

**Politechnika Poznańska**  
**Wydział Inżynierii Lądowej i Transportu**  
**Instytut Inżynierii Lądowej**  
**Zakład Budowy Mostów i Dróg Kolejowych**



**ROZPRAWA DOKTORSKA**

*mgr inż. Katarzyna Mossor*

*Model przegubu plastycznego sprężonej belki betonowej i jego wpływ na  
szacowanie stanów granicznych konstrukcji*

Promotor: dr hab. inż. Arkadiusz Madaj, prof. PP

<b>Streszczenie .....</b>	<b>5</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>6</b>
<b>1. Wstęp .....</b>	<b>7</b>
1.1. Wprowadzenie do tematyki pracy .....	7
1.2. Przedmiot i cele pracy .....	8
1.3. Zawartość pracy.....	9
1.4. Podstawowe oznaczenia .....	10
<b>2. Przegub plastyczny.....</b>	<b>12</b>
2.1. Pojęcie przegubu plastycznego .....	12
2.2. Model przegubu plastycznego w konstrukcjach żelbetowych i sprężonych.....	15
2.2.1. Model przegubu plastycznego w konstrukcjach żelbetowych .....	15
2.2.2. Model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych .....	18
2.2.3. Model przegubu plastycznego wg <i>fib</i> oraz Eurokodu.....	25
2.2.4. Nośność na ścinanie w przegubie plastycznym .....	26
2.2.5. Wnioski dotyczące modelowania przegubu plastycznego .....	26
<b>3. Model obliczeniowy badanych belek .....</b>	<b>29</b>
3.1. Informacje wstępne.....	29
3.2. Modele materiałów .....	29
3.2.1. Stal zbrojeniowa i sprężająca.....	29
3.2.2. Związki konstytutywne zbrojonego betonu osiowo rozciąganego.....	31
3.2.3. Związki konstytutywne betonu ściskanego .....	33
3.3. Opis modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem wykorzystany w analizie numerycznej dla ściskania i rozciągania.....	37
3.4. Założenia przyjęte do analizy numerycznej.....	39
3.5. Weryfikacja modelu numerycznego.....	41
3.5.1. Belka swobodnie podparta .....	41
3.5.2. Belka ciągła .....	42
3.5.3. Wyniki i wnioski z analizy numerycznej .....	43
<b>4. Redystrybucja momentów zginających.....</b>	<b>47</b>
4.1. Definicja współczynnika redystrybucji momentów zginających .....	47
4.2. Dotychczasowe badania w zakresie redystrybucji momentów zginających.....	48
4.3. Redystrybucja momentów zginających w ujęciu normowym.....	49

<b>5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe.....</b>	<b>51</b>
5.1. Opis badanych belek.....	51
5.1.1. Belki ciągłe .....	51
5.1.2. Belki swobodnie podparte .....	52
5.1.3. Szczegóły konstrukcyjne .....	53
5.1.3.1. Zbrojenie .....	53
5.1.3.2. Połączenie części betonowej ze stalową .....	54
5.1.4. Materiały konstrukcyjne .....	56
5.1.4.1. Beton.....	56
5.1.4.2. Stal zbrojeniowa.....	59
5.1.4.3. Stal sprężająca.....	62
5.1.5. Sprężenie belek.....	64
5.1.6. Program badań .....	66
5.2. Opis stanowiska badawczego.....	67
5.3. Technika pomiarowa .....	73
5.4. Redystrybucja momentów zginających.....	84
5.4.1. Siła powodująca wyczerpanie SGN .....	84
5.4.2. Obraz zarysowania.....	89
5.4.3. Moment rysujący .....	90
5.4.4. Redystrybucja momentów zginających .....	92
5.4.5. Szacowanie położenia osi obojętnej.....	99
5.4.6. Szacowanie krzywizny przekroju .....	101
5.5. Analiza sztywności belek po zarysowaniu .....	104
5.5.1. Przyjęcie schematu sztywności zastępczej .....	104
5.5.2. Obliczanie sztywności przekroju zarysowanego wg wytycznych PCI .....	106
5.5.3. Analiza wyników sztywności przekroju badanych belek w fazie I oraz fazie II	108
<b>6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych.....</b>	<b>113</b>
6.1. Zależność moment- krzywizna w obszarze umownego przegubu plastycznego .....	113
6.2. Zastępcza sztywność umownego przegubu plastycznego .....	117
<b>7. Podsumowanie pracy .....</b>	<b>124</b>
7.1. Zakres zrealizowanych zadań .....	124
7.2. Wnioski .....	125
7.3. Kierunki dalszych badań .....	127

## Spis treści

---

Bibliografia.....	129
Załącznik nr 1 Ugięcia belek.....	136
Załącznik nr 2 Zarysowanie belek.....	141
Załącznik nr 3 Wyniki obliczeń dotyczące redystrybucji momentów zginających .....	153
Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych .....	158



## **Model przegubu plastycznego sprężonej belki betonowej i jego wpływ na szacowanie stanów granicznych konstrukcji**

### **Streszczenie**

Analiza konstrukcji w zakresie plastycznym zaczęła zyskiwać na powszechności już w połowie XX wieku. W ujęciu projektowym opiera się na wykorzystaniu idei przegubu plastycznego. Powstanie przegubów plastycznych wpływa na redystrybucję sił wewnętrznych, podobnie jak zmiany sztywności elementu. Zjawiska związane z wytwarzaniem się przegubów plastycznych w konstrukcjach żelbetowych są dobrze poznane i opisane. W przypadku konstrukcji sprężonych problem ten, moim zdaniem, wymaga prowadzenia dalszych badań w tym zakresie, szczególnie w kontekście coraz częstszego wykorzystywania analizy konstrukcji w zakresie pozasprężystym.

Przedmiotem pracy jest opis tworzenia się przegubów plastycznych i ich charakterystyka w betonowych konstrukcjach sprężonych. Celem pracy jest poszukiwanie opisu modelu przegubu plastycznego sprężonej belki betonowej i wpływu tego modelu na szacowanie stanów granicznych konstrukcji. Badania i analizy prowadzono z rozróżnieniem na elementy sprężone ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności. W pracy w szerokim zakresie podjęto temat zmian sztywności zachodzących w betonowej konstrukcji sprężonej. Do badań wykorzystano nietypowe belki o konstrukcji hybrydowej, składające się z części betonowej sprężonej oraz części stalowej. Punktem odniesienia do analizy zmian sztywności zachodzących w części betonowej, była część stalowa o niezmiennej sztywności. W pracy przedstawiono propozycję zależności moment-krzywizna w przegubie plastycznym w belce sprężonej oraz propozycję wyznaczania parametrów zastępczej sztywności przegubu plastycznego w belce sprężonej. Określono także współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności. Zależności te mogą zostać wykorzystane do projektowania w stanie granicznym nośności. Ponadto oszacowano sztywność belek sprężonych po zarysowaniu oraz dokonano weryfikacji założeń dotyczących szacowania sztywności w fazie II w konstrukcjach sprężonych ciągniami z przyczepnością oraz bez przyczepności. Opracowano także model numeryczny badanych belek, którego zgodność została potwierdzona wynikami badań empirycznych, zatem może stanowić on podstawę do dalszych analiz.

**Model of a plastic hinge in a prestressed concrete beam and its impact on the estimation of the structure limit states**

**Abstract**

Plastic analysis of structures began to gain popularity in the middle of the 20th century. In terms of design, it is based on the use of the idea of a plastic hinge. The formation of plastic hinges redistributes internal forces, as do changes in the stiffness of the element. The phenomena related to the appearance of plastic hinges in reinforced concrete structures are well known and described. In the case of prestressed structures, this problem, in my opinion, requires further research in this area, especially in the context of more and more frequent use of structure analysis in the post-elastic field.

The subject of this thesis is a description of the formation of plastic hinges and their characteristics in prestressed concrete structures. The aim of the work is to search for a description of the plastic hinge model in a prestressed concrete beam and the impact of this model on the estimation of the structure limit states. The tests and analyses were carried out with a distinction between elements prestressed by bonded and unbonded tendons. In this thesis, the subject of stiffness changes in a concrete prestressed structure was discussed in a wide range. Untypical beams with a hybrid structure, consisting of a prestressed concrete part and a steel part, were used for the tests. A steel part with constant stiffness was the reference point for the analysis of stiffness changes taking place in a concrete part. The thesis presents a proposal of the moment-curvature relationship in a plastic hinge in a prestressed beam and a proposal to determine the parameters of the equivalent stiffness of a plastic hinge in a prestressed concrete beam. The coefficient of redistribution of bending moments in beams prestressed by tendons with and without bond was also determined. These relationships can be used for the ultimate limit state design. Moreover, the stiffness of the prestressed beams after cracking was estimated and the study verified assumptions concerning the estimation of the stiffness in phase II in structures prestressed by tendons with and without bond. A numerical model of the tested beams was also developed, and its compliance was confirmed by the results of empirical tests, so the model may be basis for further analyses.

### 1. Wstęp

#### 1.1. Wprowadzenie do tematyki pracy

Analiza konstrukcji w zakresie plastycznym zaczęła zyskiwać na powszechności już w połowie XX wieku. Przykładem tego może być podręcznik z 1959r. [40], którego autor podkreśla zalety analizy plastycznej. Daje ona możliwość uwzględnienia w obliczeniach ciągliwości materiałów, redystrybucji sił wewnętrznych, czy rozkładów naprężeń bardziej zbliżonych do rzeczywistości niż w przypadku analizy ograniczonej tylko do zakresu sprężystego. Uwzględnienie plastycznej rezerwy pozwala na bardziej ekonomiczne projektowanie. Mimo to, analiza konstrukcji w zakresie pozasprężystym jest w procedurach projektowania stosowana znacznie rzadziej niż klasyczne obliczenia w zakresie sprężystym. Przed 1999r. w polskich normach dotyczących konstrukcji betonowych znajdował się nakaz prowadzenia obliczeń „przy założeniu sprężystej pracy konstrukcji” [52, 92]. Obecnie natomiast na podstawie zasad opisanych w normie Eurokod 2 [88, 89] można stosować do projektowania metody nieliniowe i metody oparte na teorii plastyczności [93].

Analiza plastyczna w ujęciu projektowym opiera się na wykorzystaniu idei przegubu plastycznego. Powstawanie przegubów plastycznych wpływa na redystrybucję sił wewnętrznych, podobnie jak zmiany sztywności elementu. Zjawiska związane z wytwarzaniem się przegubów plastycznych w konstrukcjach żelbetowych są dobrze poznane i opisane. W przypadku konstrukcji sprężonych problem ten, moim zdaniem, nadal nie został w pełni wyjaśniony i wymaga prowadzenia dalszych badań w tym zakresie, szczególnie w kontekście coraz częstszego wykorzystywania analizy konstrukcji w zakresie pozasprężystym.

Przegub plastyczny w belce żelbetowej najczęściej definiowany jest jako obszar, w którym zbrojenie uległo uplastycznieniu lub zadane odkształcenia wykraczają poza obszar odkształceń sprężystych. Często spotyka się stwierdzenie, że analogiczny opis może być przyjmowany w odniesieniu do konstrukcji sprężonych. Jakkolwiek przegub plastyczny idealizowany jest w formie punktu, to w rzeczywistości obszar uplastyczniony występuje na pewnym odcinku, którego długość określana jest jako umowna długość przegubu plastycznego. Parametry opisujące umowny przegub plastyczny nadal nie zostały jednoznacznie opisane, a wielu badaczy proponuje wzory empiryczne formułowane na podstawie własnych badań, np. w pracach [6, 23, 49, 75, 76, 95, 99]. Problematiczne pozostaje także określenie umownej granicy plastyczności stali sprężającej, co w zasadniczy sposób wpływa na plastyczną analizę konstrukcji sprężonych.

Przywołaną tematyką zajmowało się wielu autorów, m.in. [8, 10, 12, 28, 31, 40, 54, 62, 67, 78]. W tej pracy, poza publikacjami naukowymi, odniesiono się także do zapisów normowych. Wykorzystano normę Eurokod 2 [88, 89] z komentarzami do tej normy [39, 51, 91, 101] oraz powiązаныmi z nią publikacjami [69, 70, 71].

### 1.2. Przedmiot i cele pracy

Przedmiotem pracy jest opis tworzenia się przegubów plastycznych w betonowych konstrukcjach sprężonych. Celem pracy jest poszukiwanie opisu modelu przegubu plastycznego sprężonej belki betonowej i wpływu tego opisu na szacowanie stanów granicznych konstrukcji. Badania i analizy prowadzono z rozróżnieniem na elementy sprężone ciągnami z przyczepnością i bez przyczepności. W pracy w szerokim zakresie podjęto także temat zmian sztywności zachodzących w betonowej konstrukcji sprężonej. Do badań wykorzystano nietypowe belki o konstrukcji hybrydowej, składające się z części betonowej sprężonej oraz części stalowej. Oryginalny własny pomysł na konstrukcję belek do badań nie jest spotykany w omówionej w pracy literaturze. Zastosowanie konstrukcji hybrydowej zapewniło możliwość dogodnej interpretacji uzyskanych wyników. Punktem odniesienia do analizy zmian sztywności zachodzących w części betonowej sprężonej była część stalowa o niezmienniej sztywności, co pozwalało na uniknięcie niejednoznaczności wynikających z rysowania się elementów betonowych. Zadanie związane z analizą zmian sztywności elementu dotyczyło określenia stopnia redystrybucji momentów zginających. Ponadto podjęto próbę oszacowania sztywności belek po zarysowaniu oraz dokonano weryfikacji założeń dotyczących szacowania sztywności w fazie II w konstrukcjach sprężonych ciągnami z przyczepnością oraz bez przyczepności. Kolejnym celem pracy jest stworzenie modelu numerycznego badanych belek, którego poprawność zostanie potwierdzona wynikami badań. Po potwierdzeniu zgodności modelu z wynikami badań, może stanowić on podstawę do dalszych analiz numerycznych.

#### Postawiono następujące cele i zadania:

- podsumowanie i pogłębienie dotychczasowej wiedzy na temat przegubów plastycznych w betonowych konstrukcjach sprężonych,
- zbadanie różnic w pracy konstrukcji sprężonych ciągnami z przyczepnością i bez przyczepności na podstawie parametrów takich jak: wartości obciążenia powodującego wyczerpanie stanu granicznego nośności (SGN), ugięcia konstrukcji, obraz zarysowania czy krzywizny przekrojów,

- określenie stopnia redystrybucji momentów zginających w belkach ciągłych,
- oszacowanie sztywności po zarysowaniu przekroju sprężonego, ze szczególnym uwzględnieniem różnic między konstrukcją sprężoną ciągłami z przyczepnością i bez przyczepności,
- sformułowanie zależności moment – krzywizna do opisu przegubu plastycznego,
- opisanie parametrów pozwalających na modelowanie umownego przegubu plastycznego,
- stworzenie modelu numerycznego badanych belek oraz jego weryfikacja na podstawie badań empirycznych,
- opracowanie modeli do praktycznego zastosowania w projektowaniu lub sprawdzaniu nośności konstrukcji sprężonych.

### 1.3. Zawartość pracy

W rozdziale 2 dokonano przeglądu literatury z zakresu przegubów plastycznych w konstrukcjach żelbetowych i sprężonych. Uzasadniono wybór przyjęcia jednego z opisanych modeli jako punktu wyjścia do dalszych analiz w pracy.

W rozdziale 3 opisano analizę numeryczną, a także przyjęte założenia dotyczące modelowania materiałów konstrukcyjnych.

W rozdziale 4 omówiono zagadnienie redystrybucji momentów zginających w ustrojach statycznie niewyznaczalnych oraz dotychczasowe badania przeprowadzone w tym zakresie.

W rozdziale 5 opisano przeprowadzone badania empiryczne. Scharakteryzowano badane belki, opisano stanowisko badawcze, a także wykorzystane techniki pomiarowe. Opisano zarysowanie belek, dokonano analizy: redystrybucji momentów zginających w belkach ciągłych, sztywności po zarysowaniu oraz różnic w pracy belek sprężonych ciągłami z przyczepnością oraz bez przyczepności.

W rozdziale 6 zaproponowano model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych na podstawie wyników przeprowadzonych badań.

W rozdziale 7 przedstawiono wnioski oraz zaproponowano kierunki dalszych badań.

Praca zawiera ponadto 4 załączniki ze szczegółowymi wynikami badań dotyczącymi: ugięć, zarysowania, redystrybucji momentów zginających oraz odkształceń. Na dołączonej płycie CD znajduje się dokumentacja fotograficzna przeprowadzonych badań.

#### 1.4. Podstawowe oznaczenia

W pracy stosowane są następujące podstawowe symbole:

- **duże litery łacińskie**

$A$  – pole przekroju

$A_c$  – pole przekroju betonu

$A_p$  – pole przekroju cięgna sprężającego

$A_s$  – pole przekroju zbrojenia

$E$  – moduł sprężystości

$I$  – moment bezwładności przekroju

$I_{cr}$  – moment bezwładności przekroju po zarysowaniu

$I_e$  – efektywny moment bezwładności

$I_g$  – moment bezwładności przekroju brutto

$M$  – moment zginający

$M_r$  – moment rysujący

$M_u$  – moment zginający powodujący wyczerpanie nośności

$P$  – siła sprężająca

- **małe litery łacińskie**

$d$  – wysokość użyteczna przekroju

$f_c$  – wytrzymałość betonu na ściskanie

$f_d$  – wytrzymałość stali zbrojeniowej na rozciąganie

$f_p$  – wytrzymałość stali sprężającej na rozciąganie

$f_{p0,1}$  – granica plastyczności stali sprężającej

$f_y$  – granica plastyczności zbrojenia

$h$  – wysokość przekroju

$l_p$  – umowna długość przegubu plastycznego

$\frac{1}{r}$  – krzywizna

$x$  – wysokość strefy ściskanej

- **małe litery greckie**

$\delta$  – współczynnik redystrybucji momentów zginających

$\varepsilon$  – odkształcenie

$\sigma$  – naprężenie

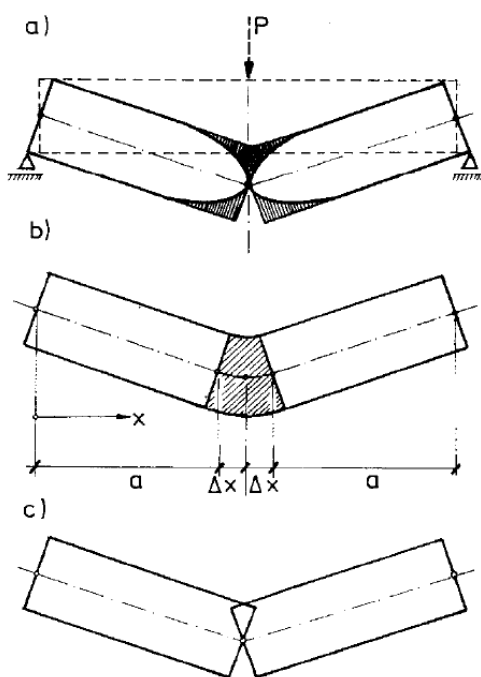
$\phi$  - krzywizna

## 2. Przegub plastyczny

### 2.1. Pojęcie przegubu plastycznego

Przegub plastyczny jest punktem na osi podłużnej elementu, w którym wartość momentu zginającego jest równa plastycznemu momentowi, a ponadto w tym punkcie pochodna osi odkształconej nie jest funkcją ciągłą [55]. Wg [32] przegub plastyczny jest uogólnieniem pojęcia przegubu sprężystego i przenosi stały moment zginający równy momentowi plastycznemu, z zachowaniem możliwości obrotu.

Rysunek 2.1 przedstawia zachowanie pod obciążeniem belki wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego (rys. 2.1a – obrót sąsiednich części pręta względem osi obojętnej rozważanego przekroju), belki wykonanej z materiału sztywno-plastycznego (rys. 2.1b – występuje duża koncentracja odkształceń na małym obszarze) oraz uproszczony mechanizm zniszczenia belki (rys. 2.1c). W przekroju krytycznym powstał pewnego rodzaju przegub, zwany przegubem plastycznym.



Rys. 2.1 Różnice w zachowaniu belki wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego i sztywno-plastycznego [32]

- a) deformacja belki wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego
- b) deformacja belki wykonanej z materiału sztywno-plastycznego
- c) uproszczony mechanizm zniszczenia belki

Obszar uplastyczniony znajduje się na pewnym odcinku, zwanym umowną długością przegubu plastycznego  $l_p$ , która może być wyznaczona jako [49]:

$$l_p = \frac{1}{\phi_u - \phi_y} \int_0^{l_y} [\phi(x) - \phi_y] dx \quad (2.1),$$



## 2. Przegub plastyczny

a obrót w przegubie plastycznym  $\theta_p$  można opisać wzorem [49]:

$$\theta_p = \int_0^{l_p} [\phi(x) - \phi_y] dx \quad (2.2),$$

zatem:

$$\theta_p = (\phi_u - \phi_y) l_p = \phi_p l_p \quad (2.3),$$

gdzie:

$\phi_y$  – krzywizna przy uplastycznieniu,

$\phi_u$  – krzywizna graniczna,

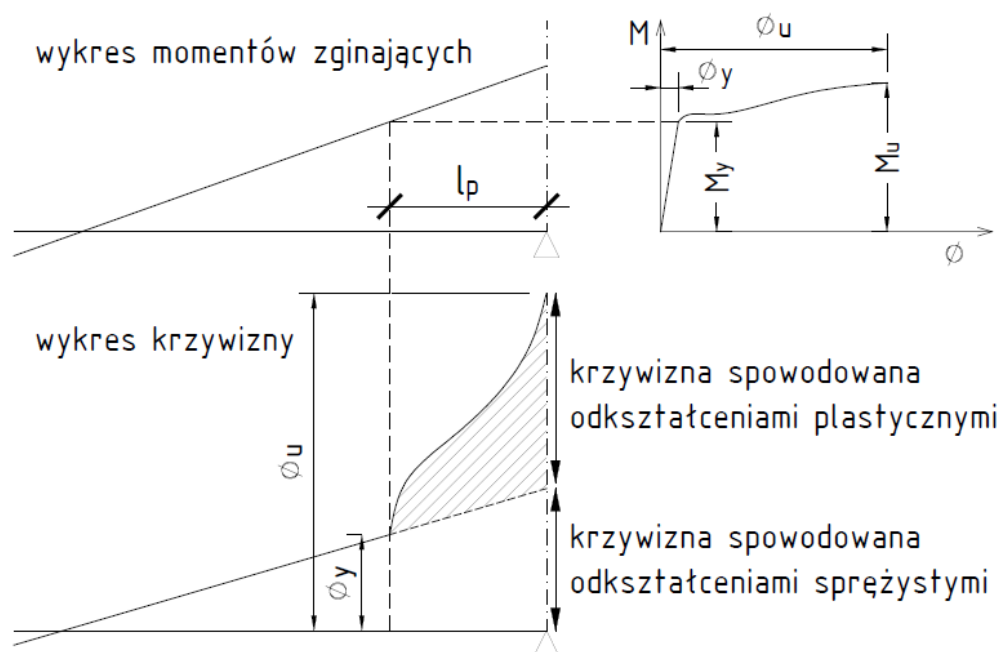
$\phi_p$  – krzywizna plastyczna na umownej długości przegubu plastycznego,

$l_p$  – długość odcinka, na którym wartość momentu zginającego przekracza wartość  $M_y$ ,

$M_y$  – moment zginający powodujący uplastycznienie,

$M_u$  – moment zginający powodujący wyczerpanie SGN.

Wielkości występujące we wzorach (2.1)÷(2.3) zilustrowano na rys. 2.2 na przykładowym przekroju nad podporą pośrednią belki ciągłej na podstawie [29, 76]. W obszarze, w którym wartość momentu zginającego przekracza wartość momentu powodującego uplastycznienie ( $M > M_y$ ) dochodzi do nieliniowego rozkładu krzywizny. Odcinek ten ma długość umownego przegubu plastycznego  $l_p$ .



Rys. 2.2 Wykres momentów zginających i krzywizny w przekroju uplastycznionym nad podporą pośrednią belki ciągłej

Na rys. 2.3 przedstawiono rozkład naprężeń i odkształceń na długości umownego przegubu plastycznego. Przyjęto następujące oznaczenia:

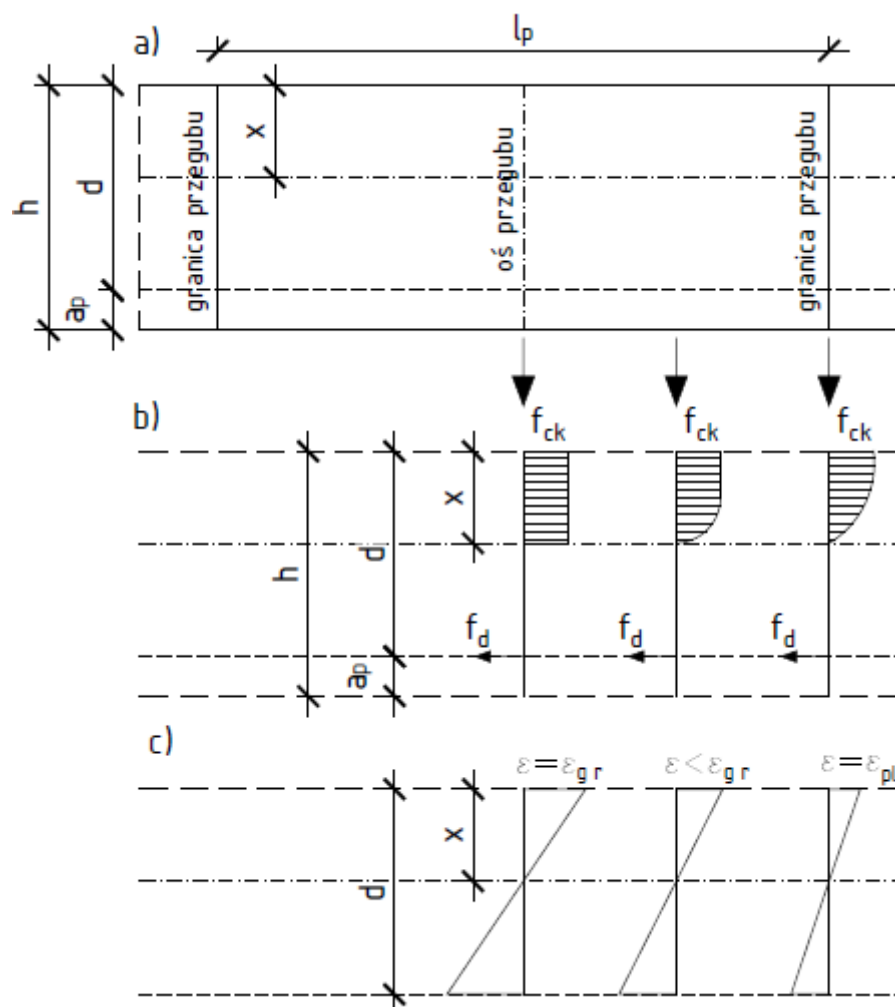
$f_{ck}$  – wytrzymałość betonu na ściskanie,

## 2. Przegub plastyczny

$f_d$  – wytrzymałość stali sprężającej na rozciąganie,

$\varepsilon_{gr}$  – graniczne odkształcenia w betonie,

$\varepsilon_{pl}$  – plastyczne odkształcenia w betonie.



Rys. 2.3 Rozkład naprężeń i odkształceń na długości  $l_p$  umownego przegubu plastycznego

- a) zakres umownego przegubu
- b) rozkład naprężeń na długości umownego przegubu
- c) rozkład odkształceń na długości umownego przegubu

Obrót w przegubie plastycznym  $\theta_p$  może być także określany wg [14, 15] jako:

$$\theta_p = \int_0^{l_p} \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sy}}{d-x} dx, \quad (2.4)$$

gdzie:

$\varepsilon_s$  – odkształcenie stali sprężającej pod aktualnym obciążeniem,

$\varepsilon_{sy}$  – odkształcenie stali w momencie uplastycznienia.

