



POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Wydział Inżynierii Mechanicznej



ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Dawid WITKOWSKI

**STATECZNOŚĆ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ
O SYMETRYCZNIE ZMIENNYCH
WŁAŚCIWOŚCIACH MECHANICZNYCH
PODDANEJ OBCIĄŻENIOM DYNAMICZNYM**

Promotor:

prof. dr hab. inż. Krzysztof MAGNUCKI

Promotor pomocniczy:

dr inż. Szymon MILECKI

Poznań, kwiecień 2022

Spis treści

STRESZCZENIE	3
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ.....	4
1. WSTĘP.....	6
1.1. Nowoczesne materiały gradientowe.....	6
1.2. Modelowanie płyt FGM - przegląd literatury	8
1.3. Kształtowanie konstrukcji nadwozia pojazdu szynowego	12
1.4. Teza i cel pracy.....	15
2. MODELOWANIE PŁYT Z MATERIAŁÓW GRADIENTOWYCH.....	16
2.1. Badania analityczne płyty o symetrycznie zmiennych właściwościach na grubości	16
2.1.1. Właściwości mechaniczne i fizyczne	18
2.1.2. Hipoteza deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej płyty	21
2.1.3. Zasada Hamiltona – równania różniczkowe ruchu.....	26
2.1.4. Obciążenie bifurkacyjne.....	42
2.1.5. Analiza modalna - drgania własne	43
2.1.6. Statyczne i dynamiczne ścieżki równowagi – stan zakrytyczny	44
2.1.7. Rozkład naprężeń normalnych oraz stycznych - efekt ścinania	46
2.2. Badania numeryczne płyty prostokątnej	48
2.2.1. Dyskretyzacja funkcji zmian właściwości materiałowych	48
2.2.2. Siatka elementów skończonych.....	54
2.2.3. Warunki brzegowe i obciążenia	58
2.2.4. Wpływ imperfekcji.....	59
2.3. Wyniki badań analitycznych i numerycznych.....	61
3. BADANIA NUMERYCZNE KONSTRUKCJI NOŚNEJ WAGONU	85
3.1. Modele numeryczne badanych konstrukcji	86
3.2. Przypadki obliczeniowe	88
3.3. Wyniki badań	89
4. PODSUMOWANIE BADAŃ I WNIOSKI	97
LITERATURA	101
SUMMARY.....	106

STRESZCZENIE

Przedmiotem pracy są analityczne oraz numeryczne badania płyty prostokątnej o symetrycznie zmiennych właściwościach mechanicznych i fizycznych wzdłuż jej grubości. Rozważaniom poddano płytę podpartą przegubowo na jej brzegach i obciążoną ściskającymi siłami dynamicznymi oraz zmiennym w czasie ciśnieniem, rozłożonym równomiernie na powierzchni. Przyjęty opis zmian właściwości materiałowych w skali makroskopowej stanowi uogólnienie dla materiałów jednorodnych, gradientowych oraz struktur trójwarstwowych typu „sandwich” o właściwościach symetrycznych względem płaszczyzny środkowej. Badania przeprowadzono dla rodziny materiałów gradientowych na przykładzie piany aluminiowej o zmiennej porowatości, wraz z przejściem granicznym do materiału jednorodnego.

Zaproponowano spójną, nieliniową hipotezę deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej płyty uwzględniającą efekt ścinania, na podstawie którego opracowano model analityczny. Wyprowadzono układ różniczkowych równań ruchu z zastosowaniem wariacyjnej zasady najmniejszego działania Hamiltona. Układ ten sprowadzono metodą Galerkina do pojedynczego nieliniowego równania różniczkowego drugiego rzędu. Energię odkształcenia sprężystego opisano zgodnie z nieliniowymi związkami między przemieszczeniem a odkształceniem oraz z uwzględnieniem prawa Hooke’a. W odniesieniu do sformułowanego modelu analitycznego przeprowadzono analizy numeryczne z zastosowaniem metody elementów skończonych w środowisku ABAQUS 6.12-2. Wykonano szczegółowe badania numeryczne wpływu imperfekcji na stateczność statyczną i dynamiczną płyty. Zastosowane metody modelowania poddano walidacji przez porównanie wyników otrzymanych obiema metodami.

Wyniki badań przeprowadzonych dla podstawowego elementu konstrukcyjnego, jakim jest płyta prostokątna, zastosowano do kształtowania i optymalizacji konstrukcji nadwozia pojazdu szynowego, na przykładzie wagonu osobowego, w celu zastąpienia klasycznej konstrukcji szkieletowej konstrukcją półskorupową. Przeprowadzono szereg analiz numerycznych ze szczególnym uwzględnieniem podłogi i ścian bocznych wagonu jako przykładu zastosowania płyty wykonanej z materiału gradientowego. Otrzymane wyniki zestawiono z wybranymi kryteriami wymagań normatywnych w zakresie wytrzymałości i bezpieczeństwa pasywnego konstrukcji nadwozia. W ten sposób poddano ocenie możliwość wprowadzenia do eksploatacji zaproponowanego rozwiązania konstrukcyjnego.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

a	– długość płyty (zgodnie z osią x)
A_i	– współczynnik imperfekcji
b	– szerokość płyty (zgodnie z osią y)
C_w, C_{w3}	– współczynniki różniczkowego równania ruchu
C_θ	– współczynnik amplitudy uogólnionej funkcji deformacji poprzecznych
e_0	– stosunek sztywności rdzenia do okładzin zewnętrznych płyty
E_0	– moduł Younga rdzenia płyty - w osi symetrii przekroju poprzecznego
E_1	– moduł Younga zewnętrznych powierzchni płyty (okładzin)
f_d	– bezwymiarowa, nieliniowa funkcja deformacji
f_e	– bezwymiarowa funkcja zmiany modułu Younga
f_g	– bezwymiarowa funkcja zmiany modułu Kirchhoffa
f_ρ	– bezwymiarowa funkcja zmiany gęstości
g_0	– stosunek modułu Kirchhoffa rdzenia do okładzin zewnętrznych płyty
G_0	– moduł Kirchhoffa rdzenia płyty - w osi symetrii przekroju poprzecznego
G_1	– moduł Kirchhoffa zewnętrznych powierzchni płyty (okładzin)
h	– grubość płyty (zgodnie z osią z)
$J_0, J_1, J_2, \dots, J_6$	– całki po grubości płyty składników energii odkształcenia sprężystego
k	– współczynnik wzmocnienia
k_e	– wykładnik potęgowy funkcji zmian właściwości materiałowych
k_s	– wykładnik potęgowy funkcji deformacji poprzecznej prostej normalnej
m, n	– liczba półfal odpowiednio wzdłuż długości i szerokości płyty
$N_{t,CR}$	– obciążenie krytyczne
N_t	– całkowita intensywność obciążenia ściskającego zależna od czasu
N_x, N_y	– intensywności obciążeń ściskających wzdłuż osi x i y
p	– ciśnienie rozłożone na powierzchni płyty
t	– czas
t_0	– czas osiągnięcia obciążenia krytycznego z uwzględnieniem k
T	– energia kinetyczna
u, v	– przemieszczenia poprzeczne punktów płyty w kierunkach osi x i y
u_1, v_1	– funkcje przemieszczeń poprzecznych zewnętrznych powierzchni płyty
U_ε	– energia odkształcenia sprężystego
w	– przemieszczenia normalne punktów płaszczyzny neutralnej płyty
W	– praca sił zewnętrznych
$w_a, \psi_a, \phi_a, \theta_a$	– amplitudy funkcji przemieszczeń
x, y, z	– współrzędne układu kartezjańskiego
α_N	– współczynnik rozkładu obciążeń ściskających
$\beta, \beta_1, \beta_{k_s}$	– parametry funkcji deformacji poprzecznej prostej normalnej

- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – kąty odkształcenia postaciowego w płaszczyznach XY, XZ i YZ
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – odkształcenia normalne wzdłuż osi x i y
- ζ – bezwymiarowa współrzędna zgodna z osią z
- θ – uogólniona funkcja przemieszczeń poprzecznych
- ν – liczba Poissona
- ρ_0 – gęstość rdzenia płyty - w osi symetrii przekroju poprzecznego
- $\tilde{\rho}_0$ – stosunek gęstości rdzenia do okładzin zewnętrznych płyty
- ρ_1 – gęstość Younga zewnętrznych powierzchni płyty (okładzin)
- ρ_p – gęstość zastępcza płyty
- σ_x, σ_y – naprężenia normalne wzdłuż osi x i y
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – naprężenia ścinające w płaszczyznach XY, XZ i YZ
- ψ, ϕ – bezwymiarowe funkcje przemieszczeń poprzecznych
- ω – częstotliwość drgań własnych
- Ω_i – pole odkształcenia początkowego

1. WSTĘP

Powszechna dostępność relatywnie dużych mocy obliczeniowych oraz zastosowanie nowoczesnych metod numerycznych w analizie strukturalnej sprawiły, że możliwości optymalizacji konstrukcji wykonanych z typowych materiałów stosowanych w przemyśle zostały obecnie wyczerpane. Jednakże cele stawiane współcześnie przed inżynierami w obszarze projektowania maszyn definiują coraz bardziej restrykcyjne wymagania, nierzadko zbliżając się do granic właściwości fizycznych oraz mechanicznych metali konstrukcyjnych i ich stopów, czy technicznych tworzyw sztucznych. Dąży się do zwiększenia zdolności przenoszenia przez konstrukcje obciążeń statycznych, dynamicznych i termicznych przy jednoczesnej redukcji masy oraz możliwości pracy w znacznie agresywniejszych środowiskach. Czynnikiem decydującym o ustanawianych kierunkach rozwoju są zarówno systematycznie doskonalone kwestie bezpieczeństwa jak i pobudki ekonomiczne, jednak współcześnie priorytetem stała się redukcja śladu węglowego. Niska energochłonność oraz emisyjność CO₂ stanowią warunek dla finansowania oraz dopuszczania do eksploatacji nowych maszyn i urządzeń. Szczególnie w transporcie oznacza to konieczność maksymalizacji stosunku masy ładunku do masy konstrukcji nośnej, co można osiągnąć przez zastosowanie nowoczesnych struktur materiałowych.

W celu sprostania postawionym wyzwaniom w instytutach inżynierii materiałowej na całym świecie trwają badania nad opracowaniem nowatorskich materiałów i struktur materiałowych oraz technologii ich wytwarzania. Dynamiczny postęp w tej dziedzinie zaobserwować można obecnie wśród materiałów gradientowych (z ang. Functionally Graded Materials, FGM). Ich implementacja w rzeczywistych rozwiązaniach inżynierskich wiąże się z koniecznością walidacji obecnych modeli matematycznych oraz metod obliczeniowych bądź opracowania nowych, dostosowanych do aktualnych problemów mechaniki ciała stałego, szczególnie dla wielkoskalowych konstrukcji.

1.1. Nowoczesne materiały gradientowe

Materiały gradientowe (FGM) definiuje się jako materiały składające się z minimum dwóch faz, cechujące się zmiennymi właściwościami fizycznymi oraz mechanicznymi wzdłuż co najmniej jednego kierunku. Zmiana ta może odbywać się w sposób ciągły zwłaszcza gdy poszczególne fazy materiału mieszają się ze sobą i występuje strefa przejściowa lub skokowy dla materiałów warstwowych (rysunek 1). Należą one do grupy materiałów anizotropowych. FGM swoją genezę zawdzięczają przemysłowi lotniczemu oraz energetyce jądrowej [50] i są efektem poszukiwań wysokowytrzymałych materiałów, odpornych na obciążenia termiczne. Obecnie liczba aplikacji i potencjalnych zastosowań materiałów gradientowych jest bardzo duża, a jedynym ograniczeniem w ich rozpowszechnieniu są koszty produkcji. Materiały gradientowe stanowią istotny komponent zaawansowanych dziedzin inżynierskich, wśród których wyróżnić można przemysł kosmiczny, lotniczy, zbrojeniowy, energetyczny oraz medyczny. Rozwój precyzyjnych metod wytwarzania FGM doprowadził do możliwości sterowania ich właściwościami w celu optymalnego dopasowania pod konkretne zastosowanie, co jest szczególnie pożądaną cechą materiałów gradientowych. Nowoczesne metody produkcji, głównie materiałów metalowo-ceramicznych oraz obszary ich

aplikacji przedstawili Hady Mostefa, Mardai i Mahmoudi [21]. Autorzy podkreślili udział technik komputerowych w produkcji FGM, pozwalających na uzyskanie materiałów, których właściwości zmieniają się we wszystkich trzech wymiarach.



Rysunek 1. Przykład skokowej oraz ciągłej zmiany właściwości materiałowych FGM [50]

W poszukiwaniu innowacyjnych rozwiązań konstrukcyjnych wśród obecnie produkowanych materiałów gradientowych wyjątkową uwagę należy zwrócić na piany metalowe. Kompleksowe omówienie zbioru zagadnień dotyczących pian metalowych znaleźć można w pracy Ashby i inni [2], opracowanej pod patronatem organizacji DARPA oraz ONR MURI. W publikacji omówiono procesy technologiczne produkcji oraz obróbki pian metalowych. Przedstawione zostały wyniki badań właściwości fizycznych oraz mechanicznych. Uzyskano, między innymi, krzywe materiałowe dla rozciągania, ściskania, ścinania oraz twardość zastosowanych stopów, a nawet poddano analizie zjawisko zmęczenia i pełzania. Określone zostały właściwości termiczne, akustyczne oraz elektryczne. Na przykładach omówiono możliwe kierunki implementacji pian metalowych z kalkulacją kosztów produkcji, szczególnie uwzględniając struktury typu sandwich. Wpływ kształtu, ilości oraz wielkości porów na właściwości mechaniczne pian aluminiowych przedstawiono w pracy Koza, Leonowicz i Wojciechowski [27]. Smith i inni [52, 53] opublikowali obszerny przegląd właściwości pian metalowych wytworzonych różnymi metodami. W przejrzysty sposób zestawili podstawowe właściwości mechaniczne, termiczne, akustyczne oraz krzywe rozciągania dla FGM, uwzględniając własne badania stanowiskowe. Badanie właściwości mechanicznych pian tytanowych i wpływu wielkości komórek na ich wytrzymałość przedstawiono w pracach Tuncer, Arslan [62] oraz Tuncer i inni [61].

W XXI wieku rozwiązano istotny problem dla struktur sandwichowych zawierających w rdzeniu piany metalowe. Opracowano proces produkcyjny dla powłok monolitycznych (rysunek 2), wykluczając konieczność łączenia okładzin z rdzeniem, które realizowane było zazwyczaj poprzez klejenie, nitowanie czy zgrzewanie. Stanowczo podniesiono w ten sposób odporność na ścinanie

oraz wytrzymałość zmęczeniową takich struktur. Produkt taki znajduje się w ofercie między innymi niemieckiej firmy Havel metal foam.



Rysunek 2. Przekrój monolitycznej struktury typu sandwich z rdzeniem z piany aluminiowej [Opr. własne]

1.2. Modelowanie płyt FGM - przegląd literatury

Zależnie od budowy wewnętrznej materiału gradientowego oraz skali badanych mechanizmów strukturalnych konieczne jest właściwe dobranie opisu ruchu i oddziaływań. Mechanika molekularna dostarcza narzędzi do analizy zjawisk lokalnych, wynikających z rzeczywistej struktury materiału, takich jak delaminacja, pękanie, krzepnięcie i topnienie oraz ruch dyslokacji, jednak do rozważań mechaniki konstrukcji w kontekście jej wytrzymałości oraz stateczności zazwyczaj wystarczające jest przyjęcie kontinuum materialnego. Mimo, iż takie założenie neguje dyskretną naturę ośrodka materialnego, to jednak formalizacja matematyczna modelowania konstytutywnego doprowadziła do olbrzymiego rozwoju w budowie maszyn oraz inżynierii lądowej. Fundamentem takiego podejścia dla FGM jest przyjęcie odpowiedniej funkcji zmian materiałowych, potwierdzonej badaniami empirycznymi oraz definicja pola przemieszczeń i równań konstytutywnych.

Historia formułowania podstaw matematycznych opisujących zachowanie płyt prostokątnych jest długa i rozpoczyna się w XIX wieku. Klasyczny, makroskalowy opis deformacji zginanych płyt przedstawia teoria Kirchhoffa-Lova, opracowana w 1888 roku, będącą dwuwymiarowym rozszerzeniem teorii Eulera-Bernoulliego, zgodnie z którą prosta normalna do płaszczyzny środkowej płyty pozostaje prosta i prostopadła do tej płaszczyzny po odkształceniu. Rezultatem przyjęcia tej teorii dla płyt jednorodnych jest liniowy rozkład naprężeń normalnych, przy braku naprężeń stycznych wzdłuż grubości płyty. Model ten rozbudowany został przez Mindlina (1951r.) oraz Reissnera (1945r.) w odniesieniu do belki Timoshenki. Wprowadzenie dodatkowych kątów obrotu prostej normalnej do płaszczyzny środkowej pozwala na uzyskanie uśrednionego rozkładu naprężeń stycznych, wymagającego zastosowania współczynników korekcyjnych - Nguyen, Sab i Bonnet [43]. W XXI wieku efekt ścinania został poddany dokładniejszej analizie przez wiele grup naukowych. Opracowano szereg nieliniowych hipotez deformacji, której przykład stanowi postać wielomianowa sformułowana przez Shi [51]. Benatta i inni [4] przedstawili wyniki analizy statycznej dla trójpunktowego zginania z uwzględnieniem deplacji oraz ścinania dla belek relatywnie

krótkich wykonanych z materiału gradientowego, którego właściwości zmieniają się w kierunku grubości belki. Deformacje i naprężenia otrzymano z zastosowaniem parabolicznej i sinusoidalnej hipotezy deformacji przekroju poprzecznego. Rezultaty przeprowadzonych badań autorzy porównali z teorią zginania Eulera-Bernoulliego oraz Timoshenki. Uogólniony opis pola przemieszczeń dla belek FGM sformułowali Giunra, Belouettar i Carrera [20] stosując szereg Maclaurina oraz wyznaczając jego współczynniki za pomocą trójkąta Pascala. Hipoteza ta pozwala na uwzględnienie deformacji w postaci wielomianu dowolnego rzędu i została zastosowana do wyznaczenia przemieszczeń oraz naprężeń w belce, dla której zmiana właściwości materiałowych zachodzi w dwóch kierunkach, dla przypadku obciążenia giętno-skrętnego. Otrzymane wyniki również porównano z teoriami klasycznymi. Dla materiałów o symetrycznej zmianie właściwości względem płaszczyzny obojętnej, Magnucki, Witkowski i Lewiński [38] przedstawili rozwiązanie problemu zginania oraz drgań swobodnych belek z uwzględnieniem efektu ścinania, przyjmując opis deformacji poprzecznych w postaci złożonej funkcji trygonometrycznej. Autorzy dokonali uogólnienia zmian właściwości materiałowych, przedstawiającego struktury typu sandwich jako szczególnie przypadek materiału gradientowego. Dla opracowanego opisu matematycznego, badania analityczne i numeryczne poszerzyli Magnucki, Witkowski oraz Magnucka-Blandzi [39] w zakresie stateczności i drgań swobodnych płyt prostokątnych. Mahi Adda Bedia i Tounsi [40] do opisu efektu ścinania w zginaniu i analizie drgań własnych płyt zastosowali funkcje deformacji będącą złożeniem wielomianu oraz funkcji hiperbolicznych. Wyniki przedstawili dla płyt jednorodnych, sandwichowych, kompozytowych oraz o ciągłej zmianie właściwości opisanej funkcją potęgową. Analizy materiałów gradientowych o potęgowej zmianie właściwości mechanicznych i fizycznych z zastosowaniem nieliniowych opisów deformacji poprzecznych, dokonał również Reddy [48], przyjmując wielomian trzeciego stopnia do opisu ścinania, natomiast Magnucki i inni [35], Thai i Vo [57] oraz Zenkour [74] założyli ich sinusoidalny przebieg. W swojej pracy Chi i Chung [10] zaprezentowali porównanie zachowania swobodnie podpartych płyt prostokątnych, których zmianę właściwości mechanicznych opisano z zastosowaniem trzech różnych funkcji: wykładniczej, potęgowej oraz sigmoidalnej. Płyty badane analitycznie obciążono siłami poprzecznymi.

W zakresie analizy materiałów wielowarstwowych, stanowiących szczególnie rodzaj FGM, rozbudowano klasyczne teorie zginania w celu uwzględnienia wpływu skokowych zmian właściwości fizycznych i mechanicznych pomiędzy poszczególnymi warstwami. Opracowano teorię linii łamanej (z ang. zig-zag theory), u podstaw której znalazły się teorie Kirchhoffa-Love'a oraz Reissnera-Mindlina. W późniejszym okresie zastosowano również hipotezy deformacji poprzecznych wyższych rzędów. Przeglądu modeli analitycznych wielowarstwowych płyt i powłok sformułowanych zgodnie z teorią linii łamanej dokonał Carrera [6]. Magnucki oraz Magnucka-Blandzi [36] dokonali uogólnienia opisu zmian właściwości materiałowych rdzenia struktur sandwichowych. Zastosowana w publikacji nieliniowa hipoteza deformacji stanowi udoskonalenie teorii linii łamanej z uwzględnieniem cienkich okładzin zewnętrznych płyt prostokątnych. Dla kompozytowych belek wielowarstwowych, Li, Hu oraz Li [28] wyznaczyli częstości drgań własnych z zastosowaniem teorii deformacji poprzecznych wyższych rzędów. Liu i inni [30] przebadali wpływ naprężeń własnych dla powłoki kompozytywnej wzmacnianej grafenem na zjawisko utraty stateczności oraz częstotliwości drgań swobodnych. Do rozważań analitycznych przyjęto pięć różnych postaci ułożenia wzmocnień struktury polimerowej. Współczynniki

wyboczenia pod wpływem sił tnących wyznaczył w swojej pracy Loughlan [31] dla wielowarstwowej płyty kompozytowej. W zakresie analizy modalnej płyt wykonanych z materiałów gradientowych wyróżnić można również publikacje Kaźmierczak i Jędrysiaka [25] oraz Jędrysiaka [24]. W swoich badaniach przedstawili wpływ periodycznie ułożonych mikrostruktur w kierunkach stycznych do płaszczyzny obojętnej płyty na częstości jej drgań swobodnych.

Analizie stateczności, w ramach tworzenia się nowych stanów równowagi pod obciążeniem krytycznym oraz badania stanów zakrytycznych podstawowych elementów konstrukcyjnych, poświęcona została obszerna publikacja autorstwa Bažanta i Cedolina [3]. Warto nadmienić, że autorzy podjęli temat pęknięcia oraz utraty sztywności podczas procesu zniszczenia w stanach zakrytycznych. Dla płyt FGM wzmacnianych grafenem Yang, Chen i Kitipornchai [73] wyznaczyli obciążenia krytyczne oraz częstotliwości drgań własnych. Badania tożsamyh obiektów poszerzyli Song, Kitipornchai, Yang [54], wyznaczając ich dynamiczne ścieżki równowagi, oraz Wu, Yang i Kitipornchai [71], określając ich obszary stabilności pod obciążeniami mechanicznymi i termicznymi zgodnie z równaniem Mathieu. Pawulus [44] przebadła analitycznie oraz numerycznie wpływ uszkodzeń cienkich, kompozytowych okładzin trójwarstwowej płyty pierścieniowej z poliuretanowym rdzeniem na obciążenie krytyczne i odpowiedź dynamiczną płyty pod obwodowym obciążeniem ściskającym. Uszkodzenia zamodelowano jako wstępne pęknięcia włókien lub lepizcza materiału kompozytowego, uwzględniając ich degradację sztywności zgodnie z metodą korekcji właściwości. Osiągnięcia XX wieku w zakresie modelowania materiałów gradientowych przedstawili Birman oraz Byrd [5]. Wynikiem studium prawie 300 publikacji z tego obszaru jest podsumowanie opracowanych metod homogenizacji materiałów gradientowych o znacznej niejednorodności, porównanie modeli analitycznych dla obciążeń statycznych, dynamicznych i termicznych wraz z optymalizacją konstrukcji oraz mechaniką pęknięcia i propagacji pęknięć, omówienie metod badań stanowiskowych oraz aplikacji materiałów gradientowych.

Modelowanie kontynualne z powodzeniem może być stosowane w analizie struktur zawierających materiały porowate. Przy dużej liczbie niejednorodności (w wyidealizowanym przypadku zmierzającej do nieskończoności) założyć można, że molekuly materiału poruszają się zgodnie z jednorodnym polem przemieszczeń. Wedle tej koncepcji opracowano wiele prac dotyczących modelowania wytrzymałości i stateczności elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów porowatych. Chen, Yang i Kitipornchai [8-9] opracowali makroskalowe modele matematyczne belek o ciągłej (symetrycznej oraz asymetrycznej) zmianie właściwości wzdłuż grubości dla materiałów porowatych. Przedstawione badania analityczne w zakresie drgań swobodnych i wymuszonych, statycznego zginania oraz wyboczenia sprężystego porównano z odpowiadającymi modelami numerycznymi. Mojahedin i inni [42] wyznaczyli obciążenia bifurkacyjne dla dwóch rodzin swobodnie podpartych płyt kołowych o różnej porowatości, dla których zmiany modułu sprężystości opisane zostały złożonymi funkcjami cosinus. Wyniki odniesiono do płyty kołowej o stałej porowatości. W badaniach założono liniową teorię porosprężystości Biot. Praca ta stanowi poszerzenie badań analitycznych przedstawionych w publikacji autorstwa Jabbari i inni [22]. Statycznej analizie stateczności wąskiego pasma płytowego oraz płyty kołowej wykonanych ze struktur typu sandwich, zawierających w swoim rdzeniu pianę metalową, poświęcono pracę autorstwa Jasiona i innych [23]. W publikacji przedstawiono globalne oraz lokalne formy utraty stateczności, uwzględniając zjawisko wyboczenia

okładzin struktury (z ang. wrinkling). Dla płyty kołowej o zmiennej porowatości wzdłuż grubości, symetrycznie względem płaszczyzny obojętnej, Magnucka-Blandzi [32] wyznaczyła rozkład naprężeń normalnych oraz obciążenie krytyczne, zakładając złożoną, trygonometryczną postać deformacji stycznych przekroju poprzecznego. Zagadnieniu modelowania stateczności dynamicznej płyt wykonanych z materiałów porowatych poświęcono między innymi publikację autorstwa Dębowskiego i Magnuckiego [14]. Omówiono w niej obszary niestateczności płyty prostokątnej dla jednoosiowego ściskania siłami dynamicznymi, uzyskane z zastosowaniem równania Mathieu. Natomiast badanie obszarów niestateczności porowatej płyty kołowej przedstawiono w pracy Magnucka-Blandzi [33]. Rozszerzenie prac z tego zakresu przedstawiono następnie w pracach Dębowski, Magnucki i Malinowski [14] oraz Magnucka-Blandzi [34], w których wyznaczono statyczne i dynamiczne ścieżki równowagi dla porowatej płyty prostokątnej oraz kołowej pod obciążeniami ściskającymi.

Istotny rozwój w ostatnich latach obserwuje się również w obszarze obliczeń numerycznych materiałów gradientowych, zwłaszcza wśród problemów wielkoskalowych. Modelowanie struktur FGM zazwyczaj wymaga uwzględnienia znacznie większej liczby stopni swobody, w stosunku do modelowania materiałów jednorodnych, powodując wzrost złożoności obliczeniowej. Możliwe jest redukcjonowanie niektórych zagadnień np. do płaskiego stanu naprężenia/odkształcenia, jednak w przypadku, gdy do pełnego opisu zagadnienia należy uwzględnić wszystkie składowe tensora naprężenia lub gdy istotne są zjawiska w mikro- i nanoskali, należy liczyć się z trudnościami technicznymi zrealizowania takowych obliczeń. Alternatywą pozostaje formułowanie elementów skończonych o zredukowanej liczbie stopni swobody, których przykładem są elementy belkowe dla materiałów gradientowych opracowane przez Chakraborty'ego, Gopalakrishnana oraz Reddy'ego [7]. Elementy skończone zdefiniowano z zastosowaniem teorii deformacji poprzecznych pierwszego rzędu i przystosowano do analiz statycznych, analizy modalnej oraz badania propagacji fal w materiale. Przedstawione badania dowodzą, że uzyskano doskonałą zbieżności macierzy sztywności poprzez wyeliminowanie problemu nadmiernej sztywności, towarzyszącej pierwszorzędownym elementom czworobocznym. Na przykładzie elementów konstrukcyjnych wykonanych z FGM stosowanych w lotnictwie, Sadowski Birsan i Pietras [49] zwalidowali szereg opracowanych przez siebie modeli numerycznych belek, płyt i powłok pod obciążeniami mechanicznymi i termicznymi z odpowiadającymi modelami analitycznymi. Otrzymane wyniki w zakresie deformacji oraz naprężeń stanowią cenne wskazówki dla stosowania Metody Elementów Skończonych (MES) w zakresie dyskretyzacji właściwości mechanicznych oraz redukcji zagadnień obliczeniowych w analizie materiałów gradientowych. Dokładne odwzorowanie złożonych krzywizn w modelach dyskretnych jest ograniczone funkcjami kształtów elementów skończonych. Podstawową formą reprezentacji powierzchni zakrzywionych w projektowaniu wspomaganym komputerowo (CAD) są natomiast parametryczne krzywe złożone z wycinków krzywych wielomianowych typu NURBS (z ang. Non-Uniform Rational B-Spline). Ich implementację w procesie obliczeniowym metody elementów skończonych umożliwia zastosowanie algorytmów izogeometrycznych. Główną zaletą tej metody jest dokładne odwzorowanie geometrii projektowej konstrukcji przy zachowaniu ciągłości wyższego rzędu. Stosując podejście izogeometryczne Xue i inni [72] wykonali badania drgań swobodnych płyt porowatych (prostokątnej, kołowej oraz prostokątnej z kołowym wycięciem) dla różnych rozkładów porowatości wzdłuż ich grubości

i długości przy założeniu hipotezy deformacji poprzecznych pierwszego rzędu. Odpowiedź dynamiczną układu belkowego wykonanego z materiału porowatego, którego właściwości zmieniają się zgodnie z funkcją cosinus, wyznaczyli Wu i inni [70] z zastosowaniem FEM. W publikacji zaprezentowano wyniki dla belki podpartej przegubowo, obciążonej siłą skupioną, poruszającą się wzdłuż długości belki oraz trójkondygnacyjnej konstrukcji ramowej. Szyniszewski i inni [55] przedstawili szczegółowo wyniki badań stanowiskowych w zakresie ściskania, rozciągania i ścinania próbek wykonanych z piany stalowej ze sferycznymi komórkami. Autorzy opracowali krzywe materiałowe, które posłużyły do walidacji modeli numerycznych FEM z zastosowaniem modelu plastyczności Deshpande-Flecka. W pracy podkreślono wpływ zmiany liczby Poissona na ściśliwość piany stalowej w zakresie odkształceń plastycznych. Pomimo dostępności tak obszernej literatury dziedzina ta wciąż nie jest kompletna i aktywnie się rozwija. Wciąż publikowane są nowe prace dotyczące modelowania materiałów gradientowych.

1.3. Kształtowanie konstrukcji nadwozia pojazdu szynowego

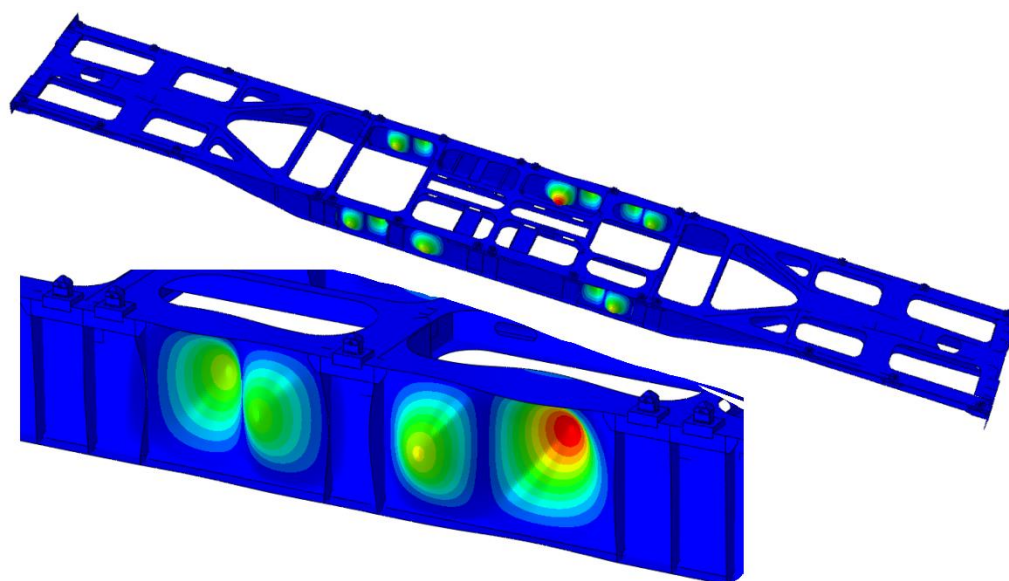
Pojazdy szynowe, aby zostały dopuszczone do eksploatacji, muszą przejść przez proces certyfikacji zakończony wydaniem świadectwa homologacji [56]. Podstawowym etapem w tym procesie są wielodyscyplinarne badania mające na celu ocenę konstrukcji i technologii wykonania pojazdu pod względem zapewnienia odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa i komfortu użytkownika transportu szynowego dla pasażerów oraz jego obsługi. Stanowią również zasadnicze znaczenie dla infrastruktury kolejowej, minimalizując koszty jej utrzymania oraz poprawiając stabilność jazdy, prowadząc do stopniowego wzrostu prędkości rozwijanych na szlakach kolejowych. Obecnie produkowane pojazdy, mające poruszać się po sieciach międzynarodowych, krajowych i regionalnych, muszą spełniać dodatkowo warunek interoperacyjności [15]. Dzięki ciągle rosnącym wymaganiom wytycza się kierunki rozwoju transportu szynowego.

Dla nadwozi (pudeł) pojazdów szynowych obowiązuje szereg wymagań w zakresie wytrzymałości oraz stateczności ich konstrukcji, opracowanych przez Komitet Techniczny CEN/TC 256 „Kolejnictwo”. Wymagania te zostały sporządzone na podstawie wiedzy i doświadczenia gromadzonego przez europejskie instytuty naukowe w zakresie badań transportu szynowego i są stale aktualizowane. Stanowią przedmiot norm [45, 46] obowiązujących w Polsce, dotyczących szczególnie zagadnień:

- wytrzymałości statycznej,
- wytrzymałości zmęczeniowej,
- stateczności statycznej konstrukcji,
- analizy drgań swobodnych,
- stanu zakrytycznego przy obciążeniach dynamicznych.

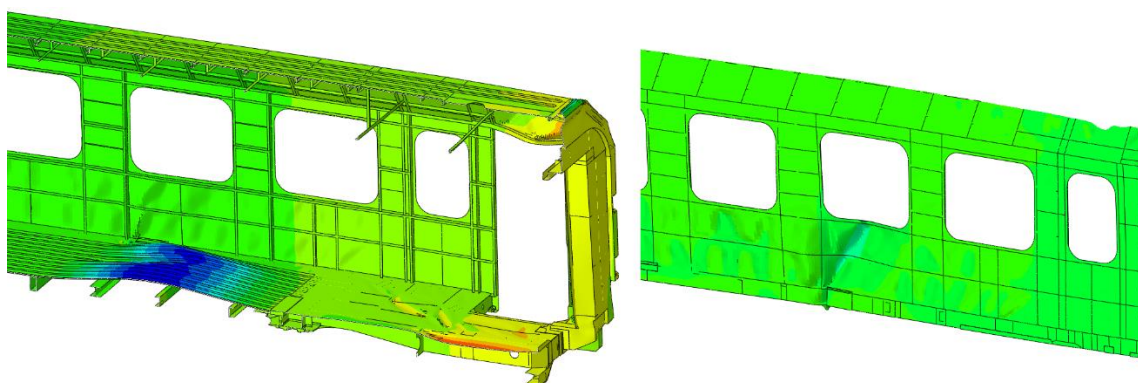
Nadwozia pojazdów szynowych w eksploatacji poddane są złożonemu stanowi obciążenia. W zależności od rodzaju i przeznaczenia pojazdu norma PN-EN 12663 [45] podaje odpowiednie konfiguracje obliczeniowe, dla których muszą zostać spełnione wartości kryterialne, ograniczające dozwolone pola przemieszczeń oraz naprężeń w konstrukcji. Są one traktowane jako podstawowe warunki jej wytrzymałości i sztywności. Pudła muszą charakteryzować się również odpowiednią

stabilnością w wielu jej aspektach. W zakresie statycznym należy wyznaczyć obciążenia bifurkacyjne konstrukcji dla wspomnianych konfiguracji obliczeniowych i wykazać, że dla każdego z nich zostaje zachowany minimalny współczynnik bezpieczeństwa równy 1,5. Przypadki obliczeniowe [45] uwzględniają między innymi: nadzwyczajne obciążenia ściskające, pochodzące od wzajemnego nabiegania pojazdów w składzie, sił w sprzęgu (sprzęgi samoczynne) oraz obciążenia pionowe od ładunku czy unoszenia pojazdu. Lokalne wybożenia struktury pojazdów często przybierają postać odpowiadające podstawowym elementom konstrukcyjnym (prętów-belek, płyt lub powłok). Przykład takiego zjawiska zachodzącego przy przeciążeniu siłami ściskającymi dla platformy towarowej przedstawiono na rysunku 3.



Rysunek 3. Przykład lokalnej utraty stateczności śródników podłużnic platformy towarowej przy przeciążeniu [67]

Istnieją jednak dodatkowe warunki do spełnienia. Jednym z istotniejszych działań z perspektywy stabilności i komfortu jazdy jest wyeliminowanie możliwości wystąpienia zjawiska rezonansu mechanicznego pomiędzy nadwoziem a wózkami. Sprowadza się to do poszukiwania częstotliwości drgań własnych pudła i porównania ich z częstotliwościami sił wymuszających, oddziałujących na nadwozie. Kolejny warunek odnosi się do zapewnienia bezpieczeństwa biernego [46] konstrukcji w warunkach jej przeciążenia. Sytuacja taka zachodzi w szczególnym przypadku podczas zderzenia, gdy wszystkie aktywne elementy systemu bezpieczeństwa zawiodą i dochodzi do wypadku kolejowego. Konsekwencje zderzenia należy uwzględnić już na etapie projektu pudła pojazdu szynowego, minimalizując przyspieszenia, ryzyko wykolejenia oraz strefy znacznych deformacji nadwozia jakie wystąpią w trakcie kolizji. Działanie to jest szczególnie istotne w transporcie osobowym, bowiem utrata stateczności struktury nadwozia w strefie przeżycia mająca charakter dynamiczny może doprowadzić do niekontrolowanej absorpcji energii zderzenia przez znaczne odkształcenia konstrukcji w miejscu przebywania pasażerów, zagrażając ich bezpieczeństwu. Na rysunku 4 zaprezentowano dynamiczną utratę stateczności płyty trapezowej (podłoga) oraz poszycia (ściana boczna) podczas zderzenia typowego wagonu osobowego.



Rysunek 4. Przykład dynamicznej utraty stateczności elementów wagonu osobowego podczas zderzenia [69]

Pomimo wszelkich środków zapobiegawczych w Polsce wciąż dochodzi do kolizji i wypadków w transporcie kolejowym. Choć ich liczba stopniowo spada z roku na rok dzięki zwiększającym się wymaganiom w kwestiach bezpieczeństwa, to wciąż należy podejmować działania w celu redukcji ich liczby. Wprawdzie wypadki spowodowane awariami pojazdów szynowych stanowiły zaledwie 11% wszystkich wypadków kolejowych w latach 2009-2010 [59], to jednak poprawa właściwości strukturalnych nadwozi pojazdów może zredukować potencjalne szkody kolizji następujących z dowolnych przyczyn. Jednym ze sposobów, jaki można obrać w tym celu, jest implementacja nowoczesnych materiałów gradientowych w produkcji pudeł pojazdów szynowych.

Wraz z rozwojem i upowszechnianiem metod numerycznych w analizie strukturalnej, zaczęły one pełnić, obok badań stanowiskowych, zasadniczą rolę w procesach badawczych złożonych geometrycznie konstrukcji. Jednak podstawą ich stosowania jest zawsze gruntowna walidacja metody, zawierająca analizę wpływu takich czynników, jak:

- zastosowanych w modelu uproszczeń geometrycznych,
- doboru właściwości materiałowych,
- wprowadzonych warunków brzegowych,
- dyskretyzacji modelu,
- imperfekcji technologicznych,
- kompletności modelu fizycznego.

Walidacji metod numerycznych można dokonać np. poprzez porównanie z badaniami stanowiskowymi, co jest metodą rekomendowaną, jednak kosztowną. Niebagatelne znaczenie mają w tym aspekcie również modele analityczne.

