control for swing up and balancing Pendubot system: An experimental result. *2017 International Conference on System Science and Engineering (ICSSE)*, strony 450–453, 2017.
- [93] J. van den Berg. Iterated LQR smoothing for locally-optimal feedback control of systems with non-linear dynamics and non-quadratic cost. *2014 American Control Conference*, strony 1912–1918, 2014.
- [94] Y. Wang, Z. Zhang, C. Li, M. Buss. Adaptive incremental sliding mode control for a robot manipulator. *Mechatronics*, 82:102717, 2022.
- [95] E. Westervelt, J. Grizzle, C. Chevallereau, J. Choi, B. Morris. *Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion*. Control and Automation Series. CRC Press INC, 2007.
- [96] X. Xin, M. Kaneda. The swing up control for the Acrobot based on energy control approach. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, wolumen 3, strony 3261–3266 vol.3, Dec 2002.
- [97] X. Xin, M. Kaneda. New analytical results of the energy based swinging up control of the Acrobot. *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*, wolumen 1, strony 704–709 Vol.1, Dec 2004.
- [98] X. Xin, M. Kaneda, T. Oki. The swing up control for the Pendubot based on energy control approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):461–466, 2002. 15th IFAC World Congress.
- [99] X. Xin, J. Kousuke, L. Yannian, S. Changyin. Existence and design of reduced-order stable controllers for two-link underactuated planar robots. *CDC*, strony 4971–4976, 2012.
- [100] X. Xin, Y. Liu. *Control Design and Analysis for Underactuated Robotic Systems*. Springer London, 2014.

- [101] X. Xin, L. Yannian. Reduced-order stable stabilizing controllers for remotely driven Acrobot: Existence and design method. *ICCA*, strony 1627–1632, 2013.
- [102] X. Xin, K. Zhang, H. Wei. Linear strong structural controllability for an n-link inverted pendulum in a cart. *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, strony 1204–1209, Dec 2018.
- [103] T. Xu, J. Fan, Q. Fang, S. Wang, Y. Zhu, J. Zhao. A novel virtual sensor for estimating robot joint total friction based on total momentum. *Applied Sciences*, 9(16), 2019.
- [104] F. Xue, Z. Hou, H. Deng. Balance control for an Acrobot. *2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, strony 3426–3429, May 2011.
- [105] K. Yamada, A. Yuzawa. Approximate feedback linearization for nonlinear systems and its application to the Acrobot. *Proceedings of the American Control Conference*, wolumen 2, strony 1672–1677, 2002.
- [106] T. Yonemura, M. Yamakita. Swing up control of Acrobot based on switched output functions. *Proceedings of the SICE Annual Conference*, strony 1387–1392, 2004.
- [107] J. Zikmund, S. Celikovsky, C. Moog. Nonlinear control design for the Acrobot. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(20):446 – 451, 2007. 3rd IFAC Symposium on System Structure and Control.
- [108] J. Ziętkiewicz. Linear quadratic control with feedback-linearized models. *Studies in Automation and Information Technology*, 40:37–49, 2015.
- [109] T. Çimen. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):3761–3775, 2008. 17th IFAC World Congress.