Inne podejście do wyznaczania obrotu w przegubie plastycznym proponują natomiast autorzy [64]. Do wyznaczania obrotu w zakresie plastycznym wykorzystywany jest model

kratownicowy, a do analizy wprowadzane są parametry takie jak m.in. wytrzymałość betonu, ciągliwość stali, stopień zbrojenia na ścinanie oraz wartość siły ścinającej.

### 2.2. Model przegubu plastycznego w konstrukcjach żelbetowych i sprężonych

#### 2.2.1. Model przegubu plastycznego w konstrukcjach żelbetowych

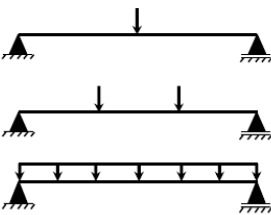
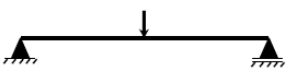
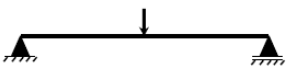
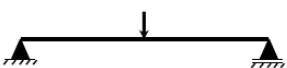
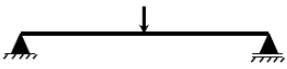
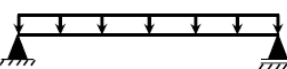
Przegub plastyczny w belce żelbetowej może być definiowany jako obszar, w którym zbrojenie uległo uplastycznieniu [11]. Wg [97] przegubem plastycznym jest każdy przekrój żelbetowy, w którym zadane odkształcenia wykraczają poza obszar odkształceń sprężystych. Przy osiągnięciu SGN zakres tego obszaru uznawany jest za umowną długość przegubu plastycznego. Obrót w przegubie plastycznym w zginanych elementach betonowych zbrojonych jest ograniczony przez maksymalne wartości odkształceń w ściskanych włóknach betonu oraz w zbrojeniu rozciągającym. Wytworzenie przegubów plastycznych w belce może decydować m.in. o jej nośności granicznej (w przypadku zmiany ustroju w mechanizm) i decyduje o deformacjach. Ze względu na brak jednoznacznego opisu związków konstytutywnych betonu oraz imperfekcje geometryczne występujące w konstrukcji, obliczeniowa długość umownego przegubu plastycznego może być jedynie szacowana.

Można wyodrębnić kilka przypadków powstawania przegubów plastycznych w konstrukcjach żelbetowych. Uplastycznienie może rozpocząć się od strony zbrojenia rozciąganego lub betonu ściskanego, względnie równocześnie w stali rozciąganej i betonie ściskanym. Najczęściej spotykane są przeguby z uplastycznionym zbrojeniem rozciągającym. Są to przeguby tworzące się w zarysowanych, przeciętnie zbrojonych przekrojach, mających jednocześnie dużą zdolność do obrotu. Przy dostatecznie odkształcalnej stali zbrojeniowej o granicznej krzywiźnie przekroju decyduje zawsze graniczne odkształcenie betonu w skrajnym włóknie strefy ściskanej wg [24]. Jeżeli jednak jako zbrojenie zostanie zastosowana stal o niskiej odkształcalności, o granicznej krzywiźnie może decydować graniczna wydłużalność zbrojenia rozciąganego, co przy określonych proporcjach przekroju może wiązać się z wyraźnym obniżeniem możliwości odkształceń belki.

W tab. 2.1 zestawiono zależności opisujące graniczne odkształcenia w betonie oraz kąty obrotu w przegubie plastycznym. W tab. 2.2 zestawiono wzory empiryczne służące do wyznaczania umownej długości przegubu plastycznego. Inne wzory do wyznaczania obrotu w przegubie plastycznym w belce żelbetowej podają także [43, 46], uzależniając obrót m.in. od stopnia redystrybucji momentów zginających.

## 2. Przegub plastyczny

Tab. 2.1 Graniczne wartości odkształceń w betonie  $\varepsilon_{cu}$  oraz kąty obrotu w przegubie plastycznym  $\theta_p$  [49]

Lp.	Badacz	Typ obciążenia	Graniczne wartości odkształceń w betonie $\varepsilon_{cu}$ oraz kąt obrotu w przegubie plastycznym $\theta_p$
1.	Kheyroddin, Naderpour [49]		$\theta_p = \int_0^{l_y} [\phi(x) - \phi_y] dx$
2.	Baker, Amarakone [6]		$\theta_p = 0,8(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{cy})k_1k_3\left(\frac{z}{d}\right)$ $k_1k_3 = 0,5$ $\varepsilon_{cu} = 0,0015 \left[ 1 + 150\rho_s + (0,7 - 10\rho_s)\frac{d}{c} \right]$
3.	Mattock [76]		$\theta_p = \left( \phi_u - \phi_y \frac{M_u}{M_y} \right) \left( 1 + \left( 1,14 \sqrt{\frac{z}{d}} - 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{\omega - \omega'}{\omega_b} \right) \sqrt{\frac{d}{16,2}} \right) \right) \frac{d}{2}$ $\varepsilon_{cu} = 0,003 + \frac{0,5}{z}$
4.	Corley [23]		$\theta_p = \left( \phi_u - \phi_y \frac{M_u}{M_y} \right) \left( 1 + \frac{0,4 z}{\sqrt{d} d} \right) \left( \frac{d}{2} \right)$ $\varepsilon_{cu} = 0,003 + 0,02 \frac{b}{z} + \left( \frac{\rho_s f_y}{20} \right)^2$ <i>uwaga: <math>f_y</math> [ksi]</i>
5.	Riva, Cohn [95]		$\text{dla } \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} \leq 7,0 \theta_p = \left( 0,39 - \frac{7,0}{800\omega} \right) \left( \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} \right)^{-0,9} \phi_{pu} z$ $\text{dla } \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} > 7,0 \theta_p = \left( \frac{5,4}{100} \right) \phi_{pu} z$
			$\text{dla } \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} \leq 7,0 \theta_p = \left( 0,58 - \frac{3,0}{800\omega} \right) \left( \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} \right)^{-0,9} \phi_{pu} z$ $\text{dla } \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} > 7,0 \theta_p = \left( \frac{5,0}{100} + \frac{6,5}{1000} \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} \right) \phi_{pu} z$

$\omega$  – parametr związany ze stopniem zbrojenia rozciąganego, patrz [76],

$\rho_s$  – współczynnik związany z przyczepnością, patrz [23],

$z$  – odległość od przekroju w którym występuje maksymalny moment zginający do sąsiadującego z tym przekrojem miejsca zerowego momentów (ang. *point of contraflexure*).

## 2. Przegub plastyczny

Tab. 2.2 Wzory empiryczne do obliczania długości umownego przegubu plastycznego [23, 75, 90, 99, 110]

Lp.	Badacz	Wzór na długość przegubu plastycznego $l_p$
1.	Baker (1956)	$k_1 k_2 k_3 (z/d)^{1/4} d$ (żelbetowe belki i słupy)
2.	Sawyer (1964)	$0,25d + 0,075z$
3.	Corley (1966)	$0,5d + 0,2\sqrt{d(z/d)}$ (belki żelbetowe)
4.	Mattock (1967)	$0,5d + 0,05z$ (belki żelbetowe)
5.	Priestley, Park (1987)	$0,08z + 6d_b$ (słupy żelbetowe)
6.	Paulay, Priestley (1992)	$0,08z + 0,022d_b f_y$ (żelbetowe belki i słupy)
7.	Sheikh, Houry (1993)	$1,0h$ (słupy pod obciążeniem osiowym)
8.	Coleman, Spacone (2001)	$G_f^c / [0,6f_c(\varepsilon_{20} - \varepsilon_c + 0,8f_c/E_c)]$
9.	Panagiotakos, Fardis (2001)	$0,18z + 0,021d_b f_y$ (żelbetowe belki i słupy)
10.	Bae, Bayrak (2008)	$\frac{l_p}{h} = [0,3(p/p_0) + 3(A_s/A_g) - 1](z/h) + 0,25 \geq 0,25$ (słupy)

$k_1$  – współczynnik zależny od rodzaju stali [25],

$k_2$  – współczynnik zależny od sił podłużnych w elemencie [25],

$k_3$  – współczynnik zależny od wytrzymałości betonu na ściskanie [25],

$A_g$  – pole przekroju betonowego brutto,

$A_s$  – pole zbrojenia rozciąganego,

$d$  – wysokość użyteczna przekroju,

$d_b$  – średnica zbrojenia podłużnego,

$G_f^c$  – energia pęknięcia betonu ściskanego,

$h$  – wysokość przekroju,

$p$  – przyłożona siła osiowa,

$p_0 = 0,85f_c(A_g - A_s) + f_y A_s$  – nominalna nośność na obciążenie osiowe wg ACI [1],

$\varepsilon_c$  – maksymalne naprężenie ściskające,

$\varepsilon_{20}$  – odkształcenie odpowiadające 20% wytrzymałości betonu na ściskanie.

W oparciu o przedstawiony przegląd wyników badań można stwierdzić, że na umowną długość przegubu plastycznego wpływ ma wiele czynników, takich jak: sposób obciążenia elementu, rozkład momentów zginających i sił ścinających na długości elementu, kształt przekroju poprzecznego, związki konstytutywne opisujące materiały, właściwości reologiczne materiałów konstrukcyjnych oraz układ rys na długości belki. Badacze proponują różne wzory

empiryczne w zależności od metodologii badań, stąd brak jednoznacznego określenia wzoru pozwalającego na wyznaczenie obliczeniowej długości umownego przegubu plastycznego.

### 2.2.2. Model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

W celu omówienia modelu przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych, przydatne jest wprowadzenie pojęć ciągłości oraz zdolności do obrotu.

**Ciągłość** to zdolność materiału, przekroju lub konstrukcji do odkształceń plastycznych bez utraty nośności [9, 15, 20, 22, 56, 82, 86]. Ciągłość jest miarą zdolności do absorpcji energii. Dobrą miarą ciągłości przekroju jest jego krzywizna, będąca drugą pochodną ugięcia. Najlepszy sposób określania ciągłości opiera się na porównaniu deformacji granicznej do deformacji plastycznej. Deformacja przekroju lub elementu może być reprezentowana przez odkształcenia, ugięcia oraz obrót [57, 82]:

$$\mu_{\Delta} = \Delta_u / \Delta_y \quad (2.5),$$

$$\mu_{\theta} = \theta_u / \theta_y \quad (2.6),$$

$$\mu_{\phi} = \phi_u / \phi_y \quad (2.7),$$

gdzie:

$\Delta_u, \theta_u, \phi_u$  – odkształcenie (ugięcie), obrót i krzywizna przy obciążeniu granicznym,

$\Delta_y, \theta_y, \phi_y$  – odkształcenie (ugięcie), obrót i krzywizna w momencie uplastycznienia zbrojenia,

$\mu_{\Delta}, \mu_{\theta}, \mu_{\phi}$  – współczynniki ciągłości odpowiednio na podstawie ugięcia, obrotu i krzywizny.

Współczynnik ciągłości definiowany na podstawie krzywizny zależy od geometrii przekroju oraz od właściwości materiałów konstrukcyjnych. Istnieje związek między współczynnikami ciągłości wyznaczonymi na podstawie ugięcia, obrotu i krzywizny (wzory 2.5÷2.7). Pod obciążeniem monotonicznym współczynnik ciągłości wyznaczany na podstawie ugięcia i obrotu może być szacowany w oparciu o ciągłość wyznaczoną z krzywizny, pod warunkiem, że obciążenie i geometria elementu są znane. Krzywizna przekroju w chwili osiągnięcia SGN jest definiowana w ten sam sposób dla elementów żelbetowych i sprężonych. Natomiast krzywizna w chwili uplastycznienia nie jest tak samo definiowana dla elementów żelbetowych i sprężonych. W elementach żelbetowych krzywizna w chwili uplastycznienia odnosi się do chwili uplastycznienia stali zbrojeniowej, a w elementach sprężonych do uplastycznienia stali sprężającej. Zasadniczym problemem jest zatem zdefiniowanie uplastycznienia przekroju. W [82] podano różne podejścia do tego problemu:

## 2. Przegub plastyczny

- określenie w oparciu o ugięcie przy założeniu liniowo sprężystej pracy materiału aż do osiągnięcia teoretycznej wytrzymałości granicznej (rys. 2.4a),
- określenie dla granicznego momentu przenieszonego przez przekrój ( $M_{Rd}$ ) przy maksymalnych odkształceniach betonu wynoszących  $\varepsilon_c = 0,003$  (rys. 2.4b),
- określenie na podstawie wykresu moment – krzywizna (rys. 2.4c).

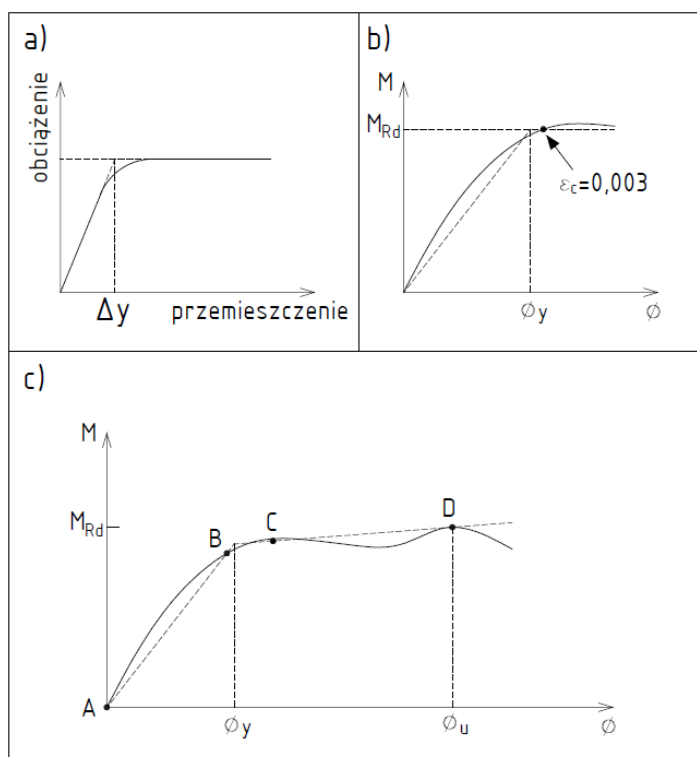
Ostatnie z wymienionych podejść, tj. zdefiniowanie uplastycznienia przekroju w oparciu o wykres moment- krzywizna (rys. 2.4c), wykorzystuje liniową aproksymację rzeczywistego wykresu. Pierwsza prosta (A-B) to przedłużenie liniowej aproksymacji początkowej części wykresu moment – krzywizna. Druga prosta (C-D) to przedłużenie liniowej aproksymacji końcowej części wykresu moment – krzywizna. Na rys. 2.4c krzywizna przy uplastycznieniu została określona na przecięciu tych dwóch prostych (linie przerywane). Natomiast linią ciągłą pokazano rzeczywisty wykres moment – krzywizna. Na wykresie oznaczono charakterystyczne punkty:

A – początek wykresu moment – krzywizna,

B – koniec zakresu liniowej pracy stali sprężającej,

C – koniec krzywoliniowego odcinka zależności  $\sigma - \varepsilon$  stali sprężającej,

D – osiągnięcie SGN.



Rys. 2.4 Definiowanie uplastycznienia do określania ciągliwości [82]

## 2. Przegub plastyczny

**Zdolność do obrotu** w przegubie plastycznym jest bezpośrednio związana z właściwościami materiałów, z których wykonany jest przekrój. Może być ona charakteryzowana przez współczynnik obrotu plastycznego  $R$  [68]. Jego miarą jest przyrost kąta obrotu od deformacji odpowiadającej powstaniu przegubu plastycznego do deformacji odpowiadającej zniszczeniu przekroju (rys. 2.5):

$$R = \frac{\varphi_{rot} - \varphi_{pl}}{\varphi_{pl}} \quad (2.8),$$

gdzie:

$\varphi_{rot}$  – graniczny kąt obrotu, odpowiadający zniszczeniu przekroju,

$\varphi_{pl}$  – kąt obrotu odpowiadający powstaniu przegubu plastycznego.

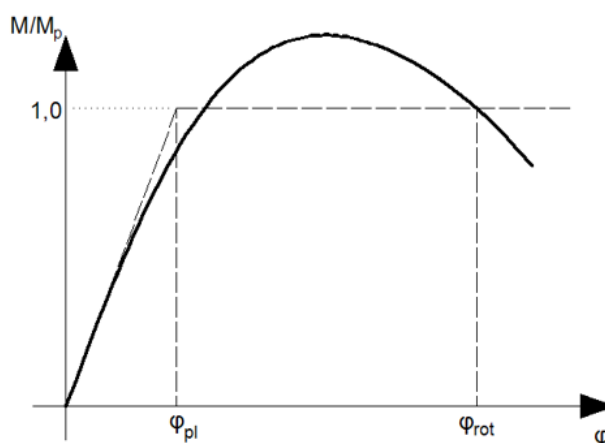
W przypadku obliczania nośności konstrukcji na podstawie teorii przegubów plastycznych musi być zapewniona większa zdolność przekroju do obrotu w przegubach plastycznych, niż wymagana do pełnej redystrybucji momentów zginających [68, 72]:

$$R_{dop} \geq R_{wym} \quad (2.9),$$

gdzie:

$R_{dop}$  – współczynnik określający zdolność do obrotu,

$R_{wym}$  – współczynnik określający zdolność do obrotu ze względu na osiągnięcie pełnej redystrybucji momentów zginających.



Rys. 2.5 Graficzna ilustracja dopuszczalnego obrotu w przegubie plastycznym [68]

Zdolność do obrotu jest bezpośrednio związana z ciągliwością materiału i zależy od wielu czynników, do których należą m.in.:

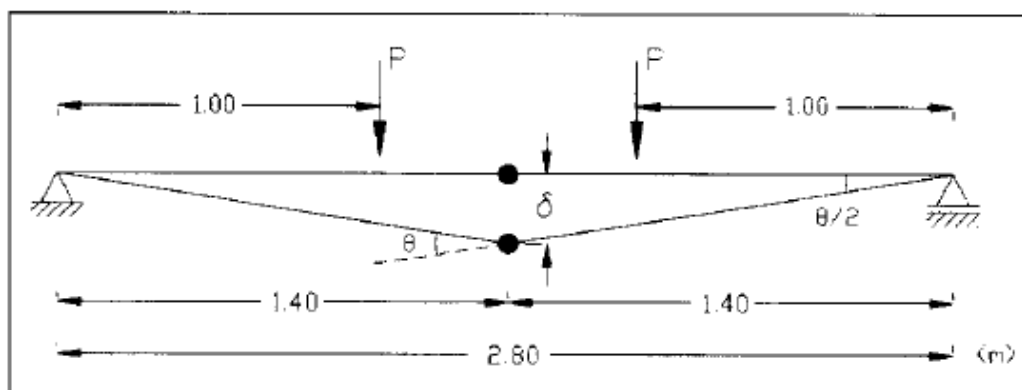
- geometria przekroju,
- cechy materiałowe,
- stopień zbrojenia,



## 2. Przegub plastyczny

- zarysowanie przekroju,
- przyjęta zależność naprężenie – odkształcenie dla stali i betonu,
- charakterystyka przyczepności stali i betonu,
- warunki podparcia elementu,
- rodzaj, wielkość i sposób przyłożenia obciążeń.

Badacze [63] przeprowadzili doświadczenia mające na celu weryfikację zdolności do obrotu w przegubach plastycznych belek wykonanych z betonów o wysokiej wytrzymałości. Przeprowadzono próby obciążania do zniszczenia 9 belek o długości 3,0m (rys. 2.6). Były one poddane czystemu zginaniu. Badano je w zależności od wytrzymałości betonu (przy podziale na dwie grupy o średnich wytrzymałościach na ściskanie wynoszących odpowiednio 64,0MPa i 83,5MPa) oraz stopnia zbrojenia.



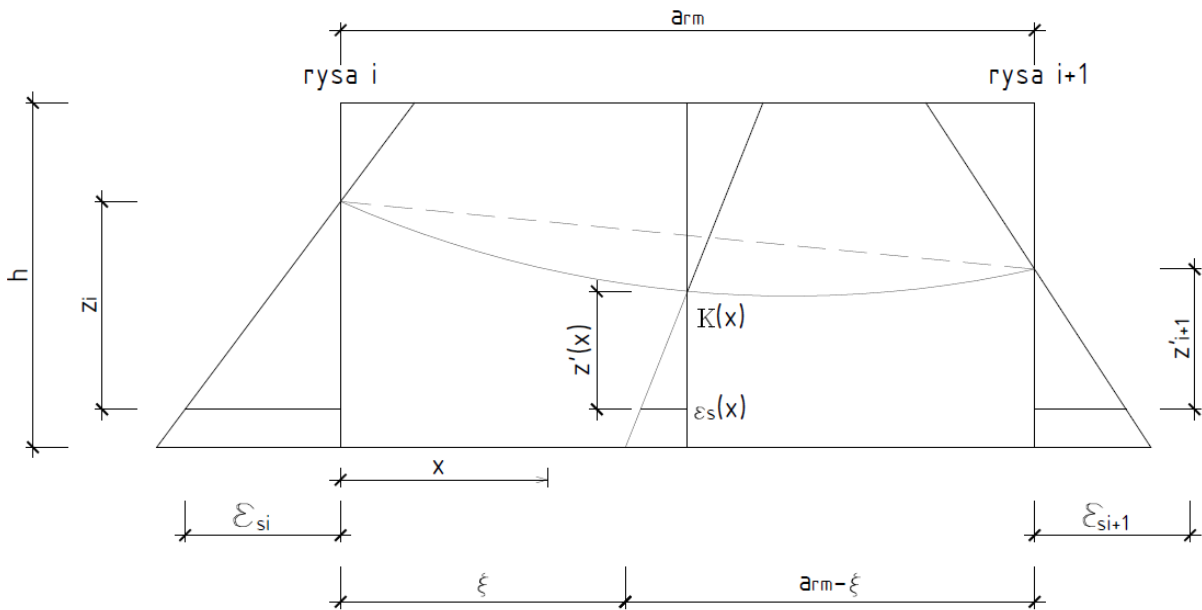
Rys.2.6 Schemat do analizy plastycznej badanych belek [63]

Na podstawie badań stwierdzono, że uplastycznienie belek wystąpiło na bardzo niewielkim obszarze i uznano, że powstał tam przegub plastyczny. Ponadto wykazano, że wraz ze wzrostem wytrzymałości na ściskanie betonu, wzrasta również zdolność do obrotu przy tym samym stopniu zbrojenia. Zaobserwowana tendencja została wyjaśniona przez fakt, że przy tym samym stopniu zbrojenia w belkach wykonanych z betonu o wysokiej wytrzymałości na ściskanie występuje mniejszy stosunek wysokości strefy ściskanej do wysokości użytecznej przekroju ( $x/d$ ) w chwili zniszczenia niż w przypadku betonów niskiej wytrzymałości (<50MPa). Zjawisko to może rekompensować zmniejszenie ciągliwości w betonach o wysokiej wytrzymałości. Stwierdzono dodatkowo, że parametrem najbardziej wpływającym na zdolność do obrotu jest stopień zbrojenia podłużnego. Zaobserwowano jednoznaczne zmniejszenie zdolności do obrotu ze wzrostem stopnia zbrojenia.

## 2. Przegub plastyczny

Autorzy prac [30, 60] analizowali zdolność do obrotu przekroju sprężonego. Przyjęto następujące założenia:

- stałe położenie stali sprężającej wzdłuż belki,
- przyczepność stali zwykłej jest nie mniejsza niż stali sprężającej; stąd obowiązujące jest przyjęcie hipotezy Bernoulli'ego o płaskich przekrojach (zarówno dla betonu, jak i stali sprężającej),
- rozwartość rys maleje liniowo od spodu belki w kierunku osi obojętnej.



Rys. 2.7 Rozkład odkształceń w przekroju poprzecznym między rysami

Obrót belki może być wyrażony jako całka krzywizn wszystkich elementów zarysowanych (rys. 2.7):

$$\theta = \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^{a_{rm}} K(x) dx \right]^i = \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^{a_{rm}} \frac{\epsilon_s(x)}{z'(x)} dx \right]^i \quad (2.10).$$

Jeśli  $z'(x)$  zmienia się monotonicznie między rysami, to obrót elementu zarysowanego można wyrazić jako:

$$\int_0^{a_{rm}} \frac{\epsilon_s(x)}{z'(x)} dx = \frac{1}{z'(0)} \int_0^{\xi} \epsilon_s(x) dx + \frac{1}{z'(a_{rm})} \int_{\xi}^{a_{rm}} \epsilon_s(x) dx \quad (2.11),$$

dla  $0 \leq \xi \leq a_{rm}$ .

Podstawiając wyrażenia:

$$z'(0) = z'_i \quad (2.12),$$

$$z'(a_{rm}) = z'_{i+1} \quad (2.13),$$

$$\int_0^{\xi} \epsilon_s(x) dx = s_{sr}^i \quad (2.14),$$

## 2. Przegub plastyczny

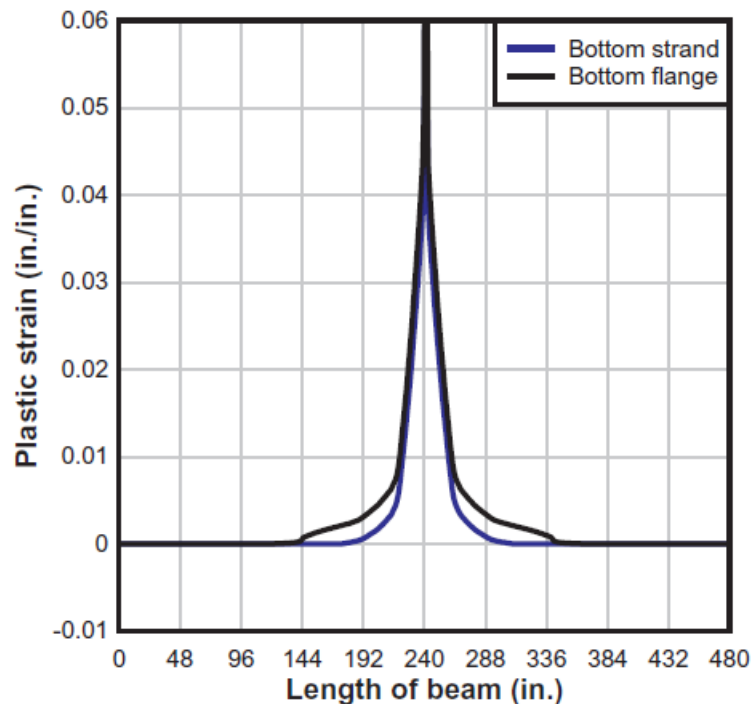
$$\int_{\xi}^{arm} e_s(x) dx = s_{sl}^{i+1} \quad (2.15)$$

do równania (2.10) można uzyskać ostatecznie:

$$\theta = \sum_{i=1}^N \frac{s_{sl}^i + s_{sr}^i}{z_i'} = \sum_{i=1}^N \frac{w_s^i}{h_s - x^i} = \sum_{i=1}^N \omega^i \quad (2.16).$$

Zgodnie z równaniem (2.16) obrót wynika z sumy kątów rozwarcia rys  $\omega^i$ .