Prace w zakresie analiz numerycznych pojazdów szynowych i ich walidacji są prowadzone od wielu lat w Sieci Badawczej Łukasiewicz - Poznańskim Instytucie Technologicznym. Wyniki badań wytrzymałości i stateczności klasycznych, szkieletowych konstrukcji pudeł zarówno wagonów, lokomotyw, platform towarowych, jak i pojazdów specjalnych, zostały opracowane w niepublikowanych sprawozdaniach wewnętrznych, znajdujących się w archiwum ŁUKASIEWICZ - PIT [65-69]. W przytoczonych procesach badawczych autor niniejszej rozprawy brał udział w roli prowadzącego lub wykonującego badania.

1.4. Teza i cel pracy

Na podstawie wykonanego przeglądu literatury oraz zdobytego doświadczenia zawodowego w zakresie projektowania i badania konstrukcji nadwozi pojazdów szynowych z zastosowaniem metod numerycznych oraz badań stanowiskowych, sformułowano poniższe tezy pracy.

Teza I:

Możliwe jest sformułowanie indywidualnej hipotezy deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej płyty o zmiennych właściwościach materiałowych wzdłuż grubości, symetrycznie względem płaszczyzny środkowej, uwzględniającej podstawowe rodzaje struktur materiałowych (jednorodnych, gradientowych, trójwarstwowych) z analizą efektu ścinania, uzyskując rozkład naprężeń stycznych.

Teza II:

Możliwe jest zastąpienie klasycznych konstrukcji szkieletowych nadwozi pojazdów szynowych konstrukcją półskorupową, wykonaną z zastosowaniem materiałów gradientowych, dla których spełnione są wymagania normatywne w zakresie wytrzymałości, stateczności oraz bezpieczeństwa pasywnego, uzyskując konstrukcję bezpieczniejszą, o korzystniejszych właściwościach strukturalnych oraz eksploatacyjnych.

Cele rozprawy doktorskiej:

- opracowanie modelu analitycznego płyty prostokątnej z uwzględnieniem efektu ścinania,
- opracowanie modelu numerycznego płyty prostokątnej w odniesieniu do modelu analitycznego,
- wzajemna walidacja zastosowanych metod obliczeniowych przez porównanie wyników badań analitycznych oraz numerycznych,
- wyznaczenie sił krytycznych oraz częstości drgań własnych płyty prostokątnej,
- badania stateczności statycznej i dynamicznej płyty prostokątnej,
- implementacja wyników badań uzyskanych dla płyty prostokątnej w praktycznym procesie kształtowania i optymalizacji konstrukcji nadwozia wagonu osobowego.

2. MODELOWANIE PŁYT Z MATERIAŁÓW GRADIENTOWYCH

2.1. Badania analityczne płyty o symetrycznie zmiennych właściwościach na grubości

Płyta jest podstawowym elementem konstrukcyjnym, dla którego jeden z wymiarów (grubość) jest relatywnie znacznie mniejszy od dwóch pozostałych (długości i szerokości). Pozwala to, przy pewnych założeniach, na ograniczenie zagadnienia modelowania tego typu elementu do problemu dwuwymiarowego. W takim ujęciu pominięte zostają naprężenia normalne do powierzchni neutralnej, jako nieistotnie małe składowe tensora naprężenia. Założymy, że płaszczyzna środkowa płyty jest jej płaszczyzną obojętną, co jest ściśle spełnione tylko wtedy, gdy powierzchnia środkowa po odkształceniu jest powierzchnią rozwijalną.

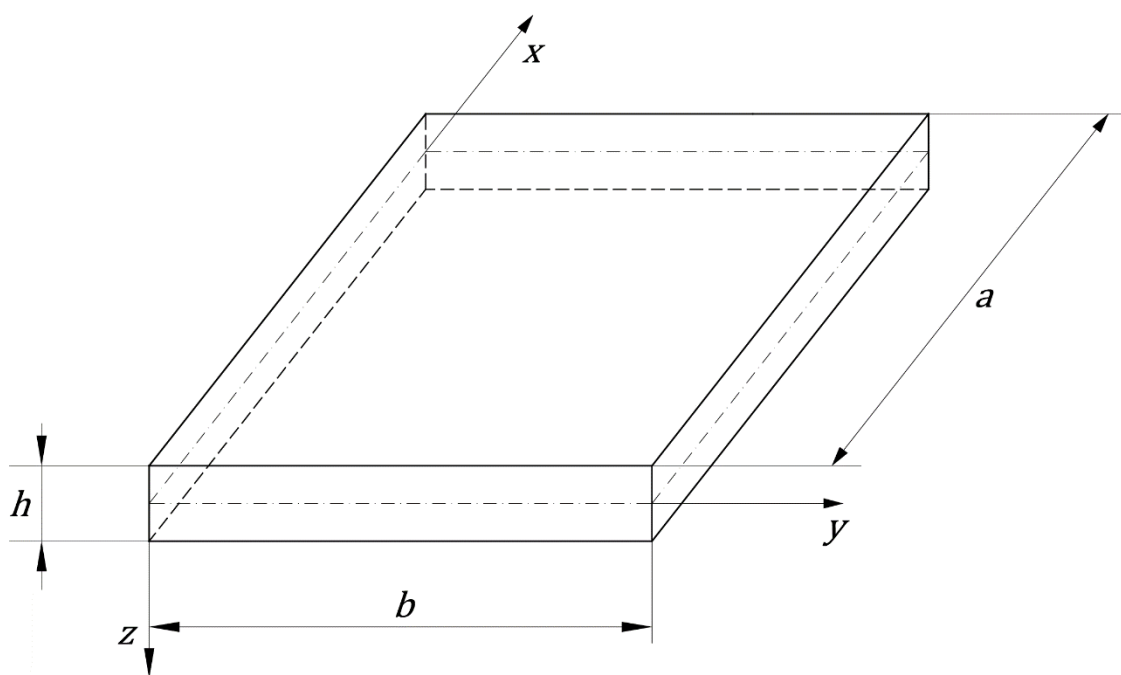
„Powierzchnią rozwijalną nazywamy taką powierzchnię prostoliniową, dla której płaszczyzna styczna jest stałą wzdłuż tworzącej” [60].

„Powierzchnią prostoliniową lub prostokreślną nazywamy powierzchnię, przez której każdy punkt przechodzi prosta leżąca na jej powierzchni” [60].

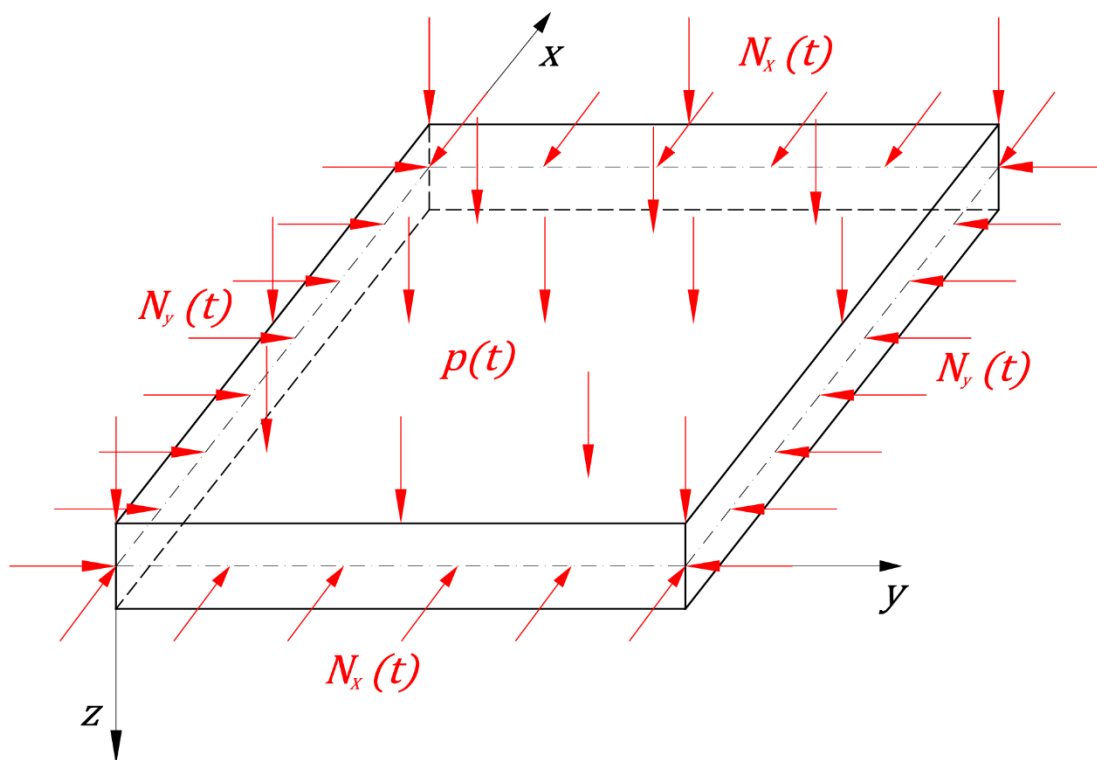
Proces zginania płyty poddanej obciążeniom normalnym oraz poprzecznym przebiega według krzywej walcowej, stanowiącej przykład powierzchni rozwijalnej. Należy dodatkowo zauważyć, że poddanie płyty ściskającym obciążeniom poprzecznym niesie za sobą skrócenie wymiarów w tych kierunkach. W skutek tego podstawowe wyrażenia opisujące krzywiznę odkształconej płaszczyzny neutralnej są wystarczające przy zachowaniu relatywnie niewielkich ugięć w stosunku do szerokości płyty. Słuszność tych założeń została dowiedziona w teorii płyt i powłok [58].

Niech płyta prostokątna o długości a , szerokości b i grubości h , będzie osadzona w kartezjańskim układzie współrzędnych, którego początek znajduje się w jednym z wierzchołków płaszczyzny neutralnej w taki sposób, żeby jej geometria znajdowała się w kierunkach wartości dodatnich osi x oraz y . Zgodnie z konwencją [58] przyjętą dla zginania płyt, oś z skierowana jest w dół (rysunek 5).

Płytę poddano dynamicznym obciążeniom ściskającym na obwodzie płaszczyzny obojętnej oraz ciśnieniu $p(t)$, równomiernie rozłożonemu na jej powierzchni i zależnemu od czasu. Przyjęto intensywności obciążeń $N_x(t)$ i $N_y(t)$ o stałym przebiegu wzdłuż krawędzi o kierunkach działa zgodnych z osiami x i y . Płyta podparta jest przegubowo-przesuwanie na czterech krawędziach płaszczyzny neutralnej. Schemat obciążenia przedstawiono na rysunku 6.



Rysunek 5. Geometria płyty prostokątnej w kartezjańskim układzie współrzędnych [Opr. własne]



Rysunek 6. Schemat obciążenia płyty prostokątnej [Opr. własne]

2.1.1. Właściwości mechaniczne i fizyczne

Materiał płyty spełnia następujące założenia dla ciała stałego:

- ciało stanowi continuum materialne,
- ciało jest jednostronnie anizotropowe wzdłuż kierunku zgodnego z osią z ,
- ciało ulega deformacji w zakresie liniowo-sprężystym.

Model materiałowy przyjęto zgodnie z [39]. Stanowi on bowiem, w ujęciu makroskopowym, uogólnienie materiałowe, pozwalające na uwzględnienie w rozważaniach analitycznych struktur gradientowych o szerokim spektrum właściwości. Poprzez odpowiedni dobór parametrów funkcji zmian właściwości materiałowych sterować można przebiegiem sztywności i gęstości wzdłuż grubości tak, by odpowiadał on rzeczywistym materiałom gradientowym. Parametry powyższych funkcji powinny zostać wyznaczone empirycznie dla konkretnego zastosowania. Wprowadzono bezwymiarową współrzędną ζ , a następnie funkcje zmian właściwości materiałowych wzdłuż grubości płyty [39] zależne od tej współrzędnej:

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad \zeta \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad (1)$$

$$E(\zeta) = E_0 + (E_1 - E_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta), \quad (2)$$

$$G(\zeta) = G_0 + (G_1 - G_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta), \quad (3)$$

$$\rho(\zeta) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta), \quad (4)$$

gdzie:

E – moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga),

G – moduł sprężystości poprzecznej (moduł Kirchhoffa),

ρ – gęstość materiału,

E_0, G_0, ρ_0 – właściwości odpowiadające płaszczyźnie środkowej dla $\zeta = 0$,

E_1, G_1, ρ_1 – właściwości odpowiadające płaszczyznom zewnętrznym płyty dla $\zeta = \pm \frac{1}{2}$,

k_e – wykładnik potęgowy.

Po przyjęciu bezwymiarowych parametrów (5) oraz wyrażonych za ich pomocą bezwymiarowych funkcji zmian właściwości wzdłuż współrzędnej ζ

$$e_0 = \frac{E_0}{E_1}, \quad g_0 = \frac{G_0}{G_1}, \quad \tilde{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad (5)$$

$$f_e(\zeta) = e_0 + (1 - e_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta), \quad (6)$$

$$f_g(\zeta) = g_0 + (1 - g_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta), \quad (7)$$

$$f_\rho(\zeta) = \tilde{\rho}_0 + (1 - \tilde{\rho}_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta), \quad (8)$$

przekształcone funkcje (2), (3) i (4) przybierają postać

$$E(\zeta) = E_1 f_e(\zeta), \quad (9)$$

$$G(\zeta) = G_1 f_g(\zeta), \quad (10)$$

$$\rho(\zeta) = \rho_1 f_\rho(\zeta). \quad (11)$$

Zgodnie z założeniem, że materiał nie wykazuje anizotropii w kierunkach zgodnych z osiami x i y , przyjęto związek między modułem sprężystości podłużnej i poprzecznej oraz liczbą Poissona ν dla uogólnionej postaci prawa Hooke'a [63]

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (12)$$

Podstawiając (12) do wyrażeń (5) otrzymuje się związek między parametrami e_0 i g_0

$$g_0 = \frac{G_0}{G_1} = \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} = e_0 \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}. \quad (13)$$

Jak wykazano w pracy [39], wpływ zmiany liczby Poissona nie ma istotnego wpływu dla analizy strukturalnej płyty. Można założyć zatem, że przebieg funkcji zmiany liczby Poissona wzdłuż grubości jest stały,

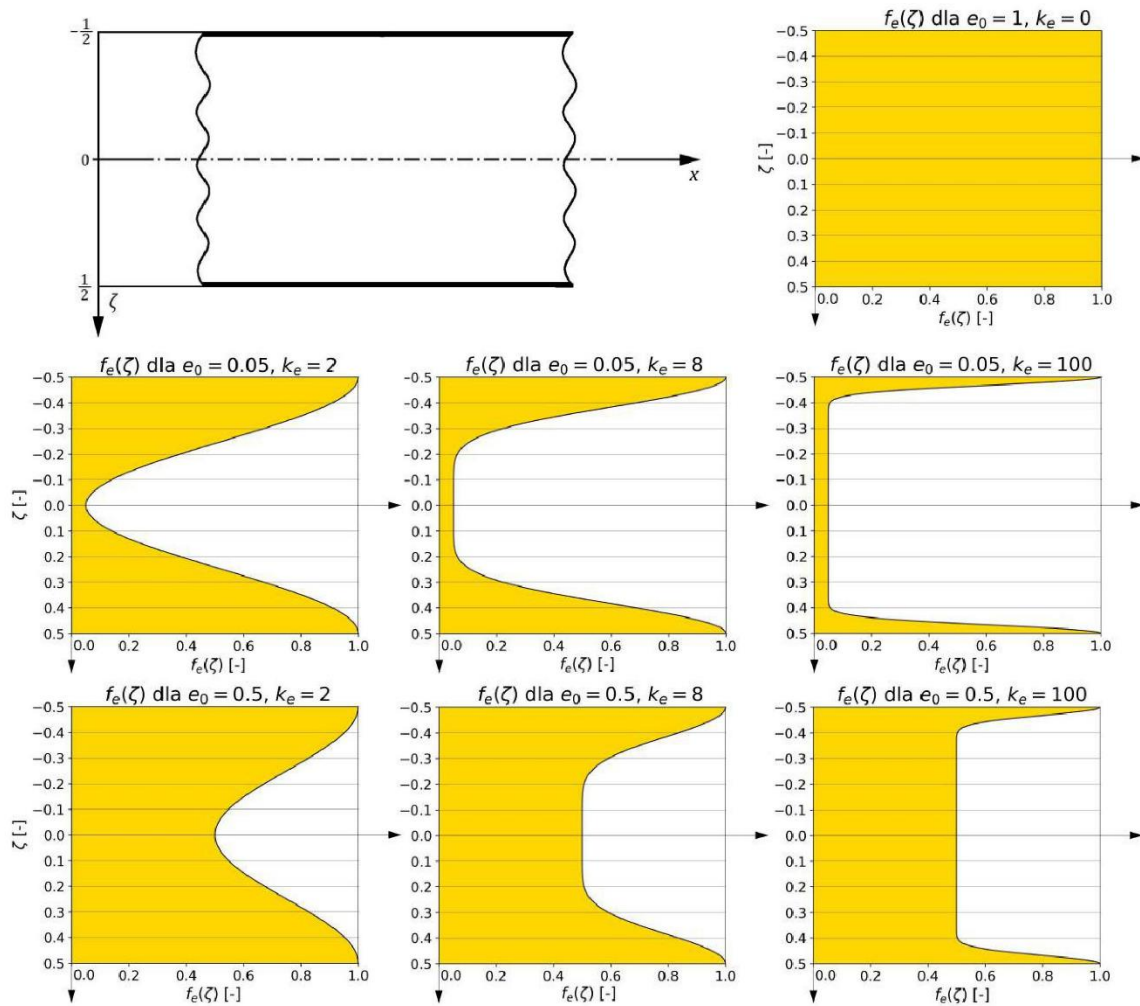
$$\nu(\zeta) = \nu_0 = \nu_1 = \nu, \quad (14)$$

w czego następstwie wynika równość parametrów e_0 i g_0 oraz funkcji $f_e(\zeta)$, $f_g(\zeta)$

$$g_0 = e_0, \quad (15)$$

$$f_e(\zeta) = f_g(\zeta). \quad (16)$$

Na rysunku 7 przedstawiono przykład, jak właściwości materiału mogą zmieniać się pod wpływem doboru różnych wartości parametrów funkcji (6), (7) i (8).



Rysunek 7. Właściwości materiałowe dla różnych parametrów funkcji (6) [Opr. własne]

Zależność między odkształceniem i naprężeniem w materiale przyjęto zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a [63] w odniesieniu do założenia, że rozpatrywane ciało jest liniowo-sprężyste

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y], \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x], \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad (18)$$

gdzie:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – odkształcenia w kierunkach x i y,

σ_x, σ_y – naprężenia normalne w kierunkach x i y,

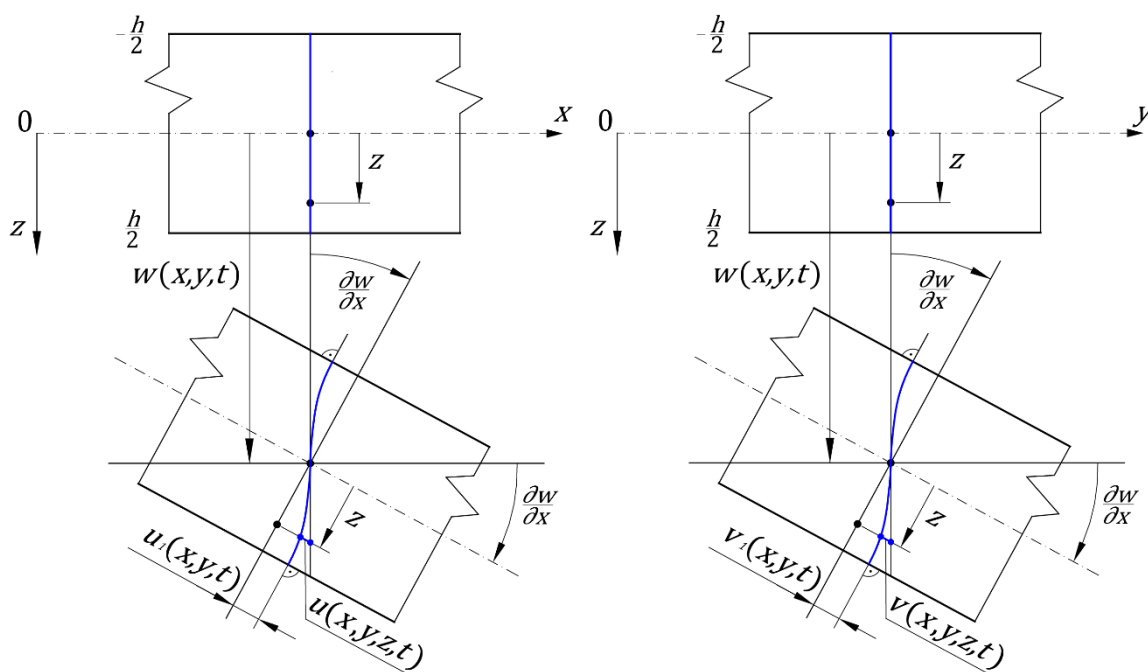
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ - kąty odkształcenia postaciowego w płaszczyznach XY, XZ oraz YZ,

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – naprężenia styczne w płaszczyznach XY, XZ oraz YZ.

2.1.2. Hipoteza deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej płyty

Jak przedstawiono we wstępie, klasyczne teorie deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej posiadają wewnętrzną sprzeczność, z której wynika zerowa (teoria Eulera-Bernoulliego) lub stała, uśredniona (teoria Timoshenki) wartość naprężenia tnącego wzdłuż przekroju. Nie uwzględniają one bowiem w wystarczającym stopniu efektu ścinania w procesie zginania. Fundamentalnym zadaniem postawionym przed autorem w niniejszej pracy jest sformułowanie wewnętrznie spójnej hipotezy deformacji uwzględniającej efekt ścinania dla przedstawionego w poprzednim rozdziale uogólnienia materiałów gradientowych.

Schemat deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej płyty w dwóch płaszczyznach XZ oraz YZ pokazano na rysunku 8.



Rysunek 8. Deformacja prostej normalnej do płaszczyzny środkowej płyty prostokątnej [Opr. własne]

Chcąc uwzględnić ścinanie przekroju poprzecznego płyty należy zauważyć, że prosta normalna ulega jednoczesnemu obrotowi odpowiadającemu czystemu zginaniu oraz przemieszczeniom w kierunkach poprzecznych, które możemy podzielić na składowe w kierunku osi x i y . Przemieszczenia punktów leżących na prostej normalnej będą silnie zależały od sformułowanych funkcji (6), (7) i (8) dla nieliniowo zmieniających się właściwości materiałowych. Przedstawiono te przemieszczenia w postaci ogólnej i bezwymiarowej zawierającej składniki odpowiadające zginaniu oraz ścinaniu. Formuły odniesiono do płaszczyzny neutralnej, zatem ugięcie płyty w jest niezależne od współrzędnej z ,

$$w(x, y, 0, t) = w(x, y, t), \quad (19)$$

$$u(x, y, \zeta, t) = -h \left[\zeta \frac{\partial w}{\partial x} - f_d(\zeta) \psi(x, y, t) \right], \quad (20)$$

$$v(x, y, \zeta, t) = -h \left[\zeta \frac{\partial w}{\partial y} - f_d(\zeta) \phi(x, y, t) \right], \quad (21)$$

gdzie:

$w(x, y, t)$ – ugięcie płyty (przemieszczenia normalne punktów płaszczyzny neutralnej),

$u(x, y, \zeta, t)$, $v(x, y, \zeta, t)$ – przemieszczenia poprzeczne dowolnego punktu płyty,

$f_d(\zeta)$ – funkcja deformacji poprzecznej prostej normalnej do płaszczyzny środkowej,

$\psi(x, y, t)$, $\phi(x, y, t)$ – bezwymiarowe funkcje przemieszczeń poprzecznych,

przy czym funkcje przemieszczeń ψ , ϕ równe są

$$\psi(x, y, t) = \frac{u_1(x, y, t)}{h}, \quad (22)$$

$$\phi(x, y, t) = \frac{v_1(x, y, t)}{h}, \quad (23)$$

gdzie:

$u_1(x, y, \zeta, t)$ – przemieszczenia styczne punktów zewnętrznej warstwy płyty w kierunku osi x ,

$v_1(x, y, \zeta, t)$ – przemieszczenia styczne punktów zewnętrznej warstwy płyty w kierunku osi y ,

i spełniają zależności

$$\begin{aligned} \psi(0, y, t) = \psi(a, y, t) = 0, \\ \phi(x, 0, t) = \phi(x, b, t) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Sformułowanie hipotezy deformacji stanowiącej uogólnienie teorii ścinania dla materiałów gradientowych, której odpowiada zdefiniowanie postaci funkcji deformacji f_d , stanowi przedmiot niniejszej pracy. Założono, że przytoczone założenia spełnia następująca funkcja f_d

$$f_d(\zeta) = \beta_1 \sin(\pi\zeta) + \beta_{k_s} \sin^{k_s}(\pi\zeta), \quad (25)$$

gdzie:

β_1 , β_k – bezwymiarowe parametry funkcji deformacji,

k_s – nieparzysty, naturalny wykładnik potęgowy, różny od 1.

Parametr k_s przyjmuje zatem wartości ze zbioru

$$k_s \in \mathbb{N}, \quad k_s = 3, 5, 7, \dots \quad (26)$$

Zbiorem wartości funkcji f_d (25) ma być zbiór

$$ZW_{f_d} \in \mathbb{R}, \quad ZW_{f_d} \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (27)$$

zatem parametry β_1, β_k muszą spełniać zależność

$$\beta_1 + \beta_{k_s} = 1. \quad (28)$$

Po zmianie oznaczenia i przekształceniu (28)

$$\beta_1 = \beta, \quad \beta_{k_s} = 1 - \beta, \quad (29)$$

otrzymuje się funkcję f_d w postaci dwuparametrowej

$$f_d(\zeta) = [\beta + (1 - \beta) \sin^{k_s-1}(\pi\zeta)] \sin(\pi\zeta). \quad (30)$$

Aby hipoteza deformacji była spójna, zaproponowana funkcja powinna przede wszystkim być prostopadła do powierzchni zewnętrznych płyty w punktach $\zeta = \frac{1}{2}$ i $\zeta = -\frac{1}{2}$. Założenie takie gwarantuje zerową wartość naprężeń tnących w warstwach skrajnych. Sformułowano zatem warunki dla pierwszej pochodnej funkcji (30)

$$\left. \frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \right|_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \right|_{\frac{1}{2}} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial \zeta} = \pi[\beta + (1 - \beta)k_s \sin^{k_s-1}(\pi\zeta)] \cos(\pi\zeta). \quad (32)$$

Warunki (31) są spełnione, ponieważ funkcja cosinus w otrzymanym wyrażeniu (32) zawsze przyjmuje wartość równą 0 dla $\zeta = \frac{1}{2}$ i $\zeta = -\frac{1}{2}$. Dodatkowo, aby spełniony został warunek (27), druga pochodna funkcji (30) musi realizować następujące nierówności

$$\left. \frac{\partial f_d^2}{\partial^2 \zeta} \right|_{-\frac{1}{2}} \geq 0, \quad \left. \frac{\partial f_d^2}{\partial^2 \zeta} \right|_{\frac{1}{2}} \leq 0. \quad (33)$$

Druga pochodna funkcji f_d równa jest

$$\frac{\partial f_d^2}{\partial^2 \zeta} = -\pi^2 \{ \beta + (1 - \beta)k_s [1 - k_s \cos^2(\pi\zeta)] \sin^{k_s-3}(\pi\zeta) \} \sin(\pi\zeta). \quad (34)$$

Podstawiając (34) do nierówności (33), otrzymujemy ograniczenie jednostronne dla parametru β

$$\begin{cases} \pi^2\{\beta + (1 - \beta)k_s\} \geq 0 \\ -\pi^2\{\beta + (1 - \beta)k_s\} \leq 0' \end{cases} \quad (35)$$

$$\beta \leq \frac{k_s}{k_s - 1}. \quad (36)$$

Wartości parametrów β oraz k_s wyznaczone zostaną przez minimalizację obciążenia bifurkacyjnego w późniejszym etapie obliczeń. Przebieg funkcji $f_d(\zeta)$ dla wybranych parametrów β oraz k_s przedstawiono na rysunku 9.

W tym miejscu rozważań zdefiniowano w pełni pole przemieszczeń dla płyty prostokątnej. W dalszym biegu modelowania niezbędne było określenie związków między przemieszczeniami a odkształceniami, definiowanymi jako zmiana odległości poszczególnych punktów płyty w stanie końcowym względem stanu początkowego. Przyjęto nieliniowe związki geometryczne dla dowolnie dużych odkształceń, opisywane przez symetryczny tensor odkształceń Greena [16], który można przedstawić, w postaci ogólnej, następująco

$$\varepsilon_{ij}^G = \varepsilon_{ji}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (37)$$

gdzie:

u_i, u_j, u_k – współrzędne wektorów przemieszczeń, tworzących pole wektorowe,

x_i, x_j, x_k – współrzędne, zgodnie z opisem materialnym.

Po zmianie oznaczeń w odniesieniu do już wcześniej wprowadzonych, uwzględnieniu bezwymiarowej współrzędnej ζ oraz redukcji wyrazów zerowych, otrzymuje się poniższe związki

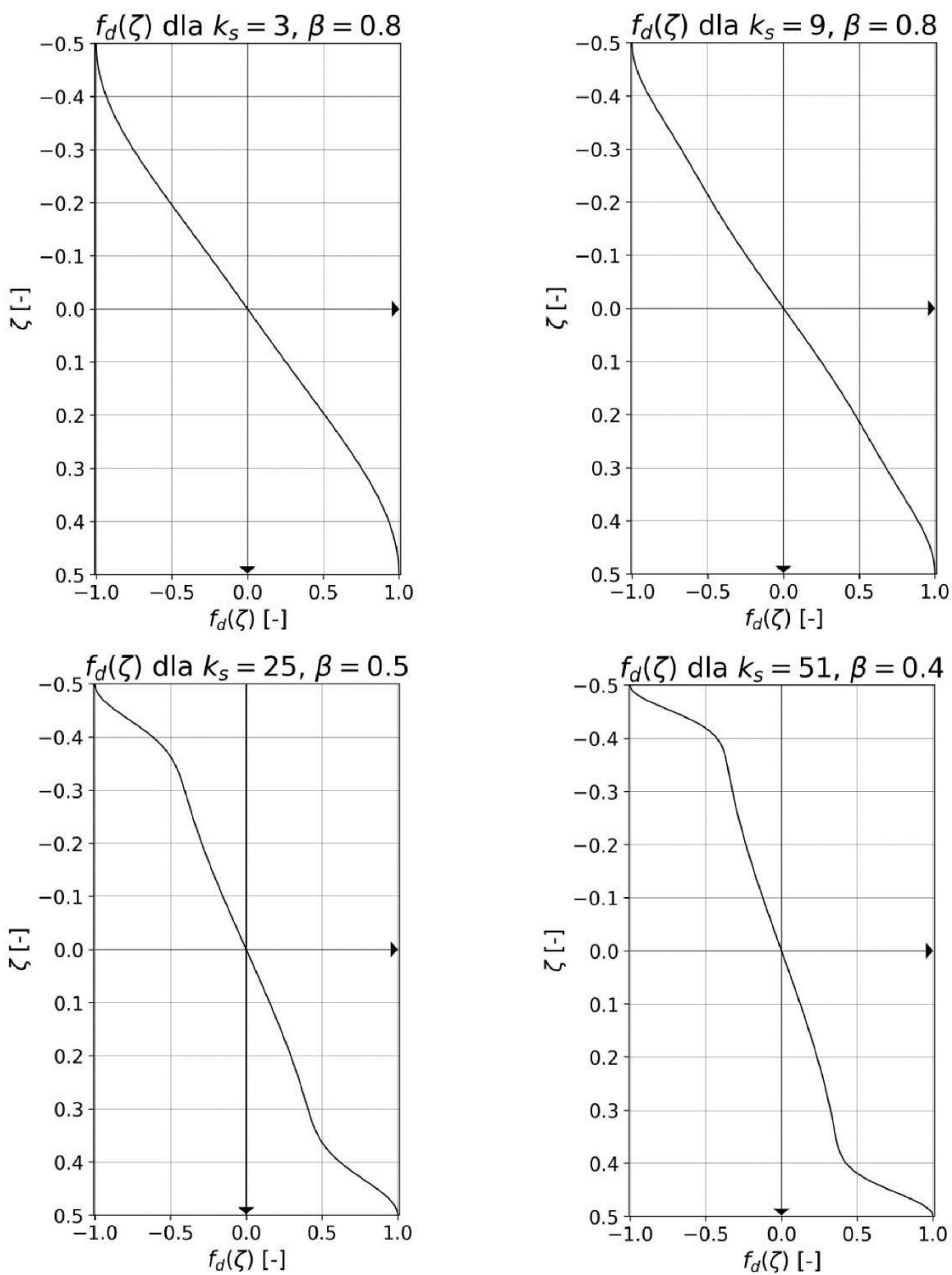
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (38)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (39)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (40)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad (41)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \zeta}. \quad (42)$$

Rysunek 9. Przebieg funkcji $f_d(\zeta)$ dla wybranych parametrów β oraz k_s [Opr. własne]

2.1.3. Zasada Hamiltona – równania różniczkowe ruchu

Analizę stateczności dynamicznej podstawowego elementu konstrukcyjnego, jakim jest płyta prostokątna, można przeprowadzić na różne sposoby, które prowadzą do badania jej różniczkowych równań ruchu. Wybór właściwej metody powinien uwzględniać właściwości materiałowe rozważanego ciała, sposób jego obciążenia i podparcia oraz czy w prowadzonej analizie istotne są zjawiska falowe.

Równania ruchu wyznaczyć można wprost korzystając z zasady d'Alemberta [19] przez określenie równań równowagi dynamicznej dla nieskończonego małego wycinka płyty, obciążonego siłami wewnętrznymi i zewnętrznymi oraz siłami bezwładności. Jeżeli jednak dla rozpatrywanego układu nie ma przeszkód, aby wprowadzić pojęcie energii potencjalnej, możliwe jest zastosowanie uniwersalnego podejścia energetycznego, bazując na równaniu Lagrange'a lub wariacyjnej zasadzie Hamiltona. Dla obu tych metod ważne jest wprowadzenie pojęcia potencjału kinetycznego L , zwanego inaczej funkcją Lagrange'a [17, 19]

$$L \stackrel{\text{def}}{=} T - U, \quad (43)$$

gdzie:

T – energia kinetyczna układu,

U – energia odkształceń pomniejszona o potencjał sił zewnętrznych.

Dalsze rozważania przeprowadzono zgodnie z zasadą najmniejszego działania Hamiltona.

„Ruch układu mechanicznego nieswobodnego można interpretować jako przejście z położenia początkowego (w chwili $t = t_1$) do końcowego (gdy $t = t_2$) po rozmaitych trajektoriach kinematycznie możliwych, tzn. zgodnych z nałożonymi więzami. Hamilton udowodnił, iż rzeczywisty ruch odbywa się w taki sposób, że działanie osiąga wartość stacjonarną: $\delta S = 0$ ” [19].

Działanie S jako wielkość fizyczną formułuje się następująco

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} L_d dt, \quad (44)$$

gdzie:

L_d – praca sił niezachowawczych (np. praca sił tarcia, praca sił odkształceń plastycznych)

Wprowadzając definicje działania (44), funkcję Lagrange'a (43) oraz pomijając składnik związany z siłami niezachowawczymi, działanie, zgodnie z zasadą Hamiltona, osiąga wartość stacjonarną gdy [17]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (45)$$

przy czym całkowitą energię potencjalną U wyrazić można jako różnicę

$$U = U_\varepsilon - W, \quad (46)$$

gdzie:

U_ε – energia odkształceń,

W – praca sił zewnętrznych.

Zgodnie z założeniem, że odkształcenia dla rozważanej płyty przebiegają w zakresie liniowo-sprężystym, energię odkształcenia sprężystego sformułować można następująco [16]

$$U_\varepsilon = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV. \quad (47)$$

Po wprowadzeniu założonego układu współrzędnych i zredukowaniu składników zerowych dla rozważanego zagadnienia otrzymuje się wyrażenie (47) w postaci

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) d\zeta dy dx. \quad (48)$$

Wprowadzono następnie do równania (48) zależności między odkształceniami i naprężeniami (17) (18) oraz funkcje zmian właściwości materiałowych (9) (10), mając na uwadze (16)

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{E_1 h}{1 - \nu^2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ f_\varepsilon(\zeta) [\varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \nu) (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right\} d\zeta dy dx. \quad (49)$$

Wyznaczono składniki podcałkowe równania (49), podstawiając funkcje deformacji (20) oraz (21) do zależności od (38) do (42)

$$\varepsilon_x(x, y, \zeta, t) = -h \left[\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f_a(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (50)$$

$$\varepsilon_y(x, y, \zeta, t) = -h \left[\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f_a(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (51)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, \zeta, t) = -h \left[2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - f_a(\zeta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (52)$$

$$\gamma_{xz}(x, y, \zeta, t) = \frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \psi(x, y, t), \quad (53)$$

$$\gamma_{yz}(x, y, \zeta, t) = \frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \phi(x, y, t). \quad (54)$$

Po obliczeniu iloczynów odkształceń i uporządkowaniu składników otrzymano

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 = & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + h f_d(\zeta) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + h^2 f_d^2(\zeta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - h \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & - 2 \zeta h^2 f_d(\zeta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + h^2 \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^2 = & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 + h f_d(\zeta) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + h^2 f_d^2(\zeta) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - h \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & - 2 \zeta h^2 f_d(\zeta) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + h^2 \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \varepsilon_y = & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} h f_d(\zeta) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \\ & + h^2 f_d^2(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{2} h \zeta \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & - h^2 \zeta f_d(\zeta) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + h^2 \zeta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2 = & \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 h f_d(\zeta) \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \\ & + h^2 f_d^2(\zeta) \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] - 4 h \zeta \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \\ & - 4 h^2 \zeta f_d(\zeta) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + 4 h^2 \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\gamma_{xz}^2 = \left(\frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \right)^2 \psi^2(x, y), \quad (59)$$

$$\gamma_{yz}^2 = \left(\frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \right)^2 \phi^2(x, y). \quad (60)$$

Podstawiając wyrażenia (55) - (60) do równania (49) zapisano energię odkształcenia sprężystego w postaci

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon = & \frac{1}{2} \frac{E_1 h}{1 - \nu^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{1}{4} J_0 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 \right] + h^2 J_1 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \right. \\
& - 2 h^2 J_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + h^2 J_3 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
& - h J_4 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + h J_5 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \\
& + 2\nu \left\{ \frac{1}{4} J_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + h^2 J_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - h^2 J_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \right. \\
& + h^2 J_3 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{2} h J_4 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} h J_5 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left\{ J_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 4 h^2 J_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\
& - 4 h^2 J_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + h^2 J_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 4 h J_4 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \\
& \left. + 2 h J_5 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + J_6 [\psi^2(x, y) + \phi^2(x, y)] \right\} dy dx,
\end{aligned} \tag{61}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} \zeta^2 f_e(\zeta) d\zeta, & J_2 &= \int_{-1/2}^{1/2} \zeta f_d(\zeta) f_e(\zeta) d\zeta, \\
J_3 &= \int_{-1/2}^{1/2} f_d^2(\zeta) f_e(\zeta) d\zeta, & J_4 &= \int_{-1/2}^{1/2} \zeta f_e(\zeta) d\zeta, \\
J_5 &= \int_{-1/2}^{1/2} f_d(\zeta) f_e(\zeta) d\zeta, & J_6 &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial f_d}{\partial \zeta} \right)^2 f_e(\zeta) d\zeta, \\
J_0 &= \int_{-1/2}^{1/2} f_e(\zeta) d\zeta,
\end{aligned} \tag{62}$$

stanowią całki równania po współrzędnej ζ , a ich wprowadzenie pozwala na zapisanie wyrażenia (49) jako całkę podwójną.