W pracy [11] autorzy dokonali analizy numerycznej umownego przegubu plastycznego w belce sprężonej cięgnami z przyczepnością. Szacowanie długości umownego przegubu plastycznego w analizie MES było oparte na analizie odkształceń w splotach przy osiągnięciu SGN. Ponieważ stal sprężająca nie wykazuje wyraźnej granicy plastyczności, przyjęto, że do jej uplastycznienia dochodzi przy odkształceniach przekraczających 1%. Rys. 2.8 przedstawia wykres odkształceń plastycznych (wyznaczonych jako całkowite odkształcenie minus odkształcenie sprężyste) w cięgnach sprężających (*ang. bottom strand*) - krzywa niebieska, oraz w dolnych włóknach belki betonowej (*ang. bottom flange*) – krzywa czarna. Stwierdzono, że odcinek, na którym stal sprężająca uległa uplastycznieniu jest krótszy niż strefa zarysowana w betonie.



Rys. 2.8 Poza sprężyste odkształcenia dla dolnych włókien splotu sprężającego oraz belki (uwaga: wymiary w calach (*ang. „in.”*)) [11]

Podsumowując opisane badania można stwierdzić, że wyznaczenie przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych nie jest jednoznaczne, ponieważ stal sprężająca nie ma wyraźnej granicy plastyczności. Jednak wzory wyprowadzone dla konstrukcji

## 2. Przegub plastyczny

żelbetowych omówione w p. 2.2.1 co do zasady mogą być również stosowane do konstrukcji sprężonych. Takie podejście znajduje potwierdzenie m.in. w pracy [100]. Również wg [24] odkształcenia i krzywizny przekroju sprężonego można analizować w ten sam sposób co przekroju żelbetowego, o ile jest zapewniona przyczepność betonu do cięgien sprężających.

Ponieważ dla stali sprężającej brak jest wyraźnej półki plastycznej proponuje się założenie, że  $M_y = 0,85M_u$ , tzn. moment zginający przy uplastycznieniu stali sprężającej  $M_y$  jest równy 0,85 momentu granicznego  $M_u$  [100].

W konsekwencji obrót w przegubie plastycznym w konstrukcji sprężonej może być wyrażony wzorem (rys. 2.9):

$$\theta_p = \int_0^{d_{ps}} \phi dx = \phi d_p = \frac{\varepsilon_{cu} d_p}{x} \quad (2.17),$$

gdzie:

$x$  – położenie osi obojętnej,

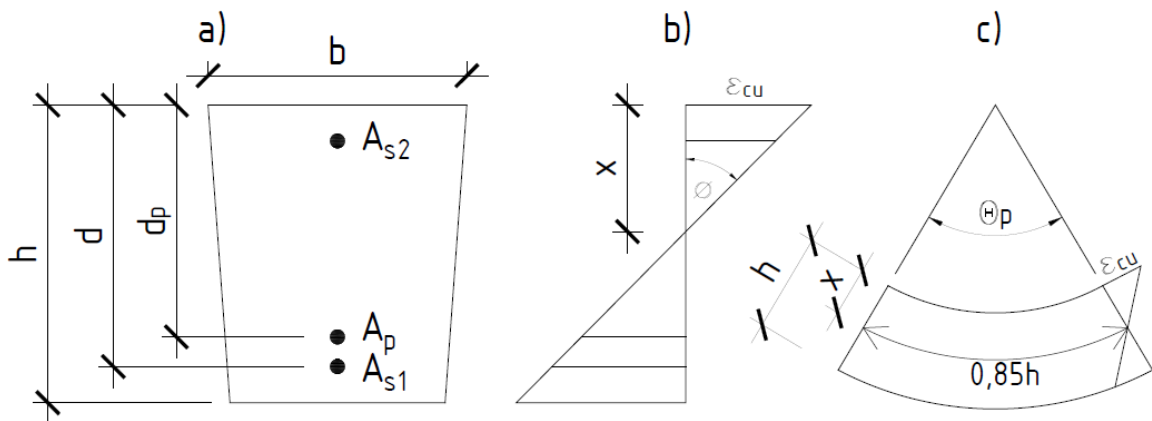
$\phi$  – krzywizna.

Krzywizna może być określona jako:

$$\phi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \quad (2.18),$$

gdzie:

$\varepsilon_{cu}$  – graniczne odkształcenie betonu.



*Rys. 2.9 Krzywizna i obrót przekroju sprężonego [105]*

*a) przekrój poprzeczny,*

*b) wykres odkształceń,*

*c) umowna długość odcinka, na którym występuje obrót plastyczny w strefie maksymalnych momentów zginających (skala skażona, zał.  $\frac{d_p}{h} = 0,85$ )*

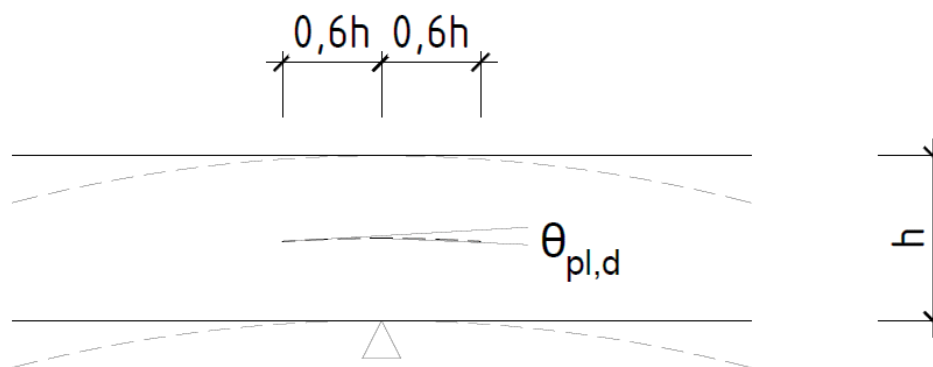
## 2. Przegub plastyczny

### 2.2.3. Model przegubu plastycznego wg *fib* oraz Eurokodu

Zgodnie z *fib Bulletin 66: Model Code 2010* [17] w przypadku belek ciągłych oraz płyt jednokierunkowo zbrojonych, zdolność do obrotu w przegubie plastycznym powinna być wyznaczana przy założeniu, że na odcinku o długości równej 1,2 wysokości przekroju występuje strefa „uplastyczniona”, tj. że powstaje tam przegub plastyczny (rys. 2.10). W obliczeniach SGN należy wykazać, że wymagany obrót w przegubie plastycznym  $\theta_s$  nie przekracza wartości dopuszczalnej  $\theta_{pl,d}$ . Wymagany obrót  $\theta_s$  należy wyznaczyć przez całkowanie krzywizn przekrojów między przegubami plastycznymi w konstrukcji obciążonej odpowiednią kombinacją obciążeń. Wartość dopuszczalna kąta obrotu plastycznego  $\theta_{pl,d}$  może zostać odczytana z nomogramu w [17] w zależności od klasy betonu oraz klasy ciągliwości stali, przy jednoczesnym spełnieniu warunku związanego z ograniczeniem wysokości strefy ściskanej (tab. 2.3). Ograniczenie wysokości strefy ściskanej zostało sformułowane przy założeniu bilinearnego sprężysto-plastycznego związku  $\sigma - \varepsilon$  dla stali oraz paraboliczno-prostokątnego wykresu dla betonu.

Tab. 2.3 Maksymalny stosunek  $x/d$  w zależności od klasy betonu

Klasa betonu	max $x/d$
$\leq C50/60$	0,45
$\geq C55/67$	0,35



Rys. 2.10 Obrót w przegubie plastycznym dla belki ciągłej wg *fib* [17]

Norma Eurokod 2 [88] zawiera wytyczne identyczne z zaleceniami *fib* [17].

### 2.2.4. Nośność na ścinanie w przegubie plastycznym

W dostępnej i przeanalizowanej literaturze, brak jest jednoznacznego wskazania zależności między wystąpieniem przegubu plastycznego a nośnością na ścinanie przekroju.

Badania wpływu siły poprzecznej na przegub plastyczny (żelbetowy) przeprowadzili autorzy pracy [48]. Przeprowadzono serię doświadczeń wstępnie zarysowanych dwuprzęsłowych belek żelbetowych, w których przegub plastyczny wytworzył się nad podporą pośrednią. Belki były obciążone w miejscu zarysowania bardzo dużą siłą poprzeczną. Celem badań było porównanie nośności na ścinanie przekrojów, w których wytworzył się przegub plastyczny z nośnością na ścinanie przekrojów niezarysowanych. Najbardziej zaskakującym wnioskiem z badań było stwierdzenie, że nośność na ścinanie przekroju, w którym wcześniej wytworzył się przegub plastyczny jest większa niż nośność na ścinanie takiego samego przekroju w stanie niezarysowanym. Dlatego można przyjąć, że jeżeli przekrój ma dostateczną graniczną nośność na ścinanie wyznaczoną w zakresie sprężystym dla przekroju niezarysowanego przy sprawdzaniu SGN, to po wytworzeniu przegubu plastycznego nośność na ścinanie będzie również wystarczająca.

Kolejni badacze [65] przeprowadzili analizę wpływu obrotu w przegubie plastycznym na nośność na ścinanie ciągłych belek żelbetowych. Na podstawie badań stwierdzono, że nośność betonu na ścinanie w przegubie plastycznym maleje ze wzrostem obrotu elementów. Po uplastycznieniu zbrojenia, obrót w przegubie plastycznym zmniejsza nośność na ścinanie przekroju, ponieważ maleje udział betonu w nośności na ścinanie.

### 2.2.5. Wnioski dotyczące modelowania przegubu plastycznego

Sposób modelowania przegubu plastycznego opisanych w normach (p. 2.2.3, [17, 88]) zdecydowanie różni się od modeli opisanych w p. 2.2.1 oraz 2.2.2 zaproponowanych na podstawie badań [6, 11, 23, 24, 30, 43, 46, 49, 60, 63, 75, 76, 82, 95, 100, 105, 110]. Zapisy w normach mają charakter bardzo uproszczony, a w literaturze [11] spotkać można spostrzeżenie, że przez to nie mają dobrego odzwierciedlenia w rzeczywistości.

Wybór modelu stanowiącego podstawę do dalszych analiz spośród 10 propozycji podanych w tab. 2.2 został dokonany w oparciu szereg kryteriów. Wybór podyktowany był tym, aby był to model:

- odnoszący się konkretnie do badanego typu elementu, tj. belki (na tej podstawie odrzucono modele dotyczące przegubów plastycznych w słupach),

---

## 2. Przegub plastyczny

---

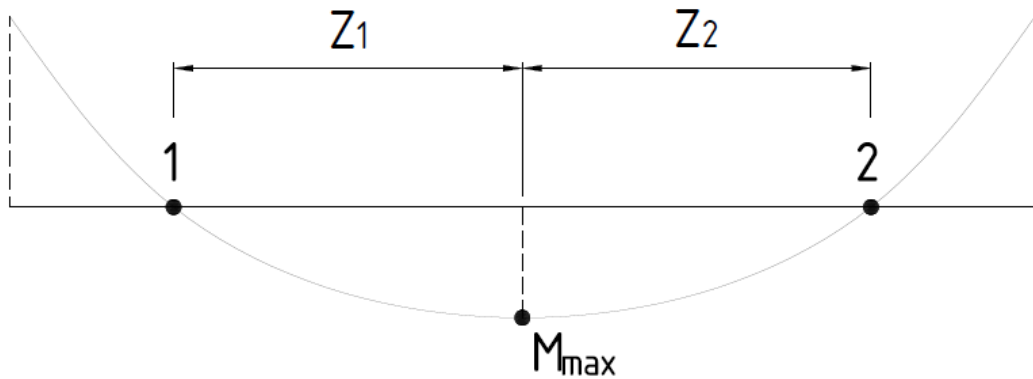
- nie zawierający w opisie matematycznym parametrów związanych ze zbrojeniem – utrudniałoby to adaptację modelu sporządzonego dla konstrukcji żelbetowych do konstrukcji sprężonych i mogłoby powodować dodatkowe nieścisłości,
- praktyczny w zastosowaniu, tj. nie zawierający skomplikowanych parametrów, takich jak np. energii pęknięcia betonu ściskanego,
- o potwierdzonej zgodności z wynikami badań eksperymentalnych wielu badaczy.

Do dalszych analiz wybrałam **model przegubu plastycznego wg Mattocka** [75], który stanowi modyfikację modelu wg Corley'a [23]. Jest to model odpowiedni do badanego przeze mnie typu elementu, tj. belki. Ponadto, ze względu na nieskompilowaną formę opisu, jest praktyczny w zastosowaniu. Model proponowany przez Sawyera [99] bazuje na tych samych zmiennych co model Mattocka ( $d, z$ ), jednak to właśnie dla propozycji modelu wg Mattocka [75] potwierdzona jest dobra zgodność z wynikami badań eksperymentalnych, np. w pracach [11, 21, 25]. Ponadto stanowił on podstawę dla amerykańskich wytycznych AASHTO-LRFD Bridge Design Specifications [11]. Warto dodać, że modele proponowane przez Sawyera i Mattocka pozwalają na uzyskanie wzajemnie zbliżonych wyników.

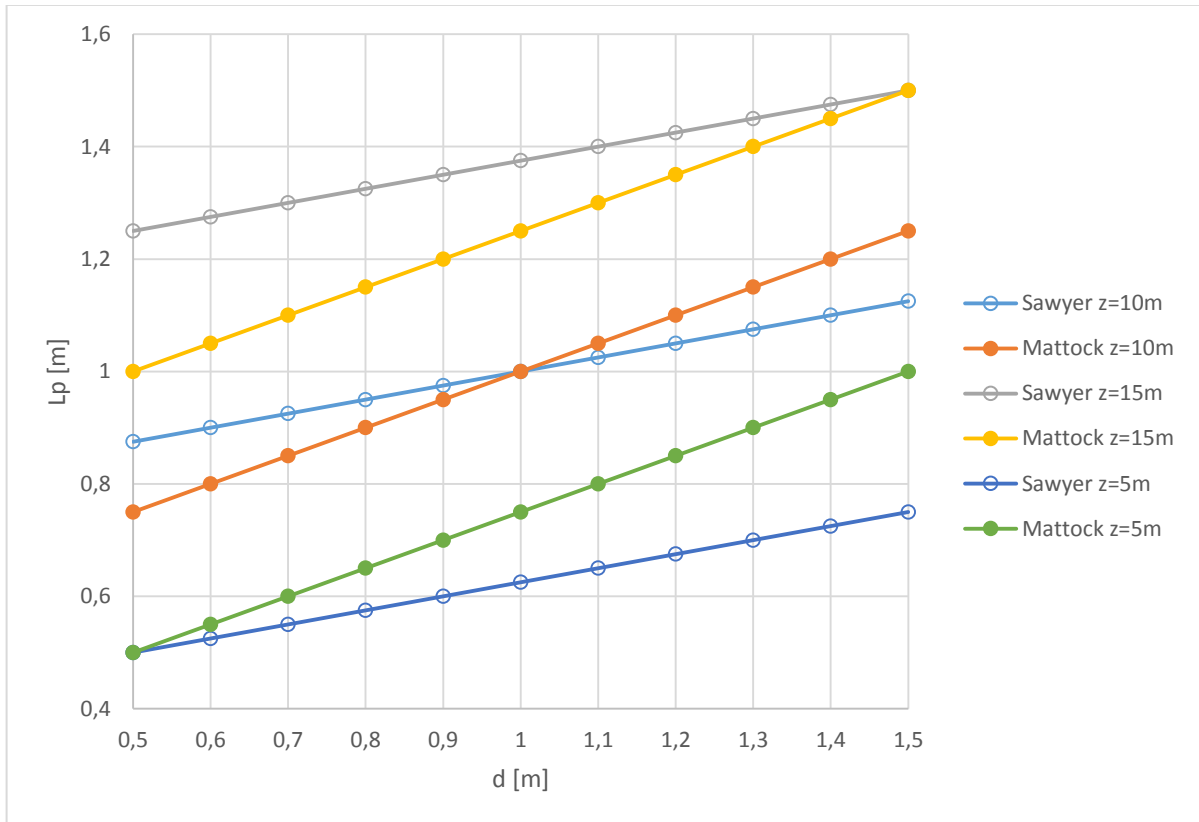
Na rys. 2.12 przedstawiono wykres zmienności długości umownego przegubu plastycznego w zależności od wysokości użytecznej przekroju ( $d$ ) dla trzech przykładowych wartości  $z$ . Wielkość  $z$  to odległość od przekroju, w którym występuje maksymalny moment zginający, do sąsiadującego z tym przekrojem miejsca zerowego momentów lub inaczej punkt, w którym krzywizna belki zmienia znak (*ang. point of contraflexure*, rys. 2.11). W zależności od stosunku  $d/z$  zmieniają się proporcje długości umownego przegubu plastycznego uzyskiwane z modeli Sawyera oraz Mattocka, jednak różnice w długości umownego przegubu plastycznego wynoszą maksymalnie 30% w analizowanym zakresie wartości  $d$  oraz  $z$ .

W pracy przyjmuję dodatkowo założenie, że przegub plastyczny wytwarza się w miejscu występowania największego momentu zginającego, a w belce występują odcinki o stałym układzie zbrojenia. Przyjęcie takiego założenia znajduje potwierdzenie m.in. w [76].

## 2. Przegub plastyczny



Rys. 2.11 Ilustracja odległości „z” na wykresie momentów zginających  
 1 – lewy punkt zmiany krzywizny i odpowiadająca mu długość  $z_1$   
 2 – prawy punkt zmiany krzywizny i odpowiadająca mu długość  $z_2$



Rys. 2.12 Umowna długość przegubu plastycznego wyznaczona na podstawie modelu Sawyera oraz Mattocka dla przykładowych wielkości  $d$  oraz  $z$



#### 3. Model obliczeniowy badanych belek

##### 3.1. Informacje wstępne

W ramach pracy opracowano model numeryczny belek, który następnie zweryfikowano w oparciu o przeprowadzone badania (patrz rozdz. 5). Do analizy numerycznej wykorzystano program Abaqus. W celu jak najlepszego odwzorowania badanej konstrukcji wykorzystano własne dane materiałowe (badania stali i betonu – patrz p. 5.1) oraz związki konstytutywne stali i betonu opisane w p. 3.2. W przypadku betonu zastosowano model betonu plastycznego ze zniszczeniem (patrz p. 3.3) [13, 36, 42, 58, 94].

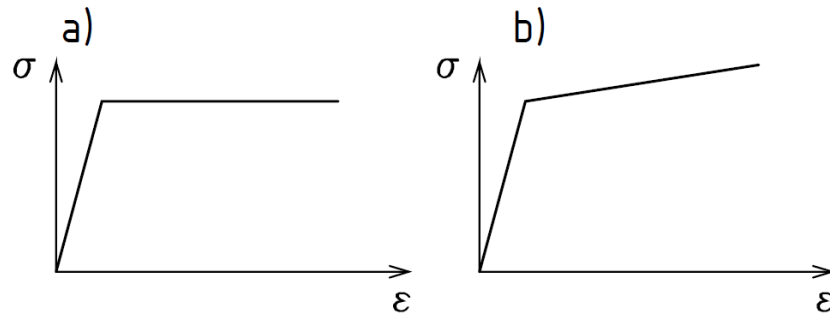
##### 3.2. Modele materiałów

###### 3.2.1. Stal zbrojeniowa i sprężająca

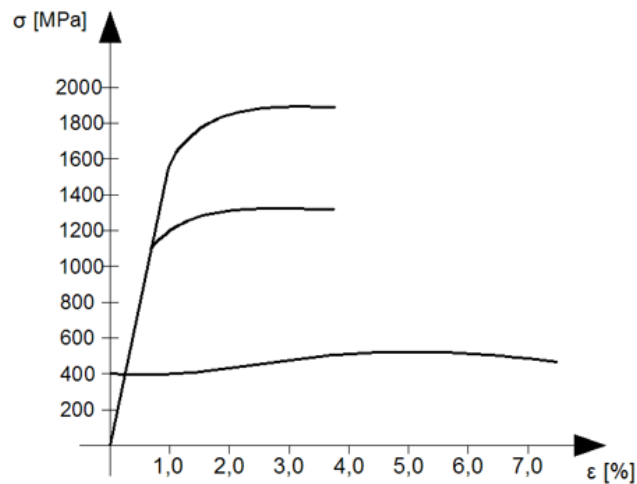
Przyjmowane w analizie nośności konstrukcji związki aproksymujące zależność  $\sigma - \varepsilon$  stali rozciąganej i ściskanej opisane są najczęściej za pomocą modelu ciała sprężysto – idealnie plastycznego lub sprężysto – plastycznego ze wzmocnieniem (rys. 3.1). W pracy przyjmuję model sprężysto – idealnie plastyczny.

Stal zbrojeniowa jest materiałem ciągliwym i charakteryzuje się dużymi odkształceniami plastycznymi, w przeciwieństwie do stali sprężającej. Stale wykorzystywane standardowo na sploty sprężające nie mają wyraźnej granicy plastyczności. Coraz częściej jako stal sprężająca stosowane są także sploty wykonane ze stali o wytrzymałości 2400MPa, co może powodować konieczność stosowania modelu ciała sprężysto-kruche w odniesieniu do stali sprężającej [47]. Na rys. 3.2 pokazano typowe zależności  $\sigma - \varepsilon$  dla stali sprężającej i zbrojeniowej. Na rys. 3.3 i 3.4 pokazano wykresy zależności między naprężeniami a odkształceniami typowej stali zbrojeniowej podczas ściskania i rozciągania [26, 96]. Różnice w wykresach na rys. 3.3 i rys. 3.4 wynikają z odmiennej metodologii badań. W badaniach [96] naprężenia były obliczane przy przyjęciu niezmiennego początkowego pola powierzchni przekroju pręta, a odkształcenia zostały obliczone dla początkowej długości pręta. W takim przypadku różnice w zachowaniu pręta podczas rozciągania i ściskania po uplastycznieniu są bardzo duże. Z kolei badacze [26] odnosili się do rzeczywistego, zmieniającego się pola przekroju pręta, a ponadto przyjmowano rzeczywiste odkształcenia pręta. W tym przypadku nieduże różnice w zachowaniu prętów ściskanych i rozciąganych widoczne są dopiero w zaawansowanym stanie deformacji plastycznych.

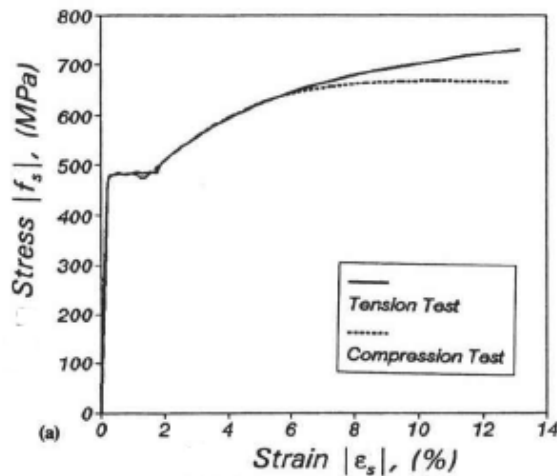
### 3. Model obliczeniowy badanych belek



Rys. 3.1 Model ciała a) sprężysto – idealnie plastycznego, b) sprężysto – plastycznego ze wzmocnieniem

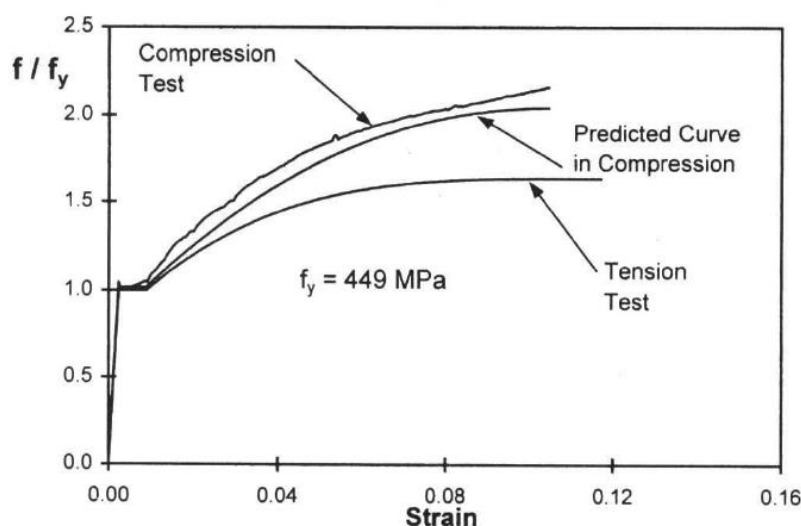


Rys. 3.2 Zależność  $\sigma$ - $\epsilon$  dla stali zbrojeniowej (dolna krzywa) i sprężającej (górne krzywe) [63]



Rys. 3.3 Wykres naprężenie – odkształcenie dla stali zbrojeniowej z badań [26]  
(ang. tension test – próba rozciągania, compression test – próba ściskania, stress – naprężenie, strain - odkształcenie)

### 3. Model obliczeniowy badanych belek



Rys. 3.4 Wykres naprężenie – odkształcenie dla stali zbrojeniowej z badań [96] (ang. *tension test* – próba rozciągania, *compression test* – próba ściskania, *predicted curve in compression* – krzywa teoretyczna przy ściskaniu, *strain* - odkształcenie)

#### 3.2.2. Związki konstytutywne zbrojonego betonu osiowo rozciąganego

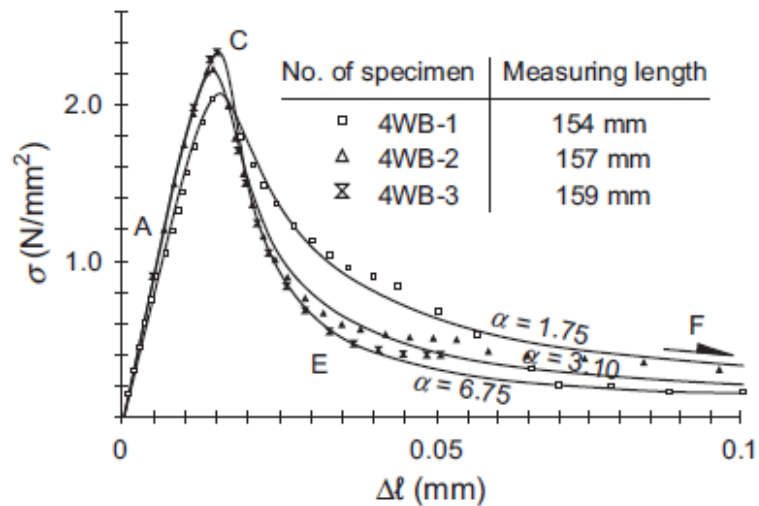
Rozciąganie elementu żelbetowego (oraz sprężonego) prowadzi do powstania rys, a w konsekwencji do jego pęknięcia. W zbrojonym betonie rozciągany osiowo można wyróżnić trzy fazy:

- a) faza I: sprężysta współpraca stali i betonu, przekrój niezarysowany;
- b) faza II: tworzenie się rys. W miejscu powstania rysy naprężenia w betonie maleją do zera. W rezultacie w rysie następuje skokowe zmniejszenie sztywności – do sztywności równej sztywności zbrojenia;
- c) faza III: układ rys stabilizuje się, a przyrost obciążenia powoduje jedynie zwiększenie ich rozwartości.

Zasadniczy wpływ na tworzenie się rys w rozciągany beton zbrojony ma odkształcalność graniczna betonu (wytrzymałość betonu na rozciąganie) oraz przyczepność stali zbrojeniowej do betonu. Graniczna odkształcalność rozciąganego betonu zbrojonego nie jest jednoznacznie określona. Określenie wytrzymałości betonu zbrojonego na rozciąganie jest problematyczne, ponieważ w zależności od metody badania otrzymuje się wyniki, które mogą się od siebie różnić nawet o 80% [24]. Z badań omawianych w [24] wynika też, że beton wspomaga stal zbrojeniową w przenoszeniu obciążeń nawet przy silnym zarysowaniu i dużych naprężeniach w stali. Efekt ten nazywany jest usztywnieniem rozciągania (ang. *tension stiffening*). Na rys. 3.5 przedstawiono wykres naprężenie-deformacja betonu rozciąganego wg badań [35]. Na wykresie tym można wyróżnić cztery charakterystyczne punkty, oznaczone A,

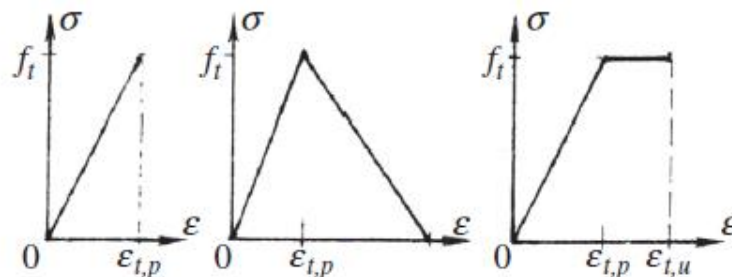
### 3. Model obliczeniowy badanych belek

C, E oraz F. Po obciążeniu próbki, kiedy naprężenia wynoszą  $\sigma < (0,4 \sim 0,6)f_t$  (punkt A), odkształcenia w betonie przyrastają w przybliżeniu liniowo. Po osiągnięciu wytrzymałości na rozciąganie, występuje załamanie krzywej (punkt C). Kiedy na zewnętrznej powierzchni próbki rysy są widoczne, krzywa jest opadająca (punkt E). Gdy rysa osiąga pełną wysokość przekroju, następuje pęknięcie i zniszczenie próbki (punkt F).



Rys. 3.5 Wykres naprężenie – deformacja dla betonu rozciąganego osiowo wg [35] (ang. no. of specimen – nr próbki, measuring length – długość pomiarowa)

Do wyrażenia związku konstytutywnego betonu rozciąganego w literaturze można spotkać w ogólności dwie grupy funkcji: funkcje ciągłe oraz nieciągłe. Funkcje ciągłe osiągają maksimum przy odkształceniach odpowiadających naprężeniom równym wytrzymałości betonu na rozciąganie; mogą być opisane jednym lub kilkoma równaniami. Funkcje nieciągłe to funkcje o nieciągłości występującej przy odkształceniach odpowiadających wytrzymałości betonu na rozciąganie. Do nieliniowej analizy betonu zbrojonego często wykorzystywane są różne uproszczone związki  $\sigma$ - $\epsilon$  betonu rozciąganego przedstawione na rys. 3.6.



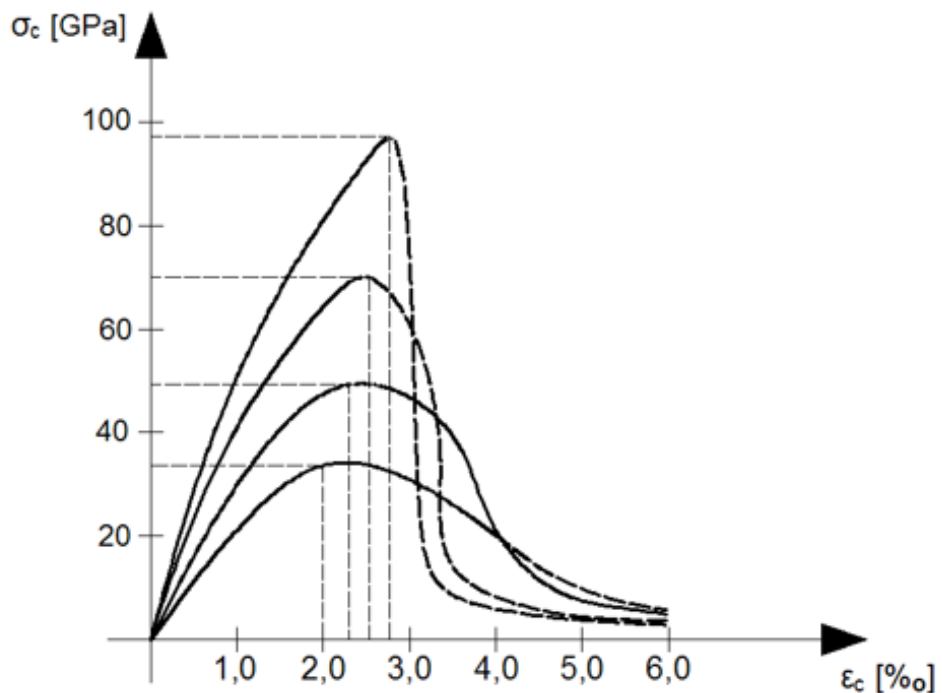
Rys. 3.6 Uprozczone związki konstytutywne dla betonu rozciąganego wg [35] ( $f_t$  – wytrzymałość betonu na rozciąganie;  $\epsilon_{t,p}$  – odkształcenie odpowiadające wytrzymałości na rozciąganie betonu;  $\epsilon_{t,u}$  – graniczne odkształcenie betonu)

#### 3.2.3. Związki konstytutywne betonu ściskanego

Związek konstytutywny  $\sigma$ - $\epsilon$  betonu ściskanego ma charakter nieliniowy. Podstawowe parametry charakteryzujące związek  $\sigma$ - $\epsilon$  betonu ściskanego to:

- $E_c$  – moduł sprężystości betonu,
- $E_{c0}$  – początkowy moduł sprężystości betonu,
- $f_{c0}$  – wytrzymałość na ściskanie,
- $f_{cu}$  – wytrzymałość graniczna na ściskanie,
- $\epsilon_c$  – odkształcenie betonu,
- $\epsilon_{c0}$  – odkształcenie betonu przy maksymalnym naprężeniu  $f_{c0}$ ,
- $\epsilon_{cu}$  – graniczne odkształcenie betonu.

Na rys. 3.7 przedstawiono schematyczne wykresy  $\sigma$ - $\epsilon$  betonu ściskanego betonów o różnej wytrzymałości. Ze wzrostem wytrzymałości betonu staje się on bardziej kruchy.

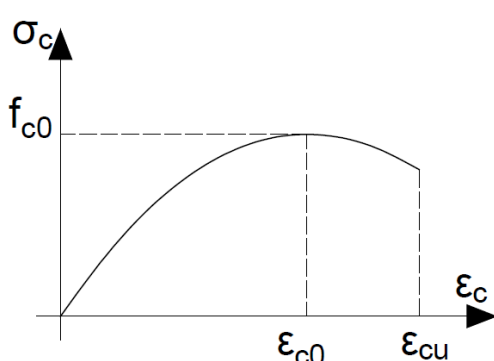


Rys. 3.7 Zależność  $\sigma$ - $\epsilon$  dla różnych wytrzymałości betonu [73]

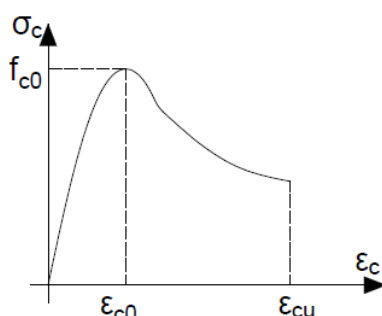
Współcześnie powszechne są modele sformułowane na podstawie badań empirycznych [16, 24, 33, 55, 68, 74, 98] przedstawione w tab. 3.1÷3.5.

### 3. Model obliczeniowy badanych belek

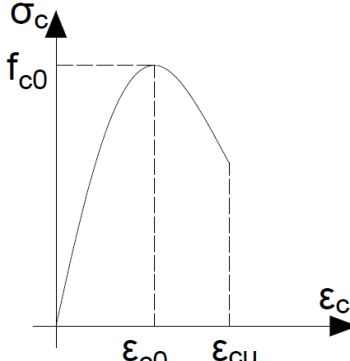
Tab. 3.1 Model Saenz'a

1	$\sigma_c = \frac{\varepsilon_c}{A+B\varepsilon_c+C\varepsilon_c^2+D\varepsilon_c^3} \text{ dla } 0 < \varepsilon_c < \varepsilon_{cu}$	
2	$\sigma_c = 0 \text{ dla } \varepsilon_c > \varepsilon_{cu}$	
3	$A = \frac{1}{E_{c0}}$	
4	$B = \frac{P_3 + P_4 - 2}{P_3 \cdot f_{c0}}$	
5	$C = -\frac{2P_4 - 1}{P_3 \cdot f_{c0} \cdot \varepsilon_{c0}}$	
6	$D = \frac{P_4}{P_3 \cdot f_{c0} \cdot \varepsilon_{c0}^2}$	
7	$P_1 = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c0}}, P_2 = \frac{f_{c0}}{f_{cu}}, P_3 = \frac{E_{c0} \cdot \varepsilon_{c0}}{f_{c0}}$	
8	$P_4 = \frac{P_3(P_2 - 1)}{(P_1 - 1)^2} - \frac{1}{P_1}$	

Tab. 3.2 Model Popovicsa

1	$\sigma_c = f_{c0} \frac{n \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}\right)^n}$	
2	$n = 0,058f_{c0} + 1$	
3	$\varepsilon_{c0} = 9,37 \cdot 10^{-4} \sqrt[4]{f_{c0}}$	
Komentarz: Opis zachowania betonu ściskanego za pomocą krzywej wykładniczej n-tego stopnia.		

Tab. 3.3 Model Hognestada

1	$\sigma_c = f_{c0} \left[ \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}\right)^2 \right]$	
2	$\varepsilon_{cu} = 1,5\varepsilon_{c0}$	
3	$\varepsilon_{c0} = \frac{2f_{c0}}{E_c}$	
Komentarz: Parabola drugiego stopnia (zarówno do opisu części wznoszącej, jak i opadającej). Model stworzony w latach 60-tych XXw.; stał się podstawą dla amerykańskich standardów ACI.		

### 3. Model obliczeniowy badanych belek

Tab. 3.4 Model Kenta, Parka

1	$\sigma_c = f_{co} \left[ \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^2 \right]$	
2	$\sigma_c = f_{co} [1 - z(\varepsilon_c - \varepsilon_{co})]$	
3	$z = \frac{0,5}{\left( \frac{3 + 0,29f_{co}}{145f_{co} - 1000} \right) - \varepsilon_{co}}$	
4	$\varepsilon_{co} = 0,0020$	
Komentarz: Równania (1) oraz (2) odpowiednio dla części wznoszącej i opadającej wykresu.		

Tab. 3.5 Model Carreira, Chu

1	$\sigma_c = f_{co} \frac{\beta \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}}}{\beta - 1 + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^\beta}$	
2	$\beta = \left( \frac{f_{co}}{32,4} \right)^3 + 1,55$	
3	$\varepsilon_{co} = (0,71f_{co} + 168) \cdot 10^{-5}$	

Eurokod 2 [88] wprowadza model do nieliniowej analizy konstrukcji:

$$\sigma_c = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} f_c \text{ dla } 0 < \varepsilon_c < \varepsilon_{cu1} \quad (3.1),$$

$$\sigma_c = 0 \text{ dla } \varepsilon_c > \varepsilon_{cu1} \quad (3.2),$$

gdzie:

$$k = -1,05E_c\varepsilon_{c1}/f_c \quad (3.3),$$

$$\eta = \varepsilon_c/\varepsilon_{c1} \quad (3.4),$$

$\varepsilon_{c1}$  – odkształcenie odpowiadające największemu naprężeniu (wg tab. 3.1 EC-2 [88]),

$\varepsilon_{cu1}$  – nominalne odkształcenie graniczne (wg tab. 3.1 EC-2 [88]),

$E_c$  – sieczny moduł sprężystości, odpowiadający  $\sigma_c = 0,4f_c$ .

Eurokod 2 [88] wprowadza także związek  $\sigma$ - $\varepsilon$  do projektowania przekrojów:

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \text{ dla } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (3.5),$$

$$\sigma_c = f_{cd} \text{ dla } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \quad (3.6),$$

gdzie:

### 3. Model obliczeniowy badanych belek

$n$  – wykładnik potęgi (wg tab. 3.1 EC-2 [88]),

$\varepsilon_{c2}$  – najmniejsze odkształcenie, przy którym osiąga się wytrzymałość betonu,

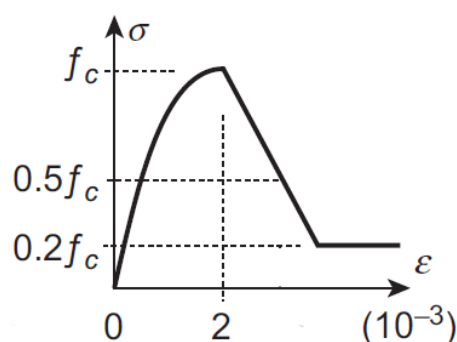
$\varepsilon_{cu2}$  – odkształcenie graniczne.

Wartości  $n$  (wykładnik potęgi),  $\varepsilon_{c2}$  (najmniejsze odkształcenie, przy którym osiąga się wytrzymałość betonu) oraz  $\varepsilon_{cu2}$  (odkształcenie graniczne) należy przyjmować na podstawie tab. 3.6.

Tab. 3.6 Odkształcenia graniczne betonu [88]

Klasa wytrzymałości betonu						
$f_{ck}$ [MPa]	12÷50	55	60	70	80	90
$f_{ck,cube}$ [MPa]	15÷60	67	75	85	95	105
$n$	2,0	1,75	1,60	1,45	1,40	
$\varepsilon_{c2}$ (‰)	2,0	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60
$\varepsilon_{cu2}$ (‰)	3,50	3,10	2,90	2,70	2,60	

Przedstawione wzory empiryczne proponowane przez wielu badaczy oraz normy, wykorzystują różne funkcje matematyczne, takie jak funkcja wykładnicza czy wielomianowa. Części wznosząca i opadająca krzywej  $\sigma - \varepsilon$  mogą być opisane jedną funkcją lub funkcjami oddzielnymi. W analizie numerycznej wykorzystano model Kenta i Parka (rys. 3.8). Jest to model dobrze odwzorowujący zachowanie się ściskanego betonu, co potwierdza np. [36]. Dla etapu wzmocnienia przyjęty jest wzrost paraboliczny, zachowanie liniowe dla osłabienia aż do osiągnięcia 20% wytrzymałości na ściskanie ( $f_c$ ), a następnie zachowanie całkowicie plastyczne.



Rys. 3.8 Krzywa  $\sigma - \varepsilon$  dla betonu ściskanego wg modelu Kenta, Parka [36]



**3.3. Opis modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem wykorzystany w analizie numerycznej dla ściskania i rozciągania [5, 50, 106]**

Tensor odkształceń całkowitych  $\varepsilon$  składa się z części sprężystej (indeks „el”) i plastycznej (indeks „pl”):

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad (3.7),$$

$$\sigma = D^{el}: (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (3.8),$$

$$\bar{\sigma} = D_0^{el}: (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (3.9) \quad \text{– efektywny tensor naprężenia,}$$

$$D^{el} = (1 - d)D_0^{el} \quad (3.10) \quad \text{– zdegradowany tensometr sprężystej sztywności}$$

konstytutywnej.

Naprężenia nominalne z równania (3.10) można zapisać dla tensora sprężystego uwzględniającego zniszczenie:

$$\sigma = (1 - d)D_0^{el}: (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (3.11),$$

gdzie:

$\sigma$  – tensor naprężenia Cauchy’ego,

$d$  – skalarny parametr zniszczenia (degradacja sztywności),

$\varepsilon$  – tensor odkształceń,

$D_0^{el}$  – początkowy tensometr sprężystej sztywności konstytutywnej.

Ostatecznie tensor naprężeń Cauchy’ego  $\sigma$  jest proporcjonalny do tensora naprężeń efektywnych  $\bar{\sigma}$ , a współczynnikiem proporcjonalności jest  $(1-d)$ . Zatem związek konstytutywny dla zniszczenia w zakresie plastycznym oparty jest na wyrażeniach:

$$\sigma = (1 - d) \cdot \bar{\sigma} \rightarrow \sigma = (1 - d_t) \bar{\sigma}_t + (1 - d_c) \bar{\sigma}_c \quad (3.12),$$

gdzie  $d_t$  i  $d_c$  to skalarnie stałe zniszczenia, które mogą wynosić od 0 (brak zniszczenia) do 1 (całkowite zniszczenie). Model zniszczenia betonu jest oparty na teorii plastyczności i opiera się na zarysowaniu w strefie rozciąganej i zmiążdżeniu w strefie ściskanej.

W modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem sztywność materiału jest początkowo izotropowa, a podczas procesu degradacji sztywność jest określona przez dwie zmienne  $d_c$  w strefie ściskania i  $d_t$  w strefie rozciągania.

Izotropowe zmienne wzmocnienia są wyrażone niesprężystym odkształceniem od ściskania  $\varepsilon_c^{in,h}$  oraz odkształceniem zarysowania  $\varepsilon_t^{ck,h}$ , które zawierają plastyczne odkształcenie wzmocnienia  $\varepsilon^{pl,h}$  oraz odkształcenie resztkowe wywołane zniszczeniem.

$$\varepsilon^{pl,h} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{pl,h} \\ \varepsilon_c^{pl,h} \end{bmatrix}; \varepsilon^{pl} = h(\varepsilon^{pl,h}, \bar{\sigma}) \cdot \dot{\varepsilon}^{pl} \quad (3.13),$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl} \quad (3.14).$$

### 3. Model obliczeniowy badanych belek

Zmienne wzmocnienia są używane do kontrolowania uplastycznienia lub zniszczenia powierzchni.

Zachowanie betonu pod nieosiowym ściskaniem i rozciąganiem zgodnie z modelem zniszczenia plastycznego opisują wyrażenia:

$$\sigma_t = (1 - d_t)E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl,h}) \quad (3.15),$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl,h}) \quad (3.16).$$

Efektywne naprężenia dane są wzorami:

$$\bar{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{(1-d_t)} = E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl,h}) \quad (3.17),$$

$$\bar{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{(1-d_c)} = E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl,h}) \quad (3.18),$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_c^{pl,h} + \varepsilon_c^{el} \quad (3.19),$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^{pl,h} + \varepsilon_t^{el} \quad (3.20).$$

Zachowanie przy nieosiowym ściskaniu dane jest ostatecznie zależnościami:

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl,h}) \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_c^{in,h} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E_0} \\ \varepsilon_c^{pl,h} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E_0} \left( \frac{1}{1-d_c} \right) \end{cases} \quad (3.22a, b)$$

$$\varepsilon_c^{pl,h} = \varepsilon_c^{in,h} - \frac{d_c}{(1-d_c)} \frac{\sigma_c}{E_0} \quad (3.23)$$

Zachowanie przy nieosiowym rozciąganiu dane jest ostatecznie zależnościami:

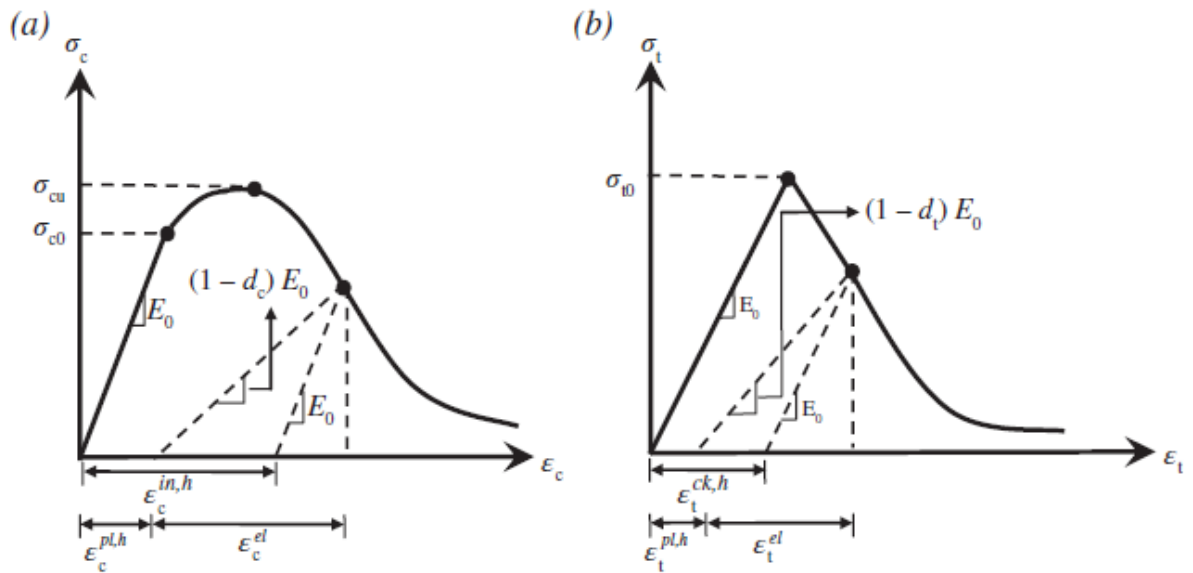
$$\sigma_t = (1 - d_t)E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl,h}) \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_t^{ck,h} = \varepsilon_t - \frac{\sigma_t}{E_0} \\ \varepsilon_t^{pl,h} = \varepsilon_t - \frac{\sigma_t}{E_0} \left( \frac{1}{1-d_t} \right) \end{cases} \quad (3.25a, b)$$

$$\varepsilon_t^{pl,h} = \varepsilon_t^{ck,h} - \frac{d_t}{(1-d_t)} \frac{\sigma_t}{E_0} \quad (3.26)$$

Opisane wielkości przedstawiono na rys. 3.9 [36].

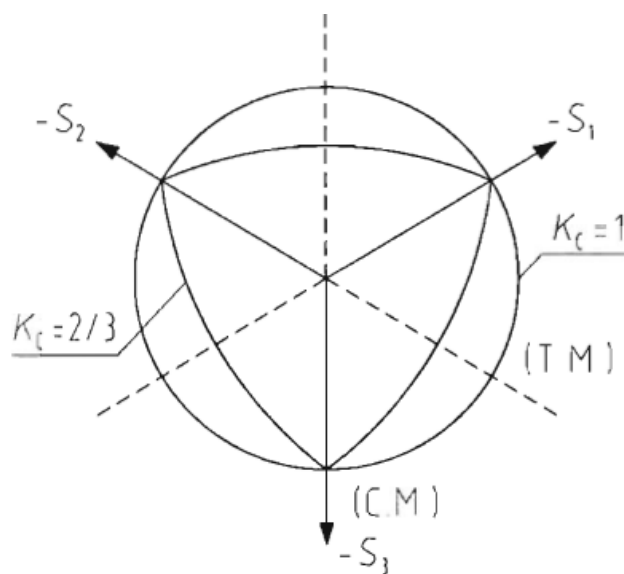
### 3. Model obliczeniowy badanych belek



Rys. 3.9 Zależność  $\sigma$ - $\epsilon$  przy nieosiowym obciążeniu: a) ściskanie, b) rozciąganie [36]

#### 3.4. Założenia przyjęte do analizy numerycznej

Model betonu plastycznego ze zniszczeniem CDP (*ang. Concrete Damage Plasticity*) stosowany w programie Abaqus jest modyfikacją hipotezy wytrzymałościowej Druckera-Pragera. Powierzchnia zniszczenia w przekroju dewiatorowym jest regulowana przez parametr  $K$ . Interpretacją fizyczną parametru  $K$  jest stosunek odległości między osią hydrostatyczną do południków ściskania i rozciągania w przekroju dewiatorowym (rys. 3.10). Stosunek ten zawsze jest większy niż 0,5; w przypadku wartości 1,0 przekrój dewiatorów powierzchni zniszczenia staje się okręgiem – jak w klasycznej hipotezie wytrzymałościowej Druckera – Pragera.



Rys. 3.10 Przekrój dewiatorowy powierzchni zniszczenia w modelu betonu CDP

### 3. Model obliczeniowy badanych belek

---

Zgodnie z zaleceniami twórców programu Abaqus przyjęto do analiz  $K=2/3$ , jako kryterium teoretyczno-doświadczalne zbudowane na podstawie wyników badań betonu w trójosiowym stanie naprężenia.

Pozostałe parametry przyjęte do analizy (nazewnictwo wg programu Abaqus):

Dilation angle	31
Eccentricity	0,1
$f_b0/f_c0$	1,16
$\kappa$	0,67
Viscosity parameter	0

Parametr *Eccentricity* można obliczyć jako stosunek wytrzymałości na rozciąganie do wytrzymałości na ściskanie; przyjęto wartość zalecaną dla modelu CDP.

Parametr  $f_b0/f_c0$  określa stosunek wytrzymałości betonu w stanie dwuosiowym do wytrzymałości w stanie jednoosiowym; również przyjęto wartość zalecaną dla modelu CDP.

Parametr *Dilation Angle* to kąt nachylenia asymptoty powierzchni zniszczenia w stosunku do osi hydrostatycznej, mierzony w płaszczyźnie południkowej (kąt tarcia wewnętrznego w betonie). Przyjęto wartość zalecaną wg [36, 94].

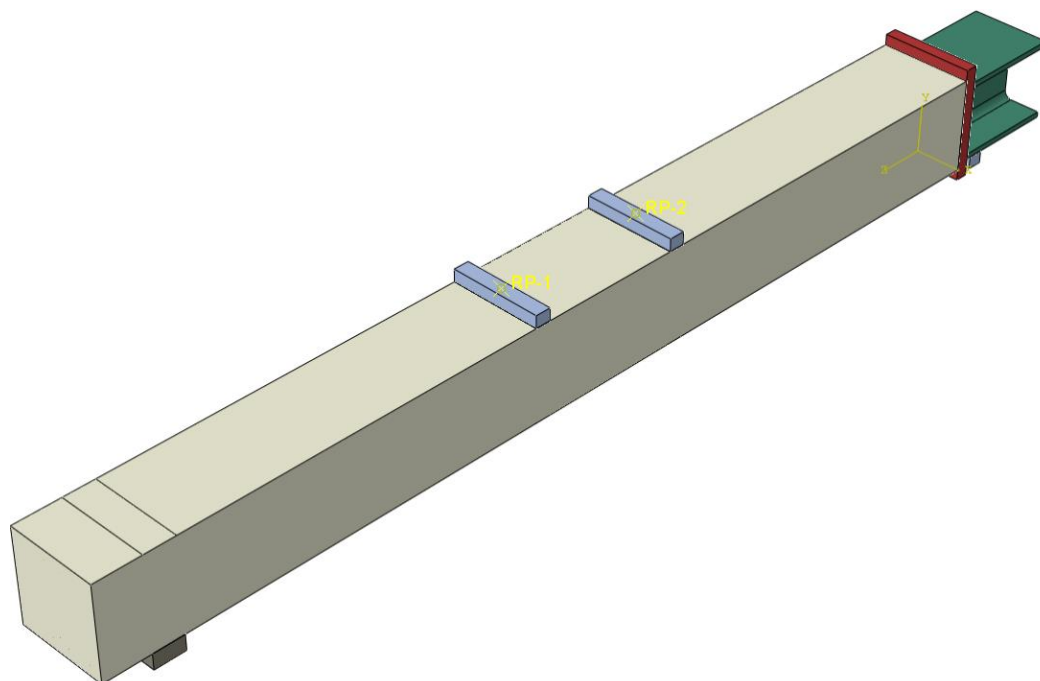
Do analizy przyjęto uproszczony model betonu plastycznego ze zniszczeniem oraz zależność naprężenie-odkształcenie nieliniowej pracy betonu wg [36], oparte na związku konstytutywnym wg Kenta i Parka (patrz p. 3.3).