Wyrażenia podcałkowe - iloczyny $\zeta f_e(\zeta)$ oraz $f_d(\zeta)f_e(\zeta)$, są funkcjami nieparzystymi w przedziale całkowania, zatem ich całki będą równe zero, stąd

$$J_4 = J_5 = 0. \quad (63)$$

Ostatecznie wyrażenie opisujące energię odkształcenia sprężystego można zapisać następująco

$$\begin{aligned} U_\varepsilon = & \frac{1}{2} \frac{E_1 h^3}{1 - \nu^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ J_1 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & - 2 J_2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \right. \\ & \left. \left. + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & + J_3 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} (1 - \nu) \frac{J_6}{h^2} [\psi^2(x, y) + \phi^2(x, y)] \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{J_0}{h^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 \right] \right\} dy dx. \quad (64) \end{aligned}$$

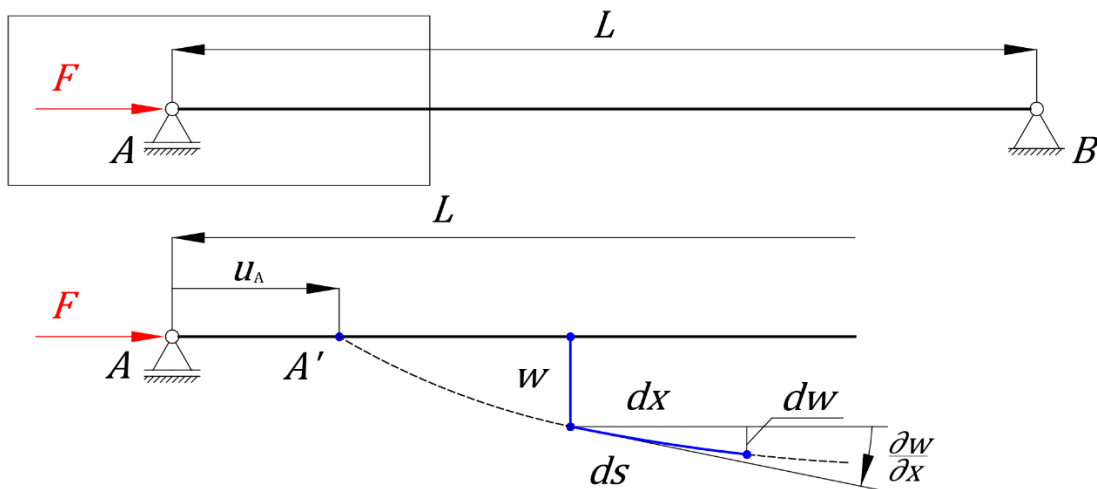
Następnie należy wyznaczyć jej pierwszą wariację

$$\begin{aligned}
\delta U_\varepsilon = & \frac{1}{2} \frac{E_1 h^3}{1 - \nu^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ 2J_1 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta w \right] + \right. \\
& - 2J_2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w + \right. \\
& \left. + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w \right) + \right. \\
& \left. + (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta \psi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta w + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta w \right) \right] \\
& + 2J_3 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \psi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta \phi + \nu \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \delta \psi \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \delta \psi + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi \right) \right] + \\
& + (1 - \nu) \frac{J_6}{h^2} [\psi(x, y) \delta \psi + \phi(x, y) \delta \phi] + \\
& + \frac{J_0}{h^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial}{\partial x} \delta w + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta w + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta w + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^3 \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right] \Big\} dy dx. \tag{65}
\end{aligned}$$

Stosując przekształcenia Green'a [17], po wyeliminowaniu składników zerowych otrzymano

$$\begin{aligned}
 \delta U_\varepsilon = & \frac{E_1 h^3}{1 - \nu^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ J_1 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \delta w + \right. \\
 & - J_2 \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right] \delta w + \\
 & + J_2 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta \psi + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta \psi + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta \phi + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta \phi \right] + \\
 & - J_3 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] \delta \psi + \\
 & - J_3 \left[\frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \delta \phi + \\
 & + (1 - \nu) \frac{J_6}{2h^2} [\psi(x, y) \delta \psi + \phi(x, y) \delta \phi] + \\
 & - \frac{J_0}{2h^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
 & \left. + 3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w \left. \right\} dy dx. \tag{66}
 \end{aligned}$$

W dalszej kolejności wyznaczono pracę sił zewnętrznych oraz jej pierwszą wariację. Wyrażenie to jest zależne od rodzaju obciążenia i zostało sformułowane zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 6. W przeciwieństwie do definiowania pracy wykonanej przez równomiernie rozłożone ciśnienie na powierzchni płyty, opis pracy realizowanej przez siły ściskające wymaga dodatkowego komentarza. Rozważono ściskanie belki podpartej przegubowo. Na rysunku 10 przedstawiono schemat jej odkształcenia pod wpływem ściskającej siły osiowej skierowanej wzdłuż osi x.



Rysunek 10. Schemat odkształcenia belki pod wpływem ściskającej siły osiowej [Opr. własne]

Zakładając, że długość osi neutralnej belki L po odkształceniu będzie równa długości początkowej L_0 , zapisano warunek

$$L_0 = \int_{A'B} ds. \quad (67)$$

Po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta powstałego z wielkości infinitezmalnych i przekształceniu (67) otrzymano

$$L_0 = \int_{u_A}^{L_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (68)$$

Podcałkowe wyrażenie pierwiastkowe można rozwinąć z zastosowaniem szeregu potęgowego Taylora w jego szczególnej formie opisanej wzorem Maclaurina [60]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n. \quad (69)$$

Pomijając małe wyższych rzędów obliczono pierwsze dwie pochodne dla funkcji podcałkowej (68), wraz z wartościami jakie funkcja i jej pochodne przyjmują dla $x = 0$

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \quad (70)$$

$$f'(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (71)$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1. \quad (72)$$

Podstawiając obliczone pochodne i jej wartości w $x = 0$ do wzoru Maclaurina (69) otrzymano przybliżone rozwinięcie funkcji $f(x)$ w postaci szeregu potęgowego

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2. \quad (73)$$

Po wprowadzeniu (73) do (68), długość odkształconej osi neutralnej

$$L_0 = \int_{u_A}^{L_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = L_0 - u_A + \int_0^{L_0} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (74)$$

wyprowadzoną zależność można uogólnić do przypadku dwuwymiarowej płyty zapisując podobne związki również dla siły ściskającej zgodnej z kierunkiem osi y . Dla powyżej zdefiniowanych przemieszczeń pracę sił zewnętrznych zapisano w postaci

$$W = \int_0^a \int_0^b \left[p w(x, y) + \frac{1}{2} N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy dx. \quad (75)$$

Jej pierwsza wariacja równa jest

$$\delta W = \int_0^a \int_0^b \left[p - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w dy dx. \quad (76)$$

Ostatnim brakującym składnikiem zasady wariacyjnej Hamiltona jest energia kinetyczna płyty. Przyjęto jej postać ogólną [16]

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dV. \quad (77)$$

Zakładając, że siły bezwładności w kierunku osiowym są pomijalnie małe i uwzględniając współrzędną ζ (1) oraz funkcję zmiany gęstości wzdłuż grubości (4)

$$T = \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\zeta dy dx. \quad (78)$$

Zwrócono uwagę, że ugięcie płyty $w(x, y, t)$ nie jest zależne od zmiennej ζ . Możemy w ten sposób obliczyć całkę po $d\zeta$ i wprowadzić gęstość zastępczą ρ_p

$$T = \frac{h \rho_p}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dy dx, \quad (79)$$

gdzie:

ρ_p – parametr gęstości materiału gradientowego,

$$\rho_p = \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) d\zeta = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{\rho}_0 + (1 - \tilde{\rho}_0) \sin^{k_e}(\pi\zeta) d\zeta. \quad (80)$$

Wariacja energii kinetycznej (79)

$$\delta T = \frac{h \rho_p}{2} \int_0^a \int_0^b 2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta w dy dx = -h \rho_p \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dy dx. \quad (81)$$

Podstawiając obliczone wariacje składników funkcji Lagrange'a rozpatrywanego układu mechanicznego δU_ε , δW , δT (66), (76), (81) do równania (45) wynikającego z zasady Hamiltona otrzymano funkcjonal będący działaniem S (44)

$$S = \mathfrak{R}(w, \psi, \phi, \dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} [T - (U_\varepsilon - W)] dt, \quad (82)$$

który zależy od trzech nieznanymi funkcji przemieszczeń (19), (22), (23) i ich pochodnych. Oczywiście te z kolei są funkcjami współrzędnych układu kartezjańskiego i czasu.

Jeśli funkcjonal (82) ma osiągać minimum, zgodnie z zasadą najmniejszego działania (45) muszą być spełnione równania Eulera w postaci [17]

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \end{cases} \quad (83)$$

Po zgrupowaniu składników zgodnie z wariacjami δw , $\delta\psi$, $\delta\phi$, otrzymano układ różniczkowych równań ruchu dla płyty prostokątnej.

$$\begin{aligned} \delta w^\circ & h \rho_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_1 h^3}{1 - \nu^2} \left\{ J_1 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \right. \\ & - J_2 \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right] + \\ & - \frac{J_0}{2h^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + 4 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \left. \right\} + \\ & + N_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y(t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p(t) \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi^\circ & J_2 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - J_3 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] + \\ & + \frac{1 - \nu}{2} \frac{J_6}{h^2} \psi(x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi^\circ & J_2 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] - J_3 \left[\frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \\ & + \frac{1 - \nu}{2} \frac{J_6}{h^2} \phi(x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Wprowadzono operator różniczkowy Laplace'a i jego podwójny odpowiednik

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (87)$$

oraz uogólnioną funkcję przemieszczeń poprzecznych

$$\Theta(x, y, t) [mm], \quad (88)$$

spełniającą zależności

$$\psi(x, y, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \phi(x, y, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad (89)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi = \nabla^4 \Theta. \quad (90)$$

W ten sposób układ trzech równań różniczkowych ruchu sprowadzić można do układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi funkcjami $w(x, y, t)$ oraz $\theta(x, y, t)$.

$$\begin{aligned} \delta w^\circ & h \rho_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_1 h^3}{1 - \nu^2} \left\{ J_1 \nabla^4 w - J_2 \nabla^4 \theta - \frac{J_0}{2h^2} \left[3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + 4 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + \\ & + N_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y(t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p(t) \end{aligned} \quad (91)$$

$$\delta \theta^\circ \quad J_2 \nabla^4 w - J_3 \nabla^4 \theta + \frac{1 - \nu}{2} \frac{J_6}{h^2} \nabla^2 \theta = 0 \quad (92)$$

W celu sprowadzenia układu równań różniczkowych ruchu o pochodnych cząstkowych do równań różniczkowych zwyczajnych przyjęto funkcje aproksymacji ugięć w postaci pierwszego składnika podwójnych szeregów trygonometrycznych [19, 29]. Funkcje te spełniają warunki brzegowe zgodnie z przyjętym schematem obciążenia dla płyty prostokątnej podpartej przegubowo

$$w(x, y, t) = w_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (93)$$

$$\theta(x, y, t) = \theta_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (94)$$

gdzie:

w_a, θ_a – amplitudy przemieszczeń,

m – liczba półfal na długości płyty (wzdłuż osi x),

n – liczba półfal na szerokości płyty (wzdłuż osi y).

Liczby określające postać wybożenia m i n należą do zbioru liczb naturalnych z wyłączeniem zera

$$m, n \in \mathbb{N}_+. \quad (95)$$

Warto zauważyć, że zgodnie z warunkami (89)

$$\psi(x, y, t) = \psi_a(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (96)$$

$$\phi(x, y, t) = \phi_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (97)$$

gdzie:

$$\psi_a(t) = \frac{m\pi}{a} \theta_a(t), \quad \phi_a(t) = \frac{n\pi}{b} \theta_a(t). \quad (98)$$

Pochodne funkcji (93) i (96) oraz ich operatory różniczkowe Laplace'a występujące w równaniach (91) i (92) równe są

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_a}{\partial t^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (99)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{m\pi}{a} w_a(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (100)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{n\pi}{b} w_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (101)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 w_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (102)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 w_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (103)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} w_a(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (104)$$

$$\nabla^4 w = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 w_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (105)$$

$$\nabla^2 \theta = - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \theta_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (106)$$

$$\nabla^4 \theta = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 \theta_a(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (107)$$

Po podstawieniu powyższych do równania (92) i przekształceniu otrzymuje się związek między amplitudami przemieszczeń (93) i (94)

$$\theta_a(t) = C_\theta w_a(t), \quad (108)$$

gdzie:

C_θ – współczynnik amplitudy dla przemieszczeń poprzecznych,

$$C_\theta = \frac{J_2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]}{J_3 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] + \frac{1-\nu}{2} \frac{J_6}{h^2}}. \quad (109)$$

Znając relację między amplitudami przemieszczeń niewiadomych funkcji układu równań różniczkowych ruchu można sprowadzić go do jednego, zwyczajnego różniczkowego równania ruchu, podstawiając pochodne cząstkowe funkcji (93) i (94) do równania (91)

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left\{ \rho_p \frac{d^2 w_a}{dt^2} + \right. \\
& \quad + \frac{E_1 h^2}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 (J_1 - J_2 C_\theta) w_a(t) + \\
& \quad + \frac{E_1 J_0}{1 - \nu^2} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[3 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\
& \quad \quad - 4 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \\
& \quad \quad \left. + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right\} w_a^3(t) + \\
& \quad \left. - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{N_x(t)}{h} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{N_y(t)}{h} \right] w_a(t) \right\} - \frac{p(t)}{h} = 0.
\end{aligned} \tag{110}$$

Równanie to można rozwiązać w sposób przybliżony stosując metodę Galerkina [60]. Warunek ortogonalizacyjny przybiera postać

$$\int_0^a \int_0^b \Re(x, y, t) \cdot w(x, y, t) dy dx = 0. \tag{111}$$

Następnie obliczono całki dla powstałego wyrażenia

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx = 4 \frac{a}{m\pi} \frac{b}{n\pi} \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right), \\
& \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx = \frac{a b}{4}, \\
& \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx = \frac{3 a b}{64}, \\
& \int_0^a \int_0^b \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx = \frac{a b}{64}, \\
& \int_0^a \int_0^b \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx = \frac{3 a b}{64}.
\end{aligned} \tag{112}$$

Po uwzględnieniu (110) i (112) otrzymano

$$\begin{aligned}
& \rho_p \frac{d^2 w_a}{dt^2} + \frac{E_1 h^2}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 (J_1 - J_2 C_\theta) w_a(t) + \\
& + \frac{E_1}{1 - \nu^2} \frac{J_0}{32} \left[9 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 9 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] w_a^3(t) + \\
& - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{N_x(t)}{h} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{N_y(t)}{h} \right] w_a(t) = \\
& = \frac{p(t)}{h} 16 \frac{1}{m\pi} \frac{1}{n\pi} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right).
\end{aligned} \tag{113}$$

Wprowadzono do równania (113) parametry C_w i C_{w3} oraz przekształcono je względem amplitudy funkcji ugięć $w_a(t)$

$$\begin{aligned}
& \rho_p \frac{d^2 w_a}{dt^2} + \frac{E_1 C_{w3}}{32(1 - \nu^2)} w_a^3(t) + \\
& + \left\{ \frac{E_1 h^2 C_w}{1 - \nu^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{N_x(t)}{h} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{N_y(t)}{h} \right] \right\} w_a(t) = \\
& = \frac{16 p(t)}{h \pi^2 m n} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right),
\end{aligned} \tag{114}$$

gdzie:

$$C_w = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 (J_1 - J_2 C_\theta), \tag{115}$$

$$C_{w3} = J_0 \left[9 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 9 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]. \tag{116}$$

Otrzymane równanie (114) jest poszukiwanym, zwyczajnym równaniem różniczkowym ruchu płyty prostokątnej dla ogólnego przypadku obciążenia. Obciążenie ciśnieniem powierzchni płyty ma sens fizyczny tylko gdy $m = n = 1$, w przeciwnym razie praca realizowana przez ten rodzaj obciążenia przybierałby lokalnie znak ujemny. Równanie przybiera wtedy postać

$$\begin{aligned}
& \rho_p \frac{d^2 w_a}{dt^2} + \frac{E_1 C_{w3}}{32(1 - \nu^2)} w_a^3(t) + \\
& + \left\{ \frac{E_1 h^2 C_w}{1 - \nu^2} - \frac{\pi^2}{h} \left[\frac{N_x(t)}{a^2} + \frac{N_y(t)}{b^2} \right] \right\} w_a(t) = \frac{16 p(t)}{h \pi^2}.
\end{aligned} \tag{117}$$

Z perspektywy analizy stateczności płyty najistotniejsze są obciążenia przyłożone w jej płaszczyźnie neutralnej. Dlatego do dalszych rozważań założono, że $p = 0$. Dla ułatwienia analizy wprowadzono również parametr obciążenia α_N i zastąpiono poszczególne składowe siły ściskających N_x, N_y obciążeniem całkowitym N_t . Gdy parametr obciążenia przybiera wartość $\alpha_N = 0$, występuje wyłącznie ściskanie w kierunku zgodnym z osią x , natomiast gdy $\alpha_N = 1$, wyłącznie ściskanie w kierunku zgodnym z osią y . Płyta jest obciążona równomiernie intensywnością obciążenia N_t z obu kierunków gdy $\alpha_N = \frac{1}{2}$

$$N_x(t) = N_t(t)(1 - \alpha_N), \quad (118)$$

$$N_y(t) = N_t(t)\alpha_N, \quad (119)$$

$$\alpha_N \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (120)$$

gdzie:

N_t – obciążenie całkowite zależne od czasu,

α_N – parametr obciążenia.

Równanie (114), dla tak zdefiniowanych obciążeń przybiera postać

$$\begin{aligned} & \rho_p \frac{d^2 w_a}{dt^2} + \frac{E_1 C_{w3}}{32(1 - \nu^2)} w_a^3(t) + \\ & + \left\{ \frac{E_1 h^2 C_w}{1 - \nu^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 - \alpha_N) + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \alpha_N \right] \frac{N_t(t)}{h} \right\} w_a(t) = 0. \end{aligned} \quad (121)$$

2.1.4. Obciążenie bifurkacyjne

Analizę stateczności układu warto rozpocząć od wyznaczenia statycznego obciążenia krytycznego, dla którego następuje wytrącenie ze stanu równowagi. Wyrażenie pozwalające na określenie jego wartości można uzyskać w ujęciu liniowym, pomijając składniki bezwładnościowe oraz nieliniowe z równania (121).

$$N_{t,CR} = \frac{E_1 h^3 a^2 b^2}{\pi^2 (1 - \nu^2)} \min_{m,n,k_s,\beta} \left[\frac{C_w}{(mb)^2 (1 - \alpha_N) + (na)^2 \alpha_N} \right]. \quad (122)$$

Wieloparametrowa minimalizacja wyrażenia opisującego siłę krytyczną (122) dla płyty prostokątnej pozwala nie tylko na określenie zakresu obciążenia statecznej pracy, ale również na określenie form jej wyboczenia przez określenie liczby półfal m, n . Stanowi również podstawę do wyznaczenia wartości parametrów β i k_s , zaproponowanej w niniejszej pracy funkcji deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej $f_d(\zeta)$.

Dla jednoosiowego ściskania, zgodnie z osią x , wyrażenie (122) jest postaci

$$N_{t,CR} = \frac{E_1 h^3 a^2}{\pi^2 (1 - \nu^2)} \min_{m,k_s,\beta} \left(\frac{C_w}{m^2} \right). \quad (123)$$

Po sprowadzeniu problemu do analizy płyty z materiału jednorodnego oraz pomijając efekt ścinania, funkcje (6) i (30) przyjmują wartości

$$f_e(\zeta) = 1, \quad f_d(\zeta) = 0, \quad (124)$$

natomiast całki występujące w wyrażeniu na energię odkształcenia sprężystego (62) równe są

$$J_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \zeta^2 f_e(\zeta) d\zeta = \frac{1}{12}, \quad J_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \zeta f_d(\zeta) f_e(\zeta) d\zeta = 0. \quad (125)$$

Podstawiając ich wartości do współczynnika

$$C_w = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 (J_1 - J_2 C_\theta) = \frac{1}{12} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2, \quad (126)$$

otrzymano klasyczne wyrażenie na intensywność obciążenia krytycznego płyty prostokątnej poddanej jednoosiowemu ściskaniu [3]

$$N_{t,CR} = \frac{E_1 h^3 \pi^2}{12(1 - \nu^2)a^2} \min_m \left(m^2 \left[1 + \left(\frac{a}{mb} \right)^2 \right]^2 \right). \quad (127)$$

2.1.5. Analiza modalna - drgania własne

Formułę matematyczną opisującą częstotliwość drgań własnych można wyprowadzić podobnie do obciążenia bifurkacyjnego z wyrażenia (121), pomijając składnik nieliniowy równania oraz składniki zawierające obciążenia zewnętrzne. Równanie ruchu przyjmuje postać

$$\rho_p \frac{d^2 w_a}{dt^2} + \frac{E_1 h^2 C_w}{1 - \nu^2} w_a(t) = 0. \quad (128)$$

Można rozwiązać je przez założenie rozchodzenia się drgań płyty w postaci fali sinusoidalnej

$$w_a(t) = w_a \sin(\omega t), \quad (129)$$

gdzie:

w_a – amplituda drgań,

ω – częstotliwość własna.

Po podstawieniu (129) do (128) i przekształceniu względem częstotliwości ω otrzymano

$$\omega = \sqrt{\frac{E_1 h^2 C_w}{\rho_p (1 - \nu^2)}}. \quad (130)$$

Sprowadzając zagadnienie do przypadku jednorodnej płyty prostokątnej (124), podobnie jak to wykonano dla wyrażenia na obciążenie bifurkacyjne (127), otrzymuje się znane z literatury wyrażenie [11]

$$\omega = \frac{\pi^2}{ab} \left[\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right] \sqrt{\frac{D}{h \rho_p}}, \quad (131)$$

gdzie:

D – współczynnik sztywności płyty,

$$D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (132)$$

2.1.6. Statyczne i dynamiczne ścieżki równowagi – stan zakrytyczny

Wyrażenie na krytyczną intensywność obciążenia $N_{t,CR}$ (122) podstawiono pod zwyczajne równanie różniczkowe ruchu (121) wprowadzając jednocześnie bezwymiarowe ugięcie

$$\tilde{w}_a(t) = \frac{w_a(t)}{h}. \quad (133)$$

Otrzymano w ten sposób przekształcone dynamiczne równanie różniczkowe ruchu

$$\frac{d^2 \tilde{w}_a}{dt^2} + \frac{E_1 h^2 C_w}{\rho_p (1 - \nu^2)} \left\{ \frac{C_{w3}}{32 C_w} \tilde{w}_a^3(t) + \left[1 - \frac{N_t(t)}{N_{t,CR}} \right] \tilde{w}_a(t) \right\} = 0. \quad (134)$$

Równanie to można rozwiązać w sposób przybliżony z zastosowaniem metod numerycznych. Jako, że nie jest możliwe znalezienie jego ścisłego rozwiązania, zastosowano metodę Rungego-Kutty w schemacie czwartego rzędu [19]. Zastosowane warunki początkowe przedstawiono wraz z otrzymanymi wynikami w rozdziale 2.3 - wyniki badań.

Eliminując składnik bezwładnościowy z (134) uzyskać można statyczną ścieżkę równowagi płyty prostokątnej - wyrażenie odpowiadające zasadzie stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

$$\tilde{w}_a(t) = \sqrt{\frac{32 C_w}{C_{w3}} \left[\frac{N_t(t)}{N_{t,CR}} - 1 \right]}. \quad (135)$$

Sprowadzono problem, tak jak w przypadku obciążenia bifurkacyjnego oraz częstości drgań własnych, do analizy płyty jednorodnej z pominięciem efektu ścinania. Uwzględniając (125) i (126) oraz zakładając, że $n = 1$ i $m = \frac{a}{b}$ współczynniki równania ruchu równe są

$$C_w = \frac{\pi^4}{3b^4}, \quad C_{w3} = \frac{20\pi^4}{b^4}, \quad (136)$$

natomiast (134) sprowadza się do postaci, które znaleźć można w literaturze [26, 34, 37]

$$\frac{d^2 \tilde{w}_a}{dt^2} + k_N \left\{ \frac{15}{8} \tilde{w}_a^3(t) + \left[1 - \frac{N_t(t)}{N_{t,CR}} \right] \tilde{w}_a(t) \right\} = 0, \quad (137)$$

gdzie:

$$k_N = \frac{\pi^2 N_{t,CR}}{h \rho_p b^2}. \quad (138)$$

Podążając za [19], zagadnienie stateczności dynamicznej płyty prostokątnej można zdefiniować inaczej, uwzględniając swobodę przemieszczeń stycznych punktów płaszczyzny środkowej. Taki opis prowadzi do następującej postaci różniczkowego równania ruchu [19]

$$\frac{E_1 h^2}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w = L(w + \tilde{w}, \Phi) - \rho \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (139)$$

gdzie:

$\Phi(x, y, t)$ – funkcja naprężeń Airy’ego,

L – operator różniczkowy,

\tilde{w} – ugięcie wstępne płyty - imperfekcje.

Operator różniczkowy L jest równy z definicji

$$L(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}. \quad (140)$$

Funkcja naprężeń Airy’ego przedstawia natomiast naprężenia stanu błonowego, gdzie

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (141)$$

Korzystając z warunku nierozdzielności odkształceń,

$$\frac{1}{E_1} \nabla^4 \Phi = -L\left(w, \frac{1}{2}w + \tilde{w}\right), \quad (142)$$

można wyznaczyć rozwiązanie funkcji naprężeń spełniające określone warunki brzegowe. Następnie, postępując analogicznie jak w przypadku (121), wyprowadzić zwyczajne różniczkowe równanie ruchu przyjmujące, dla płyty jednorodnej z pominięciem efektu ścinania i dla $\tilde{w} = 0$, postać [19]

$$\frac{d^2 \tilde{w}_a}{dt^2} + k_N \left\{ \frac{1-\nu}{4} \tilde{w}_a^3(t) + \left[1 - \frac{N_t(t)}{N_{t,CR}} \right] \tilde{w}_a(t) \right\} = 0. \quad (143)$$

Warto zwrócić uwagę, że otrzymane wyrażenia (137) i (143) nie są tożsame i różnią się współczynnikiem przed składnikiem nieliniowym $\tilde{w}_a^3(t)$.

2.1.7. Rozkład naprężeń normalnych oraz stycznych - efekt ścinania

Analizy efektu ścinania dokonano dla płyty obciążonej statycznym ciśnieniem równomiernym w odniesieniu do wyprowadzonego równania równowagi (117). Pomijając składniki bezwładnościowy, nieliniowy oraz obciążenia ściskające, otrzymano prosty związek

$$\frac{E_1 h^2 C_w}{1 - \nu^2} w_a = \frac{16 p}{h \pi^2}, \quad (144)$$

z którego można wyznaczyć wprost wartość ugięcia w zależności od przyłożonego ciśnienia p

$$w_a = p \frac{16(1 - \nu^2)}{E_1 h^3 \pi^2 C_w}. \quad (145)$$

Naprężenia styczne w płaszczyźnie XZ sformułowano w rozdziale 2.1.1 (18), a po podstawieniu związków (6) i (12) do (10) oraz przy uwzględnieniu kąta odkształcenia postaciowego (41) wyrazić można je następująco

$$\tau_{xz}(x, y, \zeta) = \frac{E_1}{2(1 + \nu)} \psi(x, y) \frac{\partial f_d}{\partial \zeta} f_e(\zeta), \quad (146)$$

wyrażnie oddzielając czynniki zależne od współrzędnych x, y od czynników zależnych od ζ . Wyznamy rozkład naprężenia stycznego wzdłuż zmiennej ζ , przykładowo dla środka ćwiartki płyty ($x = \frac{a}{4}$ i $y = \frac{b}{4}$), rozpatrując uprzednio związki (96), (98), (108) i (145)

$$\tau_{xz}\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \zeta\right) = p \frac{C_\theta}{C_w} \frac{4(1 - \nu)}{\pi h^3 a} \left[\frac{\partial f_d}{\partial \zeta} f_e(\zeta) \right]. \quad (147)$$

Otrzymane wyrażenie jest zależne od funkcji zmiany właściwości materiałowych $f_e(\zeta)$ (6) oraz pierwszej pochodnej przyjętej hipotezy deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej $f_d(\zeta)$ (32).

Analogiczne przekształcenia można przeprowadzić dla naprężeń stycznych w płaszczyźnie YZ otrzymując

$$\tau_{yz}\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \zeta\right) = p \frac{C_\theta}{C_w} \frac{4(1 - \nu)}{\pi h^3 b} \left[\frac{\partial f_d}{\partial \zeta} f_e(\zeta) \right] \quad (148)$$

W celu wyznaczenia rozkładu naprężeń normalnych podstawiono pochodne założonych funkcji przemieszczeń normalnych oraz poprzecznych (93), (96) i (97) do wyrażeń określających odkształcenia ε_x (50) i ε_y (51) z uwzględnieniem związków (98) oraz (108). W ten sposób, pomijając składnik nieliniowy, otrzymano

$$\sigma_x(x, y, \zeta) = -\frac{E_1 h}{1 - \nu^2} \left[\zeta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - f_d(\zeta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] f_e(\zeta) \quad (149)$$

$$\sigma_y(x, y, \zeta) = -\frac{E_1 h}{1 - \nu^2} \left[\zeta \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - f_d(\zeta) \left(\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] f_e(\zeta) \quad (150)$$

Przykładowo dla środka płyty ($x = \frac{a}{2}$ i $y = \frac{b}{2}$) powyższe wyrażenia przyjmą postać

$$\sigma_x \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \zeta \right) = \frac{E_1 h \pi^2}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) w_a [\zeta - f_d(\zeta) C_\theta] f_e(\zeta) \quad (151)$$

$$\sigma_y \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \zeta \right) = \frac{E_1 h \pi^2}{1 - \nu^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) w_a [\zeta - f_d(\zeta) C_\theta] f_e(\zeta) \quad (152)$$

2.2. Badania numeryczne płyty prostokątnej

Badania numeryczne zostały wykonane w celu walidacji porównawczej modelu analitycznego oraz poszerzenia zakresu analizy zachowania płyty prostokątnej o wpływ złożonych imperfekcji na utratę jej stateczności. Do obliczeń zastosowano metodę elementów skończonych w środowisku ABAQUS 6.12-2. Warunki brzegowe i obciążenia modelu numerycznego płyty dobrano w odniesieniu do modelu analitycznego. Analizy stateczności wykonano w technologii powierzchniowej, natomiast badanie efektu ścinania przeprowadzono w technologii bryłowej. Do automatyzacji pre- i postprocessingu, w tym dyskretyzacji właściwości materiałowych, zastosowano język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy oraz Matplotlib. Zadanie to było ułatwione ze względu na fakt, że interpreter tego języka jest integralną częścią oprogramowania ABAQUS.

W celu wyznaczenia częstotliwości drgań własnych oraz sił krytycznych rozwiązano zagadnienia własne [64] stosując metodę iteracji podprzestrzeni „subspace” [47]. Statyczne ścieżki równowagi uzyskano z zastosowaniem metody niejawnej typu „implicite” [1], natomiast do analizy stateczności dynamicznej użyto MES w trybie jawnego całkowania równań ruchu - „explicite” [1].

2.2.1. Dyskretyzacja funkcji zmian właściwości materiałowych

Tworzenie modelu numerycznego płyty prostokątnej o symetrycznie zmiennych właściwościach mechanicznych należy rozpocząć od dyskretyzacji założonych, ciągłych funkcji zmiany modułu Younga (6) oraz gęstości (8). Odpowiedni podział geometrii płyty na warstwy o zmieniających się skokowo własnościach jest jednym z głównych składników mających wpływ na różnice względne między wynikami obliczeń analitycznych oraz numerycznych. Należy zatem dokonać analizy wpływu dyskretyzacji modelu materiałowego na otrzymywane wyniki w celu ustalenia składnika niepewności. Warstwy należy dobierać rozważnie, ponieważ ich zbyt duża liczba sprawi, że zagadnienie stanie się zbyt kosztowne obliczeniowo, a czas wykonania obliczeń znacząco się wydłuży.

Rozważono jednorodny podział przyjętych funkcji własności materiałowych na przykładzie wyrażenia (6), realizując równe szerokości kolejnych warstw. Jako, że funkcja ta jest symetryczna analizie poddano jej prawą stronę dla dodatnich argumentów

$$\zeta \in \left(0; \frac{1}{2}\right). \quad (153)$$

Funkcja ta w podanym przedziale jest monotoniczna, rosnąca i przyjmuje wartości ze zbioru

$$Zf_e \in \langle e_0; 1 \rangle. \quad (154)$$

Szerokość warstw zależna od ich liczby

$$\Delta\zeta_i = \text{const} = \Delta\zeta = \frac{\zeta_{n_w}}{n_w} = \frac{1}{2n_w}, \quad (155)$$

gdzie:

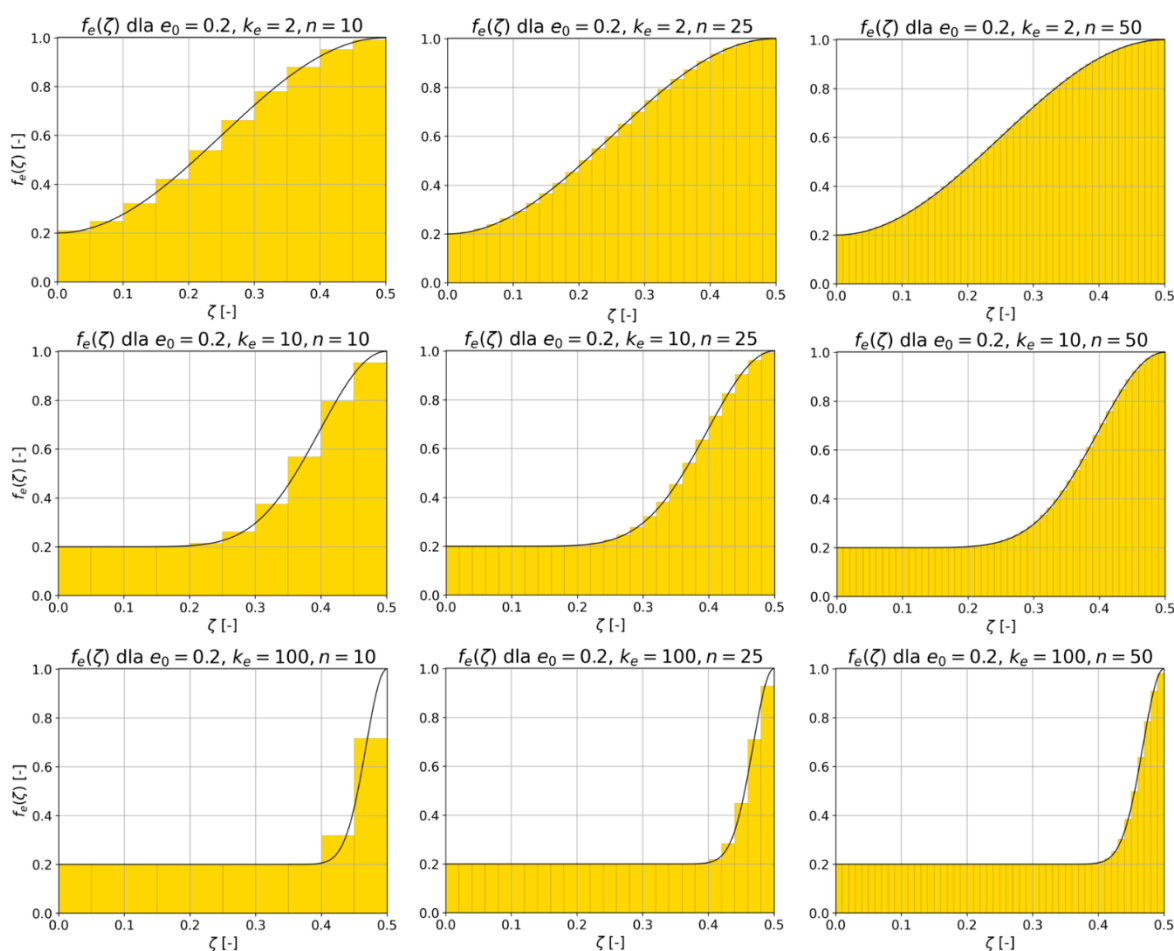
n_w – liczba warstw dla argumentów dodatnich,

i – liczba porządkowa warstwy, $i \in \langle 1; n_w \rangle$ oraz $i \in \mathbb{N}$.

Za wartość funkcji charakterystyczną dla i -tej warstwy f_{ei} przyjęto

$$f_{ei} = \frac{f_e(\zeta_{i-1}) + f_e(\zeta_i)}{2} \quad (156)$$

Dyskretyzacje dla różnych wartości parametru k_e oraz liczby warstw n_w pokazano na rysunku 11 dla $e_0 = 0,2$.



Rysunek 11. Dyskretyzacja właściwości materiałowych modelu numerycznego przy podziale jednorodnym [Opr. własne]

Zauważyć można, że przedstawiona metoda dyskretyzacji nie jest odpowiednia dla dowolnej wartości parametru k_e . Posiada ona bowiem podstawową wadę - dla każdej warstwy zmiana wartości funkcji $f_e(\zeta)$ jest różna. Zatem, przy niewielkim nachyleniu krzywej (w rdzeniu płyty) podziałowi poddano obszar, dla którego funkcja ma w przybliżeniu stały przebieg. Natomiast dla przedziału o znacznym nachyleniu potrzebna jest duża liczba warstw, aby odwzorować przebieg funkcji i zminimalizować różnicę między wartościami przyjmowanymi przez kolejne warstwy.

Analiza niepewności wyniku dla takiego rozkładu dyskretnego warstw materiału jest utrudniona i powinna być przeprowadzona w zależności od parametru k_e . W celu zoptymalizowania procesu dyskretyzacji funkcji zmian własności materiałowych przyjęto, że sposób podziału powinien uwzględniać znaczne różnice w nachyleniu krzywej zmian własności pomiędzy rdzeniem materiału a jego okładzinami, szczególnie dla dużych wartości parametru k_e . Można zauważyć zatem, że szerokość warstw powinna zmieniać się w zależności od nachylenia funkcji. Do dalszych rozważań przyjęto, że różnica wartości między kolejnymi warstwami jest stała z wyjątkiem pierwszej warstwy stanowiącej rdzeń materiału, dla której różnica wartości funkcji między początkiem a końcem przedziału warstwy jest równa założonej tolerancji $\Delta f_{e_{core}} = 0,001$.

Aby wyznaczyć szerokości warstw (określonych przez wartości ζ_{i-1}, ζ_i argumentu funkcji $f_e(\zeta)$), dla których zostanie spełniony powyższy warunek (161), należy znaleźć jej funkcję odwrotną $f_e^{-1}(\zeta)$. Funkcję odwrotną można wyznaczyć dla funkcji będącej bijekcją, tj. funkcji różnowartościowej, przyjmującej wszystkie elementy zbioru wartości, co jest spełnione dla przedziału (153) i przeciwdziedziny (154).