Identyfikacja zarysowania belki została wykonana na podstawie analizy map uszkodzeń zdefiniowanych zmianami wielkości parametru DAMAGET, który oznacza degradację sztywności obrazującą zniszczenie materiału. Zgodnie z [42] parametr DAMAGET pozwala na identyfikację powstałych w betonie rys. Należy dodać, że model CDP nie pozwala na uwzględnienie rys w sposób dyskretny z wykruszeniem materiału, a skutkuje stopniowym wyłączeniem się ze współpracy elementów skończonych. Niedoskonałość ta nie ma jednak wpływu na zachowanie całego elementu badawczego, jak podaje [108].

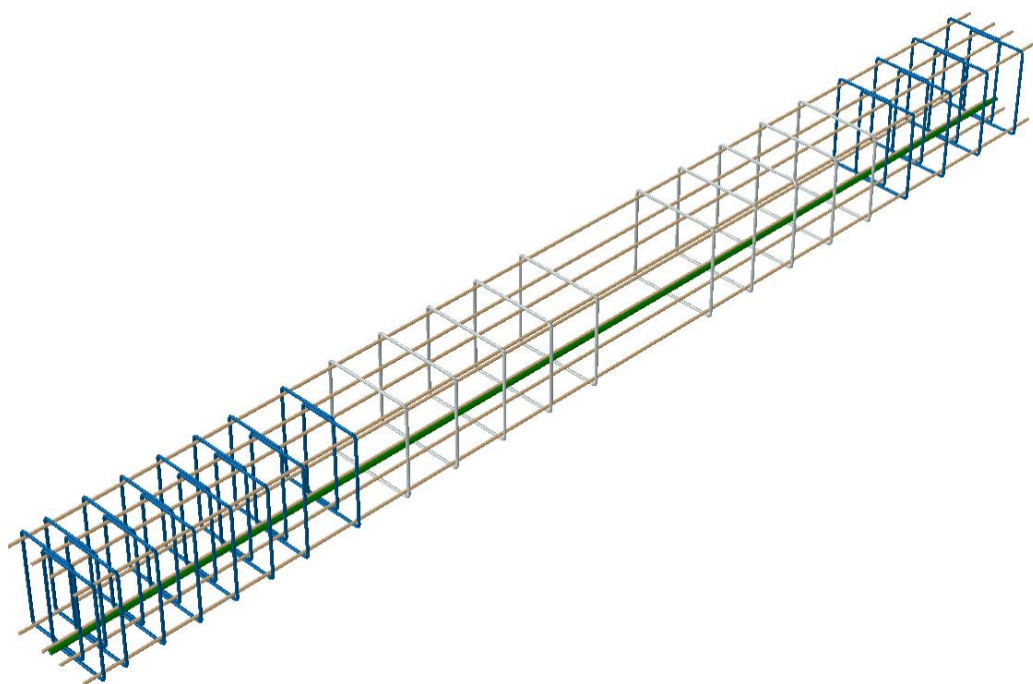
#### 3.5. Weryfikacja modelu numerycznego

##### 3.5.1. Belka swobodnie podparta

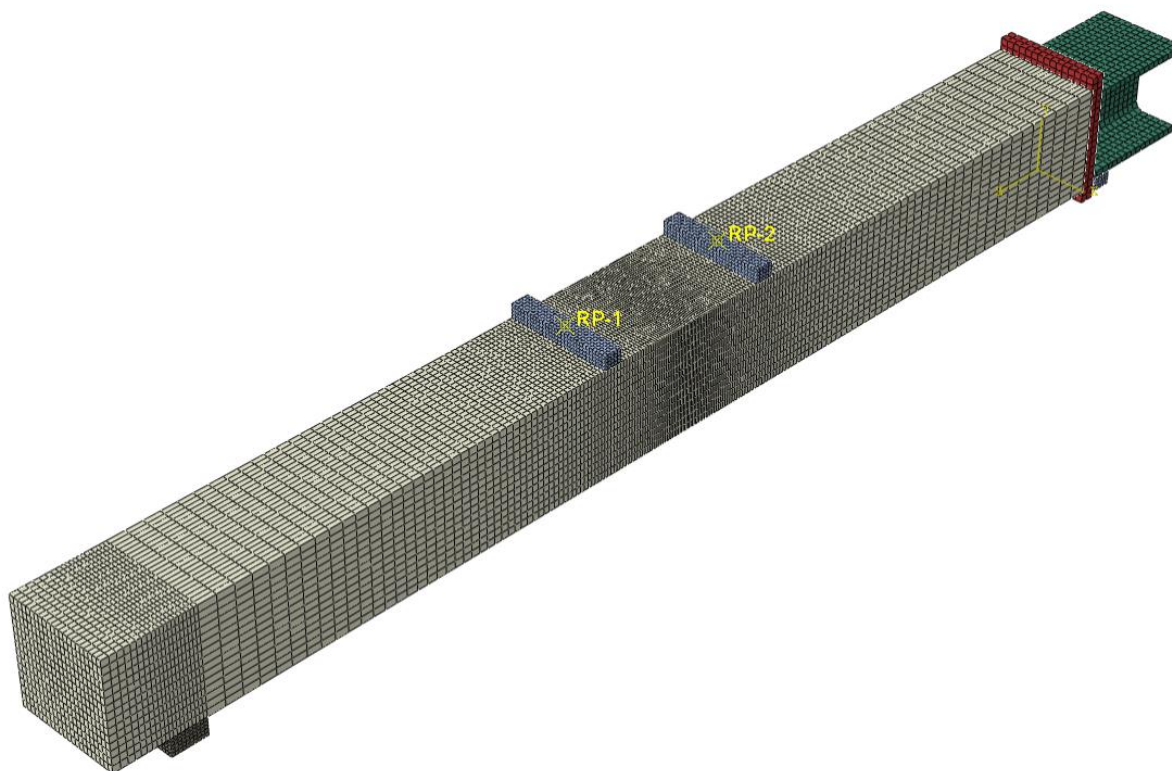
Model belki swobodnie podpartej składał się z 72087 elementów. Na rys. 3.11 pokazano widok całego modelu, na rys. 3.12 tylko zbrojenie zwykłe i sprężające, a na rys. 3.13 widok modelu z siatką elementów skończonych. Do modelowania zbrojenia wykorzystano elementy typu *truss*.



Rys. 3.11 Model belki swobodnie podpartej



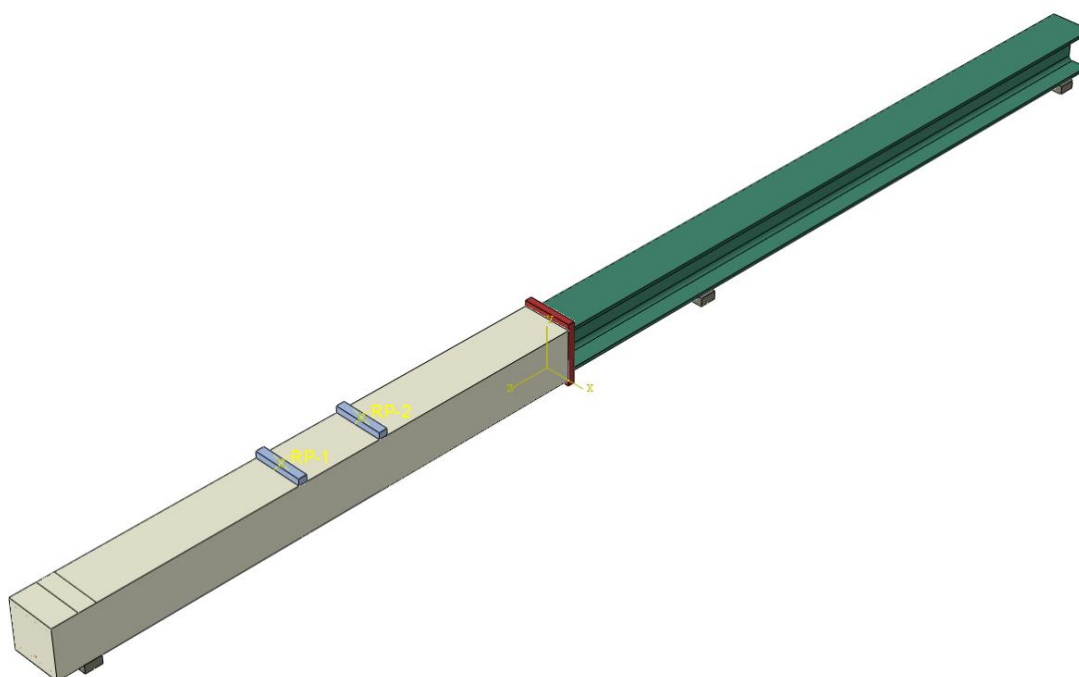
Rys. 3.12 Fragment modelu – zbrojenie zwykłe oraz sprężające (splot oznaczono kolorem zielonym)



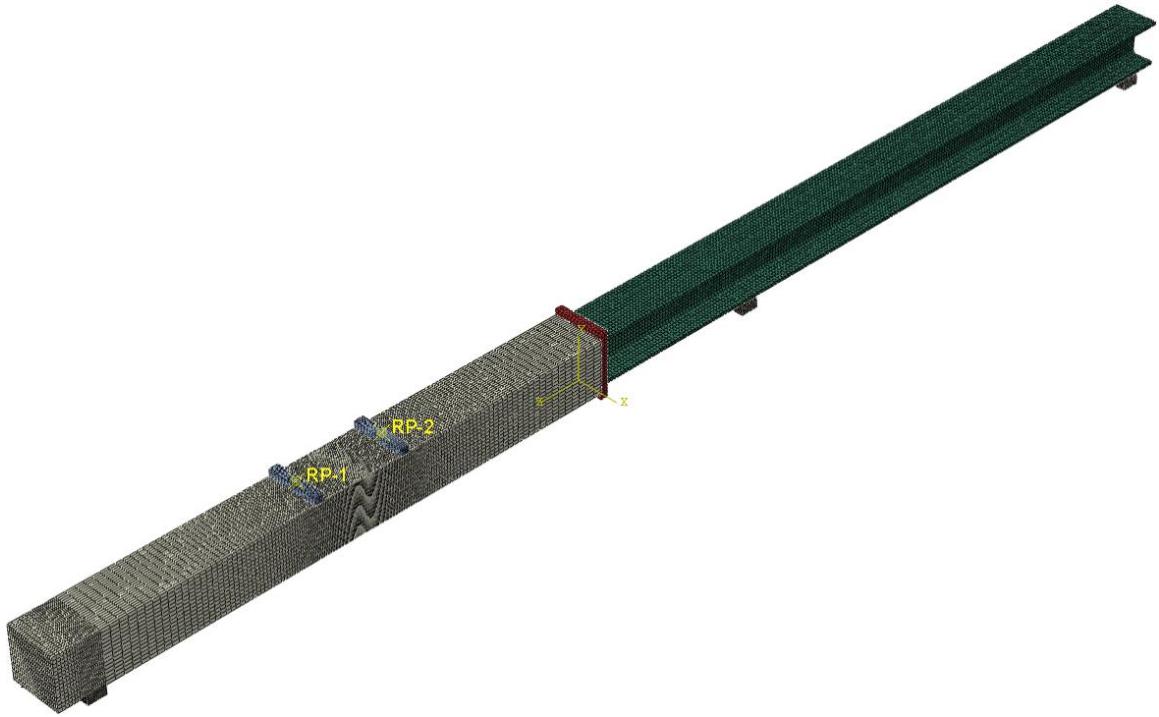
Rys. 3.13 Model belki swobodnie podpartej – siatka elementów skończonych

#### 3.5.2. Belka ciągła

Model belki ciągłej składał się z 81591 elementów. Widok modelu pokazano na rys. 3.14, a na rys. 3.15 pokazano widok modelu z siatką elementów skończonych. Zbrojenie zwykłe i sprężające jak w belce swobodnie podpartej (rys. 3.12).



Rys. 3.14 Model belki ciągłej

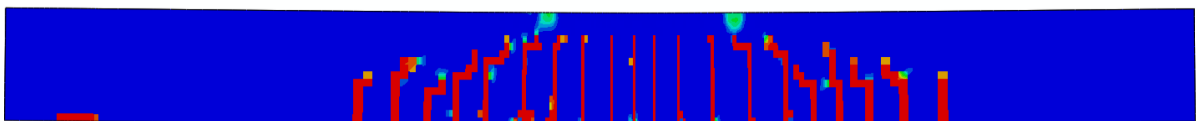


Rys. 3.15 Model belki ciągłej – siatka elementów skończonych

#### 3.5.3. Wyniki i wnioski z analizy numerycznej

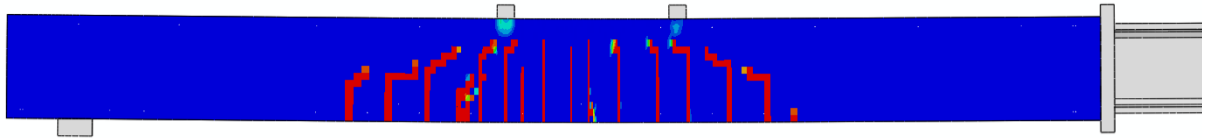
Uzyskano dobrą zgodność wyników analizy numerycznej z rezultatami badań. Weryfikacja modelu była wykonana w oparciu o wyniki naprężeń, odkształceń oraz ugięć. Jako dodatkowe istotne kryterium przyjęto także dane z analizy typu DAMAGET. W dalszej części rozdziału zaprezentowano wybrane wyniki obliczeń. Wszystkie wyniki dotyczące naprężeń podano w [MPa].

Na rys. 3.16 pokazano obraz zarysowania uzyskany z analizy typu DAMAGET przy obciążeniu wynoszącym 100kN w belce swobodnie podpartej, a na rys. 3.17 w belce ciągłej. Analiza typu DAMAGET pozwoliła na otrzymanie zbliżonego obrazu zarysowania do obrazu zarysowania zinwentaryzowanego podczas badań (maksymalna różnica między liczbą rys wynikająca z modelu, a liczbą rys zinwentaryzowanych wyniosła trzy – patrz zał. nr 2 dotyczący zarysowania belek). Na rys. 3.18÷3.20 pokazano rozkłady naprężeń normalnych w chwili osiągnięcia SGN (tylko w częściach betonowych belek).

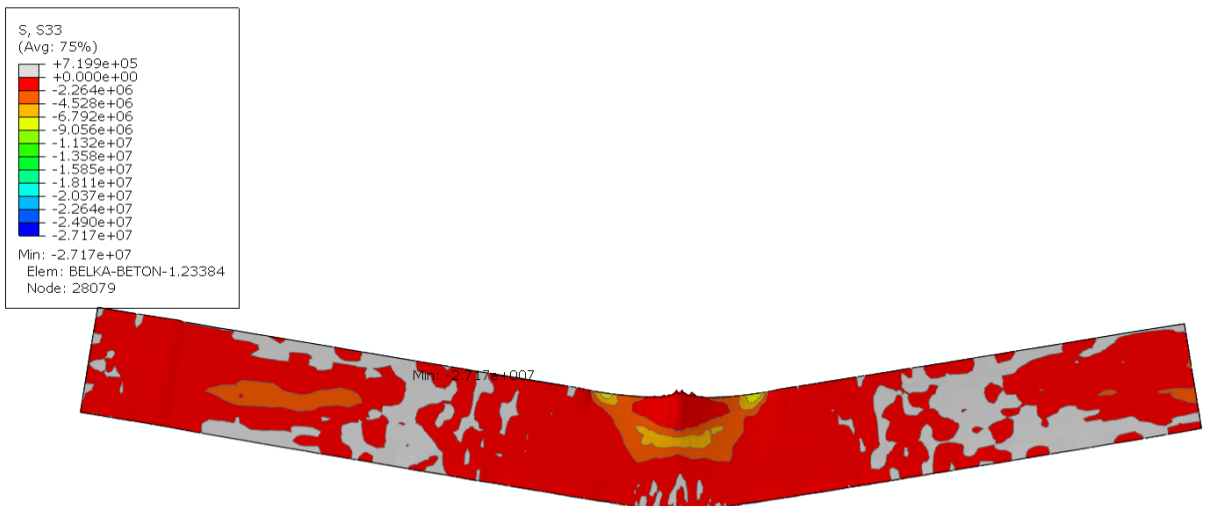


Rys. 3.16 Obraz zarysowania przy obciążeniu wynoszącym 100kN (analiza typu DAMAGET) w belce swobodnie podpartej (widok tylko na część betonową belki)

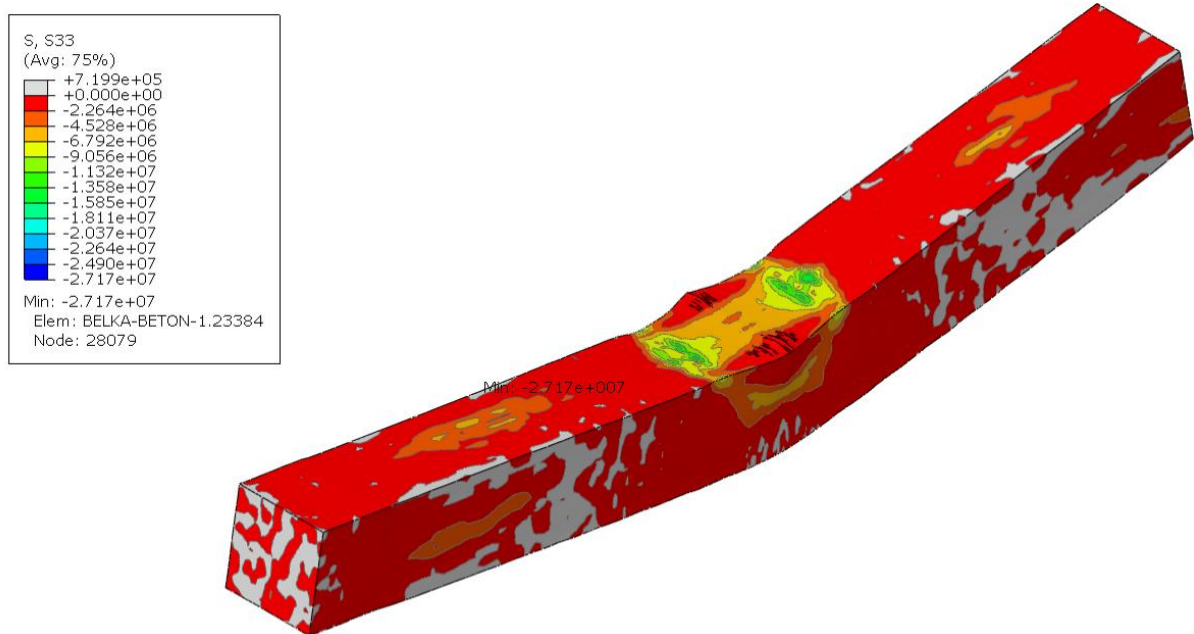
### 3. Model obliczeniowy badanych belek



Rys. 3.17 Obraz zarysowania przy obciążeniu wynoszącym 100kN (analiza typu DAMAGET) w belce ciągłej (widok na część betonową belki oraz krótki fragment części stalowej)



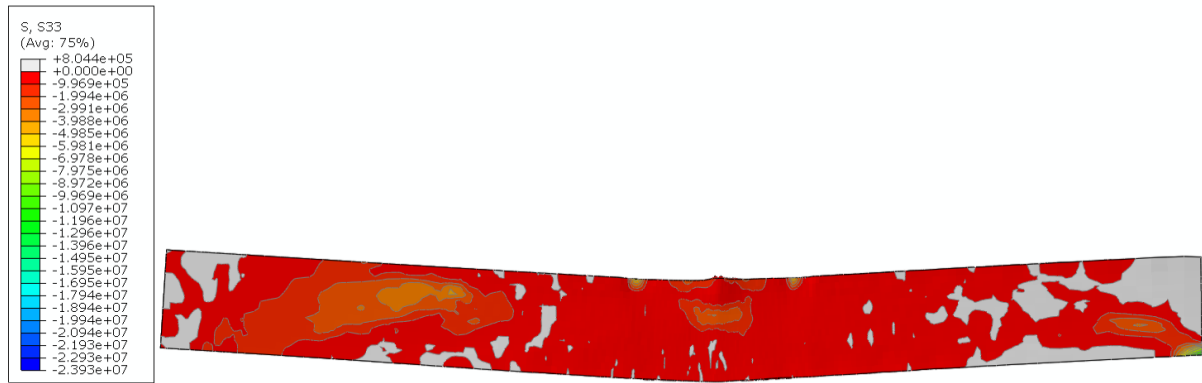
Rys. 3.18 Naprężenia normalne w chwili osiągnięcia SGN w belce swobodnie podpartej – widok z boku



Rys. 3.19 Naprężenia normalne w chwili osiągnięcia SGN w belce swobodnie podpartej – widok z góry

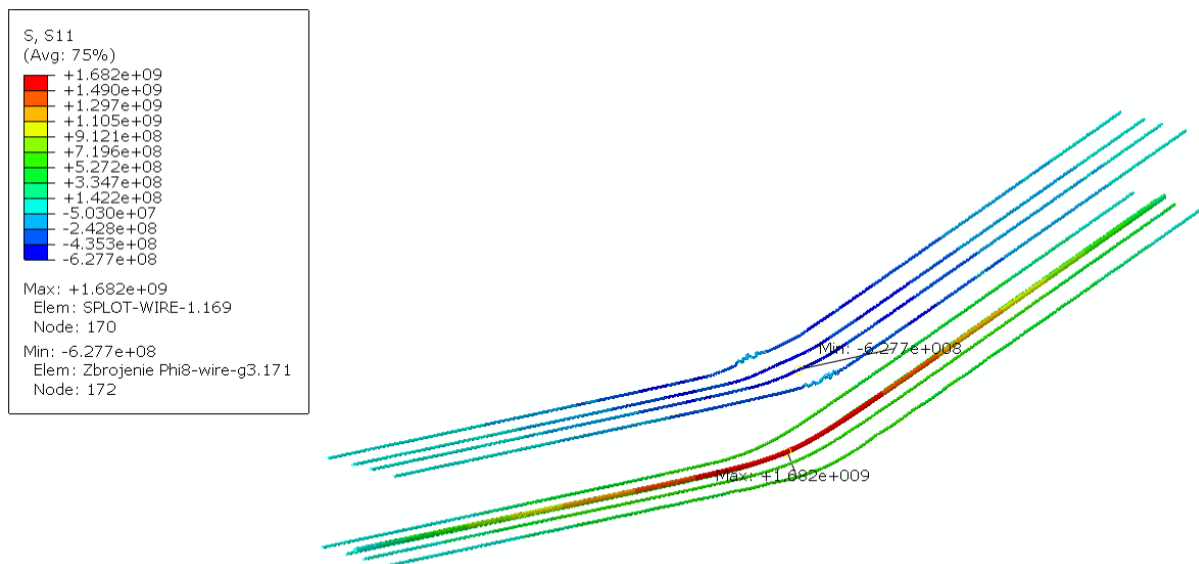


### 3. Model obliczeniowy badanych belek



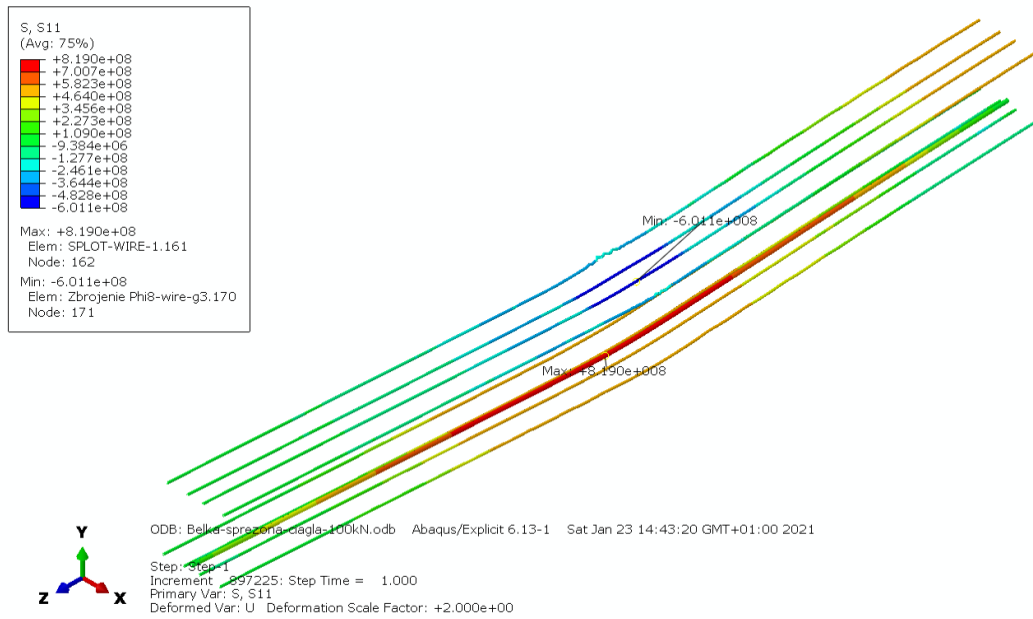
Rys. 3.20 Naprężenia normalne w chwili osiągnięcia SGN w belce ciągłej – widok z boku

Na rys. 3.21 pokazano naprężenia w zbrojeniu zwykłym i sprężającym w chwili osiągnięcia SGN w belce swobodnie podpartej, a na rys. 3.22 pokazano naprężenia w zbrojeniu zwykłym i sprężającym przy obciążeniu wynoszącym 100kN w belce ciągłej.



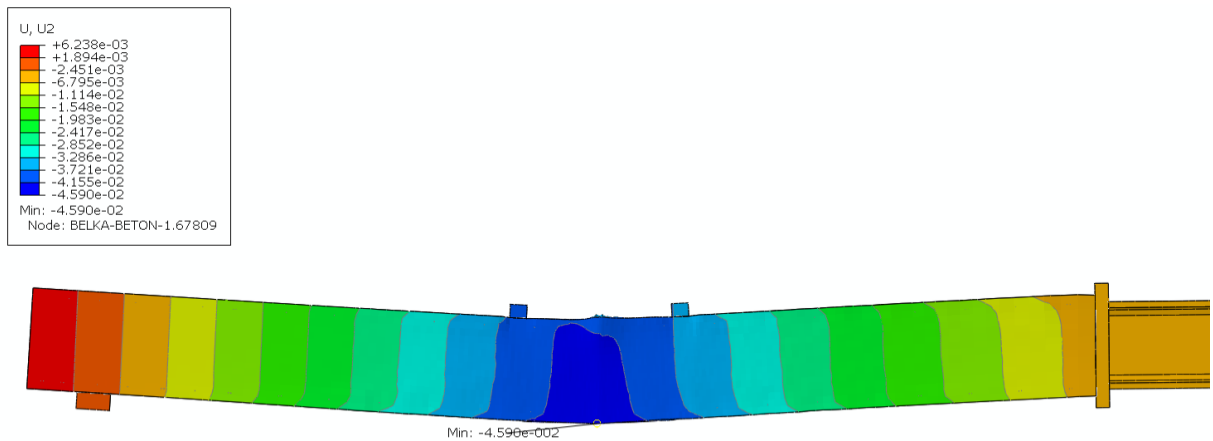
Rys. 3.21 Naprężenia w zbrojeniu zwykłym i sprężającym w chwili osiągnięcia SGN w belce swobodnie podpartej

### 3. Model obliczeniowy badanych belek



Rys. 3.22 Naprężenia w zbrojeniu zwykłym i sprężającym przy obciążeniu wynoszącym 100kN w belce ciągłej

Na rys. 3.23 pokazano ugięcie w części betonowej belki ciągłej w chwili osiągnięcia SGN. Ugięcie wyniosło 4,59cm, a podczas badań zmierzono 4,38cm (patrz p. 5.4).



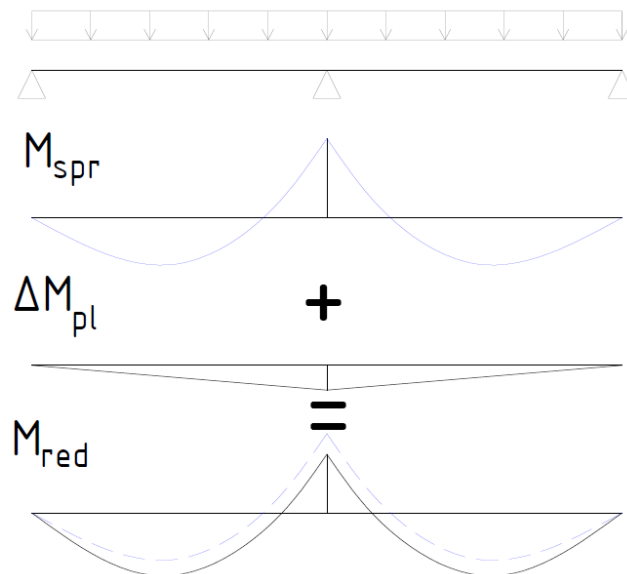
Rys. 3.23 Ugięcie w części betonowej belki ciągłej w chwili osiągnięcia SGN [m]

Podsumowując można stwierdzić, że poprawność stworzonego modelu numerycznego została potwierdzona badaniami, a więc może on zostać wykorzystany do dalszych analiz.

4. Redystrybucja momentów zginających

4.1. Definicja współczynnika redystrybucji momentów zginających

Redystrybucja momentów zginających następuje w wyniku zmiany sztywności i/lub na skutek wytwarzania się przegubów plastycznych (rys. 4.1). W belkach betonowych (żelbetowych i sprężonych) zmiana sztywności może zachodzić na skutek zarysowania przekroju. W przekrojach o dostatecznej ciągliwości (patrz rozdz. 2) powstają przeguby plastyczne, najczęściej w miejscach występowania maksymalnych momentów zginających.



Rys. 4.1 Schemat redystrybucji momentów zginających na skutek powstania przegubu plastycznego w belce dwuprzęsłowej, gdzie:

- $M_{spr}$  – wykres momentów zginających z analizy w zakresie sprężystym,
- $\Delta M_{pl}$  – moment zginający powstający na skutek wytworzenia się przegubu plastycznego nad podporą pośrednią,
- $M_{red}$  – wykres momentów zginających po redystrybucji (linią przerywaną pokazano wykres  $M_{spr}$ )

Pełna redystrybucja momentów zginających związana z powstawaniem przegubów plastycznych jest możliwa tylko wtedy, gdy nośność graniczna wszystkich przekrojów krytycznych może być w pełni wykorzystana, tzn. we wszystkich przekrojach krytycznych jest możliwe osiągnięcie granicznej krzywizny, przy której będzie wyczerpana możliwość obrotu przekroju. W przeciwnym razie następuje wyczerpanie nośności przekroju na skutek utraty integralności. Jeśli będą spełnione wszystkie warunki pozwalające na wytworzenie przegubów plastycznych (patrz rozdz. 2), to zakończenie redystrybucji następuje po uformowaniu przedostatniego przegubu plastycznego, przed przekształceniu się ustroju w mechanizm.

Współczynnik (stopień) redystrybucji jest definiowany jako:

$$\delta_i = \frac{M_{i,red}}{M_{i,spr}} \quad (4.1)$$

gdzie:

$M_{i,red}$  – moment zginający w przekroju „i” po redystrybucji,

$M_{i,spr}$  – moment zginający w przekroju „i” przed redystrybucją, wynikający z analizy w zakresie sprężystym.

#### 4.2. Dotychczasowe badania w zakresie redystrybucji momentów zginających

Zjawiska związane z redystrybucją momentów zginających w ciągłych belkach żelbetowych i sprężonych zostały dotychczas zbadane i opisane przez wielu autorów [27, 43, 44, 45, 46, 53]. Badania potwierdzają, że ilość zbrojenia oraz jego układ mają zasadniczy wpływ na redystrybucję momentów zginających. Parametrami mającymi wpływ na stopień redystrybucji są ponadto: sztywność przekrojów krytycznych, geometria przekroju poprzecznego, typ obciążenia, właściwości betonu oraz wystąpienie momentów wzbudzonych. Niektórzy badacze sugerują, że redystrybucja momentów zginających powinna być uwzględniana w obliczeniach zarówno w stanie granicznym nośności, jak i w stanie granicznym użyteczności [87]. W pracy [61] przedstawiono obszerny przegląd badań dotyczących redystrybucji momentów zginających w ciągłych belkach żelbetowych. Na tej podstawie autorzy [61] zaproponowali podział redystrybucji na dwa etapy: redystrybucja w zakresie sprężystym (następuje w wyniku zarysowania betonu) oraz redystrybucja w zakresie plastycznym (następuje po uplastycznieniu zbrojenia rozciąganego, gdy dochodzi do obrotu plastycznego).

Warto ponadto zwrócić uwagę na prace [59, 66, 111], w których opisano badania związane z konstrukcjami sprężonymi. W pracy [59] zbadano wpływ stopnia redystrybucji momentów zginających na nośność elementów sprężonych. W artykule zaprezentowano wyniki analizy parametrycznej wykonanej metodą elementów skończonych dotyczącej wpływu stopnia redystrybucji momentów zginających na nośność elementu oraz na długość umownego przegubu plastycznego. Przy zadanej redystrybucji momentów do 25%, zaobserwowano 15% redukcję nośności elementów w przypadku mało odkształcalnych odcinków podporowych. Wykazano ponadto, że długość umownego przegubu plastycznego ma zasadniczy wpływ na redukcję nośności elementu, szczególnie dla belek o wysoce odkształcalnych strefach podporowych. Dla elementów mało odkształcalnych nad podporami wpływ długości przegubu plastycznego na nośność jest nieznaczny.

W pracy [111] analizowano redystrybucję momentów zginających w belkach sprężonych ciągłymi bez przyczepności. Badania potwierdziły kluczowy wpływ stopnia zbrojenia na stopień redystrybucji momentów zginających. Autorzy przedstawili propozycję

---

#### 4. Redystrybucja momentów zginających

---

empirycznych wzorów do określania stopnia redystrybucji momentów zginających oraz do szacowania długości umownego przegubu plastycznego w belkach sprężonych cięgnami bez przyczepności.

W oparciu o obliczenia numeryczne autorzy [66] dokonali krytycznej analizy wpływu położenia osi obojętnej na redystrybucję momentów zginających dla dwuprzęsłowych belek sprężonych zewnątrz cięgnami CFRP. Szczególną uwagę zwrócono na wpływ różnic sztywności między przekrojami w środku rozpiętości przęsła, a przekrojem nad podporą środkową. Różnice sztywności wynikały z różnej ilości zbrojenia zwykłego w tych przekrojach. Wynikiem analizy było stwierdzenie, że zmiany różnic sztywności prowadzą do zasadniczych zmian w redystrybucji momentów zginających. Ponadto wykazano, że położenie osi obojętnej w przekrojach nie powinno stanowić podstawowego kryterium do szacowania stopnia redystrybucji.

Opisane badania dotyczące redystrybucji momentów zginających w konstrukcjach sprężonych i brak jednoznacznych wniosków, potwierdzają tezę o konieczności prowadzenia dalszych badań w tym zakresie.

#### 4.3. Redystrybucja momentów zginających w ujęciu normowym

Według normy Eurokod 2 [88] oraz zaleceń *fib* [18] stopień (współczynnik) redystrybucji określa się wg wzoru (4.1). Dodatkowo wprowadzono pojęcie procentowego stopnia redystrybucji:

$$\eta = (1 - \delta) \times 100 \quad (4.2),$$

gdzie:

$\delta$  – współczynnik redystrybucji,

$\eta$  – procentowy stopień redystrybucji.

Aktualne normy zalecają sprężystą analizę konstrukcji z ograniczoną możliwością redystrybucji (lub analizę plastyczną – tylko do sprawdzania stanu granicznego nośności). Ograniczenie stopnia redystrybucji związane jest z ciągliwością stali oraz z wysokością strefy ściskanej betonu. Zgodnie z zaleceniami normy [88] w SGN „momenty zginające wyznaczone na podstawie analizy liniowo – sprężystej można redystrybuować”. W belkach ciągłych poddanych w przeważającej mierze zginaniu oraz pod warunkiem, że stosunek długości przylegających przęseł mieści się w przedziale 0,5÷2, redystrybucję momentów zginających można przeprowadzać bez sprawdzania zdolności do obrotu w przegubach plastycznych, o ile

#### 4. Redystrybucja momentów zginających

zostaną spełnione wymagania podane w tab. 4.1, w której zestawiono dopuszczalne współczynniki redystrybucji  $\delta$  wg zaleceń *fib* [18] oraz normy [88].

Tab. 4.1 Współczynniki redystrybucji wg [88] oraz [18]

Wytrzymałość betonu i ciągliwość stali	Współczynnik redystrybucji $\delta$
$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$	$\delta \geq 0,44 + 1,25[0,6 + (0,0014/\varepsilon_{cu2})]x_u/d$
$f_{ck} > 50 \text{ MPa}$	$\delta \geq 0,54 + 1,25[0,6 + (0,0014/\varepsilon_{cu2})]x_u/d$
Wysoka i normalna ciągliwość zbrojenia (klasa B, C)	$\delta \geq 0,70$
Niska ciągliwość zbrojenia (klasa A)	$\delta \geq 0,80$

gdzie:

dla betonu  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$   $\varepsilon_{cu2} = 3,5\text{‰}$ ,

dla betonu  $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$   $\varepsilon_{cu2} \rightarrow$  patrz norma [88],

$x_u$  – wysokość strefy ściskanej w SGN po redystrybucji.

Komentarz dotyczący możliwych typów analiz w zakresie pozasprężystym zgodnie z zapisami normy [88] znajduje się w [51, 52]. Na podstawie zasad zawartych w Eurokodzie można w ogólności stosować w obliczeniach metody nieliniowe i metody oparte na teorii plastyczności, pod warunkiem, że kąty obrotu w przegubach plastycznych lub stopień redystrybucji momentów zginających zostaną utrzymane we wskazanych w normie granicach. Norma wyróżnia cztery „odpowiedzi” konstrukcji na oddziaływanie:

- odpowiedź sprężystą,
- odpowiedź sprężystą z ograniczoną redystrybucją,
- odpowiedź plastyczną,
- odpowiedź nieliniową.

Autor [51, 52] krytykuje taki podział, ponieważ jest on bardzo ogólnikowy i nie dzieli rodzajów „odpowiedzi” na klasy rozłączne. Odpowiedź plastyczna i odpowiedź sprężysta z ograniczoną redystrybucją są szczególnymi przypadkami odpowiedzi nieliniowej, a odpowiedź z ograniczoną redystrybucją szczególnym przypadkiem plastycznej. Autor [51, 52] dodaje, że obliczanie nośności granicznej na podstawie teorii plastyczności może przynosić istotne efekty w przypadku m.in. analiz istniejących konstrukcji, gdy konstrukcja obliczona w zakresie sprężystym nie spełnia wymagań, a uwzględnienie redystrybucji momentów zginających pozwala wykazać, że nośność jest wystarczająca. W mojej ocenie pogląd ten jest słuszny.

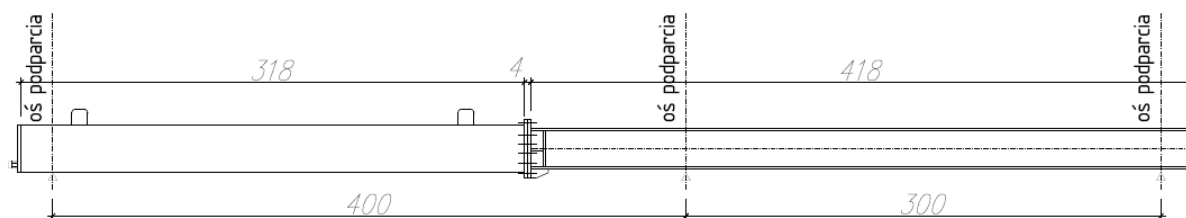
### 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

#### 5.1. Opis badanych belek

##### 5.1.1. Belki ciągłe

Wykonano badania sześciu belek o schemacie statycznym belki ciągłej, dwuprzęsłowej, o przęsłach rozpiętości teoretycznej 300cm + 400cm (rys. 5.1, fot. 5.1). Belki składały się z części betonowej długości całkowitej 318cm oraz części stalowej długości 418cm. Część betonowa była zakończona obustronnie blachami czołowymi o grubości 20mm. Przekrój części betonowej miał wymiary 30x30cm. Blacha czołowa od strony wolnego końca miała wymiary 300x300mm, natomiast blachy w styku miały wymiary 370x300mm. Część stalowa wykonana była z dwuteownika HEB260 ze stali S275JR. Część betonowa została sprężona, przy czym 3 belki kablem z przyczepnością, a 3 belki kablem bez przyczepności. Szczegółowe informacje dotyczące zbrojenia podano w p. 5.1.3, natomiast dotyczące sprężenia w p. 5.1.5.

Zaproponowano innowacyjny sposób badań z wykorzystaniem konstrukcji hybrydowej belek, tj. połączenie elementu stalowego oraz elementu z betonu sprężonego. W przedmiotowych badaniach przegub plastyczny wytwarza się w części z betonu sprężonego, natomiast redystrybucja momentów zginających wynikająca z jego powstania, szacowana jest na podstawie pomiarów odkształceń w części stalowej. Interpretacja wyników pomiarów odkształceń wykonanych w elemencie stalowym jest bardziej precyzyjna niż w betonowym, ze względu na stałą sztywność oraz liniowo-sprężystą pracę elementu w zakresie przykładanych obciążeń. Dodatkową korzyścią z zastosowania rozwiązania hybrydowego była możliwość wielokrotnego wykorzystania części stalowej, przy każdorazowym zniszczeniu jedynie części betonowej. Styk części betonowej ze stalową zlokalizowano w pobliżu występowania miejsca zerowego momentów zginających wyznaczonego w zakresie sprężystej pracy niezarysowanej belki betonowej.



Rys. 5.1 Widok belki ciągłej



Fot. 5.1 Belka ciągła stalowo – betonowa

### 5.1.2. Belki swobodnie podparte

Wykonano badania sześciu referencyjnych belek swobodnie podpartych (tzw. belki „świadki”). Belki te składały się z części betonowej długości 318cm oraz części stalowej długości 34cm (rys. 5.2). Pozostałe parametry były identyczne jak w belce ciągłej. W belce swobodnie podpartej osiowy rozstaw między punktami podparcia przyjęto 306cm, ponieważ odpowiadało to odległości między miejscami zerowymi momentu zginającego w belce ciągłej w zakresie pracy sprężystej. Zastosowanie konstrukcji hybrydowej również w belkach swobodnie podpartych pozwoliło na unifikację części betonowych dla wszystkich 12 belek oraz wykorzystanie takiej samej podpory i łożyska w przypadku belek ciągłych, jak i swobodnie podpartych.



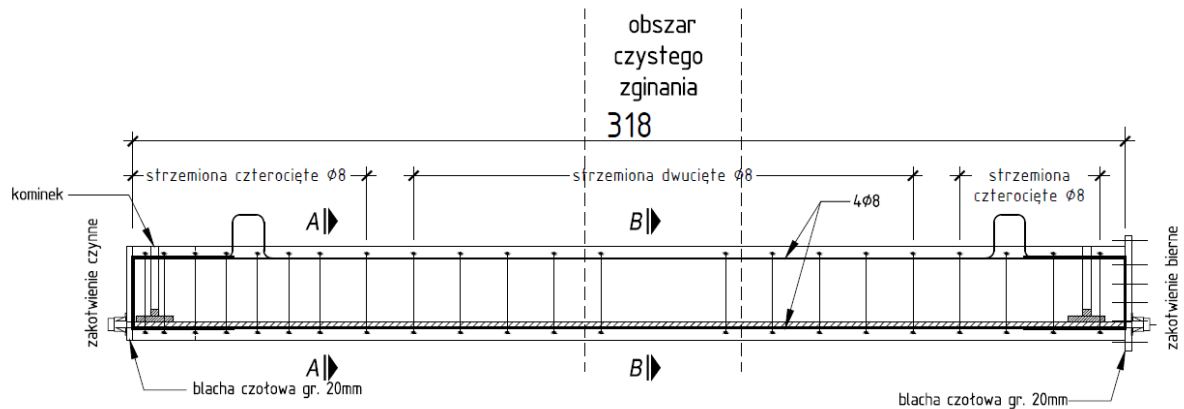
Rys. 5.2 Widok belki swobodnie podpartej



5.1.3. Szczegóły konstrukcyjne

5.1.3.1. Zbrojenie

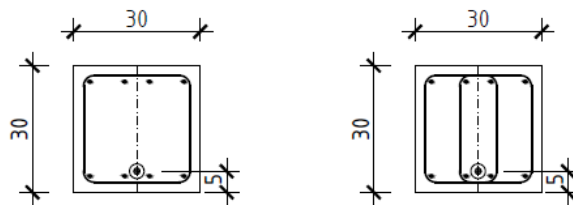
Belki były zbrojone prętami o średnicy 8mm, w układzie przedstawionym na rys. 5.3 oraz 5.4. Zastosowano po 4 pręty podłużne górą i dołem; strzemiona czterocięte w strefach podporowych, dwucięte w strefie przęsłowej oraz całkowity brak strzemion na odcinku długości 40cm, gdzie w czasie badań wystąpił obszar czystego zginania.



Rys. 5.3 Zbrojenie części betonowej – przekrój podłużny

PRZEKRÓJ B-B

PRZEKRÓJ A-A



Rys. 5.4 Zbrojenie części betonowej – przekroje poprzeczne



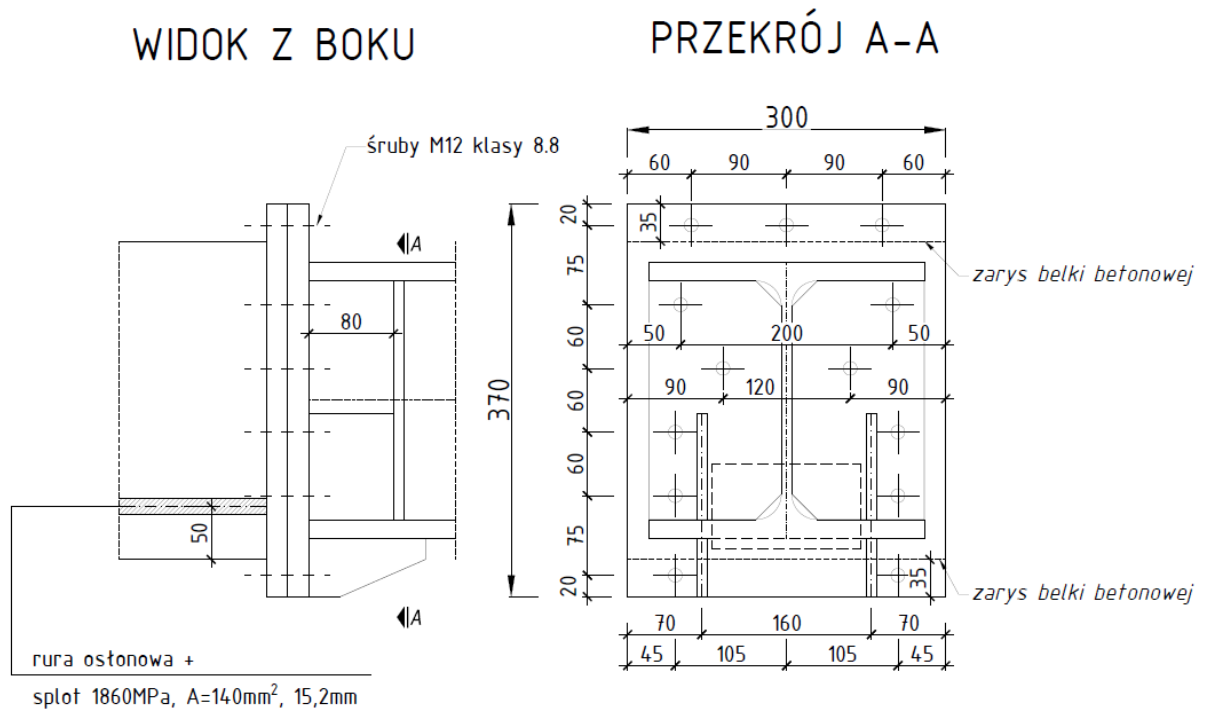
*Fot. 5.2 Zbrojenie skrajnego fragmentu części betonowej*



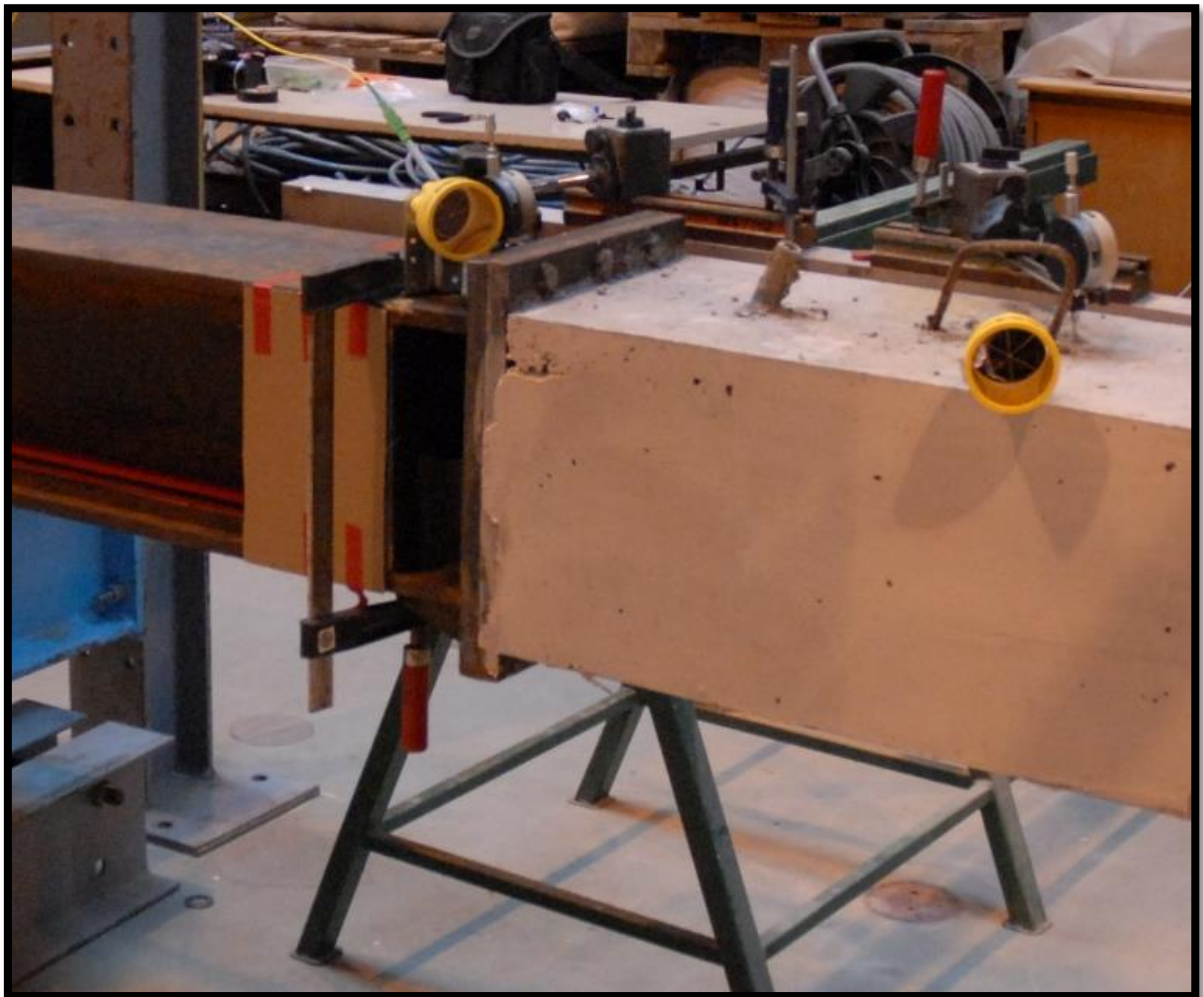
*Fot. 5.3 Kosze zbrojeniowe belek przed zabetonowaniem*

### **5.1.3.2. Połączenie części betonowej ze stalową**

Części betonowa i stalowa były połączone doczołowo za pomocą 13 śrub M12 klasy 8.8. Schemat styku pokazano na rys. 5.5 oraz fot. 5.4.



Rys. 5.5 Schemat połączenia doczołowego części betonowej i stalowej



Fot. 5.4 Połączenie części stalowej i betonowej



### 5.1.4. Materiały konstrukcyjne

#### 5.1.4.1. Beton

Do produkcji belek użyto betonu towarowego o nominalnej klasie C30/37. Betonowanie wykonano przy użyciu pompo-gruszki. Mieszanka była zagęszczana za pomocą wibratorów wgłębnych. Mieszankę zbadano przed wbudowaniem i otrzymano następujące wyniki:

- temperatura mieszanki 8,2°C,
- opad stożka 22cm (badanie wg normy PN-EN 12350-2),
- napowietrzenie 5% (badanie wg normy PN-EN 12350-7).

Podczas betonowania pobrano do badań laboratoryjnych 12 próbek sześciennych o boku 150mm.



*Fot. 5.5 Belki bezpośrednio po zabetonowaniu*

Próbki sześciennie poddano badaniu wytrzymałości na ściskanie zgodnie z normą PN-EN 12390-3 oraz dodatkowo zważono. Wyniki uzyskane z pomiarów z analizą statystyczną zestawiono w tab. 5.1÷5.3.

W celu sprawdzenia, czy uzyskane wyniki obarczone są błędem grubym, wykonano test Grubbsa:

$$G > \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t_{\left(\frac{\alpha}{2n}, n-2\right)}^2}{n-2 + t_{\left(\frac{\alpha}{2n}, n-2\right)}^2}} \quad (5.1)$$

gdzie:

$$G - \text{parametr Grubbsa: } G = \frac{\max|x_i - \bar{x}|}{s_x} \quad (5.2),$$

$n$  – liczba pomiarów,

$t_{\left(\frac{\alpha}{2n}, n-2\right)}$  – wartość krytyczna rozkładu t-Studenta przy liczbie stopni swobody  $n - 2$

oraz poziomie istotności  $\frac{\alpha}{2n}$ ,

$x_i$  – wynik i-tego pomiaru,

$\bar{x}$  – wartość średnia,

$$s_x - \text{odchylenie standardowe: } s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5.3).$$

W celu oceny wiarygodności uzyskanych wyników pomiarów, wyznaczono wartość niepewności rozszerzonej, która określa przedział ufności:

$$U(x) = k \cdot u_c(x) \quad (5.4)$$

gdzie:

$U(x)$  – niepewność rozszerzona,

$$u_c(x) - \text{całkowita niepewność standardowa: } u_c(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{3}(\Delta_d x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta_e x)^2}$$

(5.5)

$k$  – współczynnik rozszerzenia,

$$s_{\bar{x}} - \text{niepewność standardowa: } s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (5.6),$$

$\Delta_d x$  – niepewność wzorcowania,

$\Delta_e x$  – niepewność eksperymentatora,

$s_x$  – odchylenie standardowe,

$n$  – liczba pomiarów.

Jako wartość współczynnika rozszerzenia  $k$ , ze względu na małą liczbę próbek, przyjęto kwantyl rozkładu t-Studenta, zależny od poziomu ufności  $\alpha$  oraz stopni swobody  $\nu = n - 1$ .

Przyjęto ponadto:

niepewność wzorcowania:  $\Delta_d x = 1$ ,

niepewność eksperymentatora:  $\Delta_e x = 0$ .