Dokonując kilku przekształceń funkcji (6), otrzymujemy jej odwrotność

$$f_e^{-1}(\zeta) = \zeta(f_e) = \frac{\arcsin\left(\sqrt{\frac{f_e - e_0}{1 - e_0}}\right)}{\pi}. \quad (157)$$

Dziedzina odwrotności funkcji $f_e^{-1}(\zeta)$

$$f_e \in (e_0; 1). \quad (158)$$

Funkcja ta w podanym przedziale jest monotoniczna, rosnąca i przyjmuje wartości ze zbioru

$$Z\zeta \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (159)$$

Dla pierwszej warstwy otrzymujemy

$$f_{e_1} = e_0 + \Delta f_{e_{core}}, \quad (160)$$

$$\zeta_1 = \zeta(f_{e_1}) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\Delta f_{e_{core}}}{1 - e_0}} \right), \quad (161)$$

natomiast dla kolejnych warstw przyjęto

$$\Delta f_{e_i} = const = \Delta f_e = \frac{f_{e_{n_w}} - f_{e_1}}{n_w - 1} = \frac{1 - f_{e_1}}{n_w - 1}, \quad (162)$$

$$\zeta_i = \zeta(f_{e_i}) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{f_{e_i} - e_0}{1 - e_0}} \right). \quad (163)$$

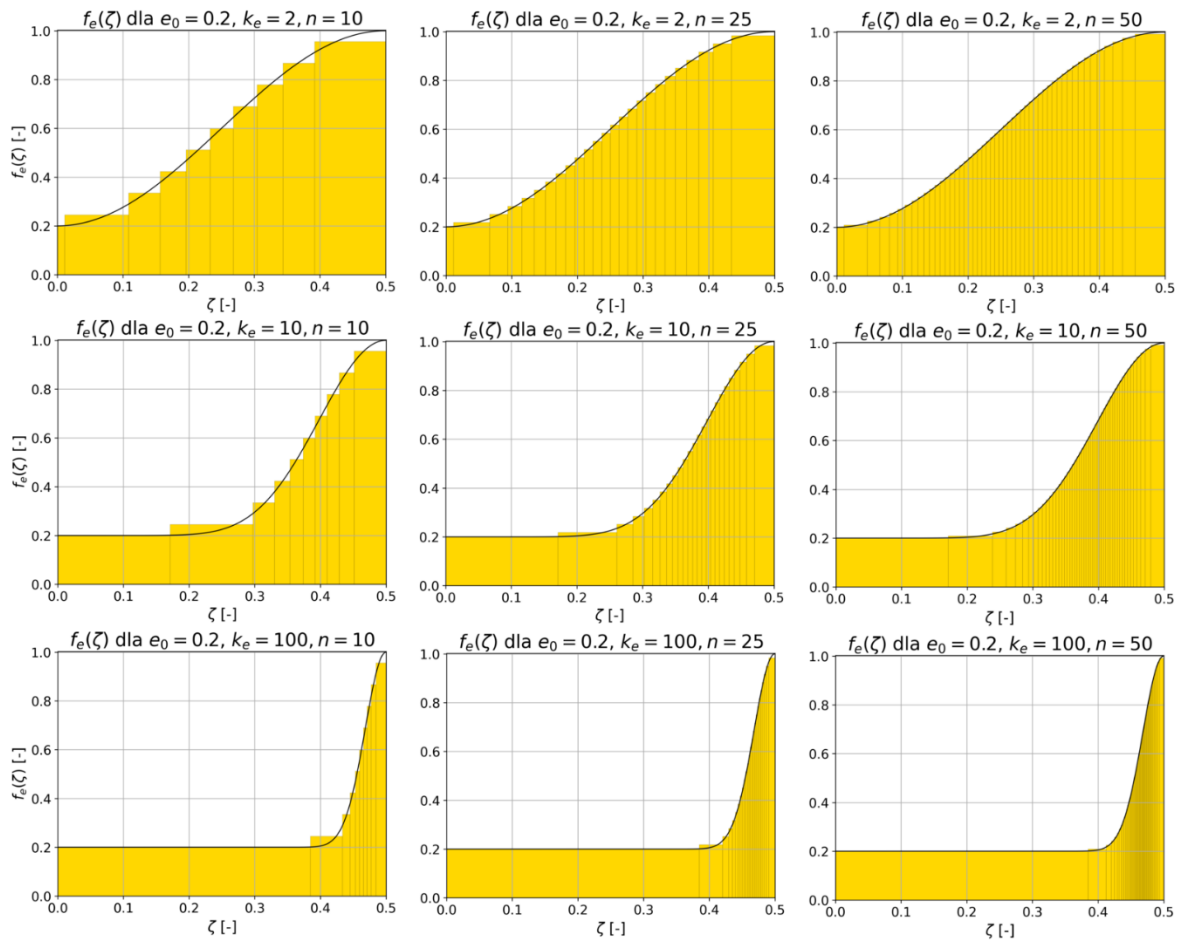
Szerokość i-tej warstwy

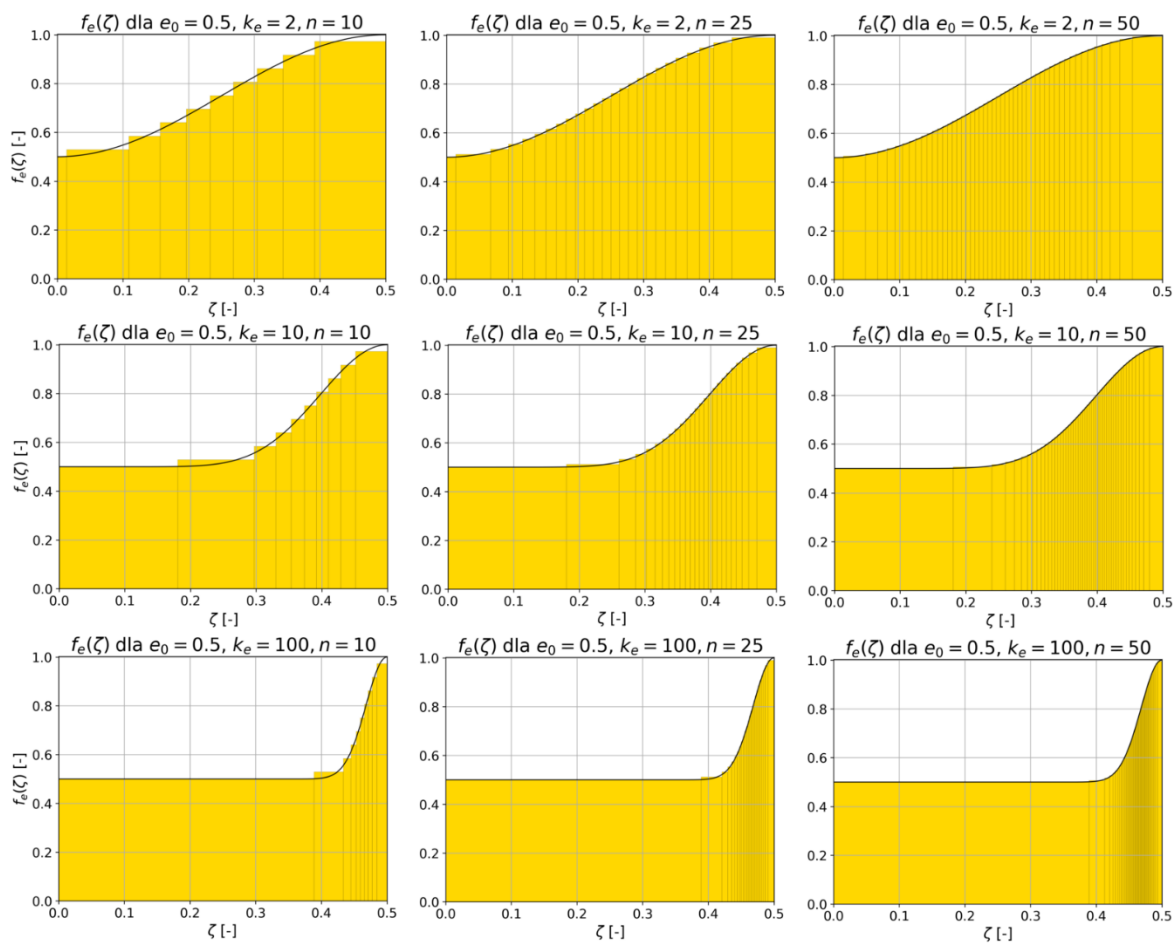
$$\Delta \zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}. \quad (164)$$

Wartość funkcji charakterystyczna dla i-tej warstwy przyjęto zgodnie z (156). Efekty optymalizacji sposobu dyskretyzacji funkcji zmian własności materiału dla różnych wartości parametru k_e i liczby warstw n_w przedstawiono na rysunku 12 oraz 13 odpowiednio dla $e_0 = 0,2$ oraz $e_0 = 0,5$.

Podział bryłowego modelu numerycznego na warstwy o różnych właściwościach materiałowych wymaga „pocięcia” modelu na mniejsze części i przypisania każdej warstwie stałych materiałowych indywidualnie, według podanego wyżej schematu. Natomiast dla modelu powierzchniowego należy zastosować jedną z dwóch metod: kwadratury Gaussa lub metody całkowania Simpsona [1] w celu wyznaczenia sztywności zastępczej modelu numerycznego powierzchni płyty. W obliczeniach zastosowano metodę Simpsona dla trzech punktów całkowania wyrażoną wzorem ogólnym

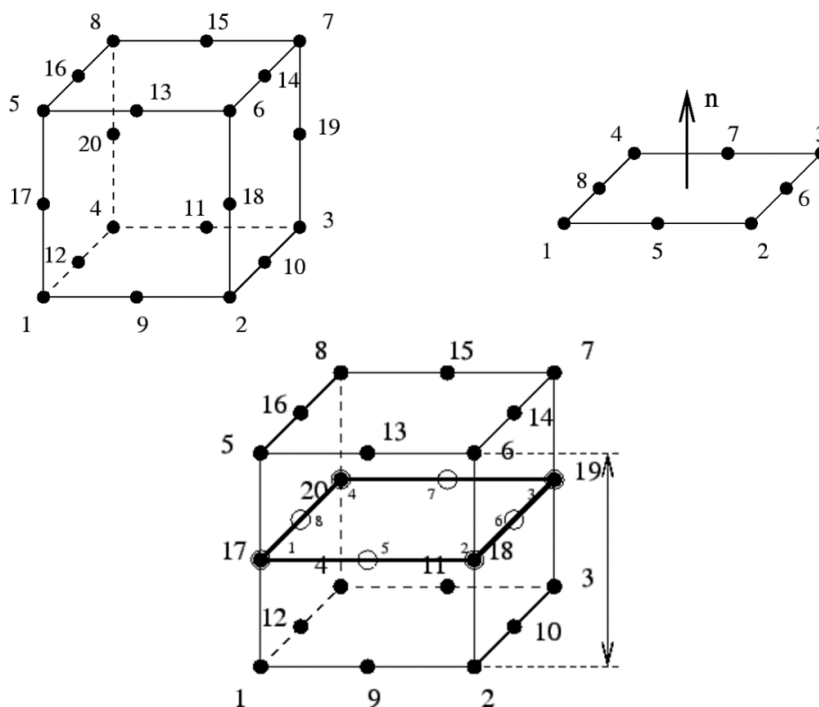
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (165)$$

Rysunek 12. Dyskretyzacja właściwości materiałowych modelu numerycznego dla $e_0 = 0,2$ [Opr. własne]

Rysunek 13. Dyskretyzacja właściwości materiałowych modelu numerycznego dla $e_0 = 0,5$ [Opr. własne]

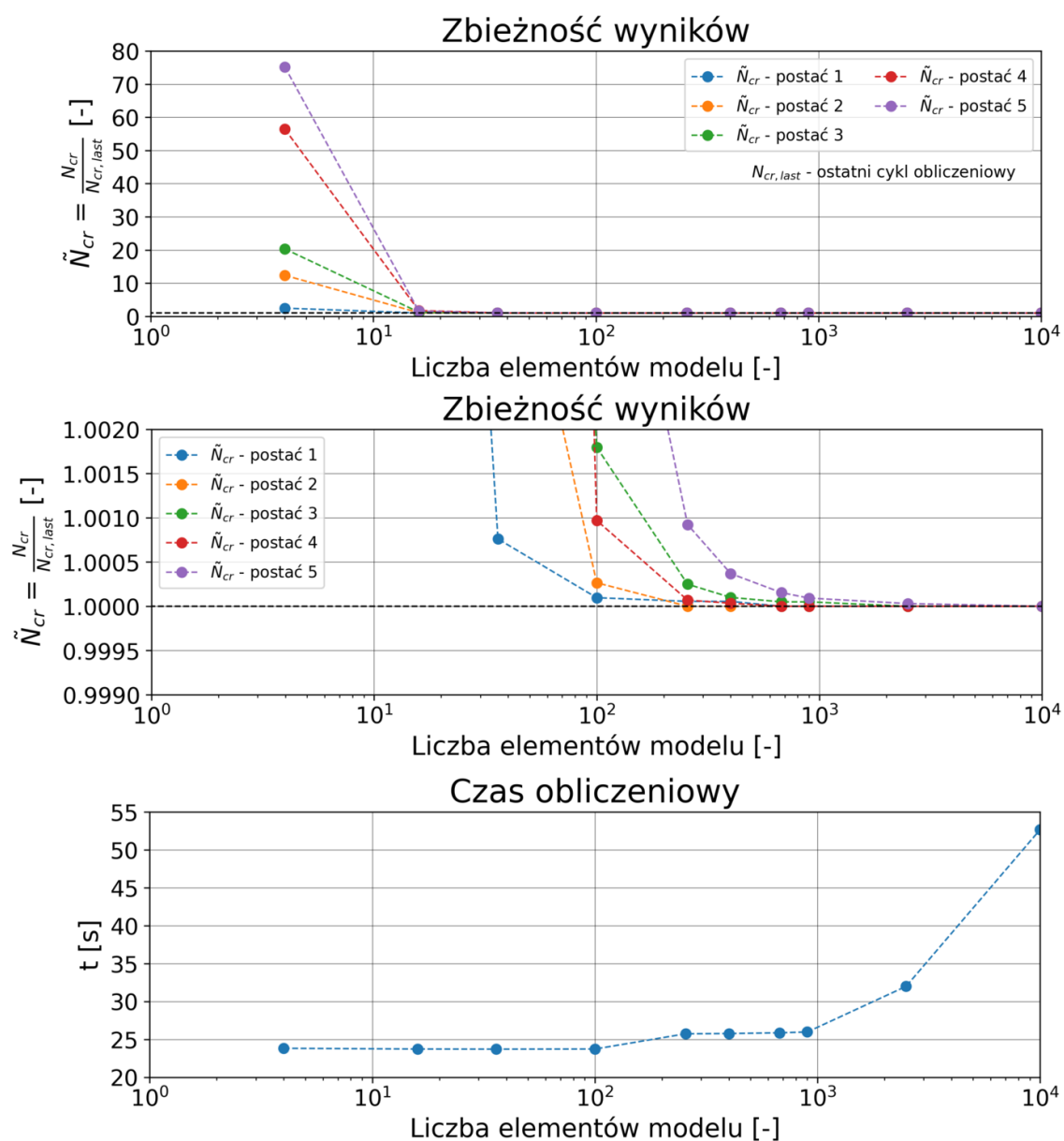
2.2.2. Siatka elementów skończonych

Do dyskretyzacji modeli numerycznych wykonanych w technologii bryłowej zastosowano heksagonalne, 20-węzłowe elementy skończone drugiego rzędu typu C3D20R. Ich niewątpliwą zaletą podczas definiowania modeli warstwowych jest możliwość wystąpienia znacznej dysproporcji między poszczególnymi wymiarami elementu przy zachowaniu kątów prostych między jego bokami. Pozwala to na znaczną redukcję zagadnienia obliczeniowego, unikając punktów osobliwych. Modele powierzchniowe pokryto zaś siatką drugorzędowych elementów skończonych typu S8R o 8 węzłach z biblioteki elementów Standard lub elementami typu S4R dla obliczeń przeprowadzonych w trybie jawnego całkowania równań ruchu - „explicite”. W węzłach powyższych elementów, zgodnie z ich funkcjami kształtu [1], ekstrapolowane są wyniki obliczone w punktach redukcji całkowania. Schemat zastosowanych elementów zaprezentowano na rysunku 14.



Rysunek 14. Elementy skończone zastosowane w obliczeniach [1]

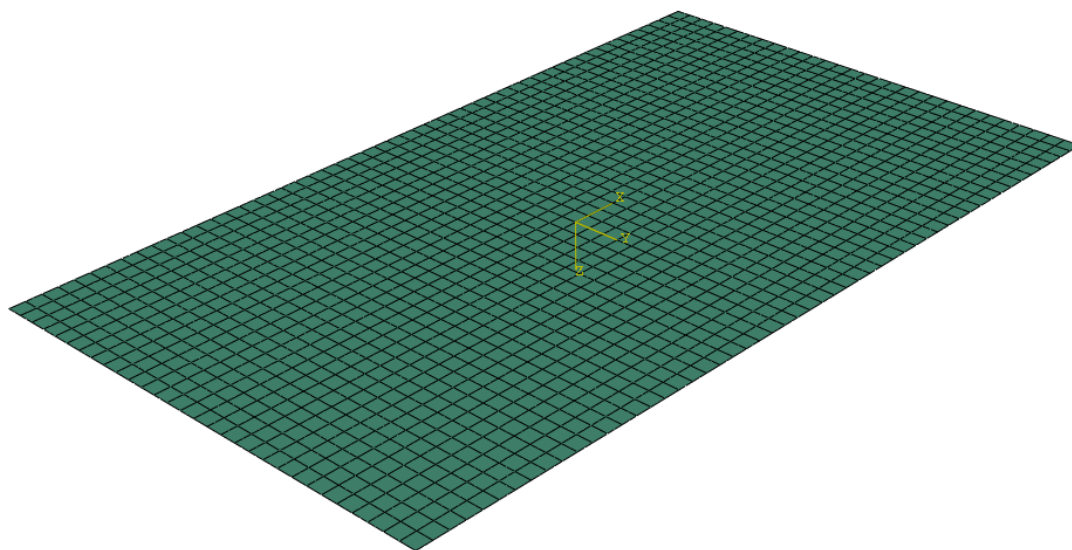
Przeprowadzono analizy doboru parametrów siatek elementów skończonych, których przykładowy przebieg przedstawiono na rysunku 15 dla elementów powierzchniowych S8R dla sił krytycznych kolejnych postaci utraty stateczności. Wielkość obliczeniową zagadnień zestawiono w tabeli 1 dla płyty kwadratowej $a = b = 1000 \text{ mm}$. Na rysunkach pokazano dyskretyzację modelu numerycznego płyty prostokątnej wykonanego w technologii powierzchniowej (rysunek 16) oraz bryłowej (rysunek 17). Na rysunku 18 przedstawiono asymptotyczną zbieżność wyników numerycznych, kolejnych cykli obliczeniowych, przyjmując do obliczeń coraz większą liczbę warstw do podziału modelu.



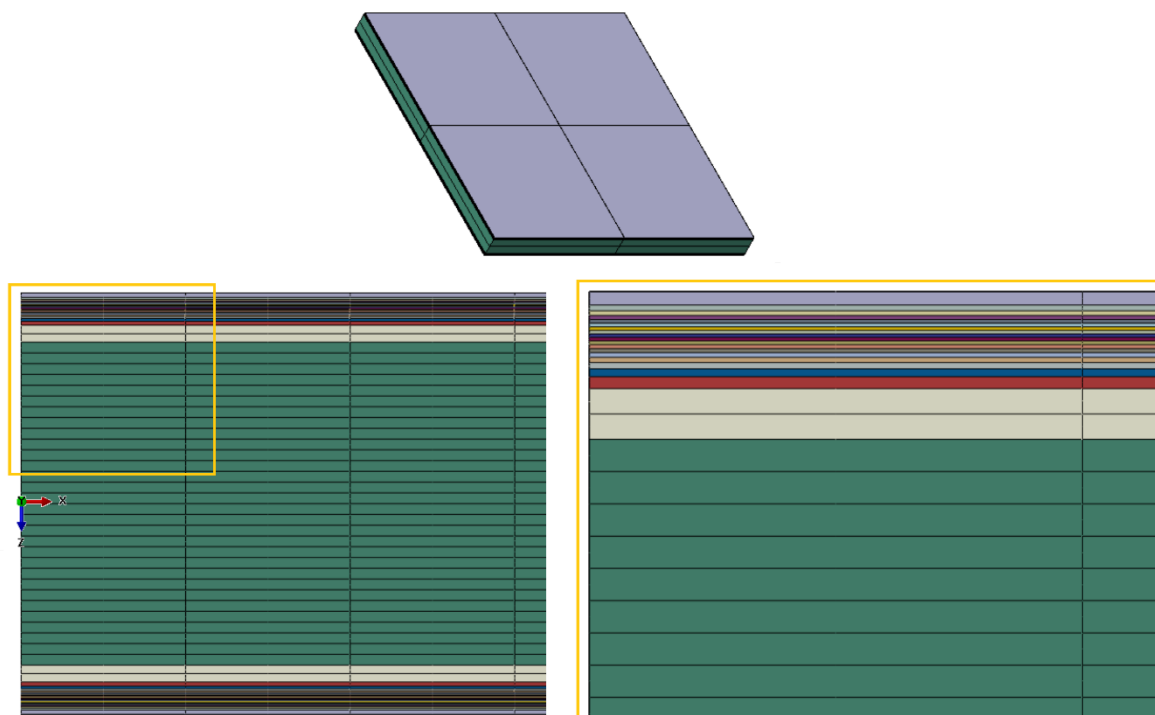
Rysunek 15. Asymptotyczna zbieżność wyników powierzchniowego modelu numerycznego - dobór rozmiaru elementu dla płyty $a = b = 1000mm$ [Opr. własne]

Tabela 1. Wielkość obliczeniowa opracowanych modeli numerycznych na przykładzie płyty kwadratowej $a = b = 1000mm$ [Opr. własne]

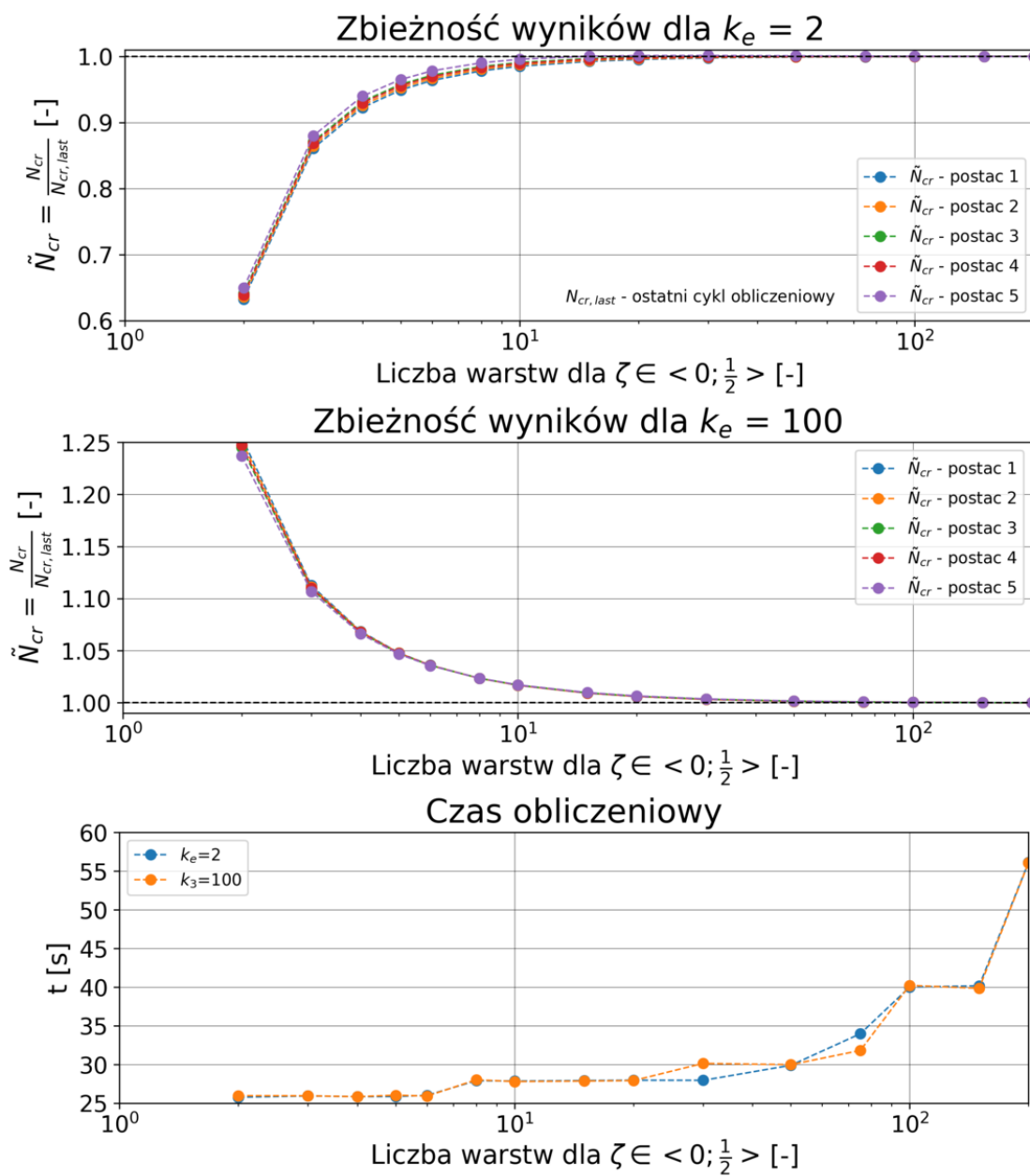
	C3D20R	S8R	S4R
liczba elementów	49152	900	3600
liczba węzłów	209121	2821	3721



Rysunek 16. Widok ogólny powierzchniowego modelu numerycznego płyty prostokątnej [Opr. własne]



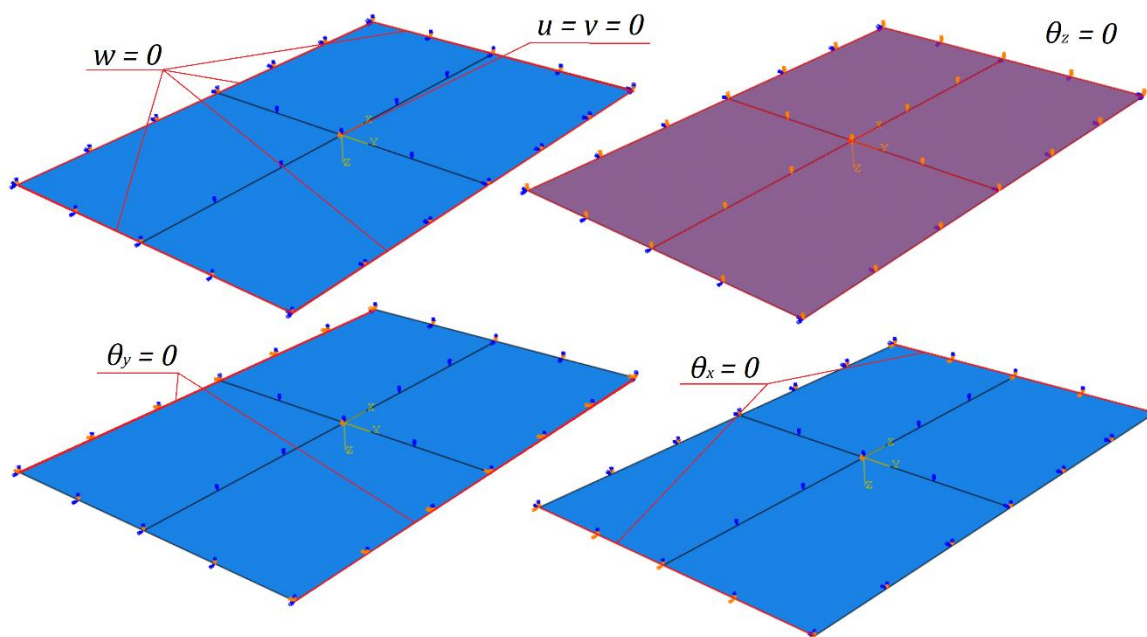
Rysunek 17. Widok ogólny warstwowego modelu numerycznego płyty prostokątnej wykonanego w technologii bryłowej [Opr. własne]



Rysunek 18. Asymptotyczna zbieżność wyników powierzchniowego modelu numerycznego - dobór liczby warstw na przykładzie płyty kwadratowej $a = b = 1000mm$ [Opr. własne]

2.2.3. Warunki brzegowe i obciążenia

Warunki brzegowe i obciążenia dobrano w odniesieniu do modelu analitycznego, przy założeniu swobodnego podparcia przegubowego płyty wzdłuż krawędzi jej płaszczyzny obojętnej. Na rysunku 19 zaprezentowano schematy podparcia numerycznego modelu powierzchniowego płyty,



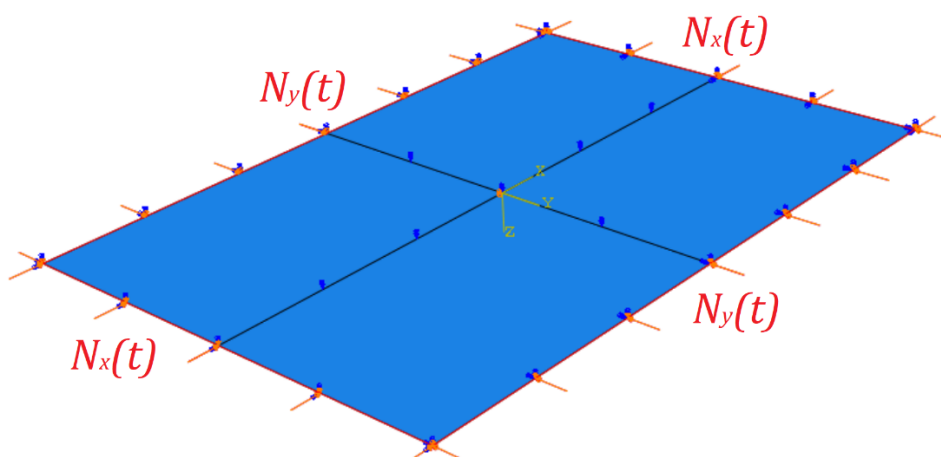
Rysunek 19. Warunki brzegowe powierzchniowego modelu numerycznego [Opr. własne]

gdzie:

u, v, w – translacje węzłów zgodnie z osiami x, y i z ,

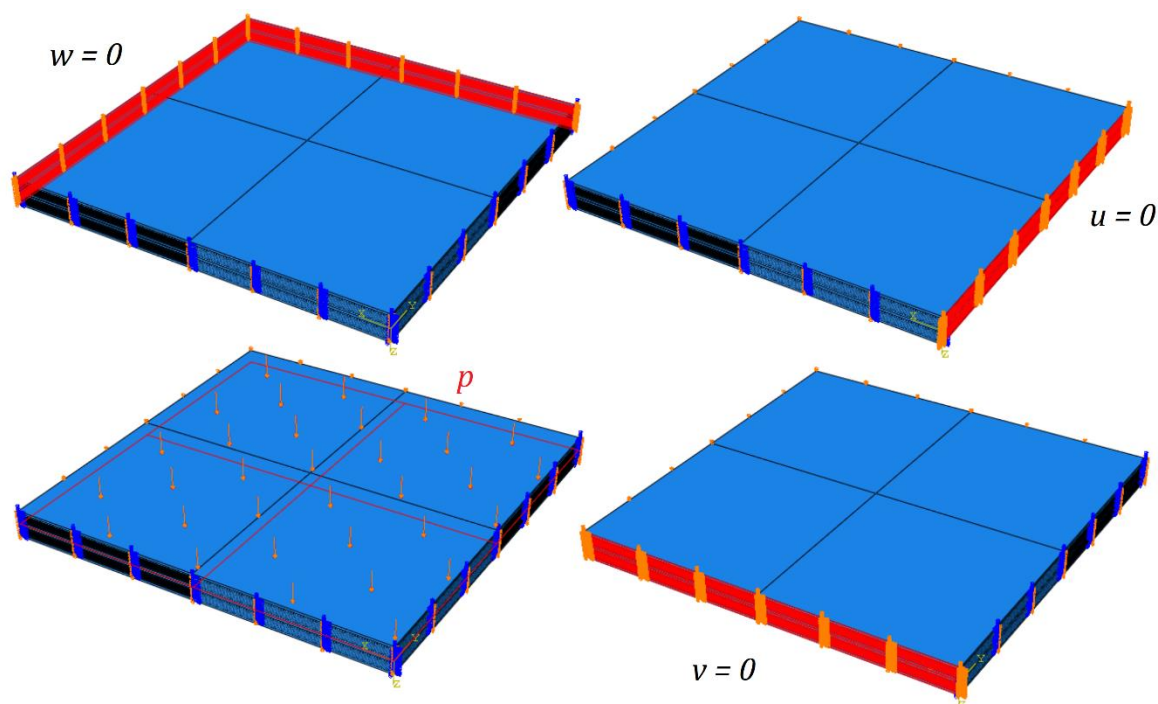
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – rotacje węzłów zgodnie z osiami x, y i z .

Obciążenia siłami ściskającymi powierzchniowego modelu płyty przedstawiono na rysunku 20.



Rysunek 20. Schemat wprowadzenia sił ściskających dla modelu powierzchniowego [Opr. własne]

Model bryłowy sporządzony został dla ćwiartki płyty, zastępując wyłączoną z analizy geometrię odpowiednimi warunkami brzegowymi. Przesunięcia węzłów w kierunku osi z wprowadzono na krawędziach warstw, w celu uniknięcia usztywnienia obrotów brzegów płyty. Obciążenie równomiernie rozłożonym ciśnieniem odniesiono do płaszczyzny obojętnej (rysunek 21).



Rysunek 21. Schemat obciążenia i warunków brzegowych dla modelu bryłowego płyty [Opr. własne]

2.2.4. Wpływ imperfekcji

Fundamentalnym czynnikiem mającym wpływ na utratę stateczności dowolnego elementu konstrukcyjnego są jego imperfekcje, zmniejszając one bowiem jego nośność graniczną i decydują o przebiegu procesu tworzenia się nowego stanu równowagi. Niedoskonałości konstrukcji mogą mieć różną genezę i wynikają przykładowo ze zmienności cech materiału, następstw procesów technologicznych, obciążeń resztkowych struktury, czego rezultatem są lokalne i globalne imperfekcje, nie tylko geometryczne. Zazwyczaj mamy do czynienia z sumą wszystkich wymienionych niedoskonałości konstrukcji przybierających charakter niedeterministyczny.

Aby możliwe było wyznaczenie statycznych i dynamicznych ścieżek równowagi metodą elementów skończonych konieczne jest uwzględnienie odchyłek od kształtu wyidealizowanego. Z perspektywy wytrzymałości konstrukcji najbardziej niebezpieczne są imperfekcje geometryczne, które pokrywają się z postaciami wyboczenia [19]. Badanie stanu zakrytycznego umożliwia wprowadzenie niedoskonałości geometrii modelu poprzez trzyetapową analizę zawierającą następujące kroki:

- a. rozwiązanie zagadnienia własnego z wyznaczeniem sił krytycznych oraz kształtu Ω_i różnych postaci wyboczenia i ,
- b. dodanie do współrzędnych węzłów elementów skończonych pola przemieszczeń utworzonego z superpozycji kształtów różnych postaci wyboczenia, zgodnie z wyrażeniem

$$\Delta\tilde{w}_i = \sum_{i=1}^M A_i \Omega_i, \quad (166)$$

gdzie:

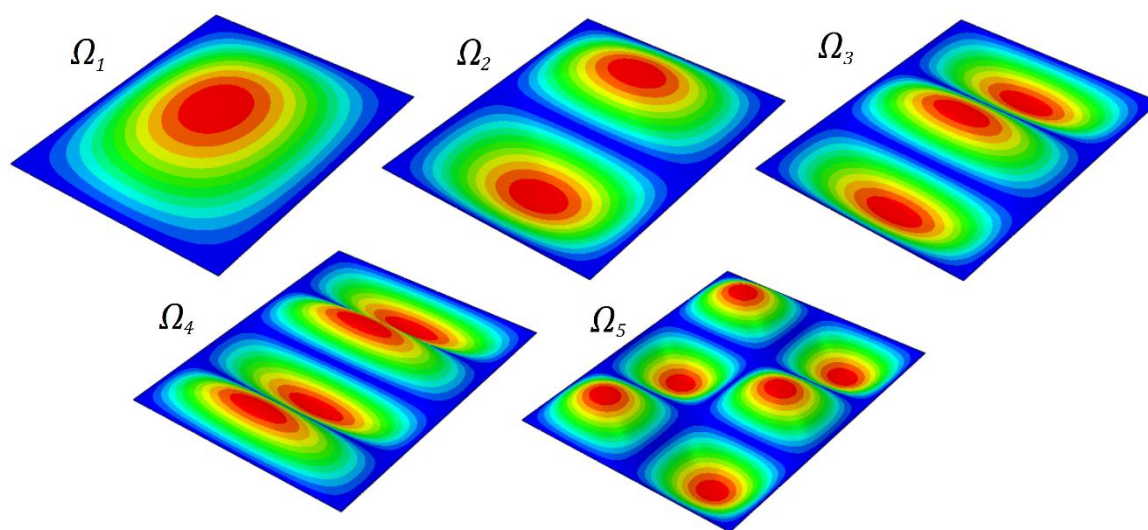
$\Delta\tilde{w}_i$ – odchyłka kształtu,

A_i – współczynnik przemieszczeń węzłów

Ω_i – kształt i -tej postaci utraty stateczności,

- c. analiza stanu zakrytycznego w ujęciu nieliniowym.

Na rysunku 22 przedstawiono pięć pierwszych przykładowych postaci wyboczenia dla płyty prostokątnej poddanej jednoosiowemu ścisnaniu. Wpływ wartości współczynnika przemieszczeń węzłów A_i na przebieg utraty stateczności został poddany analizie jako miara odchylenia rzeczywistego kształtu płyty w odniesieniu do jej kształtu nominalnego.



Rysunek 22. Postacie wyboczenia płyty prostokątnej poddanej jednoosiowemu ścisnaniu [Opr. własne]

2.3. Wyniki badań analitycznych i numerycznych

W poniższym rozdziale przedstawiono wyniki przykładowych obliczeń płyty prostokątnej, uzyskanych na postawie wyprowadzonego modelu analitycznego oraz na drodze numerycznej. Przyjęto, że płyta wykonana jest z piany aluminiowej o nazwie handlowej Alporas [41] zawierającej w składzie 5% Ca oraz 3% TiH₂. Stanowi ona doskonały przykład dla materiałów gradientowych o zmiennej porowatości, ponieważ poprzez sterowanie parametrami procesu technologicznego możliwe jest uzyskanie struktury porowatej o różnym rozmiarze komórek oraz grubości ich ścianek.

Ze względu na założenie o ciągłej zmianie sztywności materiału wzdłuż grubości płyty konieczne jest określenie związku między jego gęstością a sprężystością. Za [8, 9, 12, 18] przyjęto, że

$$\tilde{\rho}_0 = \sqrt{e_0}. \quad (167)$$

Dane materiałowe zastosowane w obliczeniach przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Właściwości materiału gradientowego przyjętego do obliczeń (piana aluminiowa Alporas) [41]

Opis	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	E_0	1 400	MPa
	E_1	70 000	
	e_0	0,02	–
Liczba Poissona	ν	0,34	–
Gęstość	ρ_0	382	$\frac{kg}{m^3}$
	ρ_1	2700	
	$\tilde{\rho}_0$	0,141	–

Wartości paramentów funkcji deformacji wyznaczono przez minimalizację wyrażenia (122). W tabeli 3 zaprezentowano uzyskane w tym procesie wartości dla przykładowych parametrów k_e .

Tabela 3. Parametry funkcji deformacji (30)

k_e	k_s	β
–	–	–
2	3	1,500
4	3	1,500
8	3	1,500
16	5	1,250
40	19	1,056
100	67	1,015

Porównanie wartości obciążeń krytycznych oraz częstotliwości drgań własnych dla rozwiązań liniowych uzyskanych na drodze analitycznej i numerycznej podczas jednostronnego ściskania ($\alpha_N = 0$), zestawiono w tabelach 4-7. Na rysunkach 23-25 zaprezentowano wpływ parametrów geometrycznych oraz współczynnika k_e na uzyskane wartości.