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.1 Masa oraz wytrzymałość na ściskanie próbek sześciennych

Nr próbki	Masa [g]	Wytrzymałość na ściskanie $f_c$ [MPa]
1	7690	39
2	7766	36
3	7489	26,2
4	7593	27,7
5	7563	27,2
6	7596	26,8
7	7562	30
8	7610	27,7
9	7726	38,6
10	7492	26,3
11	7786	38,9
12	7542	28,6

Tab. 5.2 Test Grubbsa

Próbka	$f_c$ wytrzymałość na ściskanie [MPa]	n liczba pomiarów	$\bar{x}$ wartość średnia	$s_x$ odchylenie standardowe	$ x_i - \bar{x} $	MAX $ x_i - \bar{x} $	G parametr Grubbsa	Wartość krytyczna	Test Grubbsa
1	39	12	31,1	5,35	7,92	7,92	1,480	2,285	OK
2	36				4,92				
3	26,2				4,88				
4	27,7				3,38				
5	27,2				3,88				
6	26,8				4,28				
7	30				1,08				
8	27,7				3,38				
9	38,6				7,52				
10	26,3				4,78				
11	38,9				7,82				
12	28,6				2,48				

*Uwaga: Wartość krytyczną przyjęto na podstawie tablic statystycznych dla poziomu ufności 95%.*

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.3 Wyznaczenie niepewności pomiarowych

n	$s_x$	$u(x)$	$\Delta_d x$	$\Delta_e x$	$u_c(x)$	k	$\bar{x}$	$U(x)$
liczba pomiarów	odchylenie standardowe	niepewność standardowa	niepewność wzorcowania	niepewność eksperymentatora	niepewność standardowa całkowita	kwantyl t-Studenta	wartość średnia	niepewność rozszerzona
12	5,35	1,54	1	0	1,65	2,201	<b>31,08</b>	<b>3,63</b>

**Wytrzymałość betonu na ściskanie wynosi  $(31 \pm 4)$  MPa.**

### 5.1.4.2. Stal zbrojeniowa

Zastosowana stal zbrojeniowa to stal B500SP o klasie ciągliwości C. Wykonano badanie wytrzymałości na rozciąganie stali zbrojeniowej na 5 próbkach wg normy PN-EN ISO 6892-1.

Wyniki pokazano w tab. 5.4 oraz 5.5.



Fot. 5.6 Stal zbrojeniowa w czasie badania wytrzymałości na rozciąganie

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Fot. 5.7 Zerwany pręt zbrojeniowy

Tab. 5.4 Test Grubbsa

Próbka	$f_d$ wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	$n$ liczba pomiarów	$\bar{x}$ wartość średnia	$s_x$ odchylenie standardowe	$ x_i - \bar{x} $	MAX $ x_i - \bar{x} $	G parametr Grubbsa	Wartość krytyczna	Test Grubbsa
1	635	5	611,0	21,04	24,00	24,00	1,141	<b>1,672</b>	OK
2	632				21,00				
3	603				8,00				
4	591				20,00				
5	594				17,00				

Tab. 5.5 Wyznaczenie niepewności pomiarowych

$n$ liczba pomiarów	$s_x$ odchylenie standardowe	$u(x)$ niepewność standardowa	$\Delta_d x$ niepewność wzorcowania	$\Delta_e x$ niepewność eksperymentatora	$u_c(x)$ niepewność standardowa całkowita	$k$ kwantyl t- Studenta	$\bar{x}$ wartość średnia	$U(x)$ niepewność rozszerzona
5	21,04	9,41	1	0	9,43	2,776	<b>611,00</b>	<b>26,16</b>

Wytrzymałość stali zbrojeniowej na rozciąganie wynosiła  $(610 \pm 30)$  MPa.



## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Podczas tego samego badania próbek określono również granicę plastyczności. Otrzymane wyniki zestawiono w tab. 5.6 oraz tab. 5.7.

Tab. 5.6 Test Grubbsa

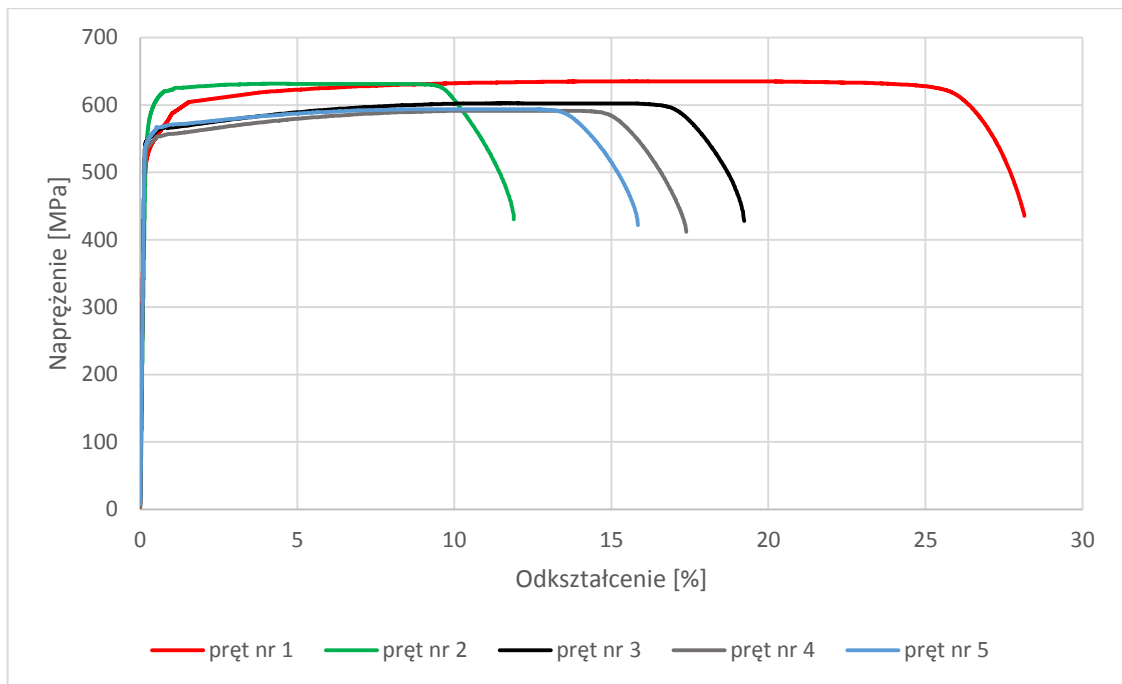
Próbka	$f_y$ umowna granica plastyczności [MPa]	n liczba pomiarów	$\bar{x}$ wartość średnia	$s_x$ odchylenie standardowe	$ x_i - \bar{x} $	MAX $ x_i - \bar{x} $	G parametr Grubbsa	Wartość krytyczna	Test Grubbsa
1	523	5	545,8	18,21	22,80	27,20	1,493	<b>1,672</b>	OK
2	573				27,20				
3	548				2,20				
4	538				7,80				
5	547				1,20				

Tab. 5.7 Wyznaczenie niepewności pomiarowych

Badanie	n liczba pomiarów	$s_x$ odchylenie standardowe	$u(x)$ niepewność standardowa	$\Delta_d x$ niepewność wzorcowania	$\Delta_e x$ niepewność eksperymentatora	$u_c(x)$ niepewność standardowa całkowita	k kwantyl t- Studenta	$\bar{x}$ wartość średnia	$U(x)$ niepewność rozszerzona
umowna granica plastyczności	5	18,21	8,14	1	0	8,17	2,776	<b>545,80</b>	<b>22,67</b>

**Granica plastyczności stali zbrojonej wynosi (550 ± 30) MPa.**

Na rys. 5.6 pokazano wykres naprężenie – odkształcenie stali zbrojonej otrzymane podczas badania wytrzymałości na rozciąganie. Wydłużenie poszczególnych próbek przy zerwaniu było zróżnicowane i wynosiło odpowiednio (zgodnie z kolejnością numeracji próbek): 27,88%; 11,83%; 20,68%; 16,18% oraz 15,95%.



Rys. 5.6 Wykres naprężenie – odkształcenie dla stali zbrojeniowej

### 5.1.4.3. Stal sprężająca

Do sprężenia części betonowej wykorzystano stal o nominalnej wytrzymałości na rozciąganie 1860MPa. Wykonano badanie wytrzymałości na rozciąganie stali sprężającej wg normy PN-EN ISO 6892-1 na 5 próbkach pojedynczych drutów ze splotu. Obliczenia ewentualnych błędów grubych oraz niepewności pomiarowych wykonano analogicznie jak dla stali zbrojeniowej. Wyniki pokazano w tab. 5.8 i 5.9.



Fot. 5.8 Druty zerwane po badaniu

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.8 Test Grubbsa

Próbka	$f_p$ wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	n liczba pomiarów	$\bar{x}$ wartość średnia	$s_x$ odchylenie standardowe	$ x_i - \bar{x} $	MAX $ x_i - \bar{x} $	G parametr Grubbsa	Wartość krytyczna	Test Grubbsa
1	1952	5	1954,8	27,36	2,80	37,20	1,360	<b>1,672</b>	OK
2	1992				37,20				
3	1920				34,80				
4	1969				14,20				
5	1941				13,80				

Tab. 5.9 Wyznaczenie niepewności pomiarowych

n	$s_x$	$u(x)$	$\Delta_d x$	$\Delta_e x$	$u_c(x)$	k	$\bar{x}$	$U(x)$
liczba pomiarów	odchylenie standardowe	niepewność standardowa	niepewność wzorcowania	niepewność eksperymentatora	niepewność standardowa całkowita	kwantyl t-Studenta	wartość średnia	niepewność rozszerzona
5	27,36	12,24	1	0	12,25	2,776	<b>1 954,80</b>	<b>34,01</b>

**Wytrzymałość stali sprężającej na rozciąganie wynosi (1950 ± 40) MPa.**

Podczas tego samego badania próbek określono również umowną granicę plastyczności. Otrzymane wyniki zestawiono w tab. 5.10 oraz tab. 5.11.

Tab. 5.10 Test Grubbsa

Próbka	$f_{p0,1}$ umowna granica plastyczności [MPa]	n liczba pomiarów	$\bar{x}$ wartość średnia	$s_x$ odchylenie standardowe	$ x_i - \bar{x} $	MAX $ x_i - \bar{x} $	G parametr Grubbsa	Wartość krytyczna	Test Grubbsa
1	1755	5	1740,2	21,14	14,80	31,20	1,476	<b>1,672</b>	OK
2	1764				23,80				
3	1709				31,20				
4	1736				4,20				
5	1737				3,20				

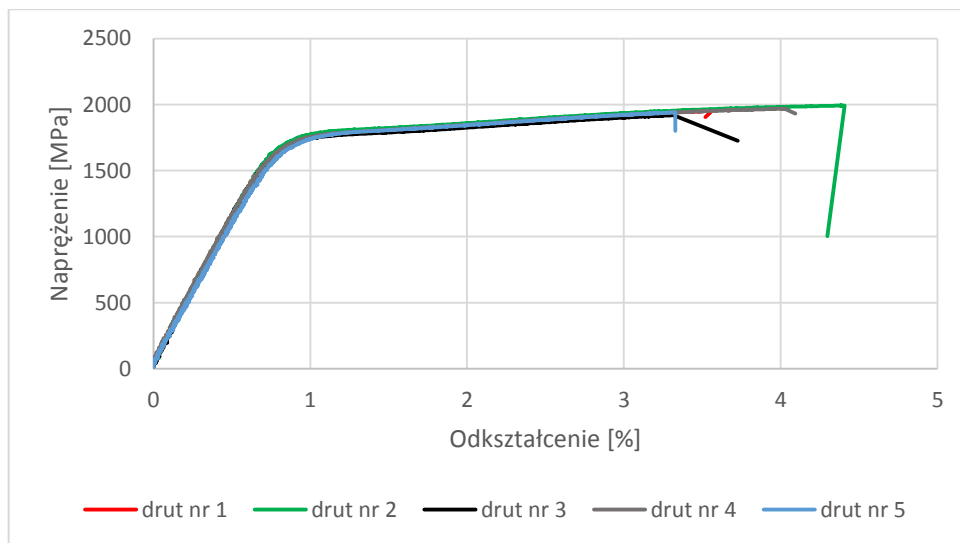
## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.11 Wyznaczenie niepewności pomiarowych

Badanie	n	$s_x$	$u(x)$	$\Delta_d x$	$\Delta_e x$	$u_c(x)$	k	$\bar{x}$	$U(x)$
	liczba pomiarów	odchylenie standardowe	niepewność standardowa	niepewność wzorcowania	niepewność eksperymentatora	niepewność standardowa całkowita	kwantyl t-Studenta	wartość średnia	niepewność rozszerzona
umowna granica plastyczności	5	21,14	9,45	1	0	9,47	2,776	<b>1 740,20</b>	<b>26,29</b>

**Umowna granica plastyczności stali sprężającej wynosi (1740 ± 30) MPa.**

Na rys. 5.7 pokazano wykres naprężenie – odkształcenie drutów sprężających otrzymany podczas badania wytrzymałości na rozciąganie. W przypadku wszystkich badanych próbek zniszczenie następowało przy wydłużeniu powyżej 3%. Wydłużenie przy zerwaniu poszczególnych próbek wynosiło odpowiednio (zgodnie z numeracją próbek): 3,56%, 4,40%, 3,30%, 4,04% oraz 3.32%.



Rys. 5.7 Wykres naprężenie – odkształcenie dla stali sprężającej

### 5.1.5. Sprężenie belek

Sprężenie części betonowej wykonano za pomocą pojedynczego splotu o polu powierzchni  $A_p=140\text{mm}^2$  i średnicy 15,2mm. Splot umieszczono w kanale kablowym oraz obustronnie zakotwiono wykorzystując systemowe elementy od dostawcy systemu sprężenia. W przypadku belek sprężonych ciągnem z przyczepnością, kanał kablowy zainiektowano po wykonaniu sprężenia. Iniekcję wykonano zaczynem cementowym z dodatkiem materiału

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

powodującego pęcznienie. W przypadku belek sprężonych ciągnem bez przyczepności, kanał kablowy pozostawiono pusty.

Sprężenie wykonywano jednostronnie prasą SC2, która dodatkowo była wyposażona w system blokad, w celu ograniczenia występowania straty od poślizgu w zakotwieniu.



Fot. 5.9 Belki w czasie sprężania

Zaprojektowano sprężenie belek siłą o wartości ok. 45kN. Siła ta została określona na podstawie warunku, aby w środku rozpiętości belki pod działaniem ciężaru własnego oraz siły sprężającej, naprężenia rozciągające we włóknach górnych osiągały wartość zbliżoną do zera. Ponadto, przy takiej wartości siły sprężającej, naprężenia rozciągające nie przekroczyły wytrzymałości betonu na rozciąganie w strefach podporowych.

Belki sprężano etapami, przykładając w pierwszym etapie siłę wywołaną ciśnieniem w pompie 150 bar, następnie zwalniając prasę. W kolejnym kroku przykładano siłę wywołaną ciśnieniem 200 bar, która po uwzględnieniu strat doraźnych, pozwalała na uzyskanie założonej wartości siły sprężającej.

Podczas sprężania prowadzono kontrolę odkształceń w konstrukcji – mierzone były odkształcenia stali sprężającej za pomocą tensometrów elektrooporowych oraz odkształcenia w betonie za pomocą światłowodów. Dokładny opis wykorzystanych technik pomiarowych został zawarty w rozdziale 5.3.

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Na podstawie uzyskanych wyników odkształceń, oszacowano wartość siły sprężającej wprowadzonej w konstrukcję. W tab. 5.12 zestawiono wartości siły sprężającej po stratach doraźnych wraz z podaniem wielkości strat doraźnych, które wystąpiły po zwolnieniu prasy.

Tab. 5.12 Wartości siły sprężającej po stratach doraźnych oraz wielkości strat doraźnych w poszczególnych belkach

nr belki	P [kN]	$\Delta P_{\text{doraźne}}$ [kN]
1	42,5	19,4
2	45,2	18,1
3	45,3	17,9
4	43,4	16,0
5	47,4	14,4
6	42,9	14,4
7	47,6	14,5
8	43,2	17,3
9	39,8	16,8
10	48,6	17,6
11	50,6	16,2
12	43,3	19,5

Średnia wartość siły sprężającej po stratach doraźnych wyniosła 45,0kN, natomiast średnia wartość strat doraźnych 17,0kN. Wielkość strat reologicznych w chwili prowadzenia badań oszacowano na poziomie 5kN.

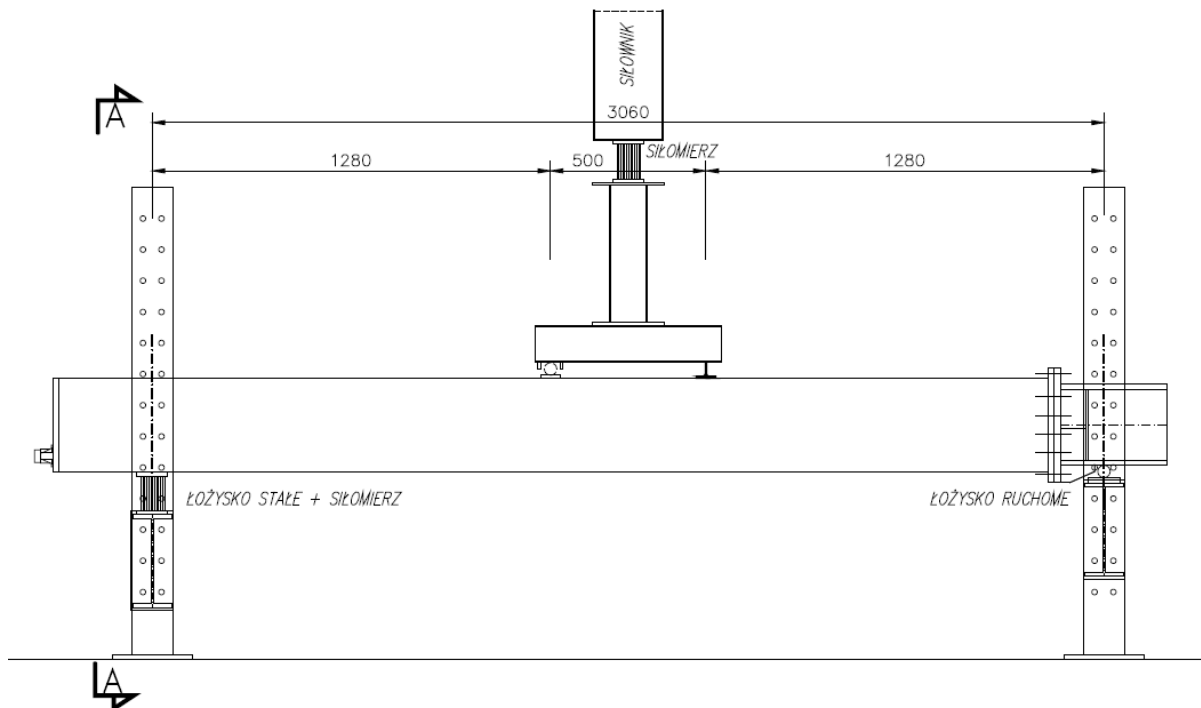
### 5.1.6. Program badań

Belki były obciążane siłownikiem za pośrednictwem trawersu. W pierwszym etapie przykładana była siła równa kolejno 10kN oraz 20kN, z każdorazowym całkowitym odciążeniem. Graniczna wartość siły w pierwszym etapie – 20kN – została określona na podstawie oszacowanej wartości momentu rysującego, tak aby w tej fazie nie doszło do zarysowania. Etap ten miał na celu ustabilizowanie belki na podporach. Po jego zakończeniu rozpoczynała się druga, zasadnicza faza obciążenia. Belki były obciążane systematycznie zwiększającą co 10kN siłą, aż do zniszczenia. Siła była zwiększana po ustabilizowaniu ugięć pod danym obciążeniem.

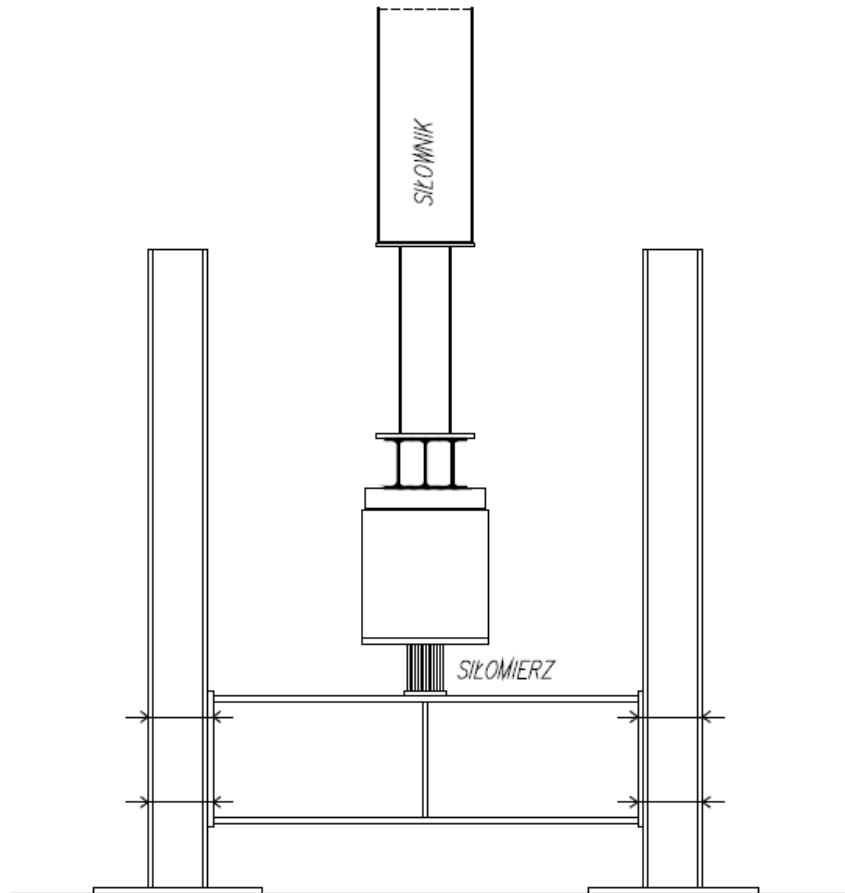
### 5.2. Opis stanowiska badawczego

Do badania użyto prasy Schenck Pegasus sterowanej urządzeniem 4900 Digital Servocontroller. Siła z tłoka była przekazana na belki za pomocą trawersu w dwóch punktach, w rozstawie osiowym 50cm.

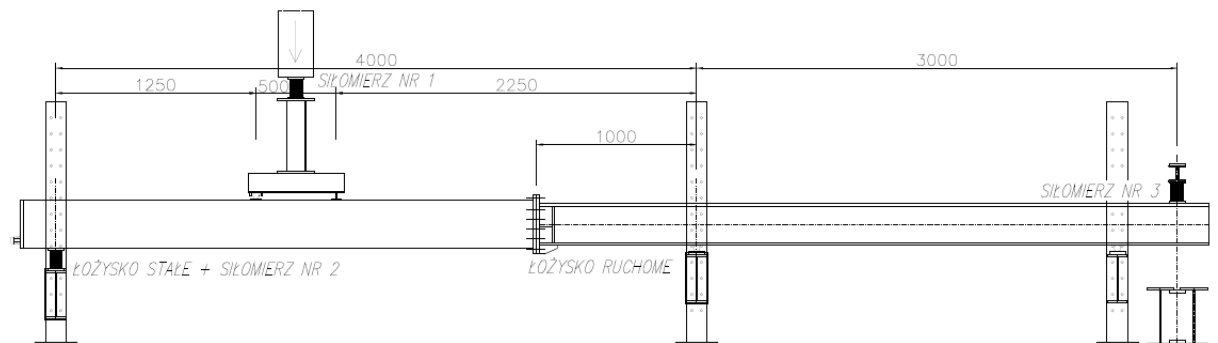
Podczas badań belek swobodnie podpartych wykonywano siłomierzami kontrolny pomiar siły pod siłownikiem oraz kontrolny pomiar reakcji podporowej na łożysku stałym (rys. 5.8, 5.9). W przypadku belek ciągłych dokonywano analogicznych pomiarów kontrolnych siłomierzami: pod siłownikiem oraz reakcji podporowych (rys. 5.10).