Tabela 4. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 250$ mm

b/h	a/b	k_e	$N_{t,crANA}$ [N/mm]	$N_{t,crMES}$ [N/mm]	$\Delta N_{t,cr}$ [%]	ω_{ANA} [1/s]	ω_{MES} [1/s]	$\Delta\omega$ [%]
50,0	1,00	2	416,39	413,02	0,809	2921,35	2908,30	0,447
		4	359,00	356,04	0,823	3010,33	2996,10	0,473
		8	295,06	294,58	0,164	3028,99	3024,10	0,162
		16	235,81	235,75	0,026	2982,79	2979,40	0,114
		40	169,07	169,09	0,013	2817,86	2814,60	0,116
		100	118,06	118,12	0,054	2565,85	2562,90	0,115
		200	89,27	89,41	0,158	2345,56	2343,90	0,071
		1,25	2	438,28	435,33	0,674	2397,74	2388,90
	4		378,59	376,00	0,684	2473,11	2463,40	0,393
	8		311,83	311,39	0,140	2491,07	2487,60	0,139
	16		249,23	249,17	0,022	2453,17	2450,70	0,101
	40		178,49	178,53	0,021	2316,28	2313,90	0,103
	100		124,48	124,56	0,068	2107,75	2105,70	0,097
	200		94,05	94,21	0,166	1926,06	1924,90	0,060
	1,00		2	3231,15	3136,10	2,942	5754,38	5660,00
		4	2703,40	2623,80	2,944	5841,31	5744,40	1,659
		8	2151,14	2139,10	0,560	5783,08	5755,50	0,477
		16	1717,15	1715,20	0,114	5691,55	5675,80	0,277
		40	1251,37	1250,00	0,109	5420,85	5404,60	0,300
		100	891,63	890,12	0,169	4986,13	4968,70	0,349
		200	682,33	682,48	0,023	4585,37	4573,40	0,261
		1,25	2	3419,33	3335,60	2,449	4735,66	4671,00
	4		2880,78	2809,80	2,464	4823,92	4756,80	1,391
	8		2309,12	2298,30	0,469	4793,34	4773,80	0,408
16	1843,76		1842,10	0,090	4718,12	4706,70	0,242	
40	1338,74		1337,70	0,078	4485,52	4473,90	0,259	
100	949,51		948,38	0,119	4116,34	4104,10	0,297	
200	724,62		725,01	0,054	3780,28	3772,00	0,219	
12,5	1,00		2	23093,12	22506,50	2,540	10877,93	10573,20
		4	17544,61	17083,20	2,631	10522,34	10318,40	1,938
		8	12734,86	12499,00	1,852	9949,63	9818,30	1,320
		16	10124,17	10073,00	0,505	9772,17	9706,20	0,675
		40	7710,04	7671,00	0,506	9514,54	9444,30	0,738
		100	5830,60	5779,80	0,871	9015,99	8927,50	0,982
		200	4633,01	4613,30	0,425	8448,81	8381,60	0,795
		1,25	2	24897,09	24037,90	3,451	9035,85	8717,60
	4		18193,59	17650,70	2,984	17144,30	16545,30	3,494
	8		12448,58	12082,00	2,945	15739,46	15410,10	2,093
	16		9859,76	9766,30	0,948	15429,95	15227,90	1,309
	40		7707,77	7642,70	0,844	15221,02	15073,00	0,972
	100		6067,17	5981,80	1,407	14715,33	14495,30	1,495
	200		4955,39	4916,80	0,779	13980,50	13808,30	1,232

Tabela 5. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 500$ mm

b/h	a/b	k_e	$N_{t,crANA}$	$N_{t,crMES}$	$\Delta N_{t,cr}$	ω_{ANA}	ω_{MES}	$\Delta\omega$	
[-]	[-]	[-]	[N/mm]	[N/mm]	[%]	[1/s]	[1/s]	[%]	
100,0	1,00	2	104,91	104,66	0,238	733,18	732,25	0,127	
		4	91,17	90,96	0,238	758,53	757,45	0,143	
		8	75,61	75,57	0,059	766,66	766,11	0,071	
		16	60,45	60,44	0,005	755,08	754,60	0,063	
		40	43,14	43,16	0,043	711,70	711,26	0,062	
		100	29,96	29,99	0,110	646,27	645,95	0,049	
	1,25	200	22,58	22,63	0,195	589,84	589,72	0,020	
		2	110,27	110,05	0,202	601,35	600,70	0,108	
		4	95,88	95,69	0,202	622,29	621,53	0,123	
		8	79,56	79,52	0,052	629,13	628,72	0,065	
		16	63,60	63,60	0,003	619,63	619,27	0,059	
		40	45,38	45,40	0,045	583,96	583,62	0,057	
	50,0	1,00	100	31,50	31,54	0,114	530,18	529,94	0,045
			200	23,74	23,79	0,198	483,84	483,76	0,017
			2	832,78	826,04	0,809	1460,68	1454,20	0,443
			4	717,99	712,08	0,823	1505,17	1498,10	0,469
			8	590,13	589,16	0,164	1514,50	1512,00	0,165
			16	471,62	471,50	0,026	1491,40	1489,70	0,114
1,25		40	338,14	338,18	0,013	1408,93	1407,30	0,116	
		100	236,11	236,23	0,050	1282,93	1281,50	0,111	
		200	178,54	178,82	0,157	1172,78	1171,90	0,075	
		2	876,57	870,66	0,674	1198,87	1194,40	0,373	
		4	757,18	751,99	0,685	1236,56	1231,70	0,393	
		8	623,65	622,79	0,138	1245,54	1243,80	0,139	
25,0		1,00	16	498,45	498,35	0,020	1226,58	1225,40	0,096
			40	356,99	357,06	0,021	1158,14	1156,90	0,107
			100	248,95	249,11	0,064	1053,88	1052,80	0,102
			200	188,11	188,42	0,167	963,03	962,46	0,059
			2	6462,29	6272,20	2,942	2877,19	2830,00	1,640
			4	5406,79	5247,60	2,944	2920,66	2872,20	1,659
	1,25	8	4302,27	4278,30	0,557	2891,54	2877,70	0,479	
		16	3434,30	3430,40	0,114	2845,78	2837,90	0,277	
		40	2502,74	2500,00	0,109	2710,42	2702,30	0,300	
		100	1783,25	1780,20	0,171	2493,06	2484,40	0,347	
		200	1364,65	1365,00	0,026	2292,69	2286,70	0,261	
		2	6838,65	6671,20	2,449	2367,83	2335,50	1,365	
	1,00	4	5761,56	5619,60	2,464	2411,96	2378,40	1,391	
		8	4618,24	4596,70	0,466	2396,67	2386,90	0,408	
		16	3687,53	3684,20	0,090	2359,06	2353,40	0,240	
		40	2677,49	2675,30	0,082	2242,76	2236,90	0,261	
		100	1899,01	1896,80	0,117	2058,17	2052,10	0,295	
		200	1449,24	1450,00	0,053	1890,14	1886,00	0,219	

Tab. 5 cd. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 500$ mm

16,7	1,00	2	20774,43	20115,00	3,174	4212,05	4069,60	3,382
		4	16628,96	16154,00	2,856	4182,13	4045,30	3,272
		8	12658,59	12514,00	1,142	4049,74	4013,80	0,887
		16	10086,67	10059,00	0,274	3982,08	3963,10	0,477
		40	7511,57	7490,00	0,287	3833,97	3813,80	0,526
		100	5505,67	5478,60	0,492	3576,73	3553,10	0,661
	200	4287,28	4279,50	0,181	3318,02	3300,70	0,522	
	1,25	2	22166,78	21635,00	2,399	3480,73	3381,60	2,848
		4	17986,80	17658,00	1,828	3479,62	3382,50	2,791
		8	13292,95	13046,00	1,858	3457,45	3365,80	2,651
		16	10567,78	10514,00	0,509	3401,46	3322,10	2,333
		40	8048,30	8007,50	0,507	3212,45	3187,00	0,792
100		5948,55	5925,20	0,393	2974,25	2957,30	0,570	
200	4607,52	4602,10	0,118	2751,77	2739,50	0,446		

Tabela 6. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 750$ mm

b/h	a/b	k_e	$N_{t,crANA}$	$N_{t,crMES}$	$\Delta N_{t,cr}$	ω_{ANA}	ω_{MES}	$\Delta\omega$
[-]	[-]	[-]	[N/mm]	[N/mm]	[%]	[1/s]	[1/s]	[%]
150,0	1,00	2	46,69	46,63	0,133	326,10	325,88	0,066
		4	40,64	40,59	0,128	337,62	337,35	0,081
		8	33,76	33,75	0,039	341,53	341,34	0,055
		16	26,99	26,99	0,000	336,38	336,20	0,053
		40	19,25	19,26	0,048	316,92	316,76	0,050
		100	13,35	13,37	0,121	287,63	287,53	0,035
	200	10,06	10,08	0,199	262,44	262,41	0,011	
	1,25	2	49,07	49,01	0,118	267,43	267,27	0,058
		4	42,72	42,67	0,111	276,91	276,71	0,072
		8	35,49	35,48	0,037	280,15	280,00	0,052
		16	28,38	28,38	0,001	275,93	275,78	0,053
		40	20,23	20,24	0,048	259,94	259,82	0,048
100		14,03	14,05	0,125	235,91	235,82	0,036	
200	10,57	10,59	0,204	215,23	215,22	0,006		
75,0	1,00	2	372,26	370,81	0,389	651,06	649,69	0,210
		4	322,84	321,58	0,391	672,87	671,33	0,228
		8	267,11	266,87	0,088	679,27	678,62	0,096
		16	213,51	213,49	0,011	668,99	668,48	0,076
		40	152,57	152,62	0,034	630,94	630,46	0,075
		100	106,10	106,20	0,091	573,35	572,97	0,065
	200	80,04	80,19	0,185	523,50	523,33	0,033	
	1,25	2	391,43	390,15	0,327	534,09	533,15	0,176
		4	339,76	338,64	0,329	552,22	551,15	0,193
		8	281,37	281,16	0,076	557,74	557,27	0,085
		16	224,93	224,91	0,007	549,31	548,92	0,071
		40	160,64	160,71	0,041	517,94	517,57	0,070
100		111,65	111,77	0,104	470,52	470,24	0,059	
200	84,20	84,36	0,189	429,54	429,42	0,028		

Tab. 6 cd. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 750$ mm

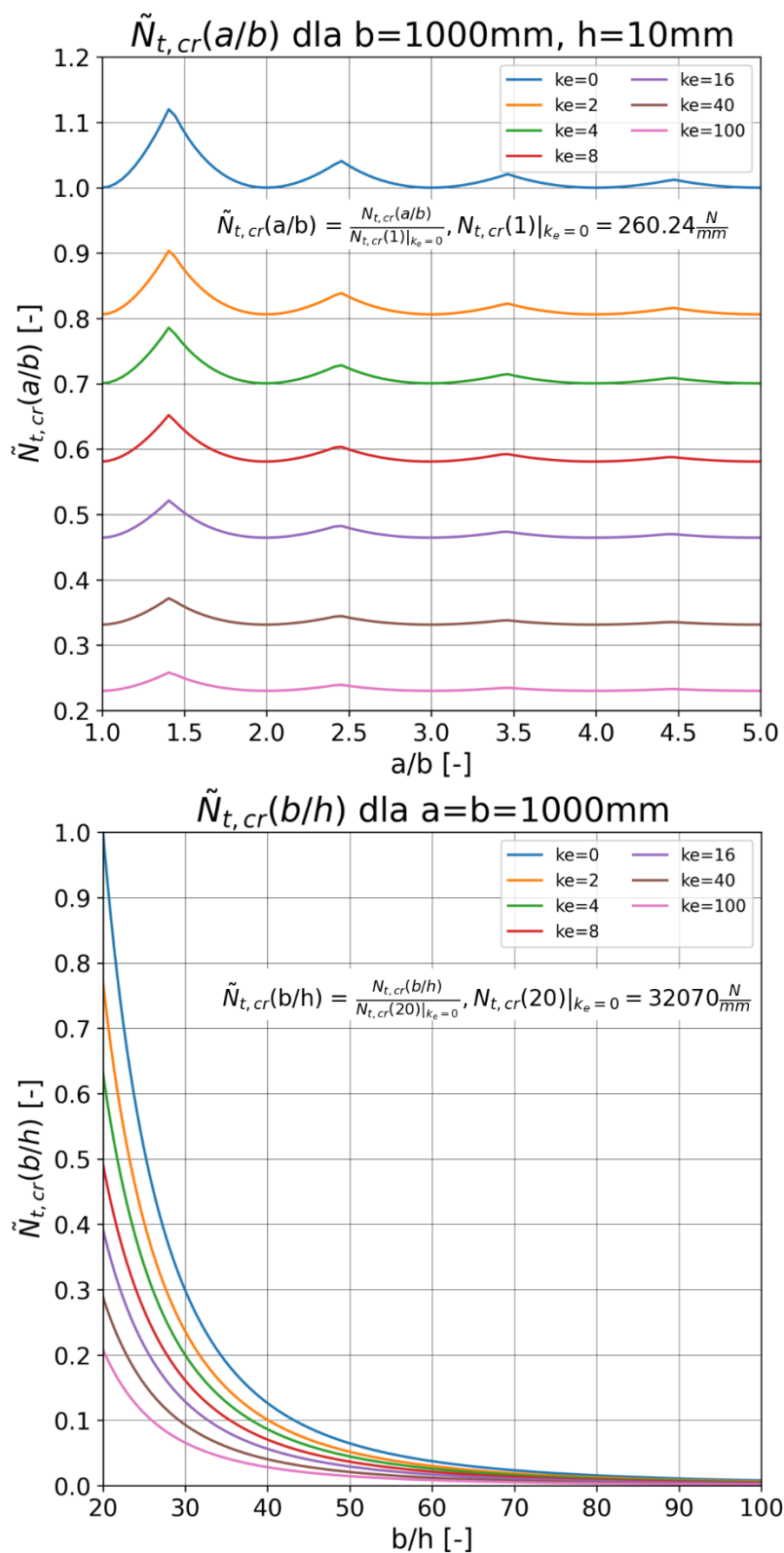
37,5	1,00	2	2937,40	2896,80	1,382	1293,20	1283,30	0,765
		4	2512,19	2476,90	1,405	1327,23	1316,60	0,801
		8	2046,52	2041,00	0,269	1329,52	1326,20	0,250
		16	1635,03	1634,30	0,045	1309,04	1307,00	0,156
		40	1177,57	1177,30	0,023	1239,46	1237,40	0,166
		100	826,81	826,74	0,008	1131,72	1129,70	0,178
	1,25	200	627,22	627,99	0,123	1036,22	1034,90	0,128
		2	3096,25	3060,70	1,148	1062,17	1055,40	0,637
		4	2656,77	2625,70	1,170	1091,91	1084,60	0,669
		8	2172,14	2167,20	0,227	1095,78	1093,40	0,217
		16	1735,62	1735,00	0,036	1078,97	1077,50	0,136
		40	1247,72	1247,60	0,010	1020,68	1019,20	0,144
25,0	1,00	100	874,11	874,25	0,016	930,91	929,49	0,153
		200	662,23	663,14	0,137	851,80	850,92	0,103
		2	9693,44	9408,40	2,941	1918,13	1886,70	1,638
		4	8110,19	7871,40	2,944	1947,10	1914,80	1,659
		8	6453,41	6417,40	0,558	1927,69	1918,50	0,477
		16	5151,45	5145,70	0,112	1897,18	1891,90	0,278
	1,25	40	3754,11	3750,10	0,107	1806,95	1801,50	0,302
		100	2674,88	2670,30	0,171	1662,04	1656,20	0,351
		200	2046,98	2047,40	0,021	1528,46	1524,50	0,259
		2	10257,98	10007,00	2,447	1578,55	1557,00	1,365
		4	8642,34	8429,40	2,464	1607,97	1585,60	1,391
		8	6927,36	6895,00	0,467	1597,78	1591,30	0,406
1,25	16	5531,29	5526,30	0,090	1572,71	1568,90	0,242	
	40	4016,23	4013,00	0,080	1495,17	1491,30	0,259	
	100	2848,52	2845,10	0,120	1372,11	1368,00	0,300	
	200	2173,86	2175,00	0,053	1260,09	1257,30	0,222	

Tabela 7. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 1000$ mm

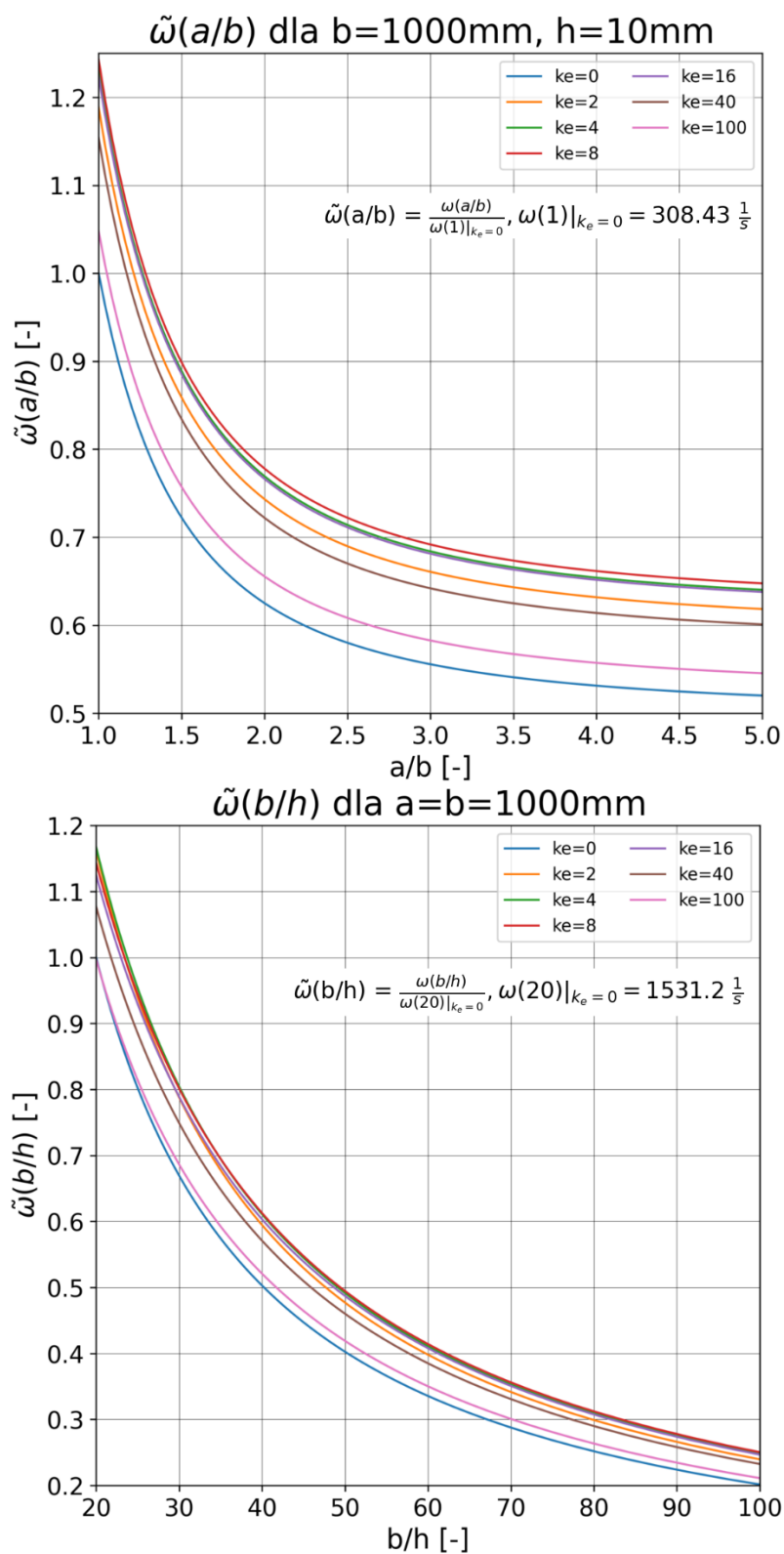
b/h	a/b	k_e	$N_{t,crANA}$	$N_{t,crMES}$	$\Delta N_{t,cr}$	ω_{ANA}	ω_{MES}	$\Delta\omega$
[—]	[—]	[—]	[N/mm]	[N/mm]	[%]	[1/s]	[1/s]	[%]
200,0	1,00	2	26,28	26,25	0,098	183,48	183,39	0,046
		4	22,88	22,86	0,088	190,01	189,90	0,058
		8	19,02	19,02	0,035	192,27	192,17	0,050
		16	15,21	15,21	0,003	189,37	189,28	0,047
		40	10,84	10,85	0,048	178,39	178,30	0,048
		100	7,52	7,53	0,125	161,87	161,82	0,032
	1,25	200	5,66	5,67	0,202	147,68	147,67	0,006
		2	27,61	27,59	0,088	150,46	150,40	0,039
		4	24,05	24,03	0,081	155,83	155,75	0,050
		8	19,99	19,99	0,030	157,69	157,61	0,050
		16	15,98	15,98	0,003	155,31	155,24	0,047
		40	11,39	11,40	0,051	146,30	146,23	0,047
1,25	100	7,90	7,91	0,126	132,75	132,71	0,030	
	200	5,95	5,96	0,205	121,11	121,10	0,006	

Tab. 7 cd. Porównanie wartości obciążeń krytycznych (122) oraz częstotliwości drgań własnych (130) dla $b = 1000$ mm

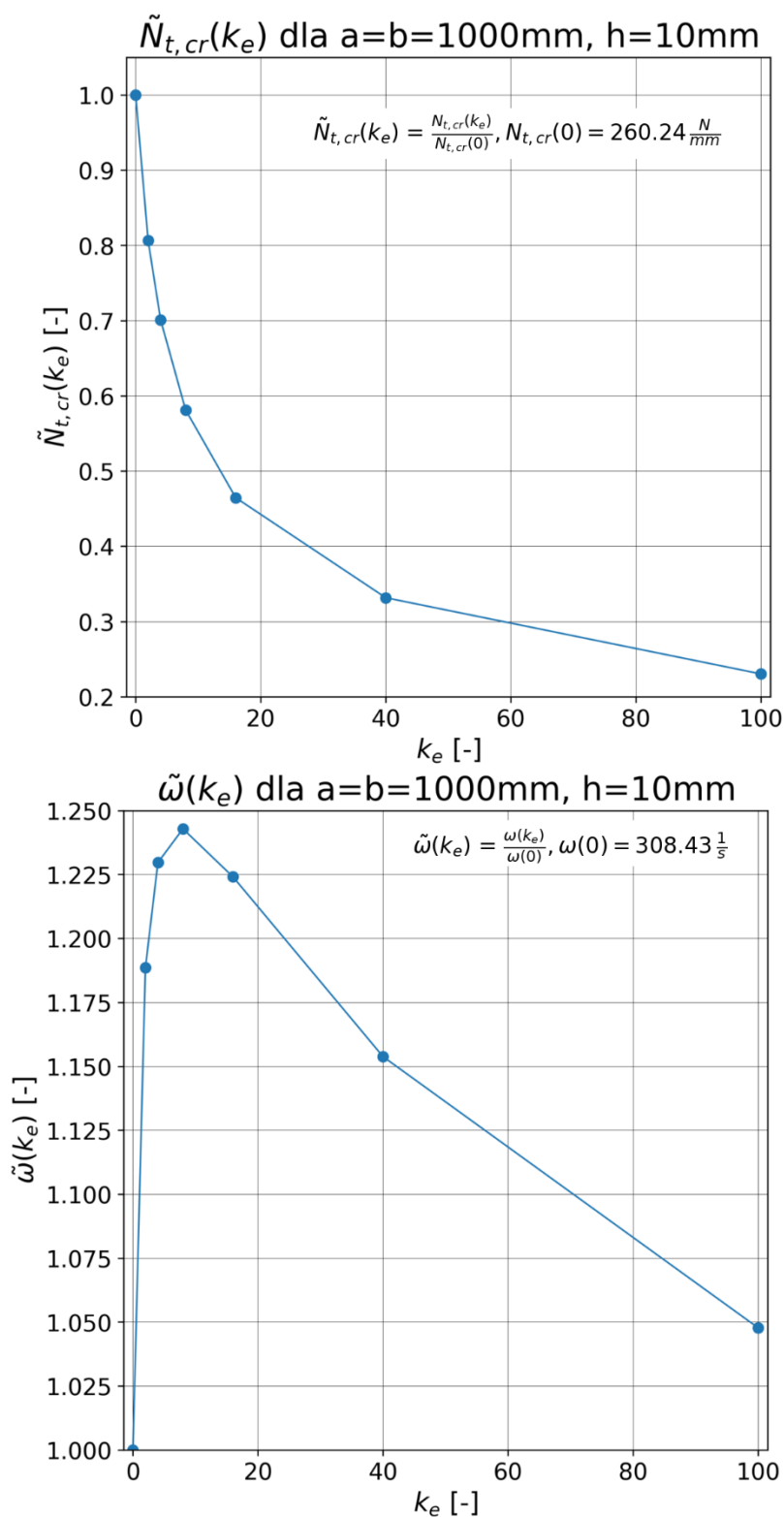
100,0	1,00	2	209,82	209,32	0,238	366,59	366,12	0,129
		4	182,35	181,91	0,239	379,27	378,73	0,141
		8	151,22	151,13	0,060	383,33	383,05	0,073
		16	120,89	120,88	0,008	377,54	377,30	0,063
		40	86,28	86,32	0,044	355,85	355,63	0,062
		100	59,92	59,98	0,110	323,14	322,98	0,048
	1,25	200	45,16	45,25	0,195	294,92	294,86	0,020
		2	220,55	220,09	0,206	300,68	300,35	0,108
		4	191,76	191,37	0,203	311,15	310,77	0,121
		8	159,12	159,03	0,054	314,57	314,36	0,065
		16	127,20	127,20	0,003	309,82	309,63	0,060
		40	90,76	90,80	0,046	291,98	291,81	0,057
50,0	1,00	100	63,01	63,08	0,114	265,09	264,97	0,045
		200	47,48	47,58	0,196	241,92	241,88	0,017
		2	1665,55	1652,10	0,808	730,34	727,08	0,446
		4	1435,98	1424,20	0,820	752,58	749,03	0,472
		8	1180,26	1178,30	0,166	757,25	756,02	0,162
		16	943,24	943,00	0,026	745,70	744,86	0,112
	1,25	40	676,27	676,35	0,012	704,47	703,65	0,116
		100	472,23	472,47	0,052	641,46	640,73	0,114
		200	357,08	357,65	0,160	586,39	585,97	0,072
		2	1753,13	1741,30	0,675	599,44	597,21	0,371
		4	1514,35	1504,00	0,684	618,28	615,84	0,394
		8	1247,31	1245,60	0,137	622,77	621,89	0,141
33,3	1,00	16	996,90	996,70	0,020	613,29	612,68	0,100
		40	713,97	714,11	0,019	579,07	578,47	0,103
		100	497,90	498,23	0,066	526,94	526,42	0,098
		200	376,21	376,84	0,167	481,51	481,23	0,059
		2	5549,66	5454,00	1,724	1088,51	1078,10	0,956
		4	4723,58	4641,10	1,746	1114,48	1103,40	0,994
	1,25	8	3827,94	3815,20	0,333	1113,49	1110,10	0,305
		16	3057,71	3055,90	0,059	1096,24	1094,20	0,186
		40	2208,01	2207,10	0,041	1039,33	1037,30	0,195
		100	1555,36	1554,70	0,042	950,53	948,46	0,218
		200	1182,16	1183,30	0,096	871,16	869,81	0,155
		2	5854,76	5771,00	1,431	894,43	887,31	0,795
1,25	4	5003,79	4931,00	1,455	917,64	910,06	0,826	
	8	4073,20	4061,80	0,280	918,89	916,51	0,259	
	16	3254,14	3252,50	0,050	904,72	903,24	0,163	
	40	2344,55	2344,00	0,023	856,79	855,31	0,173	
	100	1646,96	1646,70	0,016	782,50	781,05	0,185	
	200	1249,73	1251,20	0,118	716,57	715,64	0,129	



Rysunek 23. Wpływ wymiarów geometrycznych płyty na obciążenie krytyczne (122) [Opr. własne]



Rysunek 24. Wpływ wymiarów geometrycznych płyty na częstotliwość drgań swobodnych (130) [Opr. własne]



Rysunek 25. Zmiana wartości obciążenia krytycznego (122) i częstotliwości drgań własnych (130) zależnie od parametru k_e [Opr. własne]

Do analizy odpowiedzi dynamicznej płyty prostokątnej zastosowano dwie postacie obciążenia wymuszającego: obciążenie rosnące proporcjonalnie do czasu $N_t^{(1)}$ oraz quasi-impulsowe $N_t^{(2)}$, które opisano następująco

$$N_t^{(1)} = N_{t,CR} \frac{t}{t_0} \quad (168)$$

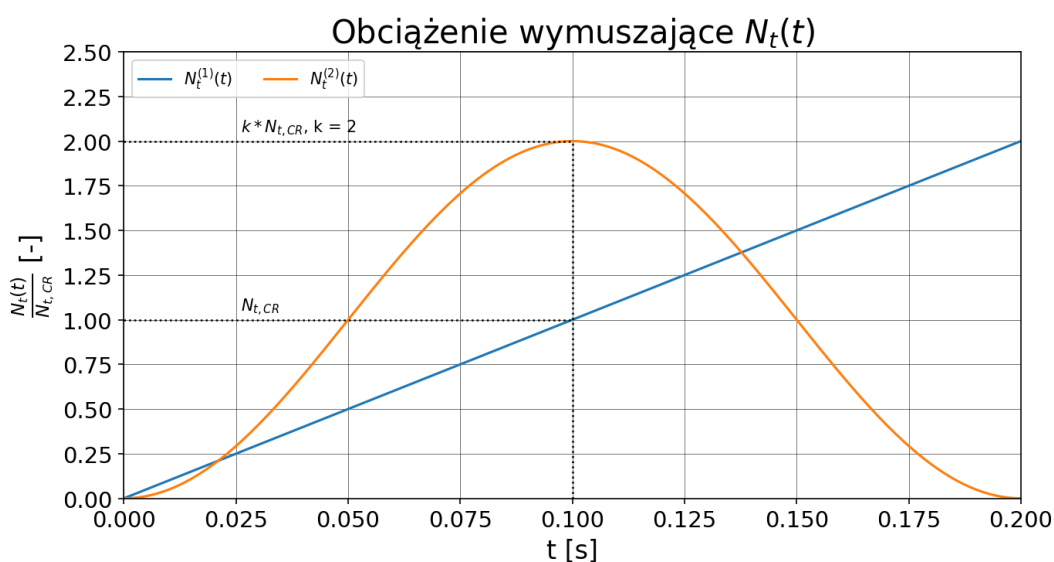
$$N_t^{(2)} = k N_{t,CR} \sin\left(\frac{\pi t}{2 t_0}\right) \quad (169)$$

gdzie:

t_0 – czas osiągnięcia obciążenia krytycznego z uwzględnieniem współczynnika wzmocnienia

k – współczynnik wzmocnienia.

Wartość współczynnika wzmocnienia $k = 2$ wyznaczono przez porównanie pól powierzchni obu przyjętych postaci obciążenia wymuszającego.



Rysunek 26. Formy obciążenia wymuszającego dla $t_0 = 0,1$ s [Opr. własne]

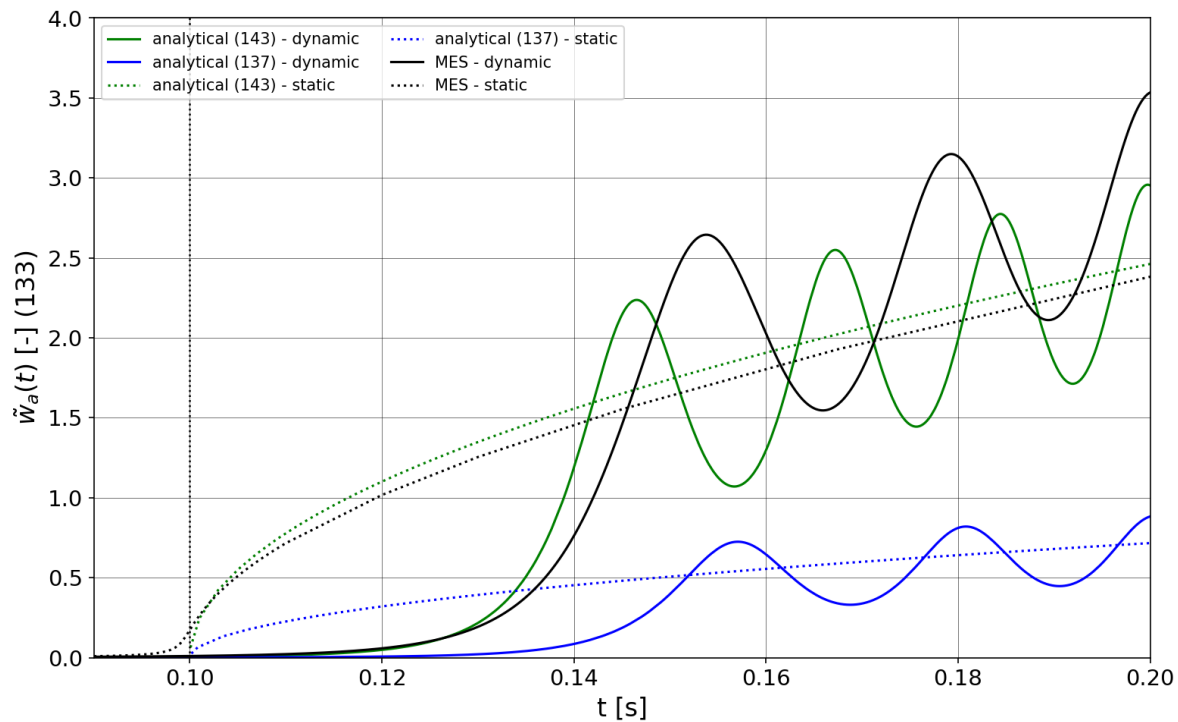
Analizie nieliniowej poddano płytę prostokątną o wymiarach $a = 1250$ mm, $b = 1000$ mm, $h = 10$ mm. Równania różniczkowe (137) i (143) rozwiązano z zastosowaniem metody Rungego-Kutty w schemacie czwartego rzędu przyjmując następujące warunki początkowe

$$\tilde{w}_a(0) = 0, \quad \dot{\tilde{w}}_a(0) = 0. \quad (170)$$

Otrzymane statyczne i dynamiczne ścieżki równowagi zaprezentowano na rysunkach 27-40 w odniesieniu do warunków badań przedstawionych w tabelach 8-18.

Tabela 8. Ścieżki równowagi - przykład 1- badania numeryczne i analityczne (porównanie)

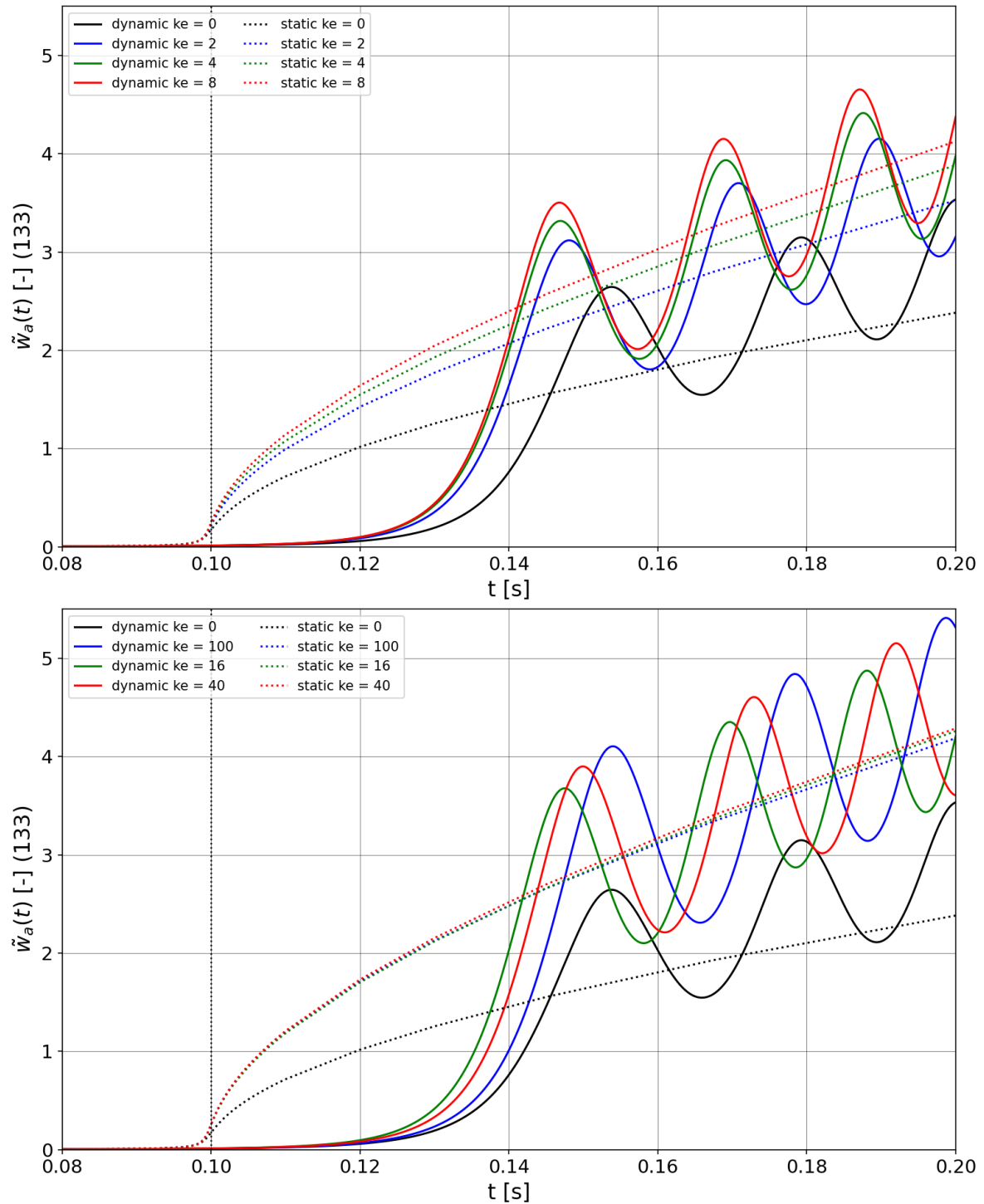
N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01	1	0	0,1



Rysunek 27. Ścieżki równowagi - przykład 1- badania numeryczne i analityczne (porównanie) [Opr. własne]

Tabela 9. Ścieżki równowagi - przykład 2- badania numeryczne

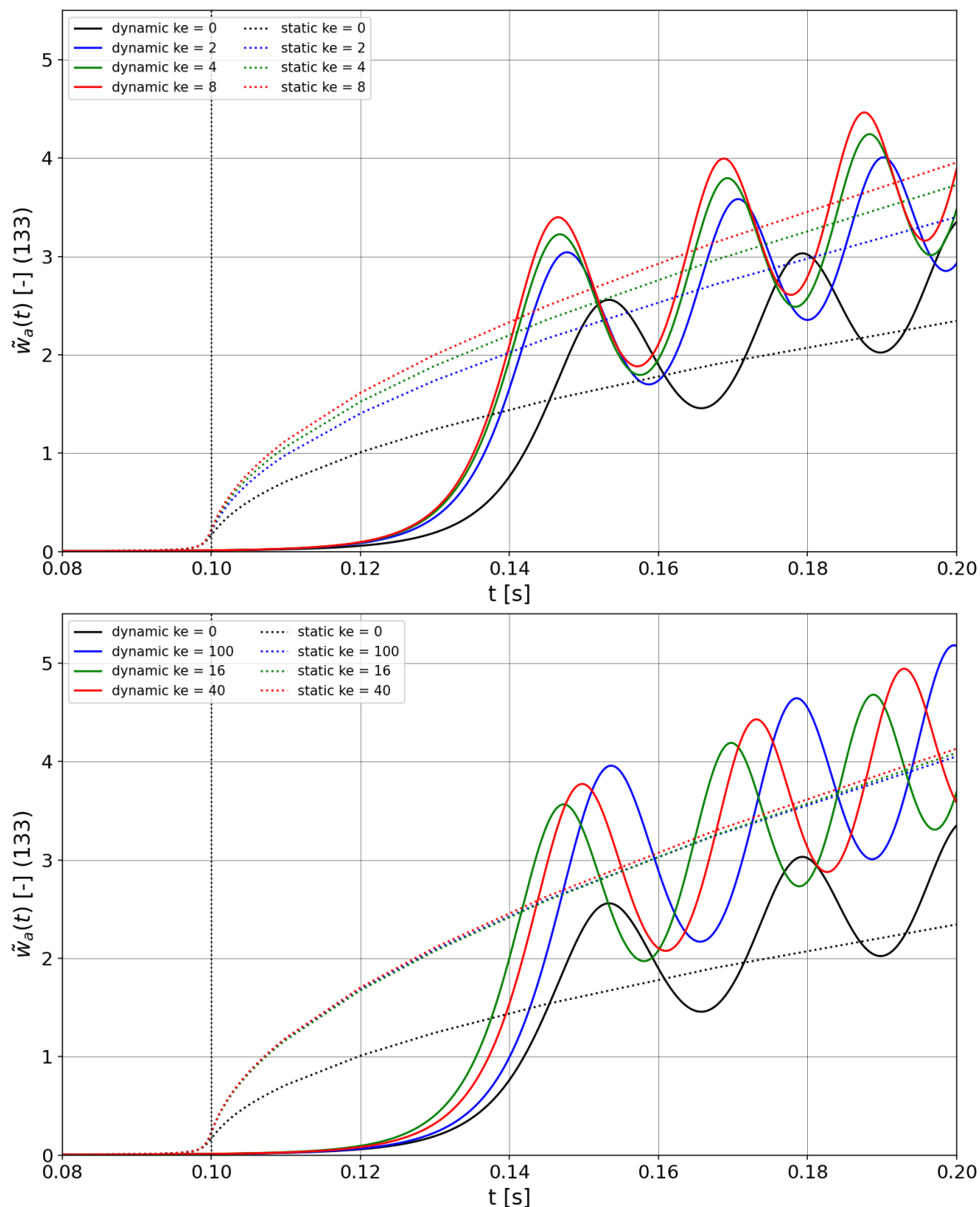
N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01	1	var	0,1



Rysunek 28. Ścieżki równowagi - przykład 2- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 10. Ścieżki równowagi - przykład 3- badania numeryczne

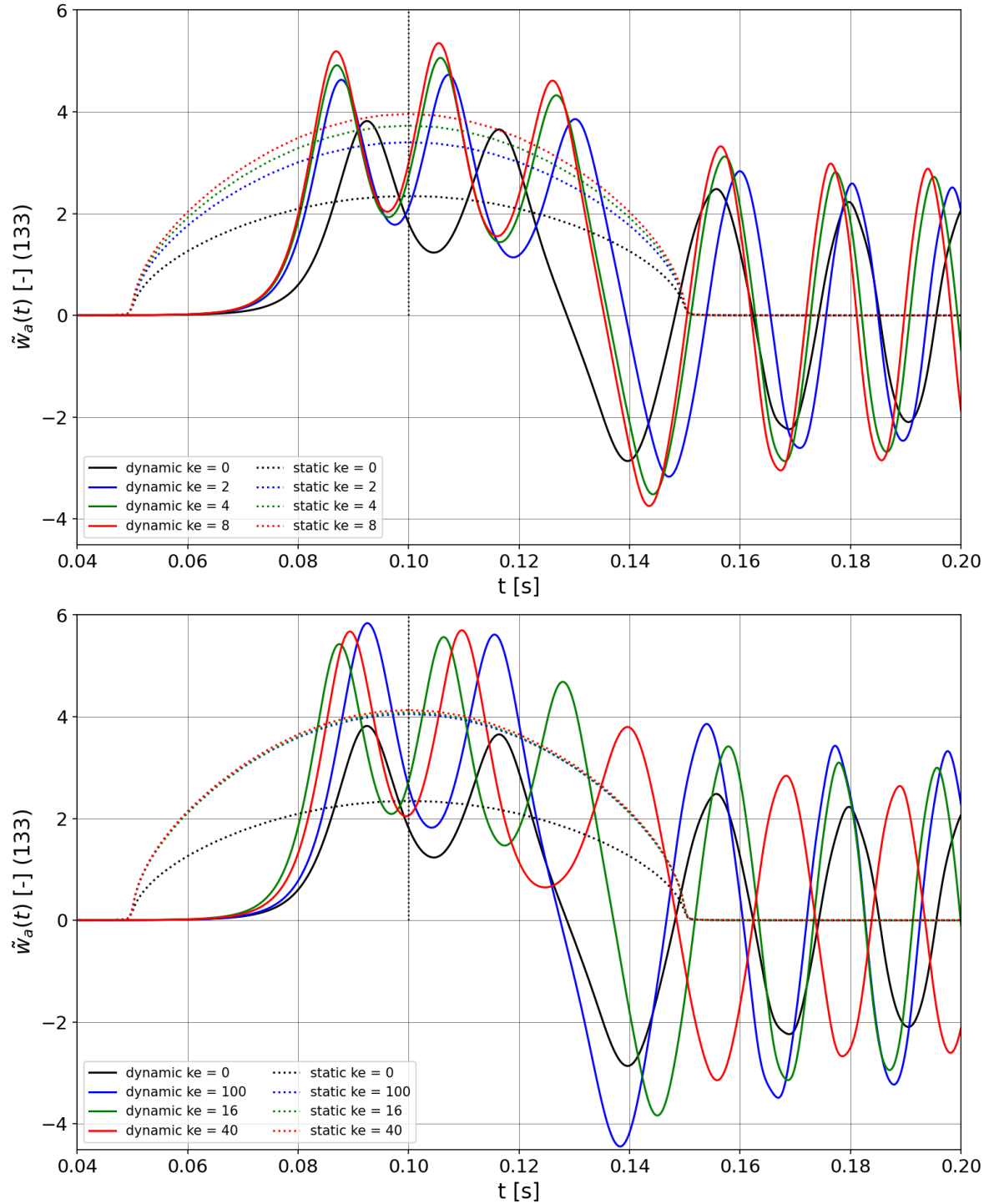
N_t	α_N	A_t	Ω_t	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0,5	0,01	1	var	0,1



Rysunek 29. Ścieżki równowagi - przykład 3- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 11. Ścieżki równowagi - przykład 4- badania numeryczne

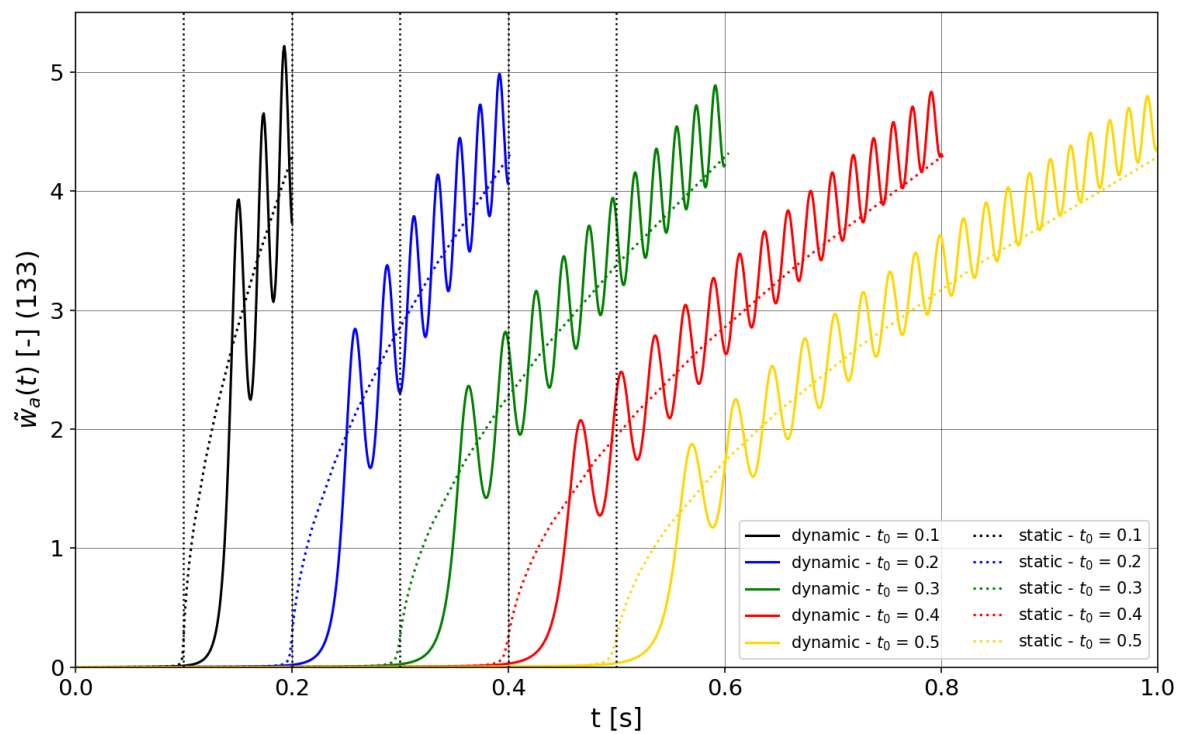
N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(2)}$	0,5	0,01	1	var	0,1



Rysunek 30. Ścieżki równowagi - przykład 4- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 12. Ścieżki równowagi - przykład 5- badania numeryczne

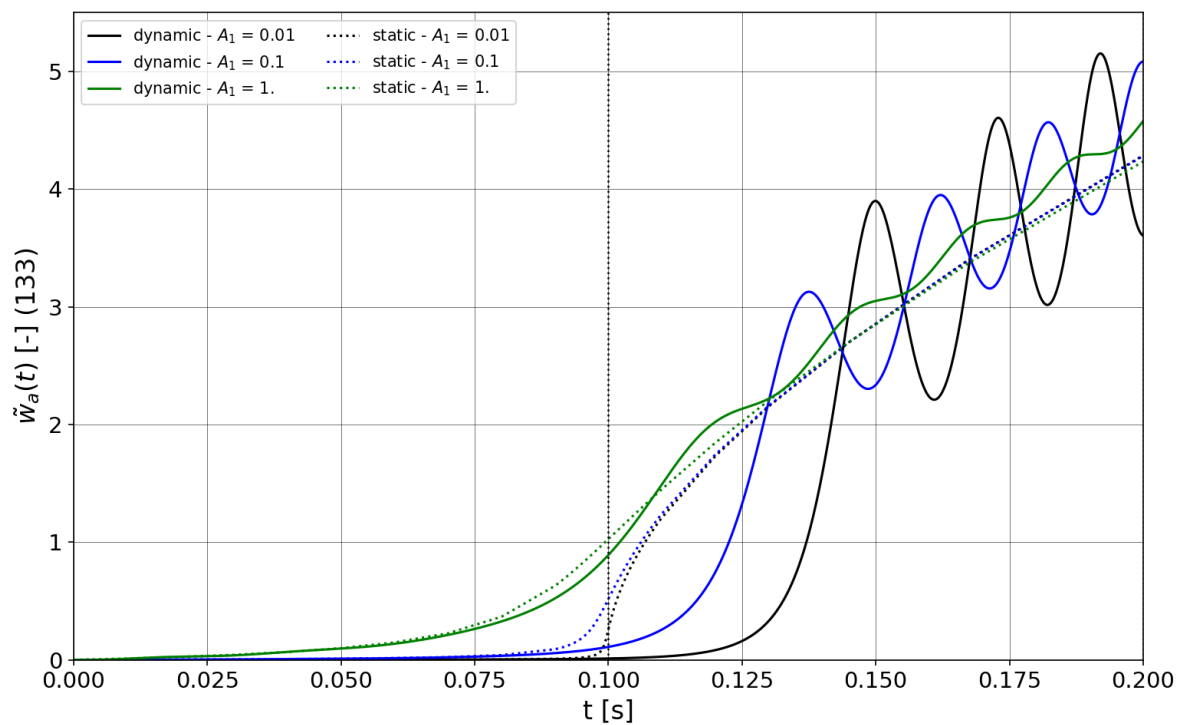
N_t	α_N	A_t	Ω_t	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01	1	40	var



Rysunek 31. Ścieżki równowagi - przykład 5- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 13. Ścieżki równowagi - przykład 6- badania numeryczne

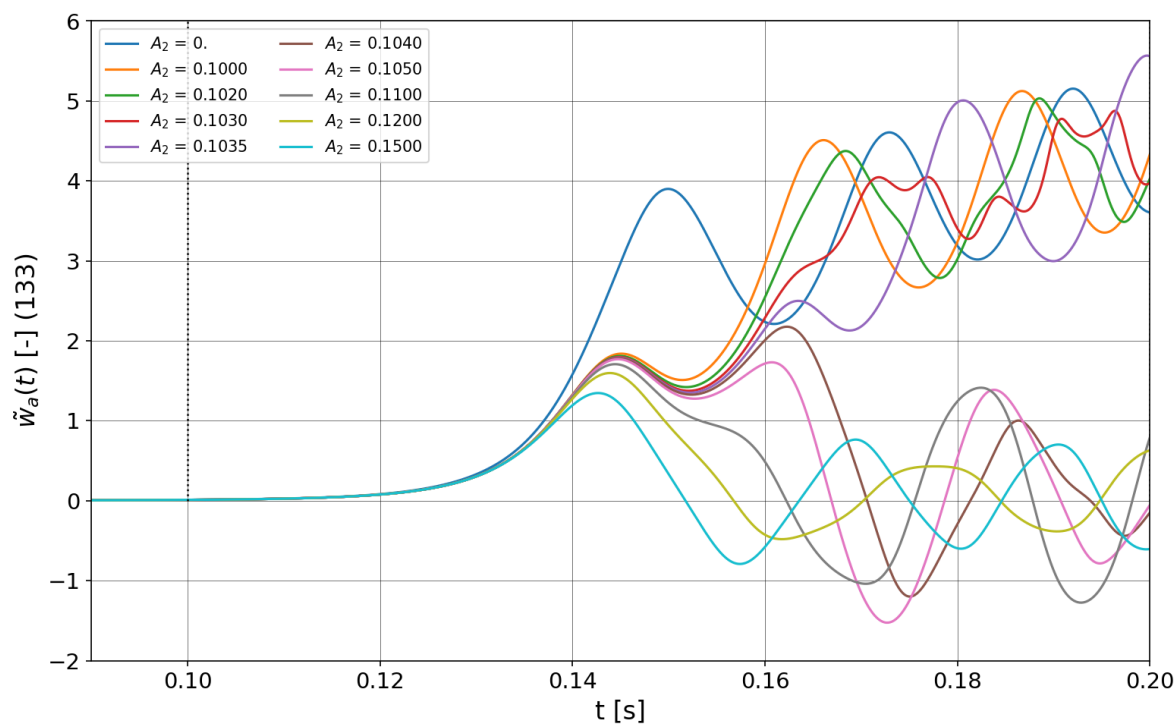
N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	var	1	40	0,1



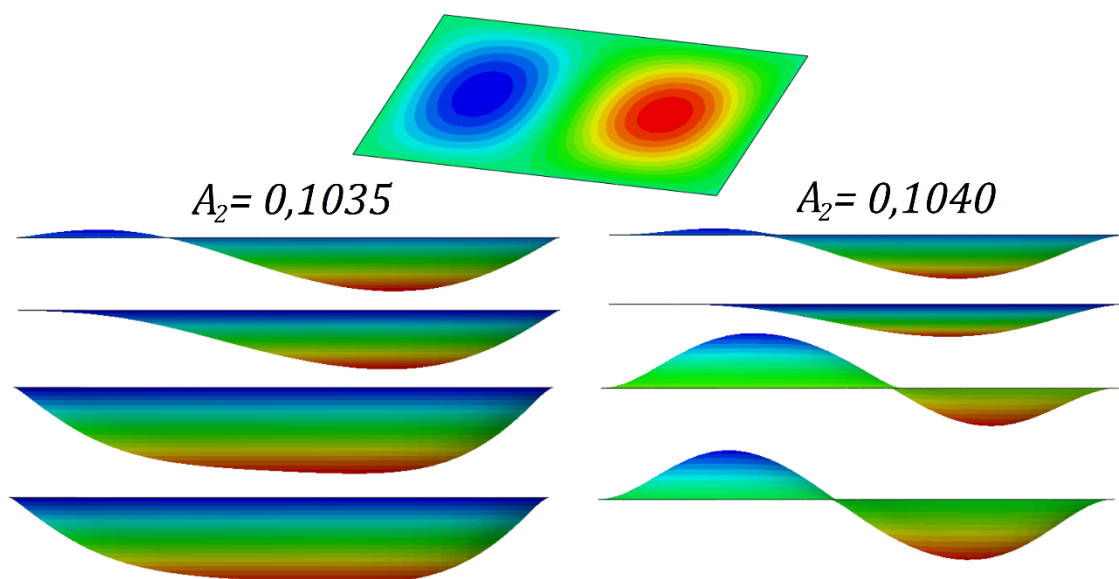
Rysunek 32. Ścieżki równowagi - przykład 6- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 14. Ścieżki równowagi - przykład 7- badania numeryczne

N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01	1	40	0,1
		var	2		



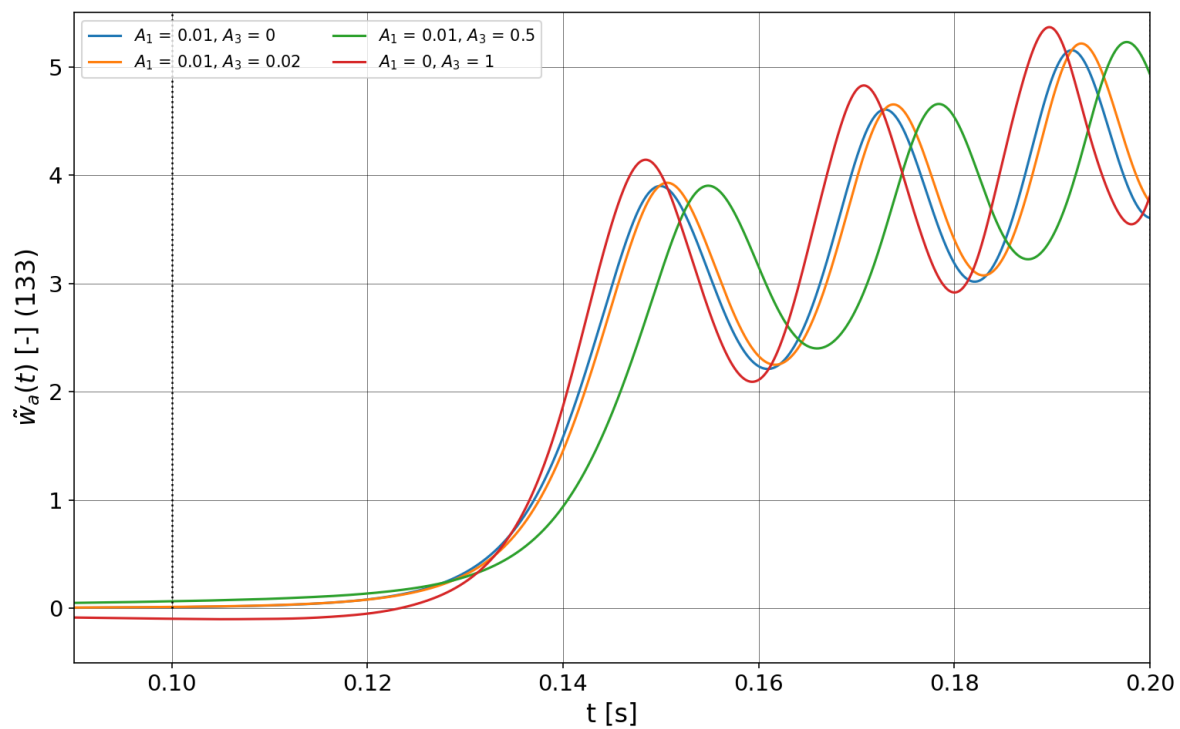
Rysunek 33. Ścieżki równowagi - przykład 7- badania numeryczne [Opr. własne]



Rysunek 34. Ewolucja drgań - przykład 7 - badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 15. Ścieżki równowagi - przykład 8- badania numeryczne

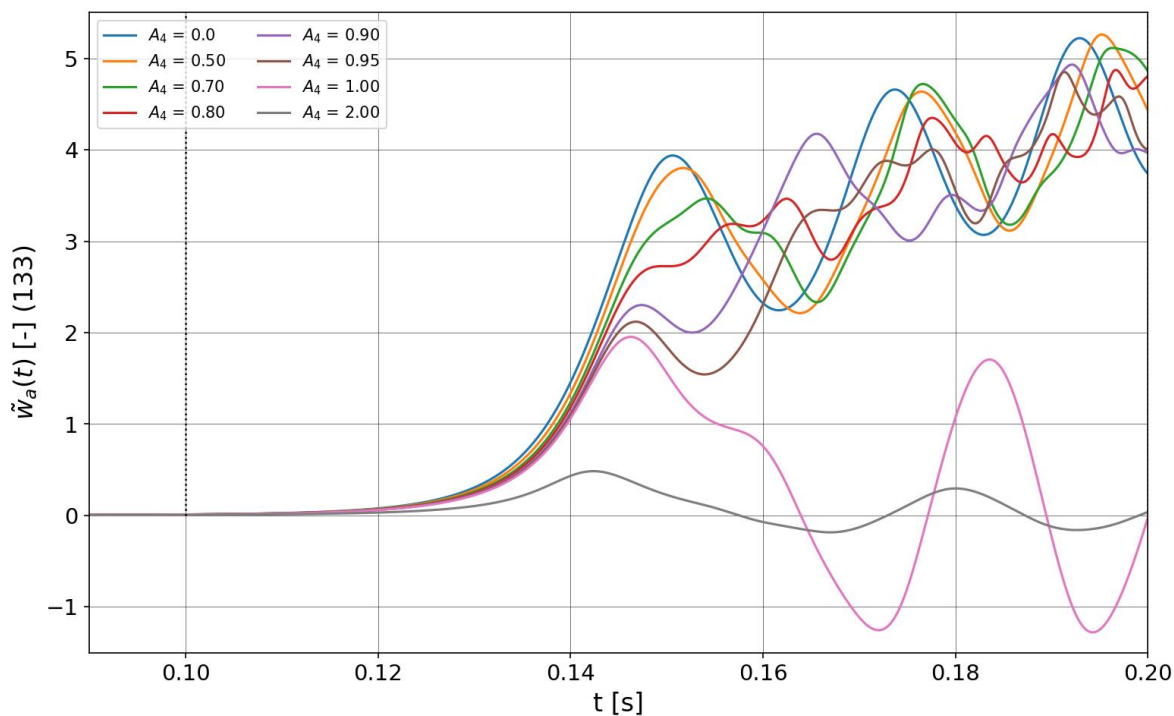
N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	$\frac{var}{var}$	$\frac{1}{3}$	40	0,1



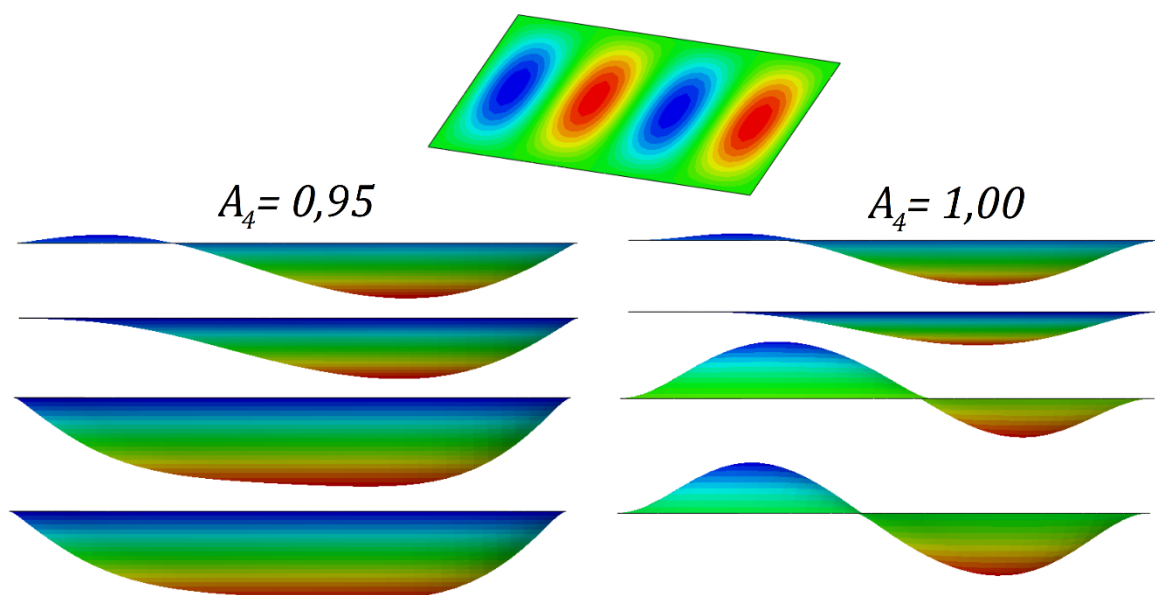
Rysunek 35. Ścieżki równowagi - przykład 8- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 16. Ścieżki równowagi - przykład 9- badania numeryczne

N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01 <i>var</i>	1 4	40	0,1



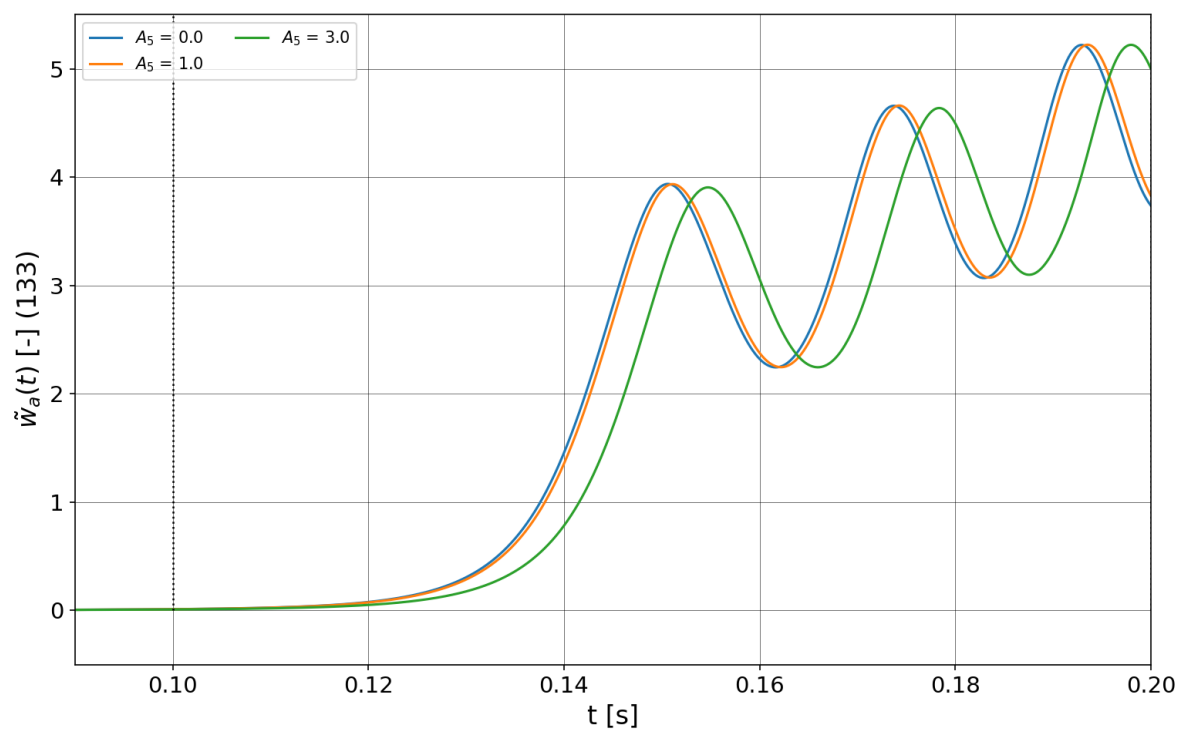
Rysunek 36. Ścieżki równowagi - przykład 9- badania numeryczne [Opr. własne]



Rysunek 37. Ewolucja drgań - przykład 9 - badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 17. Ścieżki równowagi - przykład 10- badania numeryczne

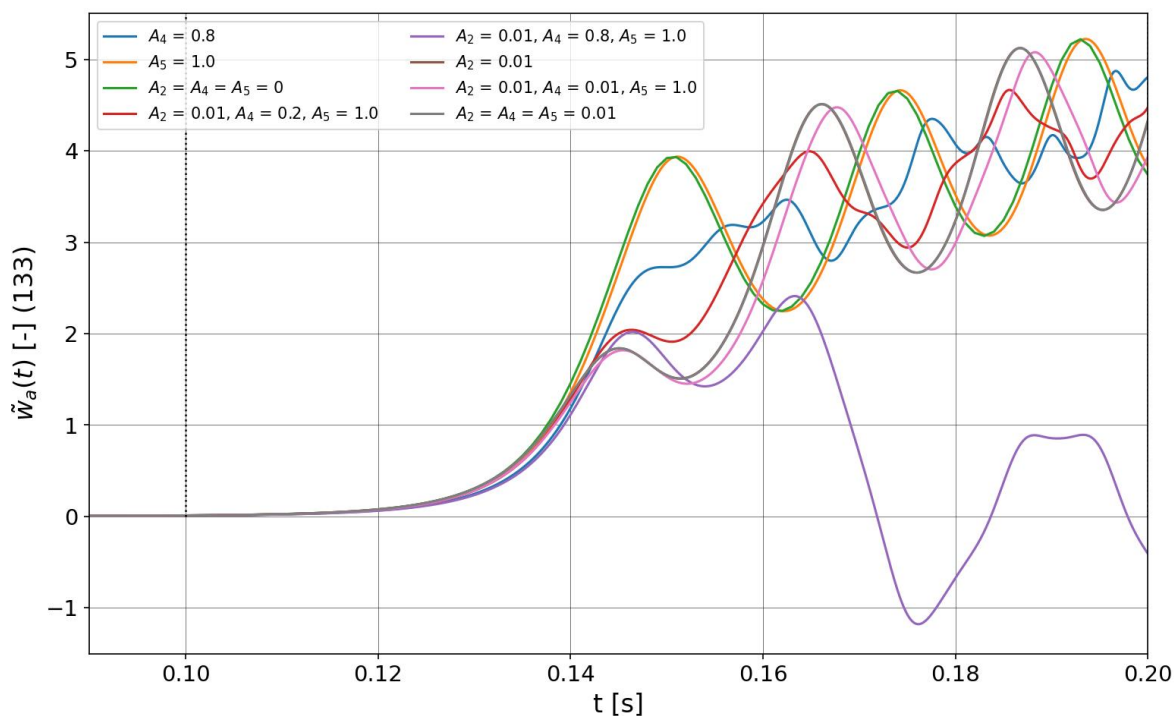
N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01	1	40	0,1
		<i>var</i>	5		



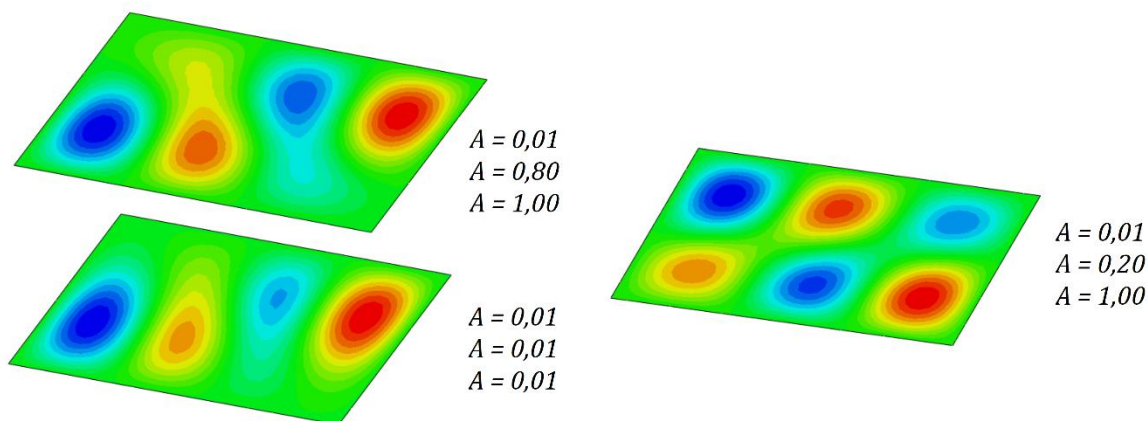
Rysunek 38. Ścieżki równowagi - przykład 10- badania numeryczne [Opr. własne]

Tabela 18. Ścieżki równowagi - przykład 11- badania numeryczne

N_t	α_N	A_i	Ω_i	k_e	t_0
$N_t^{(1)}$	0	0,01	1	40	0,1
		var	2		
		var	4		
		var	5		

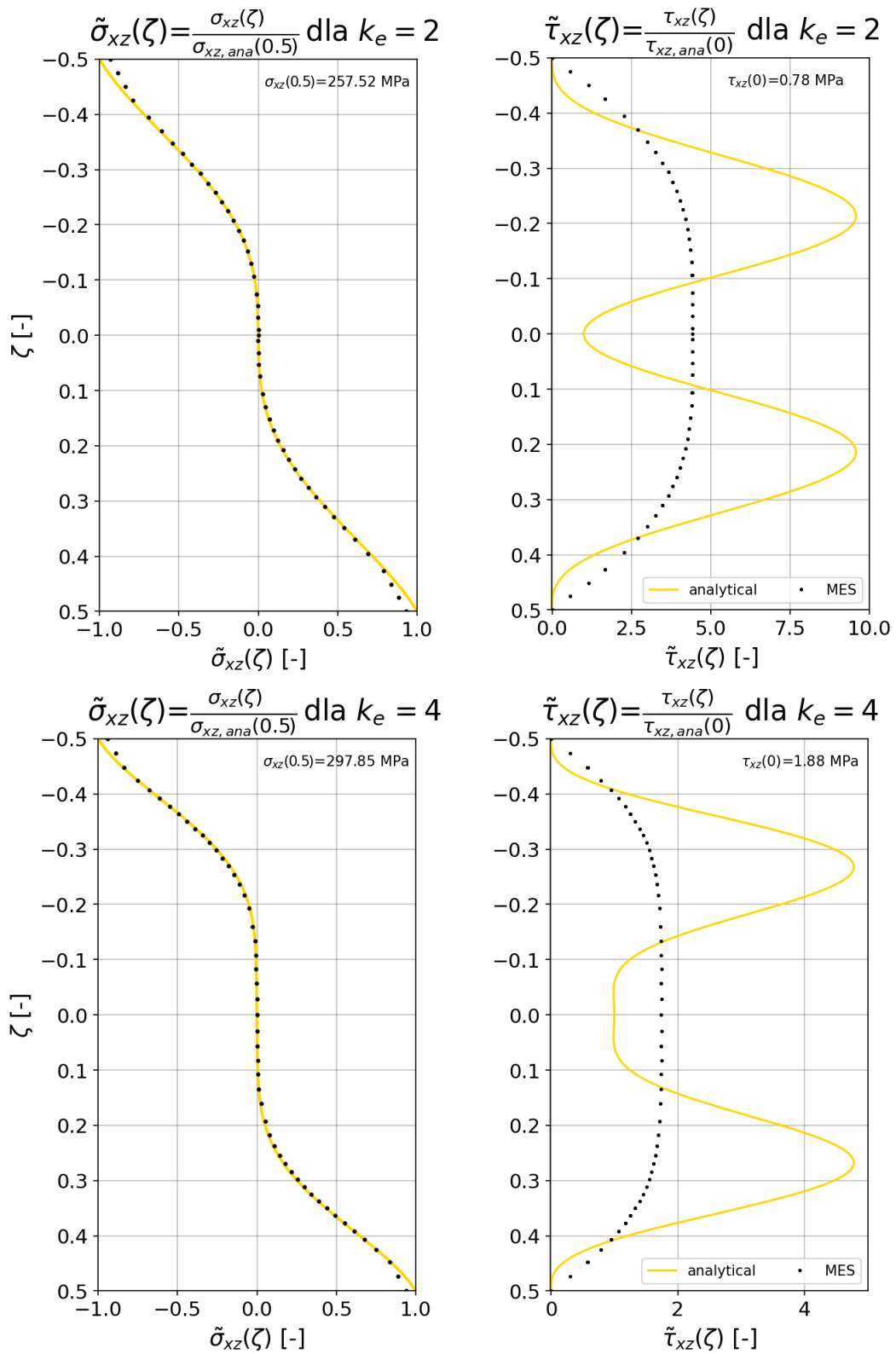


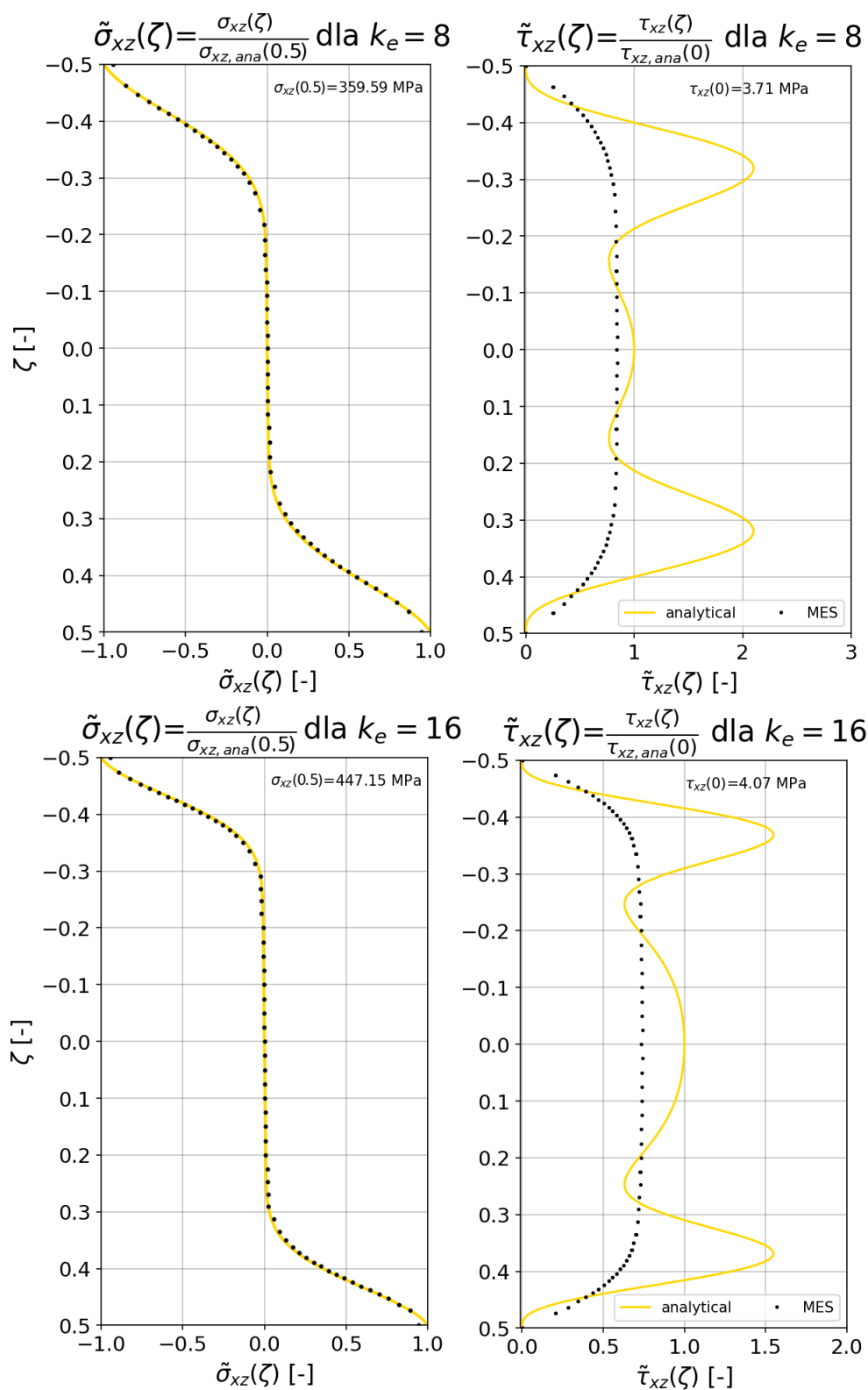
Rysunek 39. Ścieżki równowagi - przykład 11- badania numeryczne [Opr. własne]



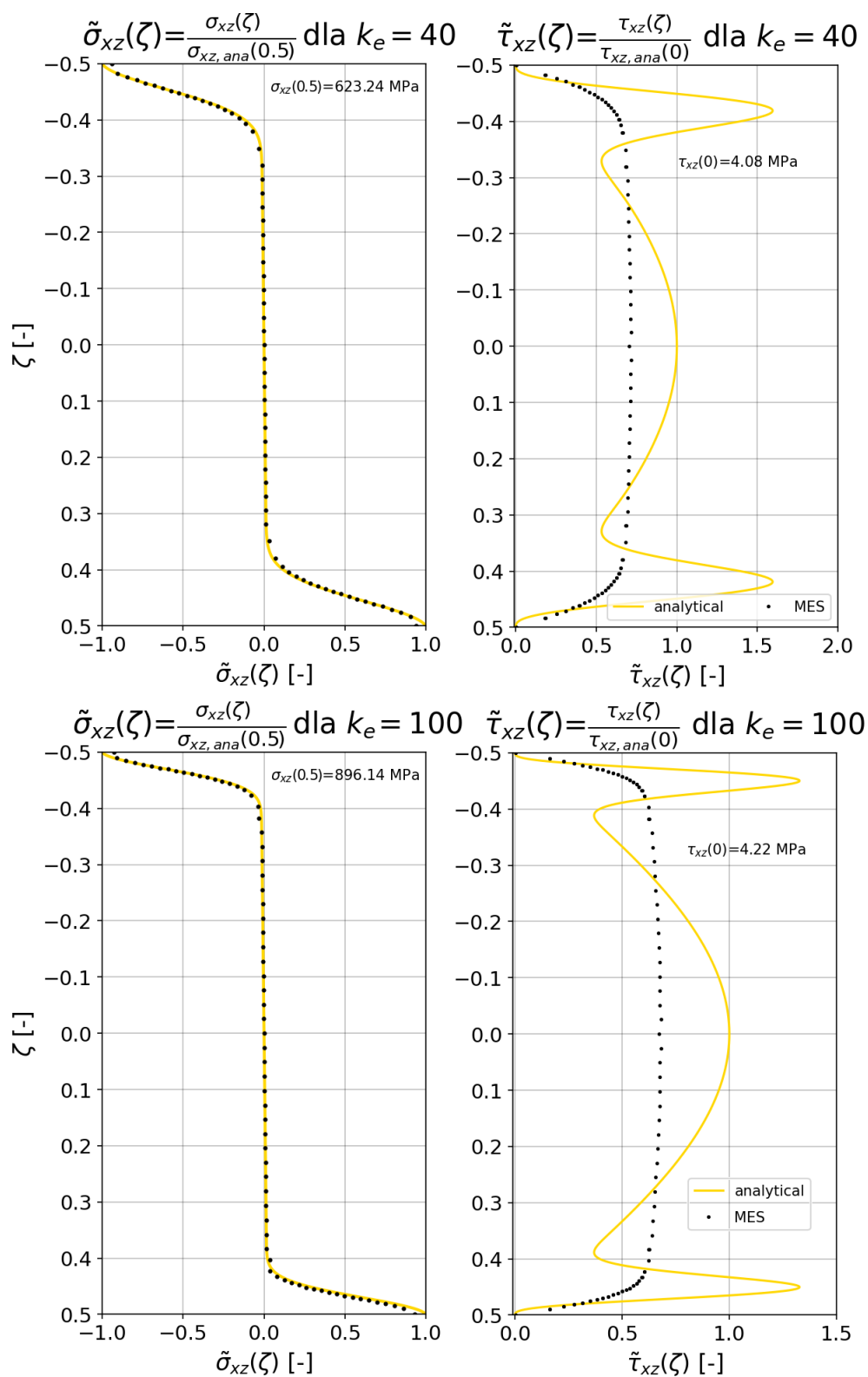
Rysunek 40. Superpozycja wstępnych imperfekcji $A_i\Omega_i$ - przykład 11 - badania numeryczne [Opr. własne]

Analizę efektu ścinania przeprowadzono na podstawie równań (147) i (151) dla płyty o wymiarach $a = b = 250 \text{ mm}$ i $h = 10 \text{ mm}$. Przebieg naprężeń normalnych i tnących przedstawiono na rysunkach 41-43 w odniesieniu do wyników otrzymanych analitycznie.

Rysunek 41. Naprężenia normalne i tnące - efekt ścinania dla $k_e = 2$ oraz $k_e = 4$ [Opr. własne]

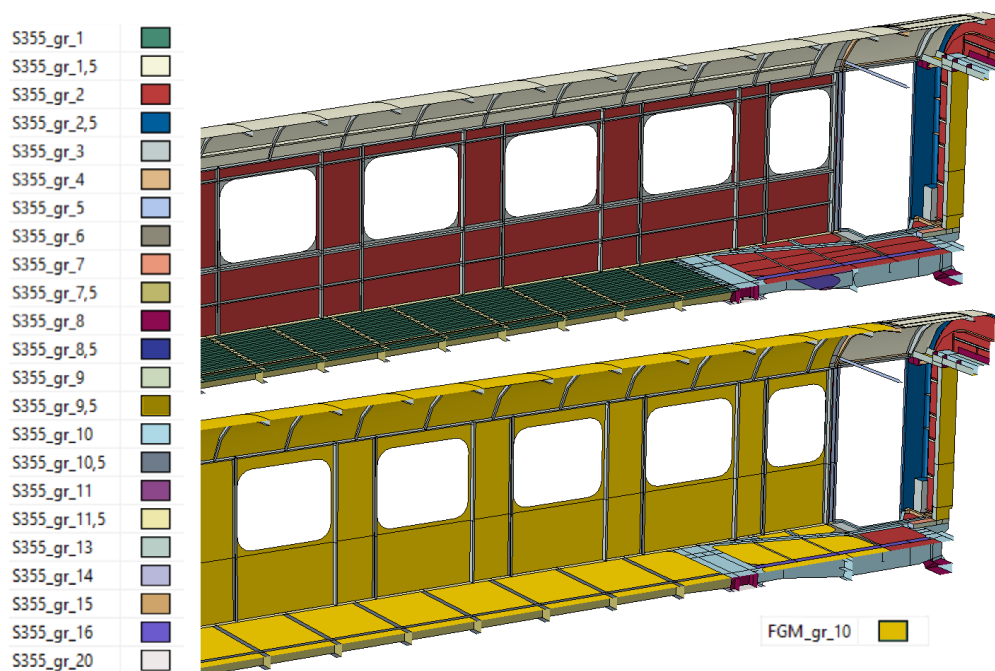


Rysunek 42. Naprężenia normalne i tnące - efekt ścinania dla \$k_e = 8\$ oraz \$k_e = 16\$ [Opr. własne]

Rysunek 43. Naprężenia normalne i tnące - efekt ścinania dla $k_e = 40$ oraz $k_e = 100$ [Opr. własne]

3. BADANIA NUMERYCZNE KONSTRUKCJI NOŚNEJ WAGONU

Przeprowadzone obliczenia numeryczne miały na celu zbadanie możliwości zastosowania materiałów gradientowych o symetrycznie zmiennych właściwościach na grubości (w szczególności materiałów porowatych) w konstrukcjach nośnych pojazdów szynowych. Szczegółowej analizie poddano wpływ zmiennej porowatości zastosowanego materiału na właściwości strukturalne konstrukcji z wyróżnieniem jej stateczności statycznej oraz dynamicznej. Do obliczeń przyjęto klasyczną konstrukcję szkieletową wagonu osobowego wykonaną ze stali S355, o bazie 19 m (odległość między czopami skrzętu) i masie całkowitej 52 t w stanie nadzwyczajnego obciążenia. Podstawowym elementem struktury analizowanego wagonu przenoszącym siły trakcyjne, jest ostoja, w skład której wchodzi czołownica, belka skrzętowa, dwuteowe podłużnice, poprzecznice i ukośnice tworzące szkielet podstawy wagonu. Pokryte są one blachą trapezową formującą podłogę. Ostoja stanowi bazę dla ścian bocznych i czołowych wykonanych z profili stalowych i pokrytych blachą poszyciową. Zmiany dokonane w konstrukcji nadwozia wagonu osobowego dotyczą strefy przeżycia wagonu (miejsca stałego przebywania pasażerów), obejmują rezygnację ze szkieletu konstrukcji oraz poszycia ścian bocznych i dachu zastępując te elementy gotowymi, trójwarstwowymi, aluminiowymi prefabrykatami, które zawierają w rdzeniu pianę aluminiową (w odniesieniu do rozważanej w rozdziale 2 płyty prostokątnej). Dodatkowo zamieniono podłogową blachę trapezową na materiał gradientowy. W rezultacie otrzymano konstrukcje stalowo-aluminiową przedstawioną na rysunku 44. Podłoga wagonu wraz ze ścianami bocznymi stanowią przykład zastosowania płyt prostokątnych jako elementów konstrukcyjnych w strukturze wagonu. Skrajna część konstrukcji wagonu, od ściany czołowej do końca otworu drzwiowego, stanowi obszar przebywania tymczasowego i pełni rolę strefy zgniotu. Ten fragment konstrukcji nie został poddany żadnej modyfikacji



Rysunek 44. Widok ogólny części skrajnej wagonu osobowego wraz z zaproponowaną modyfikacją konstrukcji z zastosowaniem materiału gradientowego (FGM) [Opr. własne]

3.1. Modele numeryczne badanych konstrukcji

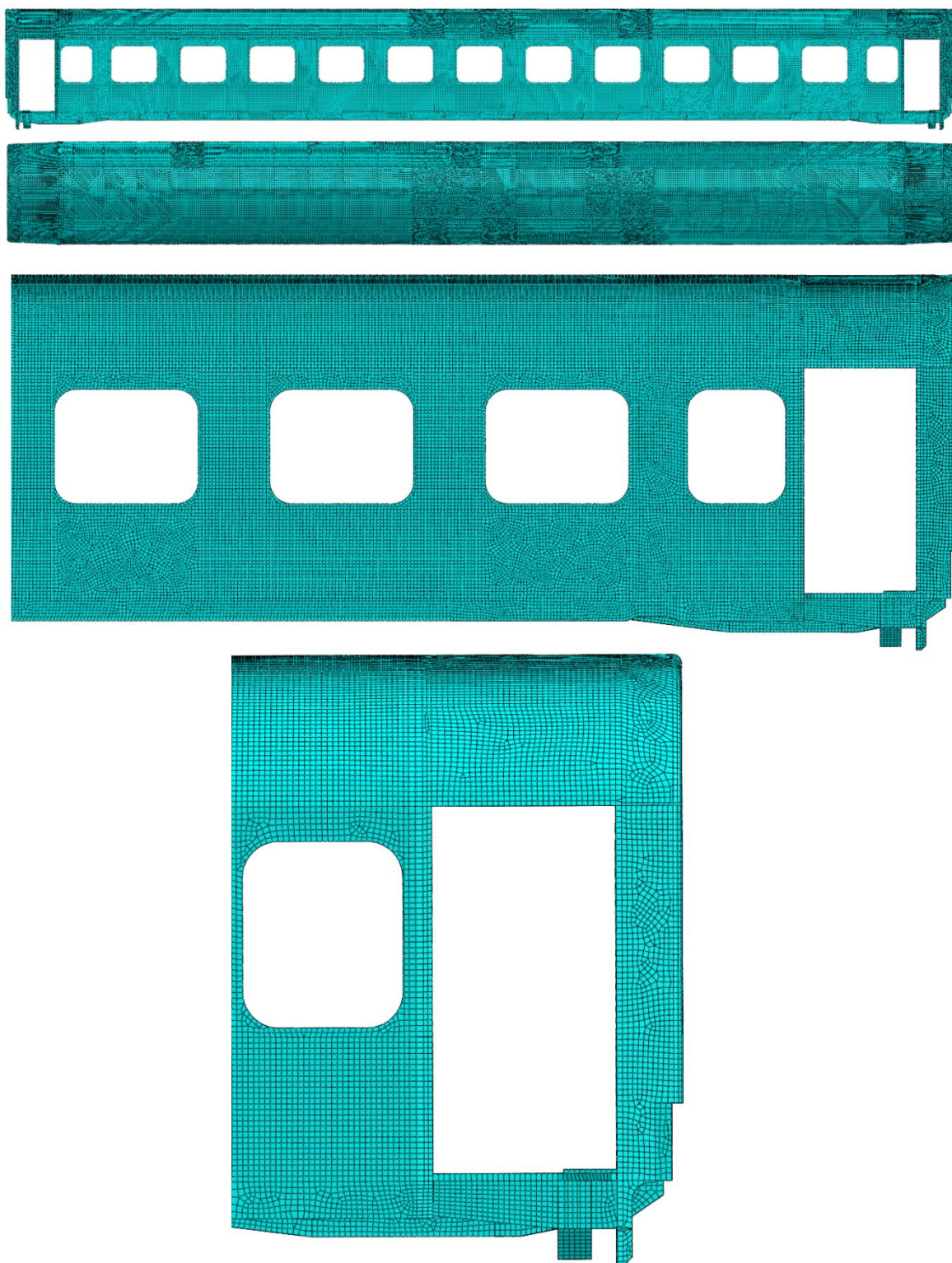
Badania przeprowadzono z zastosowaniem środowiska obliczeniowego ABAQUS 6.12-2 w technologii powierzchniowej. Modele zostały poddane dyskretyzacji z zastosowaniem elementów typu S8R i STRI65 dla obliczeń w trybie niejawnym oraz elementów typu S4R i S3R w przypadku obliczeń bezpieczeństwa pasywnego konstrukcji wykonanych w trybie jawnego całkowania. Po przeprowadzeniu analizy siatki, podobnie jak to przedstawiono na rysunku 15 dla płyty prostokątnej, dobrano odpowiedni rozmiar siatki elementów skończonych do rozpatrywanego zagadnienia. Podsumowanie wielkości obliczeniowej opracowanych modeli przedstawiono w tabeli 19. Przykładowy widok podziału modelu powierzchniowego wagonu zmodyfikowanego przedstawiono na rysunku 45.

Tabela 19. Wielkość obliczeniowa modeli numerycznych wagonów osobowych [Opr. własne]

	Konstrukcja pierwotna		Konstrukcja zmodyfikowana			
	ABAQUS Standard		ABAQUS Standard		ABAQUS Explicite	
	S8R	STRI65	S8R	STRI65	S8R	S4R
liczba elementów	439134	4376	379057	2698	372656	2796
liczba węzłów	1315690		1141333		376034	

Właściwości materiałowe zastosowanego materiału gradientowego (piany aluminiowej) dobrano w odniesieniu do tabeli 2, zakładając liniowo-sprężystą charakterystykę materiału. Właściwości stali S355 przyjęto z uwzględnieniem pełnej krzywej zrywania materiału, ze względu na konieczność odwzorowania deformacji trwałych w strefie zgniotu dla dynamicznych badań wytrzymałości zderzeniowej (bezpieczeństwa pasywnego) konstrukcji. Rozpatrzono również degradację sztywności stali, wprowadzając modele materiałowe pęknięcia plastycznego tj.: zarodkowania pęknięć oraz maksymalnych naprężeń tnących. W analizie wytrzymałości zderzeniowej uwzględniono kontakt normalny oraz styczny, przyjmując współczynnik tarcia równy 0,2. Dynamiczny model obliczeniowy zawiera urządzenia pochłaniające energię zderzenia w postaci, zabudowanych na czołownicy wagonu, zderzaków „crashowych” o skoku części sprężystej równym 110 mm i skoku części pochłaniającej energię 230 mm przy średniej sile 1,3 MN (siła inicjująca 1,5 MN).

Masę oprzyrządowania, urządzeń oraz pasażerów rozłożono równomiernie na konstrukcji nośnej poprzez wprowadzenie gęstości zastępczych materiałów. Do obliczeń przyjęto wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.



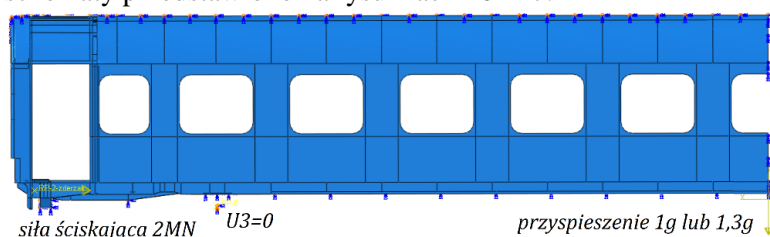
Rysunek 45. Widok ogólny przykładowego modelu dyskretnego wagonu osobowego [Opr. własne]

3.2. Przypadki obliczeniowe

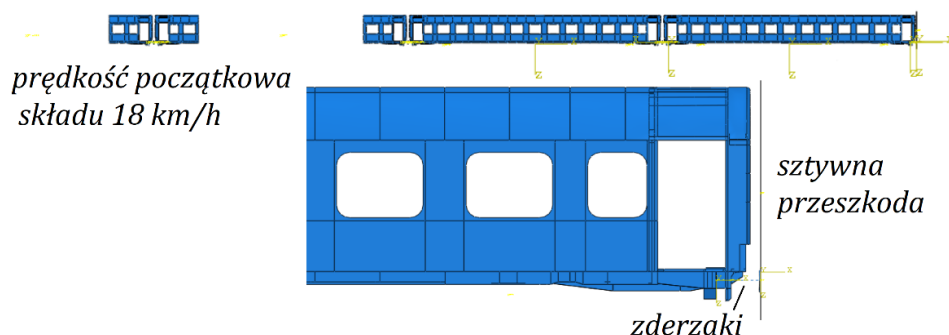
Na podstawie zdobytego doświadczenia zawodowego i przeprowadzonych badań numerycznych konstrukcji pojazdów szynowych [65]-[69], wybrano kilka kluczowych przypadków obliczeniowych w zakresie ich analizy strukturalnej.

- Maksymalne, nadzwyczajne obciążenie pionowe przyspieszeniem 1,3g. Obliczenia numeryczne wykonano dla ćwiartki modelu wagonu, zastępując usunięte fragmenty odpowiednimi warunkami brzegowymi. W celu porównania sztywności giętej zmodyfikowanej konstrukcji z pierwowzorem oraz normową wartością kryterialną - 3‰ bazy nadwozia ($3‰ \cdot 19\text{ m} = 57\text{ mm}$), analizie poddano maksymalne strzałki ugięcia.
- Superpozycja obciążeń: ściskanie siłą 2 MN w osi zderzaków i obciążenie pionowe przyspieszeniem 1g. Obliczenia numeryczne wykonano dla ćwiartki modelu wagonu, zastępując usunięte fragmenty odpowiednimi warunkami brzegowymi. W celu oceny wpływu dokonanych zmian na wytrzymałość konstrukcji analizie poddano pola naprężenia zredukowano.
- Ściskanie siłą 2 MN w osi zderzaków. Przypadek obliczeniowy wykonany do oceny stateczności konstrukcji i wpływu wprowadzonych zmian konstrukcyjnych na współczynnik ściskającej siły krytycznej.
- Analiza drgań swobodnych konstrukcji. Przypadek obliczeniowy wykonany do oceny wpływu wprowadzonych zmian konstrukcyjnych na częstotliwości drgań własnych nadwozia.
- Analiza wytrzymałości biernej konstrukcji - wytrzymałość zderzeniowa. Formacją uczestniczącą w kolizji był skład 4 wagonów osobowych, dla których prędkość początkowa wynosiła 18 km/h. Niehamowany skład uderzył w sztywną przeszkodę. Obliczenia przeprowadzono dla $k_e = 40$, w celu oceny wpływu zastosowania materiału porowatego na strefę zgniotu i analizy odpowiedzi dynamicznej elementów płytowych konstrukcji podłogi pojazdu.

Ich uproszczone schematy przedstawiono na rysunkach 46 i 47.



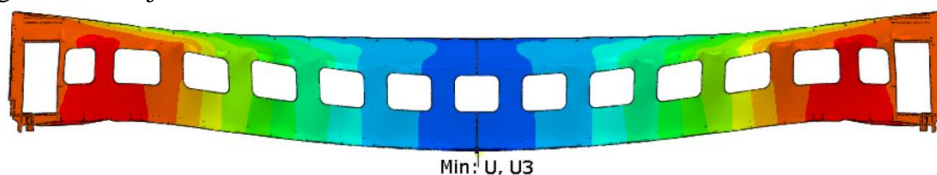
Rysunek 46. Uproszczony schemat obciążeń statycznych siły ściskającej i przyspieszenie pionowe [Opr. własne]



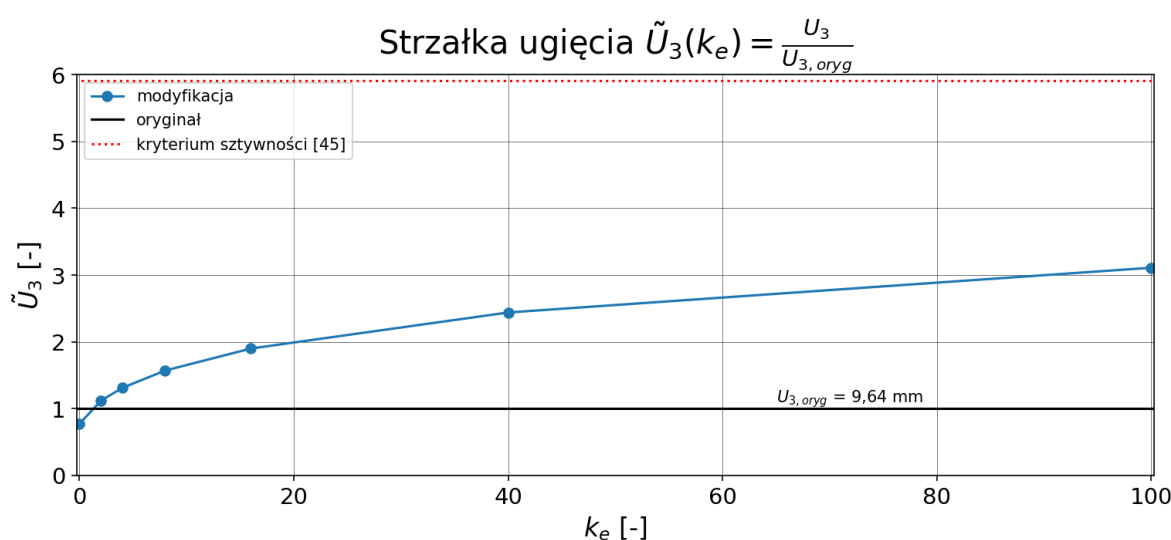
Rysunek 47. Uproszczony schemat obciążeń dynamicznych - wytrzymałość zderzeniowa konstrukcji [Opr. własne]

3.3. Wyniki badań

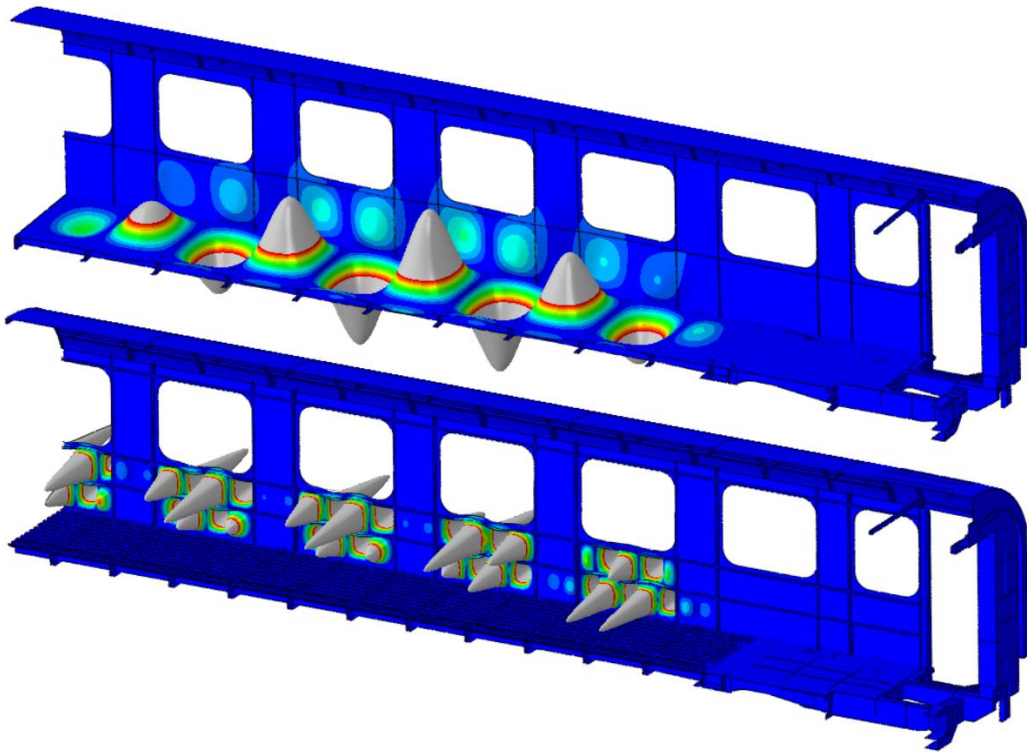
Poniżej przedstawiono wyniki badań numerycznych dla zmodyfikowanej konstrukcji nośnej wagonu osobowego w odniesieniu do klasycznej (oryginalnej, pierwotnej) konstrukcji szkieletowej. Analizie poddano wpływ zastosowania materiałów porowatych o różnej porowatości (zależnej od współczynnika k_e) na wybrane aspekty wytrzymałościowe wagonu, odnoszące się do kryteriów oceny zawartych w normach [45] oraz [46]. Maksymalną strzałkę ugięcia pod nadzwyczajnym obciążeniem pionowym 1,3g, oznaczoną na rysunku 48, przedstawiono na rysunku 49. Współczynniki obciążeń krytycznych dla siły ściskającej o wartości 2MN, przyłożonej w osi zderzaków wagonu, zaprezentowano na rysunku 51. Odnoszą się one do dziesięciu pierwszych postaci utraty stateczności, które przedstawiono w superpozycji na rysunku 50. Wpływ zmiany porowatości na pole naprężenia występujące w konstrukcji przedstawiono na rysunkach 52 i 53 dla superpozycji obciążenia siłą ściskającą o wartości 2 MN, przyłożoną w osi zderzaków oraz obciążenia pionowego 1g. Wyznaczono siedem pierwszych postaci drgań własnych konstrukcji nośnej wagonu (rysunki 54 i 55) i przeanalizowano wpływ zmiany porowatości na ich częstotliwości. Wyniki zestawiono na rysunku 56. Porównanie całkowitych mas analizowanych konstrukcji nośnych wagonów pokazano na rysunku 57. Pole deformacji plastycznej (trwałej) strefy zgniotu (rysunek 58) oraz dynamiczne ścieżki równowagi wybranych płyt podłogowych konstrukcji nośnej (rysunek 60) otrzymano dla obciążenia dynamiczną siłą oddziałującą na konstrukcję wagonu w wyniku zderzenia (rysunek 59). Wyniki przedstawiono dla $k_e = 40$, odnoszą się one do badania bezpieczeństwa pasywnego konstrukcji.



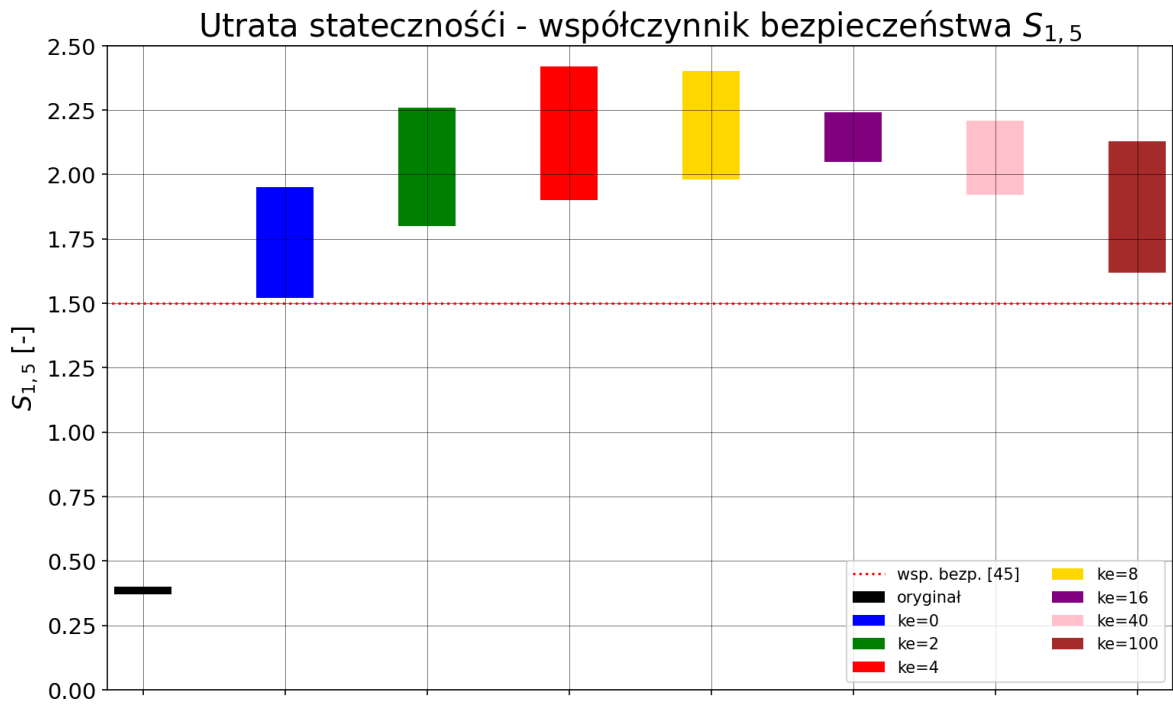
Rysunek 48. Ugięcie wagonu pod nadzwyczajnym obciążeniem pionowym 1,3g - pomiar strzałki [Opr. własne]



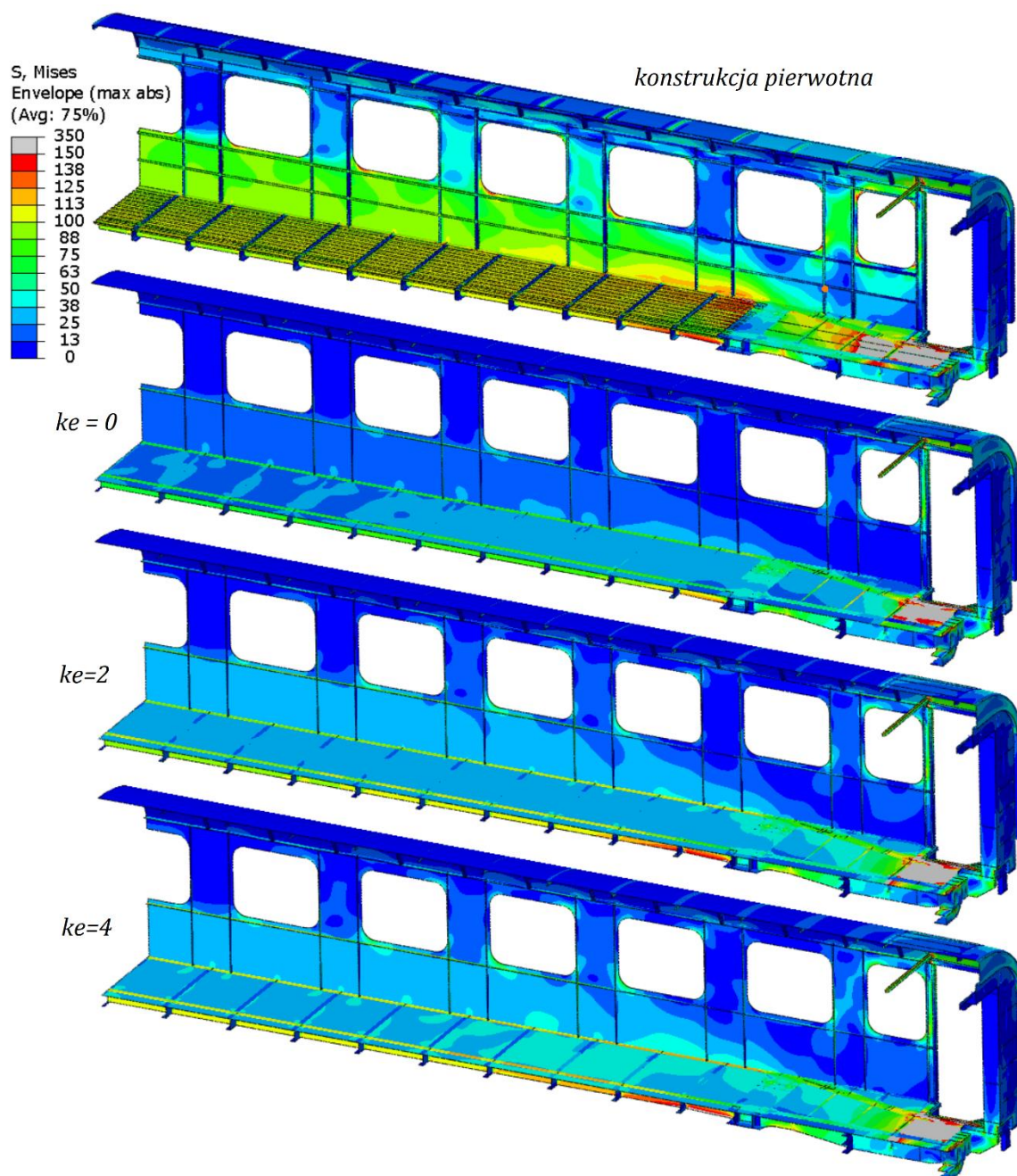
Rysunek 49. Ugięcie wagonu pod nadzwyczajnym obciążeniem pionowym 1,3g - porównanie konstrukcji oryginalnej i zmodyfikowanej [Opr. własne]



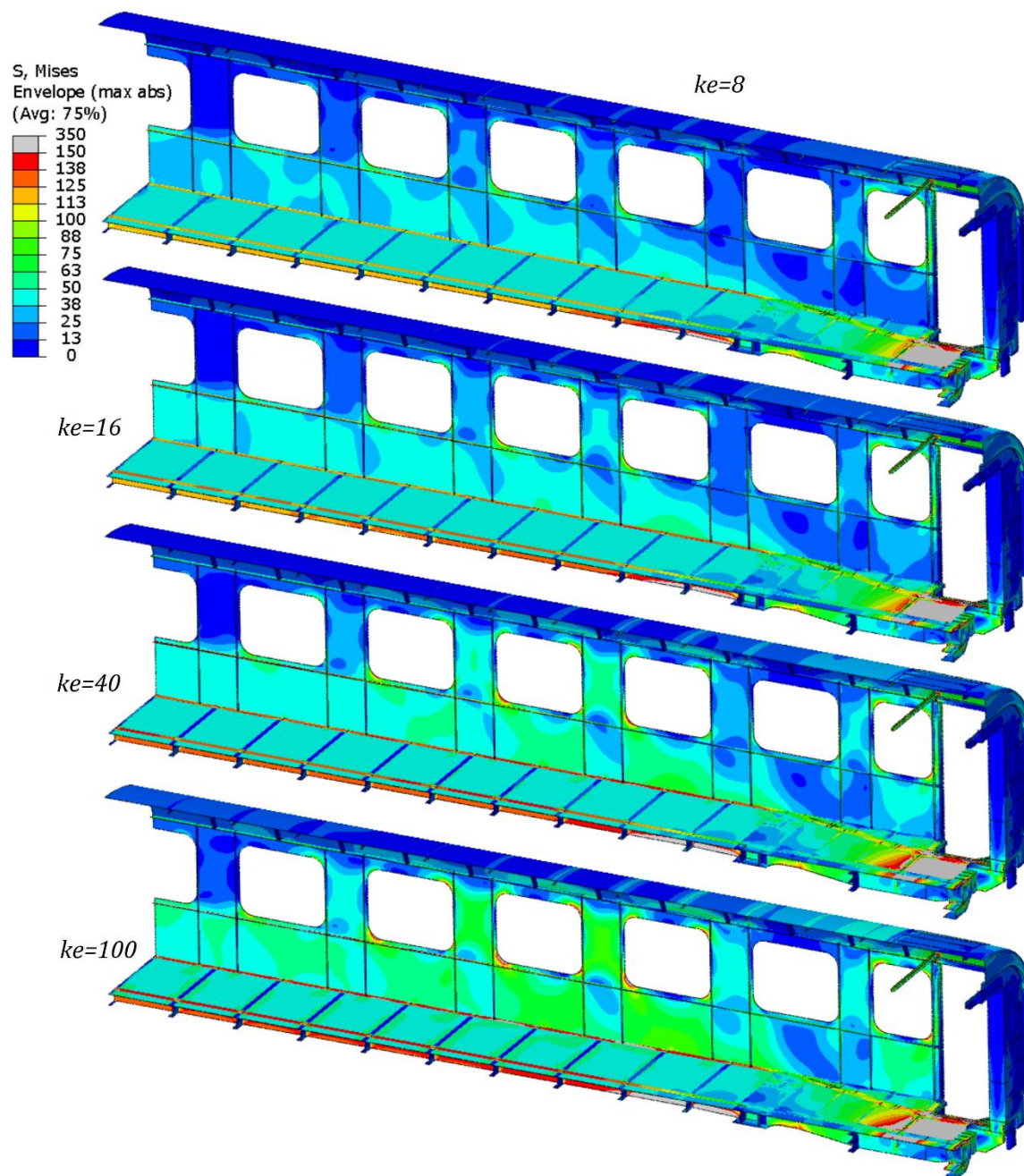
Rysunek 50. Superpozycje postaci utraty stateczności podczas ściskania w osi zderzaków dla konstrukcji zmodyfikowanej i pierwotnej [Opr. własne]



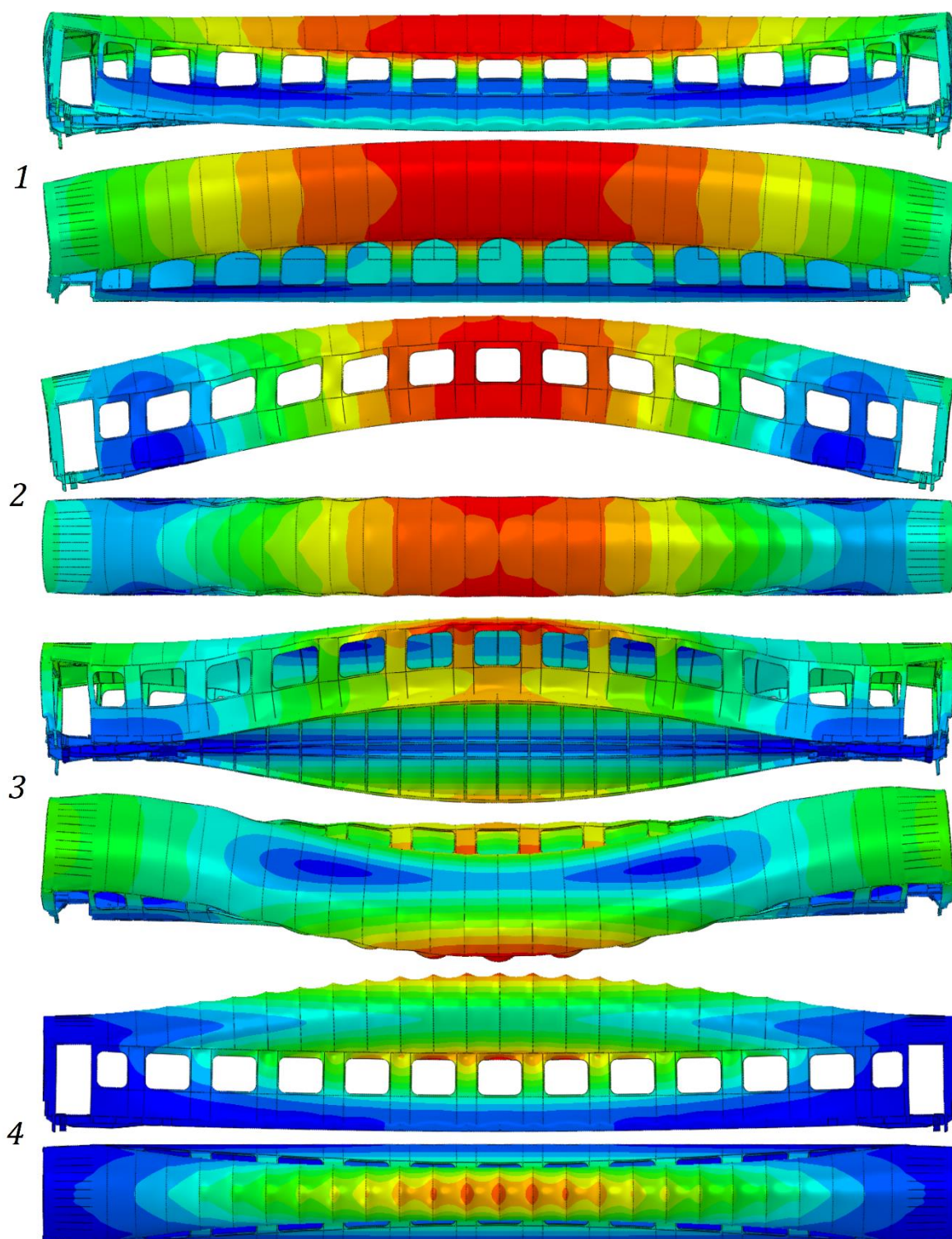
Rysunek 51. Wartości współczynników bezpieczeństwa dla krytycznej siły ściskającej (pierwsze 10 postaci utraty stateczności) [Opr. własne]



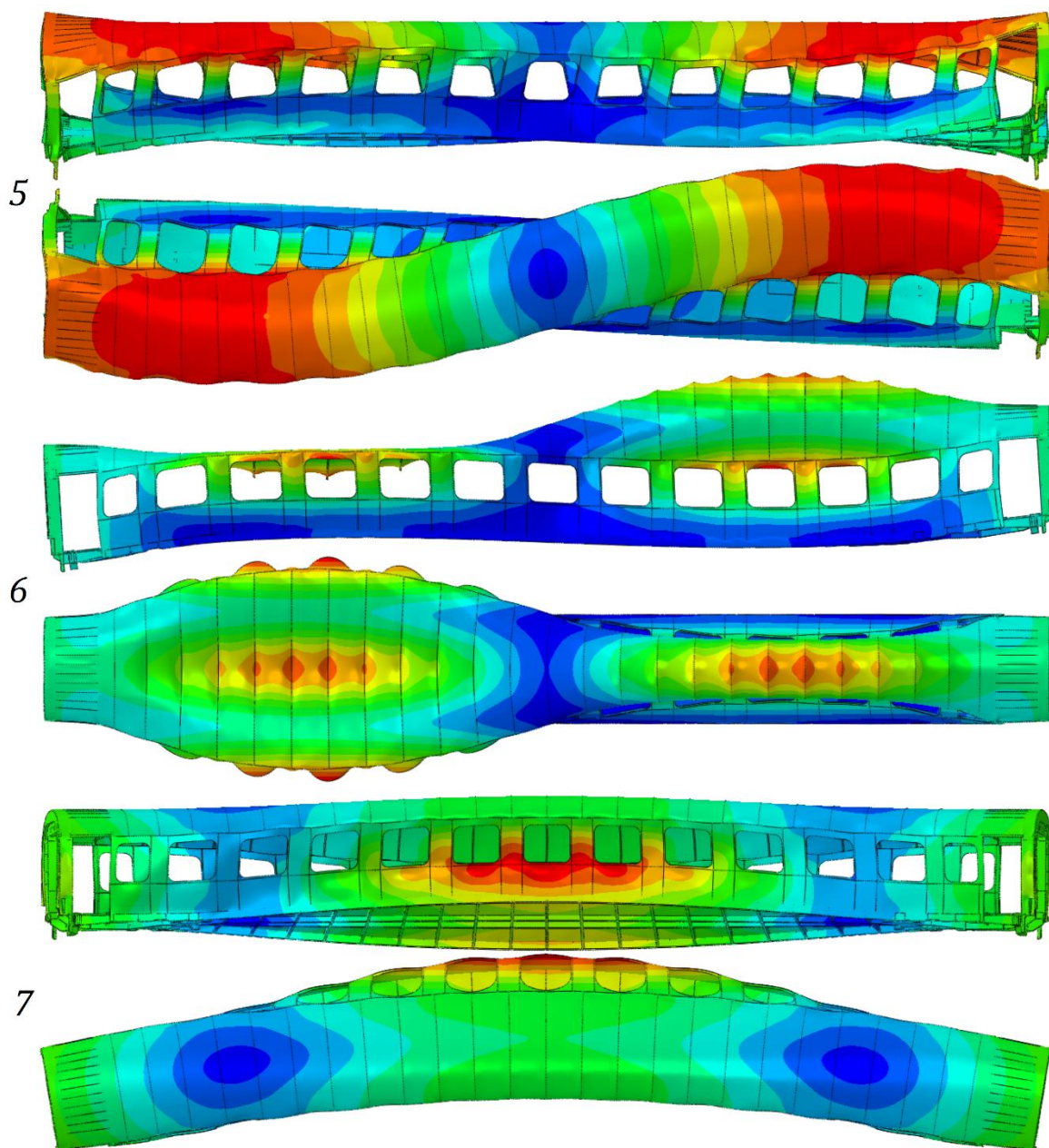
Rysunek 52. Pole naprężeń zredukowanych wg Hubera-Misesa dla superpozycji ściskania w osi zderzaków oraz obciążenia pionowego 1g, cz.1 [Opr. własne]



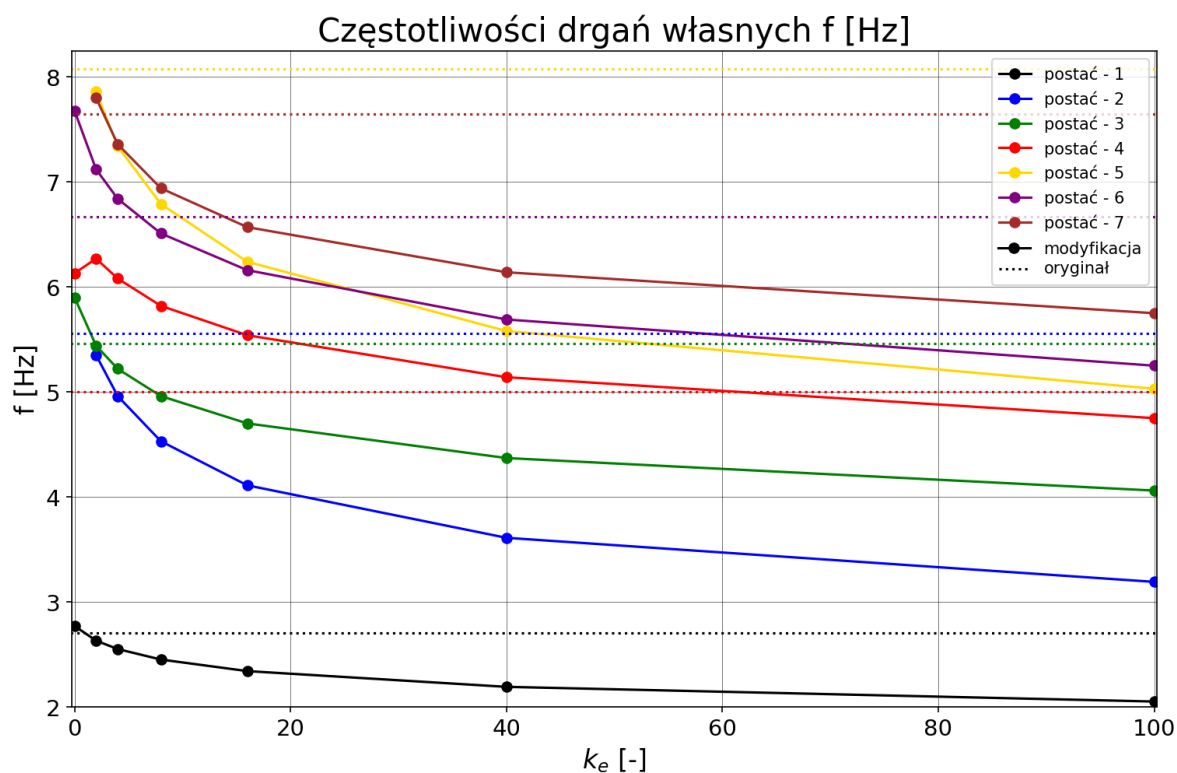
Rysunek 53. Pole naprężeń zredukowanych wg Hubera-Misesa dla superpozycji ściskania w osi zderzaków oraz obciążenia pionowego $1g$, cz.2 [Opr. własne]



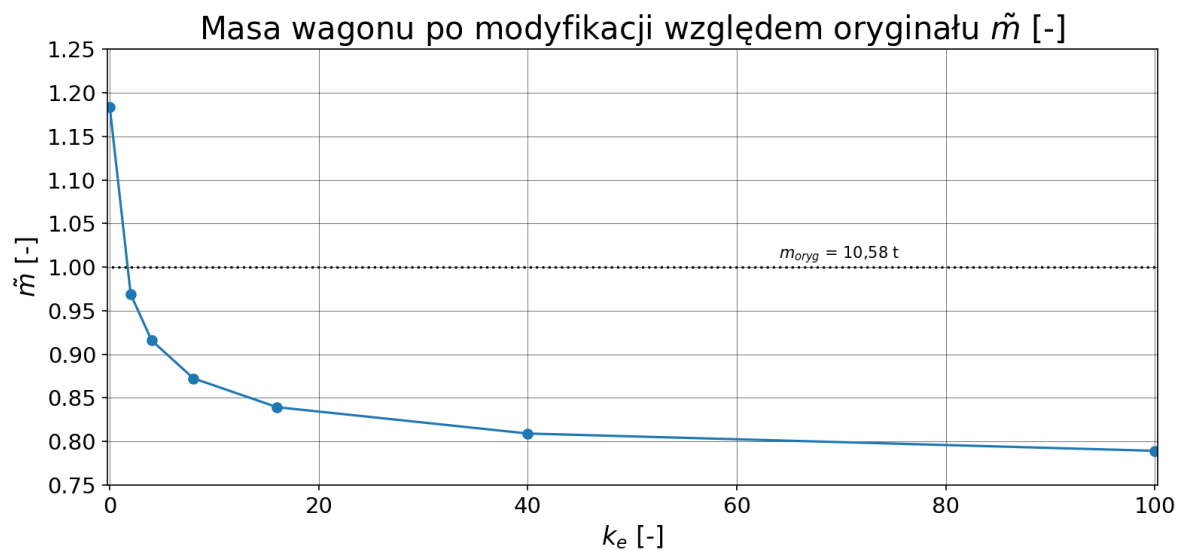
Rysunek 54. Wypadkowe pola przemieszczeń znormalizowanych (skala 1000:1) -
- postacię drgań własnych od 1 do 4 [Opr. własne]



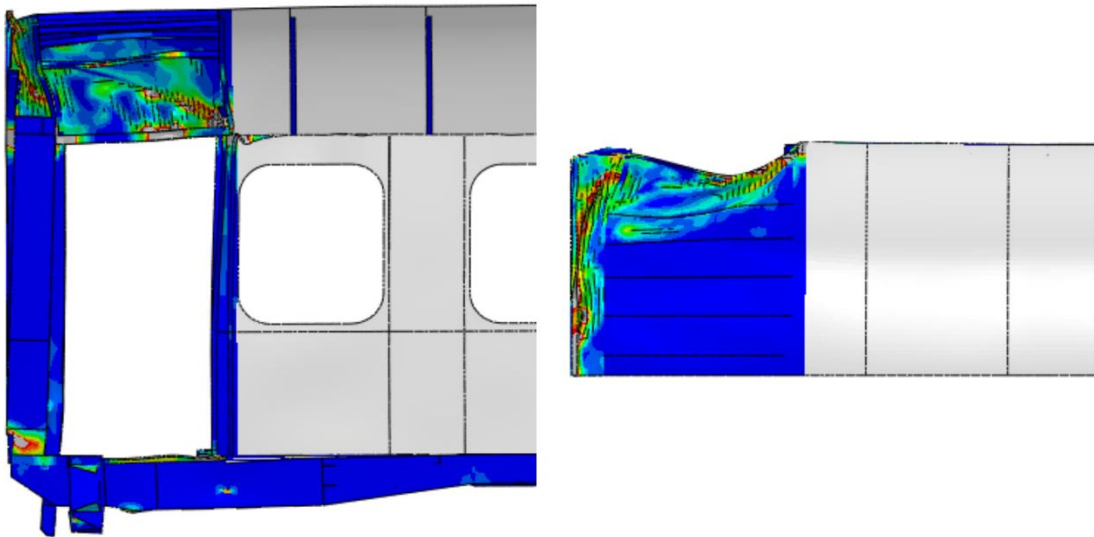
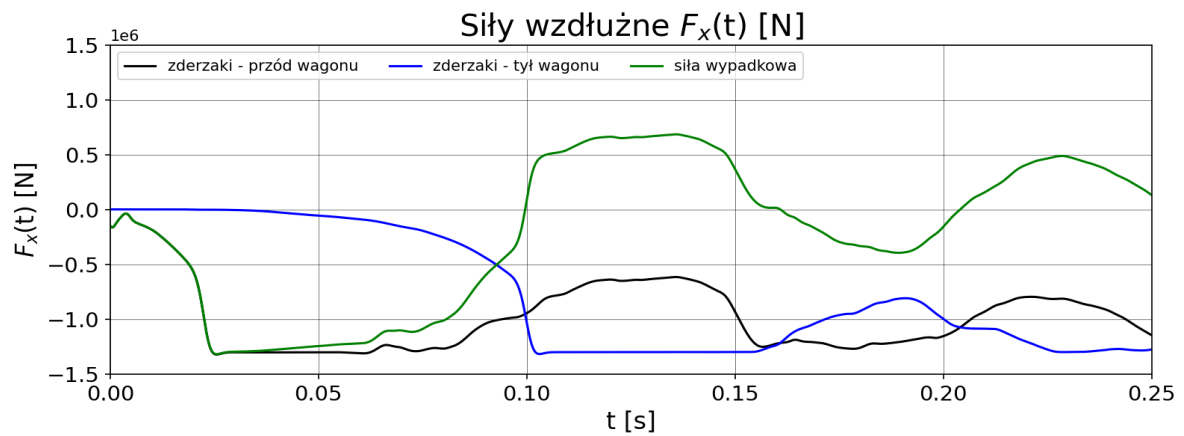
Rysunek 55. Wypadkowe pola przemieszczeń znormalizowanych (skala 1000:1) -
- postaci drgań własnych od 5 do 7 [Opr. własne]



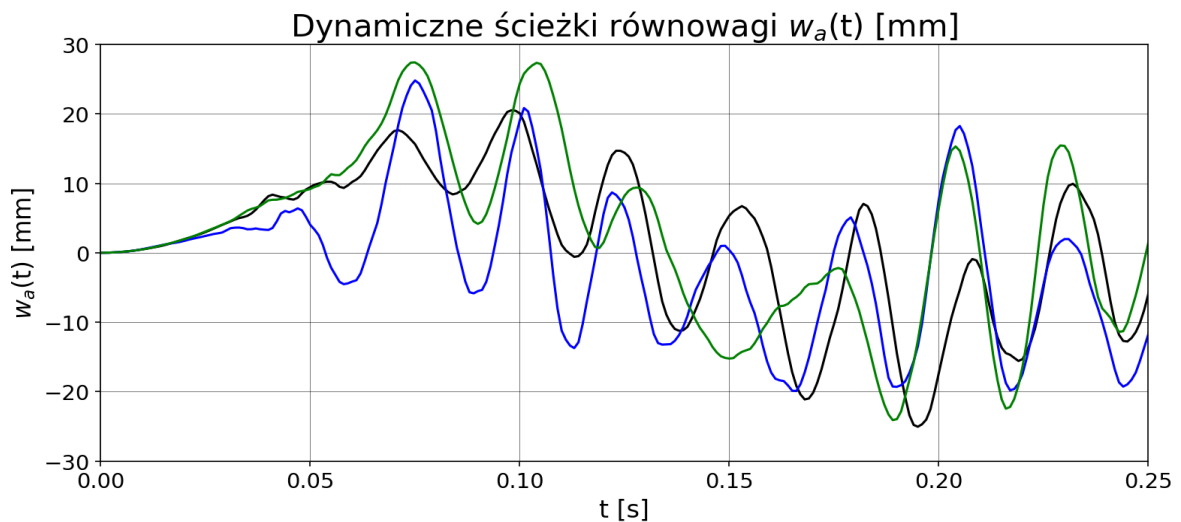
Rysunek 56. Częstotliwości drgań własnych wagonu [Opr. własne]



Rysunek 57. Masa względna wagonu - porównanie [Opr. własne]

Rysunek 58. Deformacje trwałe strefy zgniotu w wyniku zderzenia ($k_e = 40$) [Opr. własne]

Rysunek 59. Przebieg sił wzdłużnych oddziałujących na zderzaki wagonu podczas zderzenia (filtr 180 Hz) [Opr. własne]

Rysunek 60. Przebieg dynamicznej utraty stateczności wybranych płyt podłogowych wagonu ($k_e = 40$) [Opr. własne]

4. PODSUMOWANIE BADAŃ I WNIOSKI

Tematem rozprawy była stateczność statyczna i dynamiczna płyty prostokątnej wykonanej z materiału gradientowego o symetrycznie zmiennych właściwościach fizycznych i mechanicznych na grubości płyty, na przykładzie piany aluminiowej o zmiennej porowatości. Analizie poddano również możliwość implementacji powyższego materiału w konstrukcji nośnej nadwozia wagonu osobowego w odniesieniu do wybranych wymagań normatywnych ze szczególnym uwzględnieniem stateczności jego struktury.

Opracowany model analityczny stanowi uogólnienie symetrycznych względem płaszczyzny obojętnej struktur trójwarstwowych, funkcjonalnie zmiennych i jednorodnych z uwzględnieniem efektu ścinania. Dla przykładowych wartości parametrów funkcji zmiany właściwości materiałowych obliczono obciążenia krytyczne dla jednoosiowego ściskania oraz częstotliwości drgań własnych płyt prostokątnych o różnych wymiarach geometrycznych. Wyniki porównano z wartościami uzyskanymi numerycznie. Uzyskane różnice względne dla większości przypadków obliczeniowych wynoszą stanowczo poniżej 1%. Różnice te rosną jednak wraz ze spadkiem stosunku szerokości płyty do jej grubości, szczególnie dla płyt krótkich, o relatywnie większych sztywnościach ($k_e = 2$ lub $k_e = 4$), osiągając maksymalną wartość 3,52% dla częstotliwości drgań własnych płyty o długości $a = 312,5 \text{ mm}$, szerokości $b = 250 \text{ mm}$ i grubości $h = 20 \text{ mm}$. Wraz ze wzrostem stosunku długości do szerokości płyty prostokątnej obciążenie krytyczne początkowo rośnie osiągając maksimum w punkcie, w którym następuje wzrost liczby półfal postaci wyboczenia. Dla każdej kolejnej postaci utraty stateczności wzrost obciążenia krytycznego jest mniejszy i dąży do wartości minimalnej, która jest stała dla całkowitych wielokrotności stosunku rozważanych wymiarów. Obciążenie krytyczne maleje wykładniczo wraz ze spadkiem stosunku szerokości i grubości płyty oraz wraz z wartością parametru k_e . Analizując wpływ wymiarów geometrycznych płyty prostokątnej na jej częstotliwość drgań własnych stwierdza się, że zarówno dla stosunków długości i szerokości oraz szerokości i grubości następuje wykładniczy spadek wartości częstotliwości. Wraz ze wzrostem wartości parametru zmiany właściwości materiałowych k_e następuje początkowy, gwałtowny wzrost wartości częstotliwości drgań swobodnych a następnie jej łagodniejszy spadek. Wiąże się to ze stosunkiem zmniejszającej się sztywności płyty i jej masy.

Na rysunku 27 przedstawiono porównanie statycznych i dynamicznych ścieżek równowagi jednorodnej płyty prostokątnej otrzymanych z zastosowaniem obliczeń numerycznych MES oraz dwóch wyprowadzonych modeli analitycznych, występujących również w literaturze. Wykazano znaczną różnicę w otrzymanych wartościach ugięć oraz różnice w fazie amplitud drgań otrzymanych obiema metodami analitycznymi - wyrażenia (137) i (143). Występujące w literaturze założenia dotyczące nieliniowych rozwiązań płyt prostokątnych nie są spójne. Konieczne jest uwzględnienie odkształceń wzdłużnych i poprzecznych płyty podczas modelowania matematycznego nieliniowej utraty stateczności płyty podpartej przegubowo, tak jak podczas analizy powłoki walcowej. Otrzymana różnica w fazie odpowiedzi dynamicznej płyty może być związana z uwzględnieniem jedynie składnika przemieszczeń normalnych do powierzchni płyty w wyrażeniu na energię kinetyczną. Istotny wpływ na przesunięcie w fazie drgań płyty może mieć również sposób uwzględnienia jej imperfekcji. Zjawisko to wymaga dalszych badań.

W pracy przedstawiono również badania numeryczne statycznej i dynamicznej utraty stateczności płyty prostokątnej. Przeanalizowano odpowiedzi dynamiczne dla trzech różnych rodzajów obciążenia: ściskanie jedno- i dwuosiowe obciążeniem proporcjonalnym do czasu oraz dwuosiowe ściskanie quasi-impulsowe. Dla każdego z obciążeń stwierdzono wzrost wartości ugięcia względnego wraz ze wzrostem wartości parametru k_e , co wiąże się wprost ze spadkiem sztywności płyty. Dodatkowo zaobserwowano przesunięcie w fazie odpowiedzi dynamicznej układu, zgodnie z zależnością opisaną powyżej i dotyczącą zmiany częstotliwości drgań własnych od parametru k_e . Wzrost prędkości narastania obciążenia ściskającego skutkuje zwiększeniem amplitudy drgań oraz ich częstotliwości. Statyczne ścieżki równowagi dla płyt o wyidealizowanej geometrii posiadają swój początek w punkcie krytycznym. Deformacje rzeczywistych konstrukcji, obarczonych imperfekcjami, przebiegają według ciągłych krzywych zależnych od kształtu oraz amplitudy wstępnych imperfekcji. Wraz ze wzrostem początkowego odchylenia od geometrii idealnej zmniejsza się ilość energii sprężystej, skumulowanej przez obiekt przed przejściem do nowego stanu równowagi. Związany jest z tym spadek amplitudy drgań oraz czasu odpowiedzi dynamicznej układu na przyrost obciążenia. Ze względu na wartość obciążenia krytycznego najbardziej newralgicznym kształtem imperfekcji początkowych jest kształt odpowiadający pierwszej postaci utraty stateczności. Jednak na przebieg ścieżek równowagi ma wpływ suma wszystkich istniejących w konstrukcji imperfekcji. Analiza różnych konfiguracji imperfekcji odpowiadających pięciu pierwszym postaciom wyboczenia płyty prostokątnej ściskanej jednostronnie w osi X wykazała, że postaci wstępnych deformacji, przebiegających symetrycznie względem płaszczyzny YOZ, nie wpływają istotnie na przebieg utraty stateczności płyty. Jeżeli jednak wstępne imperfekcje są superpozycją pierwszej postaci wyboczenia i postaci asymetrycznych względem płaszczyzny YOZ, drgania przyjmują złożoną formę. Nakładają się na siebie wzajemnie, powodując lokalne wygaszanie lub wzmacnianie amplitudy drgań. Przy pewnym stosunku deformacji wstępnych odpowiadającym kolejnym postaciom utraty stateczności pierwsza forma wyboczenia może zostać całkowicie pominięta. Wówczas utrata stateczności przybiera kolejną postać przy zachowaniu wartości siły krytycznej. Niewielkie odchylenia położenia równowagi ścieżek dynamicznych od ich statycznych odpowiedników, które można zaobserwować na przedstawionych wykresach, są związane z zastosowaniem elementów pierwszego rzędu w analizach dynamicznych przeprowadzonych w trybie jawnego całkowania. Niestety biblioteka elementów skończonych programu ABAQUS 6.12-2 nie posiada elementów drugorzędowych dla algorytmu obliczeń „*explicite*”.

Założenie nieliniowej, indywidualnej hipotezy deformacji przekroju normalnego do powierzchni środkowej płyty umożliwiło wyprowadzenie wyrażenia opisującego naprężenia tnące wzdłuż grubości płyty. Porównanie przebiegów naprężeń normalnych i tnących płyty obciążonej równomiernym ciśnieniem na jej powierzchni, otrzymanych numerycznie i analitycznie, przedstawiono na rysunkach 41-43. Zauważyć można zbieżność wartości naprężeń normalnych. Pomimo tego, że założona hipoteza deformacji uwzględnia efekt ścinania znacznie dokładniej, niż klasyczne teorie zginania, otrzymana krzywa naprężeń tnących uzyskana analitycznie oscyluje znacznie wokół rozwiązania numerycznego, w wyniku czego otrzymano relatywnie duże różnice względne. Wymagane są dalsze badania w tym zakresie. Mimo niewielkiej wartości otrzymanych naprężeń tnących względem naprężeń normalnych, to właśnie one są decydujące do kształtowania rdzenia struktury gradientowej, w którym to naprężenia normalne dążą do zera.

Genezą pomysłu modyfikacji wagonu osobowego poprzez wyeliminowanie blachy poszyciowej i zastąpienie jej wraz z częścią szkieletu, strukturą porowatą było zdobyte doświadczenie zawodowe w obliczeniach numerycznych nadwozi pojazdów szynowych. W wielu wykonanych pracach konstrukcje nośne pojazdów szynowych przejawiały podobne słabe strony pod względem ich wytrzymałości i stateczności. Podstawowym problemem nie tylko konstrukcyjnym, ale również obliczeniowym, są lokalne utraty stateczności elementów poszycia przy obciążeniach ściskających o wartościach znacznie niższych od wymaganych przez współczynnik bezpieczeństwa. Pomimo, że lokalne utraty stateczności poniżej wymaganego kryterium są dozwolone przez normę [45] w przypadku występowania innych dróg przeniesienia siły, mnogość możliwych postaci utraty stateczności przez wielkoskalową konstrukcję znacznie utrudnia lub nawet uniemożliwia dowodzenie przez obliczenia stateczności globalnej. Utrata stateczności elementów poszycia ma również swoje negatywne konsekwencje w przebiegu zderzenia, doprowadzając do powstawania poważnych deformacji w strefie przeżycia, w której przebywają pasażerowie. Kontrola tego procesu może doprowadzić do stanowczej poprawy bezpieczeństwa pasywnego konstrukcji nadwozi pojazdów szynowych, a także możliwości wprowadzenia bardziej restrykcyjnych kryteriów oceny, np. poprzez wzrost prędkości kolizyjnej w wymaganym scenariuszu kolizji. Jak przedstawiono na rysunkach 50 oraz 51, zastosowanie materiałów gradientowych, tworzących konstrukcję powłokową ścian bocznych, podłogi i dachu wagonu, pozwala na znaczne zwiększenie minimalnej siły krytycznej konstrukcji. Bardzo istotnym czynnikiem w tym procesie okazuje się również stosunek sztywności konstrukcji ostoji do ścian bocznych oraz dachu. Odpowiedni dobór grubości oraz porowatości tych elementów może doprowadzić do dalszego wzrostu stateczności i dalszej redukcji masy. Wymagane są jednak dalsze badania w tym temacie. Zastąpienie elementów stalowych ich aluminiowymi odpowiednikami znacząco wpływa na obniżenie masy konstrukcji nadwozia (dla $k_e = 100$ osiągnięto ponad 20% redukcję masy), umożliwiając minimalizację zużycia energii w transporcie szynowym, bądź zabudowę dodatkowych urządzeń. Taka modyfikacja częściowo eliminuje również ryzyko wystąpienia korozji. Wraz ze wzrostem porowatości materiału gradientowego zmniejsza się sztywność nadwozia, przez co wzrasta strzałka ugięcia. Jest to zjawisko niekorzystne, jednak w przeprowadzonych badaniach ugięcie nie przekroczyło wymaganych wartości kryterialnych. Zastosowanie aluminiowej struktury porowatej doprowadza do znacznej redukcji wartości pola naprężenia zredukowanego konstrukcji wagonu. Przykładowo dla $k_e = 8$ nie przekroczono wartości 50 MPa w spiętrzeniu naprężenia występującego w węźle okiennym dla skrajnych włókien przekroju struktury porowatej. Przedstawione wyniki mają jednak charakter poglądowy i ze względu na wiele dodatkowych aspektów, które należałoby rozpatrzyć w celu oceny wytrzymałości nadwozia, nie wskazano konkretnego parametru porowatości, jaki należałoby zastosować. Bardzo ciekawym rozwinięciem badań wytrzymałościowych byłoby zastosowanie „submodeli” - wyizolowanych modeli numerycznych w miejscach występowania krytycznych wartości naprężeń w celu oceny rozkładu naprężeń przekrojowych. Szczegółowej analizie poddano również wpływ zastosowania materiału gradientowego na drgania swobodne struktury nadwozia wagonu. Wyznaczono siedem pierwszych postaci drgań swobodnych, wśród których wyróżnić można giętną pionową, giętną poprzeczną oraz skrętną. Częstotliwości drgań nadwozia należy znacząco oddzielić od częstotliwości sił wymuszających pochodzących od układu biegowego w celu uniknięcia zjawiska rezonansu mechanicznego. Jak przedstawiono na rysunku 56, parametr zmian

właściwości materiałowych k_e może posłużyć jako dodatkowy czynnik w tym procesie już na etapie projektu, przyczyniając się do poprawy komfortu jazdy. Wyznaczono dynamiczne ścieżki równowagi wybranych trzech płyt prostokątnych zastosowanych w konstrukcji podłogi wagonu o najniższym obciążeniu krytycznym (rysunek 50) dla obciążenia występującego podczas kolizji wagonu. Przebieg sił wzdłużnych, oddziałujących w osi zderzaków wagonu w wyniku zderzenia, odpowiada w przybliżeniu obciążeniu quasi-impulsowemu zastosowanemu w badaniach stateczności płyty prostokątnej (rozdział 2). Z tego powodu dynamiczne ścieżki równowagi przedstawione na rysunkach 30 i 60 również wykazują wysoki stopień podobieństwa. Warto zwrócić uwagę, że wiedza o zachowaniu podstawowych elementów konstrukcyjnych: belek, płyt i powłok jest kluczowa do kształtowania konstrukcji wielkoskalowych. Zastosowany opis zmian właściwości materiałowych stanowi doskonałą podstawę do ich optymalizacji na wyizolowanych modelach matematycznych.

Pomimo rozwoju metod numerycznych modele analityczne wciąż stanowią fundament poznawczy dla zjawisk mechanicznych zachodzących w rzeczywistych konstrukcjach, a ich niezwykłą zaletą jest możliwość walidacji metod numerycznych stosowanych w nauce i przemyśle. Dzięki kombinacji obu tych metod zrealizowano wszystkie cele pracy oraz udowodniono postawione tezy.

LITERATURA

- [1] Abaqus 6.12 Online Documentation. Dassault Systemes, materiał dostępny na stronie <http://130.149.89.49:2080/v6.12/books/popups/info.html> (wygenerowano dnia: 2012.02.13).
- [2] Ashby M. F., Evans A. G., Fleck N. A., Gibson L. J., Hutchinson J. W., Wadley H. N. G.: *Metal Foams: A Design Guide*. Butterworth-Heinemann, Boston, 2000.
- [3] Bažant Z., Cedolin L.: *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific Publishing, 2010.
- [4] Benatta M. A., Mechab I., Tounsi A., Adda Bedia E. A.: Static analysis of functionally graded short beams including wrapping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*, Vol. 44, No. 2, 2008, pp. 765-773.
- [5] Birman V., Byrd L. W.: Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 60, No. 5, 2007, pp. 195-216.
- [6] Carrera E.: Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56, No. 3, 2003, pp. 287-308.
- [7] Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J. N.: A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, 2003, pp. 519-539.
- [8] Chen D., Yang J., Kitipornchai S.: Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. *Composite Structures*, Vol. 133, 2015, pp. 54-61.
- [9] Chen D., Yang J., Kitipornchai S.: Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108-109, 2016, pp. 14-22.
- [10] Chi SH., Chung YL.: Mechanical behaviour of functionally graded material plates under transverse load – Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 13, 2006, pp. 3657-3674.
- [11] Cho D. S., Vladimir N., Choi T. M.: Approximate natural vibration analysis of rectangular plates with openings using assumed mode method. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, Vol. 5, No. 3, 2011, pp. 478-491.
- [12] Choi J. B., Lakes R. S.: Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio. *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 37, No. 1, 1995, pp. 51-59.
- [13] Dębowski D., Magnucki K., Malinowski M.: Dynamic stability of metal foam rectangular plate. *Steel and Composite Structures*, Vol. 10, No. 2, 2010, pp. 151-168.
- [14] Dębowski D., Magnucki K.: Dynamic stability of a porous rectangular plate. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 6, No. 1, 2007, pp. 215-216.
- [15] Durzyński Z., Królikowski J., Cichy R.: Porównanie wymagań dla pojazdów interoperacyjnych w świetle przepisów unijnych i krajowych. *Pojazdy Szynowe*, Vol. 3, 2014, pp. 8-13.
- [16] Gawęcki A.: *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1998.
- [17] Gelfand, I. M., Fomin S. W.: *Rachunek wariacyjny*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1972.

- [18] Gibson L. J., Ashby M. F.: The Mechanics of Three-Dimensional Cellular Materials. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 382, No. 1782, 1982, pp. 43-59.
- [19] Gryboś R.: Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa-Poznań, 1980.
- [20] Guinta G., Belouettar S., Carrera E.: Analysis of FGM Beams by Means of Classical and Advanced Theories. Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 17, 2010, pp. 622-635.
- [21] Hadj Mostefa A., Mardaci S., Mahmoudi N.: An Overview of Functionally Graded Materials <<FGM>>. Abdelbaki B., Safi B., Saidi M. (eds.): Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development. SMSD, 2017, pp. 267-278.
- [22] Jabbari M., Mojahedin A., Khorshidvand A. R., Eslami M. R.: Buckling Analysis of Functionally Graded Thin Circular Plate Made of Saturated Porous Materials. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 140, No. 2, 2014, pp. 287-295.
- [23] Jasion P., Magnucka-Blandzi E., Szyk W., Magnucki K.: Global and local buckling of sandwich circular and beam-rectangular plates with metal foam core. Thin-Walled Structures, Vol. 61, 2012, pp. 154-161.
- [24] Jędrzyak J.: Free vibration of thin functionally graded plates with microstructure. Engineering Structures, Vol. 75, 2014, pp. 99-112.
- [25] Kaźmierczak M., Jędrzyak J.: A new combined asymptotic-tolerance model of vibrations of thin transversally graded plates. Engineering Structures, Vol. 46, 2013, pp. 322-331.
- [26] Kędzia P., Magnucki K.: Stateczność płyty prostokątnej pod obciążeniem dynamicznym w polu magnetycznym. Modelowanie inżynierskie, Vol. 21, No. 52, 2014, pp. 107-111.
- [27] Koza E., Leonowicz M., Wojciechowski S.: Analiza strukturalna pian aluminiowych. Kompozyty, Vol. 2, No. 4, 2002, pp. 229-232.
- [28] Li J., Hu X., Li X.: Free vibration analyses of axially loaded laminated composite beams using a unified high-order shear deformation theory and dynamic stiffness method. Composite Structures, Vol. 158, 2016, pp. 308-322.
- [29] Lindberg H. E., Herbert R. E.: Dynamic buckling of a thin cylindrical shell under axial impact. Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, No. 1, 1966, pp. 105-112.
- [30] Liu D., Kitipornchai S., Chen W., Yang J.: Three-dimensional buckling and free vibration analyses of initially stressed functionally graded graphene reinforced composite cylindrical shell. Composite Structures, Vol. 189, 2018, pp. 560-569.
- [31] Loughlan J.: The shear buckling behaviour of thin composite plates with particular reference to the effects of bend-twist coupling. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, 2001, pp. 771-792.
- [32] Magnucka Blandzi E.: Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate. Thin-Walled Structures, Vol. 46, 2008, pp. 333-337.
- [33] Magnucka-Blandzi E.: Dynamic stability of a metal foam circular plate. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47, No. 2, 2009, pp. 421-433.
- [34] Magnucka-Blandzi E.: Non-linear analysis of dynamic stability of metal foam circular plate. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 48, No. 1, 2010, pp. 207-217.

- [35] Magnucki K., Lewiński J., Magnucka-Blandzi E., Kędzia P.: Bending, buckling and free vibration of a beam with unsymmetrically varying mechanical properties. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 56, No. 4, 2018, pp. 1163-1178.
- [36] Magnucki K., Magnucka-Blandzi E.: Generalization of a sandwich structure model: Analytical studies of bending and buckling problems of rectangular plates. *Composite Structures*, Vol. 255, 2021.
- [37] Magnucki K., Stawecki W. (red.): *Stateczność wybranych części konstrukcji*. Instytut Pojazdów Szynowych TABOR, Poznań, 2016.
- [38] Magnucki K., Witkowski D., Lewiński J.: Bending and free vibration of beams with symmetrically varying mechanical properties - Shear effect. *Mechanics of Advances Materials and Structures*, Vol. 27, No. 4, 2020, pp. 325-332.
- [39] Magnucki K., Witkowski D., Magnucka-Blandzi E.: Buckling and free vibrations of rectangular plates with symmetrically varying mechanical properties – Analytical and FEM studies. *Composite Structures*, Vol. 220, 2019, pp. 355-361.
- [40] Mahi A., Adda Bedia E. A., Tounsi A.: A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, 2015, pp. 2489-2508.
- [41] Miyoshi T., Itoh M., Akiyama S., Kitahara A.: Aluminum Foam „ALPORAS”: The Production Process, Properties and Applications. *Advanced Engineering Materials*, Vol. 2, No. 4, 2000, pp. 179-183.
- [42] Mojahedin A., Jabbari M., Khorshidvand A. R., Eslami M. R.: Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*, Vol. 99, 2016, pp. 83-90.
- [43] Nguyen TK., Sab K., Bonnet G.: First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures*, Vol. 83, 2008, pp. 25-36.
- [44] Pawlus D.: Dynamic response of three-layer annular plate with damaged composite facings. *Archive of Mechanical Engineering*, Vol. 65, No. 1, 2018, pp. 83-105.
- [45] Polska Norma PN-EN 12663-1+A1:2015-01. Kolejnictwo. Wymagania konstrukcyjno-wytrzymałościowe dotyczące pudeł kolejowych pojazdów szynowych. Część 1: Lokomotywy i tabor pasażerski (i metoda alternatywna dla wagonów towarowych).
- [46] Polska Norma PN-EN 15227:2020 (E). Kolejnictwo – Wymagania zderzeniowe dla pojazdów szynowych.
- [47] Ramaswami, S., “Towards Optimal Solution Techniques for Large Eigenproblems in Structural Mechanics,” Ph.D. Thesis, MIT, 1979.
- [48] Reddy J. N.: Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, 2000, pp. 663-684.
- [49] Sadowski T., Birsan M., Pietras D.: Multilayered and FGM structural elements under mechanical and thermal loads. Part I: Comparison of finite elements and analytical models. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, 2015, pp. 1180-1192.
- [50] Shen HS.: *Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [51] Shi G.: A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 44, 2007, pp. 4399-4417.

- [52] Smith B. H., Szyniszewski S., Hajjar J. F., Shafer B. W., Arwade S. R.: Steel foam for structures: A review of applications, manufacturing and material properties. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 71, 2012, pp. 1-10.
- [53] Smith B. H., Szyniszewski S., Hajjar J. F., Shafer B. W., Arwade S. R.: Characterization of Steel Foams for Structural Components. *Metals*, Vol. 2, No. 4, 2012, pp. 399-410.
- [54] Song M., Kitipornchai S., Yang J.: Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets. *Composite Structures*, Vol. 159, 2017, pp. 579-588.
- [55] Szyniszewski S. T., Smith B. H., Hajjar J. F., Shafer B. W., Arwade S. R.: The mechanical properties and modeling of a sintered hollow sphere steel foam. *Materials and Design*, Vol. 54, 2014, pp. 1083-1094.
- [56] Tarczewski R.: Certyfikacja pojazdów szynowych narzędziem do spełnienia wymagań bezpieczeństwa i interoperacyjności. *Pojazdy Szynowe*, Vol. 4, 2008, pp. 19-27.
- [57] Thai H.T., Vo T. P.: A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 37, 2013, pp. 3269-3281.
- [58] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: *Theory of plates and shells*. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., New York-Toronto-London, 1959.
- [59] Tomaszewski F., Tomaszewski S.: Analiza statystyczna wypadków kolejowych i drogowych oraz ich kosztów. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Transport*. Vol. 119, 2017, pp. 467-476.
- [60] Trajdos T.: *Matematyka dla inżynierów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1981.
- [61] Tuncer N., Arslan G., Maire E., Salvo L.: Influence of cell aspect ratio on architecture and compressive strength of titanium foams. *Materials Science and Engineering A*, Vol. 528, 2011, pp. 7368-7374.
- [62] Tuncer N., Arslan G.: Designing compressive properties of titanium foams. *Journal of Materials Science*, Vol. 44, 2009, pp. 1477-1484.
- [63] Walczak J.: *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*. T.2, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa-Kraków, 1973.
- [64] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.
- [65] Witkowski D.: Analiza wytrzymałości zderzeniowej dla trójczłonowego autobusu szynowego typu 228M. OR-10937, SBŁ - IPS „TABOR”, Poznań 2019. Opracowanie niepublikowane.
- [66] Witkowski D.: Obliczenia wytrzymałościowe pudła lokomotywy 111DE. OR-11316, SBŁ - IPS „TABOR”, Poznań 2017. Opracowanie niepublikowane.
- [67] Witkowski D.: Sprawozdanie z obliczeń wytrzymałości konstrukcji nośnej platformy towarowej 60'. OR-12558, SBŁ - IPS „TABOR”, Poznań 2021. Opracowanie niepublikowane.
- [68] Witkowski D.: Symulacyjne obliczenia zderzeniowe lokomotywy 111DE. OR-11329, SBŁ - IPS „TABOR”, Poznań 2017. Opracowanie niepublikowane.
- [69] Witkowski D.: Symulacyjne obliczenia zderzeniowe wagonu pasażerskiego zgodnie z wymaganiami normy EN 15227:2008+A1:2010. RP-1866, SBŁ - IPS „TABOR”, Poznań 2020. Opracowanie niepublikowane.
- [70] Wu D., Liu A., Huang Y., Huang Y., Pi Y., Gao W.: Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis. *Engineering Structures*, Vol. 165, 2018, pp. 287-301.

- [71] Wu H., Yang J., Kitipornchai S.: Parametric instability of thermo-mechanically loaded functionally graded graphene reinforced nanocomposite plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 135, 2018, pp. 431-440.
- [72] Xue Y., Jin G., Ma X., Chen H., Ye T., Chen M., Zhand Y.: Free vibration analysis of porous plates with porosity distributions in the thickness and in-plane directions using isogeometric approach. *Mechanical Sciences*, Vol. 152, 2019, pp. 346-362.
- [73] Yang J., Chen D., Kitipornchai S.: Buckling and free vibration analyses of functionally graded Graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method. *Composite Structures*, Vol. 193, 2018, pp. 281-294.
- [74] Zenkour A. M.: Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 30, No. 1, 2006, pp. 67-84.

SUMMARY**STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE WITH SYMMETRICALLY VARIABLE MECHANICAL PROPERTIES SUBJECTED TO DYNAMIC LOADING**

Dawid WITKOWSKI

The subject of this thesis is analytical and numerical testing of rectangular plate with mechanical and physical properties symmetrically variable along its thickness. The plate had hinged support on its edges and was loaded with compressive dynamic forces and pressure varying in time, distributed evenly over the surface. The adopted description of changes in material properties on a macroscopic scale is a generalization for homogeneous, functionally graded materials and three-layer sandwich-like structures with symmetrical properties with respect to the middle plane. The research was carried out for the family of functionally graded materials on the example of aluminum foam with variable porosity, along with a boundary transition to a homogeneous material.

A coherent, nonlinear hypothesis of a straight line deformation normal to the middle plane of the plate and taking into account the shear effect, was proposed on the basis of which the analytical model was developed. A system of differential equations of motion was formulated using the Hamilton's variational principle of least action. This system was reduced by the Galerkin method to a single nonlinear second-order differential equation. The energy of elastic deformation was described in accordance with the nonlinear relations between displacement and deformation and taking the Hooke's law into account. With regard to the formulated analytical model, numerical analyzes were performed using the finite element method in the ABAQUS 6.12-2 environment. Detailed numerical studies of the influence of imperfections on the static and dynamic stability of the slab were performed. The applied modeling methods were validated by comparing the results obtained with both methods.

The results of tests carried out for the basic structural element, which is a rectangular plate, were used to shape and optimize the structure of a rail vehicle body, on the example of a passenger car, in order to replace the classic frame construction with a half-shell structure. A series of numerical analyzes were carried out, with particular emphasis on the wagon floor and side wall as an example of the use of a plate made of a functionally graded materials. The obtained results were compared with selected criteria of the normative requirements in terms of the strength and passive safety of the body structure, thus assessing the operational practicality of the proposed design solution.