Rys. 5.8 Widok stanowiska do badań belek swobodnie podpartych (uwaga: wymiary w [mm])



Rys. 5.9 Przekrój A-A (widok na podporę stałą z siłomierzem)



Rys. 5.10 Widok stanowiska do badań belek ciąglych (uwaga: wymiary w [mm])



## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



*Fot. 5.10 Stanowisko podczas badania belek swobodnie podparych*



*Fot. 5.11 Stanowisko podczas badania belek ciągłych*

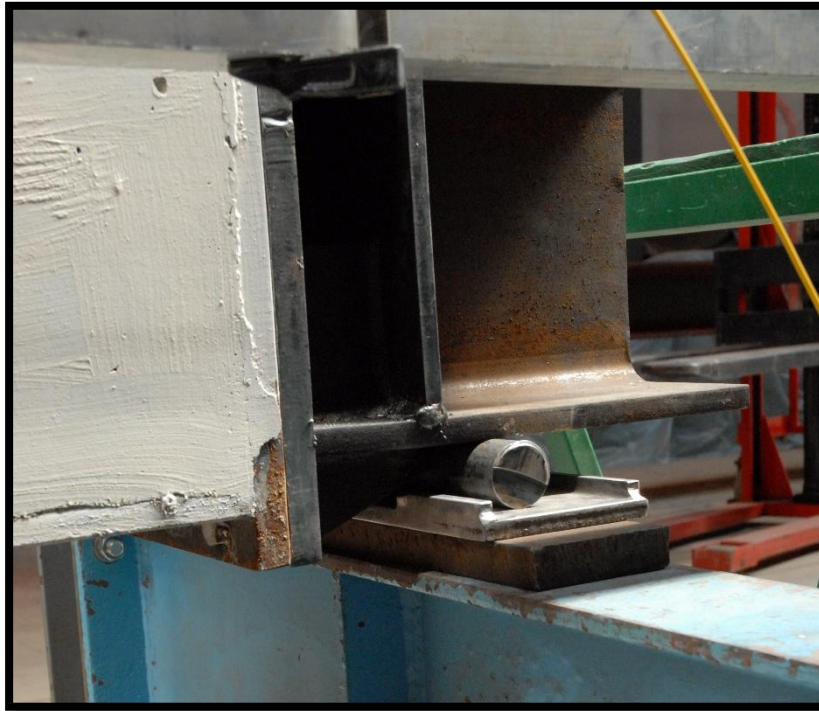


*Fot. 5.12 Widok na stanowisko od czoła belki*

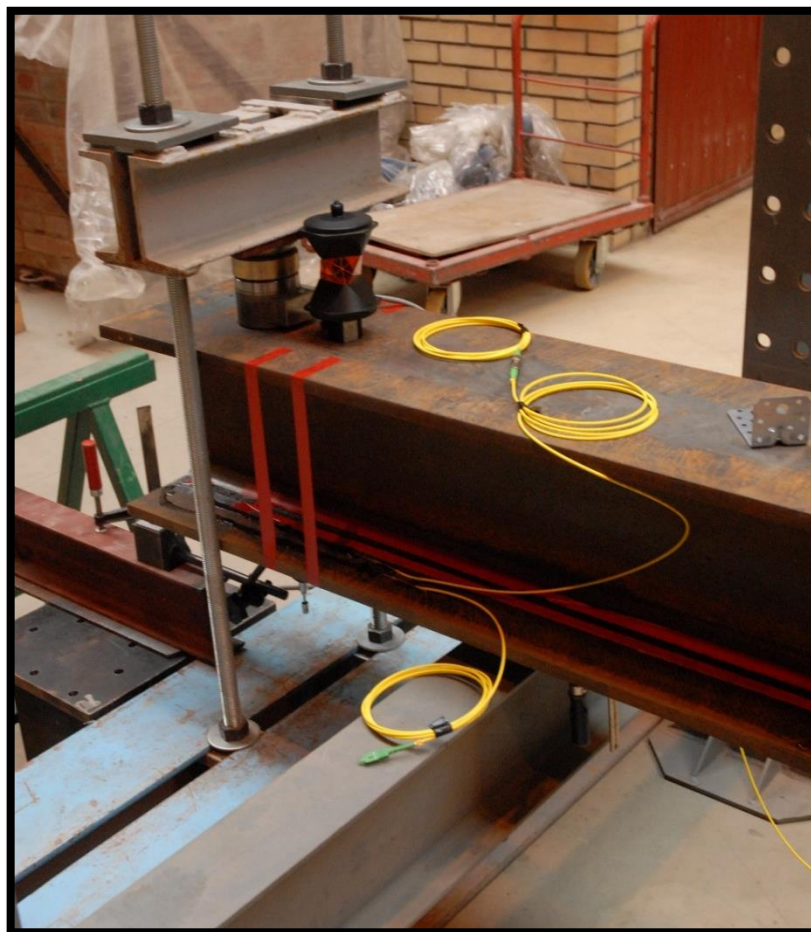


*Fot. 5.13 Trawers do przekazywania siły z tłoka na belkę*



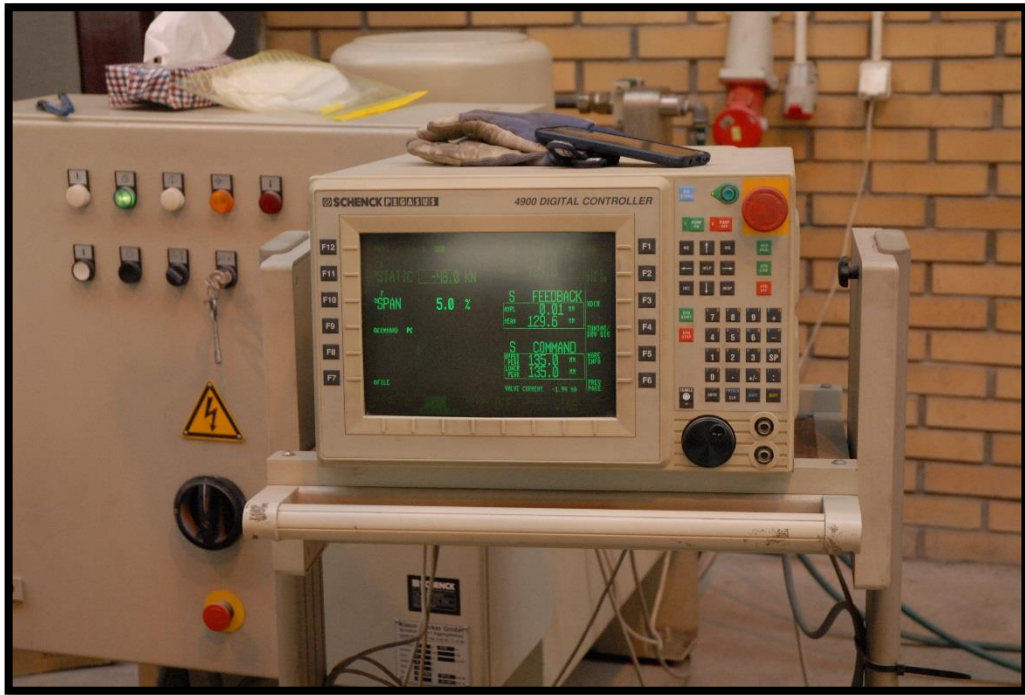


*Fot. 5.14 łożysko ruchome w belce swobodnie podpartej*



*Fot.5.15 Podpora na końcu belki ciągłej*

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Fot. 5.16 Urządzenie sterujące pracą tłoka

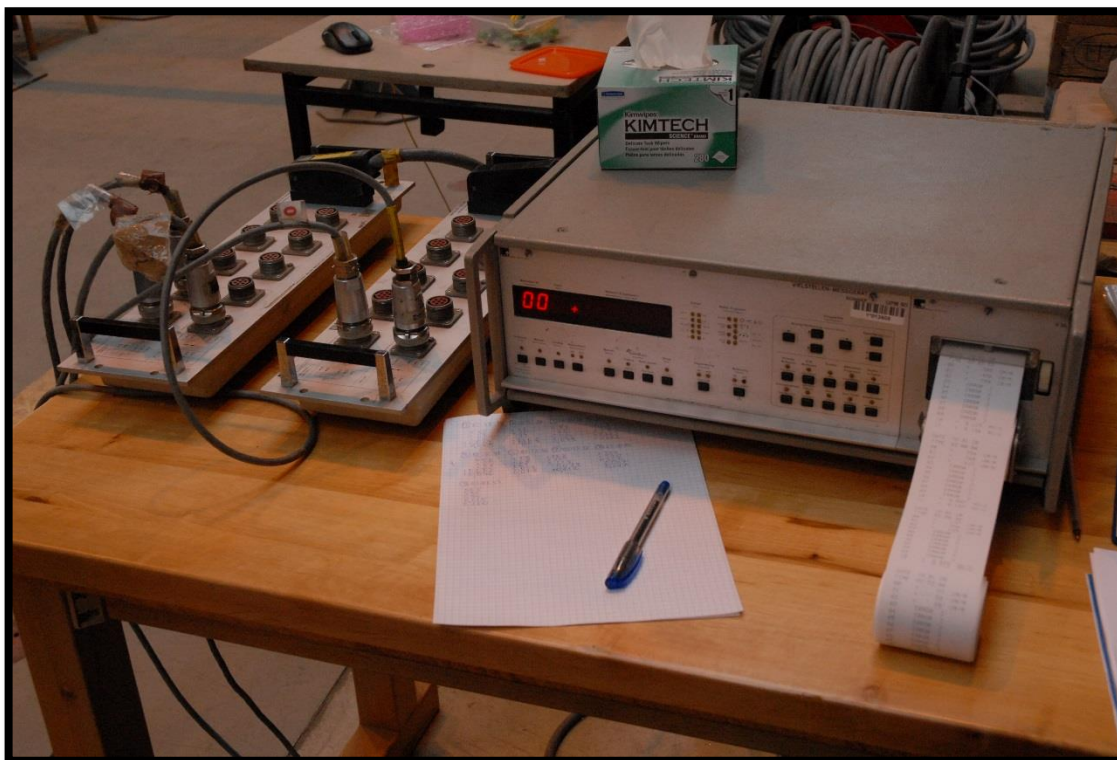
### 5.3. Technika pomiarowa

Do pomiaru odkształceń stali sprężającej wykorzystano tensometry elektrooporowe 1-LY11-0.3/120 firmy HBM (oporność nominalna  $120\Omega$ ; odcinek pomiarowy  $0,3 \times 0,9\text{mm}$ ; wielkość całego czujnika  $2,0 \times 1,2\text{mm}$ ). Na każdym splocie umieszczono po 3 tensometry, przyklejone na co drugim drucie. Tensometry umieszczone zostały w jednym przekroju splotu i zlokalizowane w obszarze, gdzie pod obciążeniem podczas badania wystąpi czyste zginanie (około środka rozpiętości belek betonowych). W celu zabezpieczenia przed mechanicznym zniszczeniem czujników podczas montażu i iniekcji, użyto powłoki silikonowej oraz pasty butylowej na folii aluminiowej (fot. 5.17). Do przetwarzania danych z tensometrów użyto urządzenie HBM-UPM-60 (fot. 5.18).



*Fot. 5.17 Tensometry elektrooporowe umieszczone na splotach po zabezpieczeniu silikonem*





Fot. 5.18 Urządzenie HBM-UPM-60 do przetwarzania danych z tensometrów oraz siłomierzy

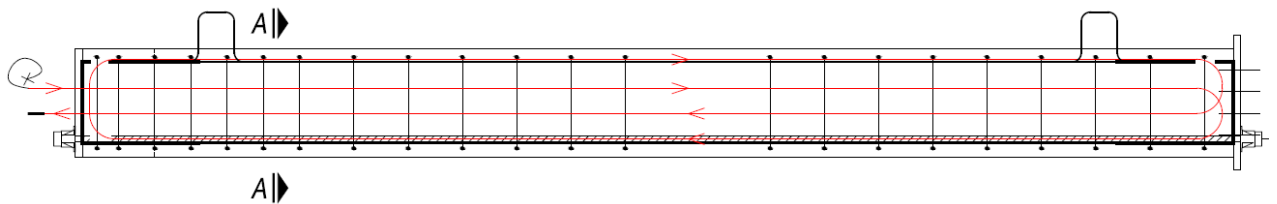
W belkach zastosowano pomiar odkształceń z wykorzystaniem światłowodów. Technika ta pozwala na realizowanie pomiaru odkształceń w sposób geometrycznie ciągły wzdłuż całej długości włókna pomiarowego (ang. *distributed fibre optic sensors DFOS*), które stanowi pojedynczy światłowód telekomunikacyjny [7, 41, 103, 104]. Światłowody produkowane są w taki sposób, aby część wewnętrzna (rdzeń) miała nieznacznie różny współczynnik załamania światła od części zewnętrznej (płaszczka). Ze względu na różnice we współczynnikach załamania światła materiału rdzenia i płaszczka, wiązka światła może być transmitowana na zasadzie zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia na granicy tych dwóch ośrodków. Na skutek zaburzeń w strukturze rdzenia światłowodu (np. mikrozarzysowanie, mikrozanieczyszczenie, lokalna zmiana gęstości szkła) dochodzi do powstania zjawiska rozpraszania światła nazywanego rozpraszaniem Rayleigha. W konsekwencji, odbita od imperfekcji struktury szkła fala świetlna porusza się wstecz względem pierwotnego kierunku ruchu. Amplituda rozproszenia jest przypadkową, lecz stałą dla danego włókna własnością. Analiza odbitego promieniowania prowadzona jest za pomocą zaawansowanych reflektometrów optycznych. Jeśli na skutek odkształceń mechanicznych lub termicznych dojdzie do zmiany długości włókna światłowodowego, zmieniają się również odległości między lokalnymi imperfekcjami, co widoczne jest jako przesunięcie spektrum częstotliwościowego fali wstecznej. Przesunięcie to jest proporcjonalne do liniowej kombinacji

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

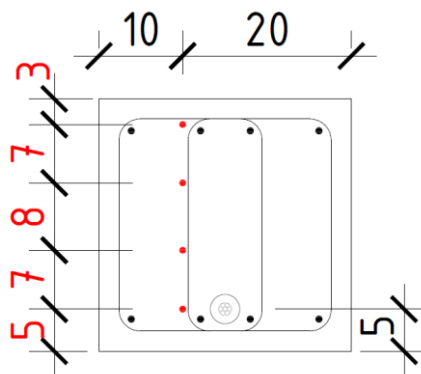
zmian temperatury i odkształcenia i może być analizowane z rozdzielczością przestrzenną do 5mm.

Do badań użyto czujników EpsilonSensor firmy SHM System oraz reflektometru optycznego LUNA (model OBR 4600) do przetwarzania sygnału, którego rozdzielczość pomiaru odkształceń wynosi  $\pm 1\mu\epsilon$ . Światłowody przeznaczone do zabetonowania zabezpieczone były specjalnymi powłokami, chroniącymi je przed uszkodzeniem mechanicznym.

W każdej z 12 belek betonowych umieszczono po jednym ciągłym światłowodzie, który został ułożony na czterech różnych wysokościach przekroju (rys. 5.11, 5.12). Światłowód został trwale przymocowany do zbrojenia przed betonowaniem. Niestandardowe rozmieszczenie światłowodów na czterech wysokościach przekroju pozwoliło m.in. na analizę zmian położenia osi obojętnej.



Rys. 5.11 Rozmieszczenie światłowodu w przekroju podłużnym

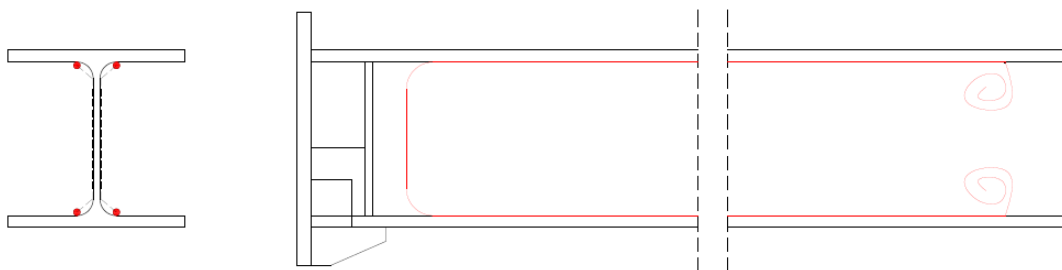


Rys. 5.12 Przekrój A-A: rozmieszczenie światłowodów w przekroju poprzecznym



Fot. 5.19 Montaż światłowodu przed betonowaniem

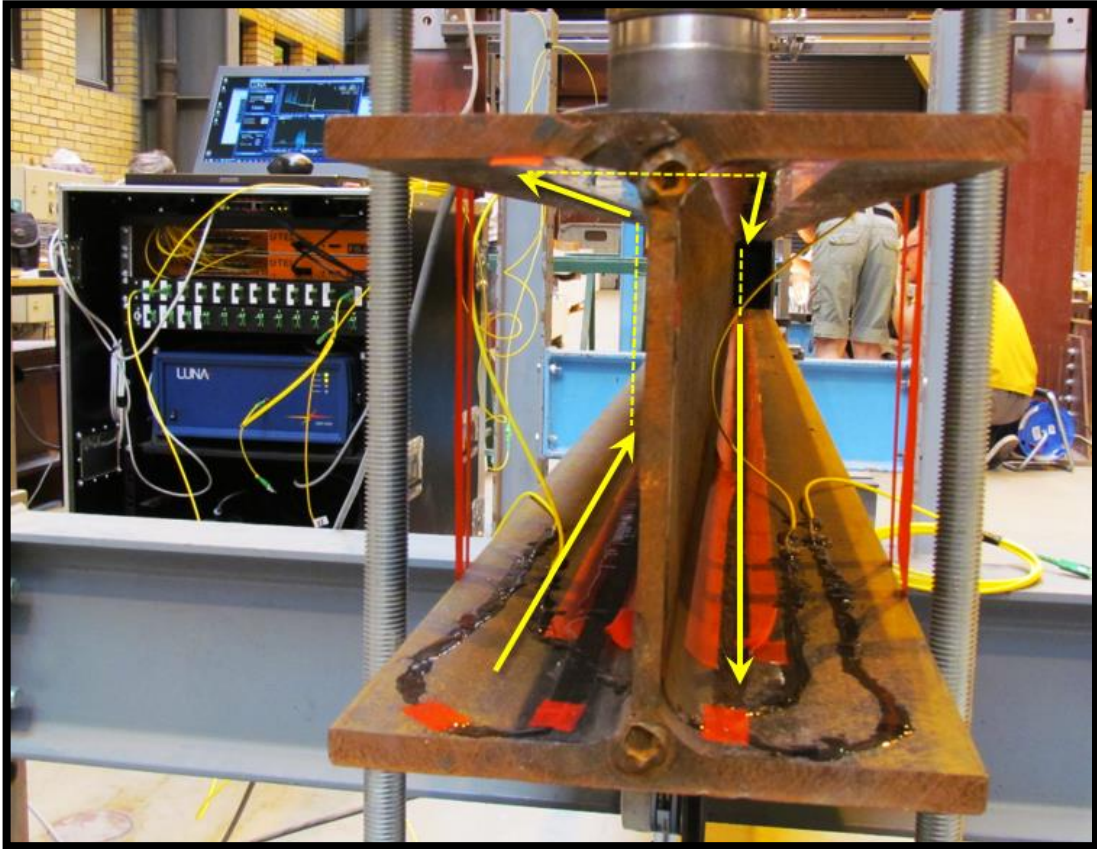
W części stalowej belek ciągłych wykorzystano światłowód bez powłok ochronnych. Światłowód przyklejono na powierzchni belki stalowej – obustronnie na pasie górnym i dolnym dwuteownika HEB 260 (po wewnętrznych stronach stron pasów, rys. 5.13).



Rys. 5.13 Rozmieszczenie światłowodu na części stalowej w przekroju poprzecznym i widoku z boku



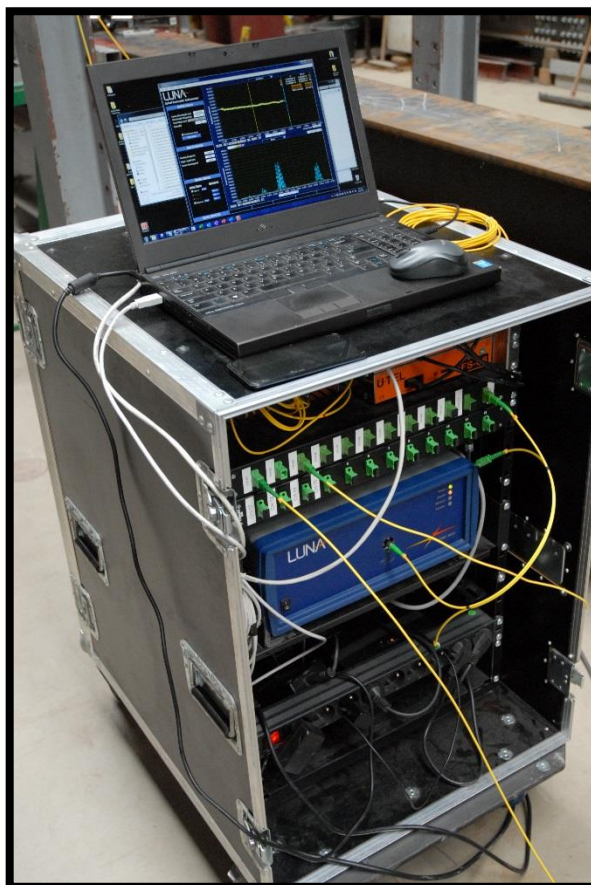
## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Fot. 5.20 Światłowód na elemencie stalowym z zaznaczonym kierunkiem pomiaru



Fot. 5.21 Reflektometr optyczny LUNA oraz urządzenie HBM-UPM-60



*Fot. 5.22 Reflektometr optyczny LUNA*

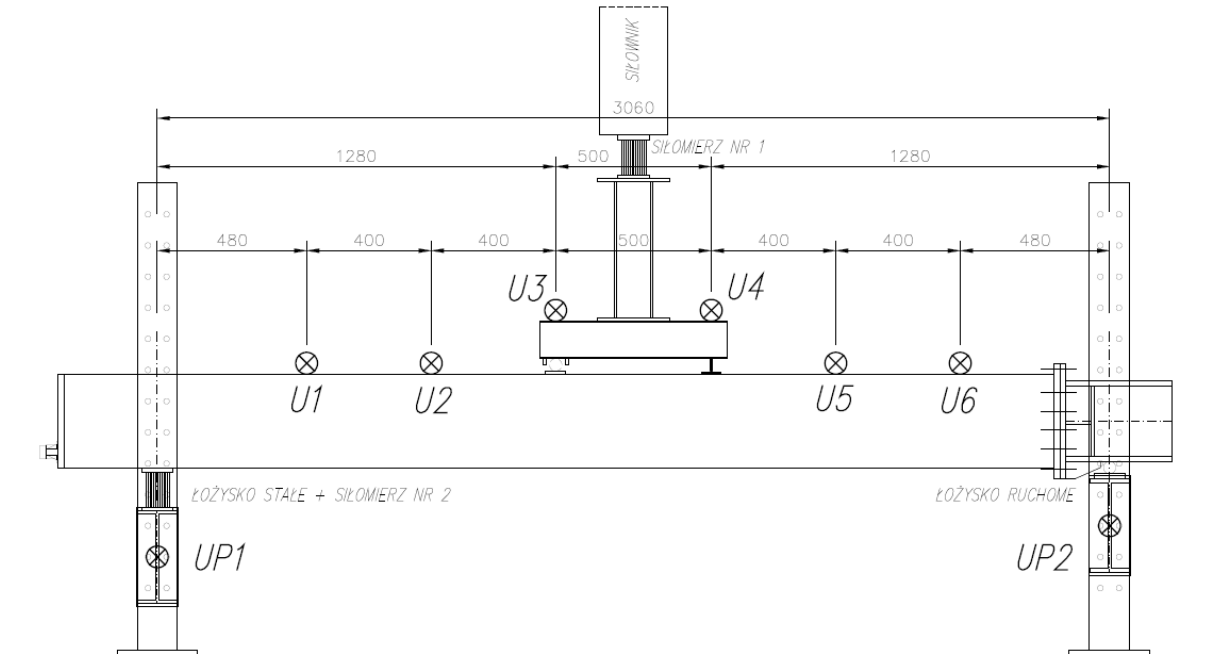
Podczas badań do pomiaru siły użyto siłomierzy HBM C 6R o nośności do 50t. Szczegółowe informacje dotyczące ilości i lokalizacji zastosowanych czujników podano w p. 5.2. Sygnał przetwarzano za pomocą HBM-UPM-60.



Fot. 5.23 Siłomierz C6 R HBM

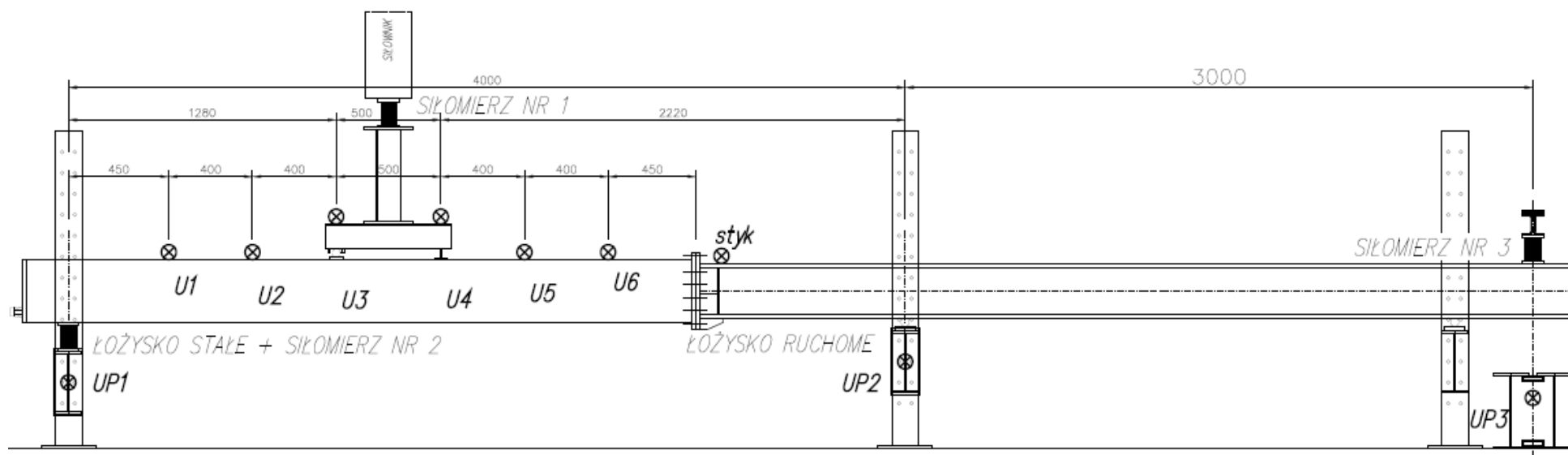
Pomiary ugięć belek zostały wykonane niezależnie dwoma technikami: wykorzystując elektroniczne czujniki o dokładności 0,001mm oraz wykorzystując technikę geodezyjną (pomiar kontrolny tachimetrem) o dokładności 0,01mm. W obu przypadkach ugięcia były mierzone w tych samych przekrojach – zgodnie z rys. 5.14 oraz rys. 5.15: w sześciu przekrojach na długości belki betonowej ( $U1 \div U6$ ), na podporach ( $UP1 \div UP3$ ) oraz przy styku montażowym w przypadku belek ciągłych („styk”). Uzyskano zgodność wyników ugięć mierzonych z wykorzystaniem czujników elektronicznych oraz tachimetrem. Zmierzone podczas badań ugięcia podpór pozwoliły na uwzględnienie podatności podpór w obliczeniach i analizach.

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Rys. 5.14 Rozmieszczenia czujników do pomiaru ugięć w belce swobodnie podpartej (U1÷U6 – czujniki do pomiaru ugięć na długości belki betonowej; UP1, UP2 – czujniki do pomiaru ugięć podpór)

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Rys. 5.15 Rozmieszczenie czujników do pomiaru ugięć w belce ciągłej (U1÷U6 czujniki do pomiaru ugięć na długości belki betonowej; „styk” – czujnik do pomiaru ugięć przy styku montażowym; UP1÷UP3 czujniki do pomiaru ugięć podpór)





*Fot. 5.24 Czujnik zegarowy do pomiaru ugięcia belki*



*Fot. 5.25 Tachimetr do geodezyjnych pomiarów ugięć belek*



Fot. 5.26 Belka z zamontowanymi czujnikami do pomiarów ugięć

## 5.4. Redystrybucja momentów zginających

## 5.4.1. Siła powodująca wyczerpanie SGN

W tabeli 5.13 zestawiono wartości obciążeń powodujących wyczerpanie stanu granicznego nośności (SGN) oraz ugięć przy zniszczeniu badanych belek, z podziałem na typ: belki ciągłe oraz swobodnie podparte, sprężone ciągnem z przyczepnością i bez przyczepności. Linię ugięcia w kolejnych fazach obciążenia dla poszczególnych belek przedstawiono w załączniku nr 1.

Tab. 5.13 Wartości obciążeń powodujących wyczerpanie stanu granicznego nośności ( $P_{max}$ ) oraz maksymalne ugięcia przy zniszczeniu ( $u_{max}$ )

nr belki	$P_{max}$ [kN]	$u_{max}$ [mm]	typ belki
1	131	46,89	swobodnie podparta, z iniekcją kanału kablowego
4	140	41,57	
6	140	55,08	
<i>średnio</i>	<b>137</b>	<b>47,85</b>	
9	111	54,99	swobodnie podparta, bez iniekcji kanału kablowego
10	105	49,84	
12	110	55,19	
<i>średnio</i>	<b>109</b>	<b>53,34</b>	
2	150	46,24	ciągła, z iniekcją kanału kablowego
3	153	42,86	
5	156	42,17	
<i>średnio</i>	<b>153</b>	<b>43,76</b>	
7	138	41,08	ciągła, bez iniekcji kanału kablowego
8	130	45,68	
11	125	40,74	
<i>średnio</i>	<b>131</b>	<b>42,50</b>	

Wartości obciążeń powodujących wyczerpanie stanu granicznego nośności były większe dla belek sprężanych ciągnem z przyczepnością zarówno dla belek swobodnie podpartych, jak i ciągłych. W przypadku belek swobodnie podpartych, średnie obciążenie powodujące wyczerpanie stanu granicznego nośności belek sprężonych ciągnami z przyczepnością było o ok. 26% większe niż w przypadku belek sprężonych ciągnami bez



## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

pryczepności; analogicznie dla belek ciągłych różnica ta wyniosła ok. 17%. Wartości średnich ugięć w chwili wyczerpania SGN są większe dla belek swobodnie podpartych niż dla belek ciągłych. Dla belek swobodnie podpartych większe wartości ugięć (o ok. 10%) wystąpiły przy sprężeniu cięgnami bez przyczepności. Dla belek ciągłych uzyskano podobne wyniki ugięć dla sprężenia cięgnami z przyczepnością oraz bez przyczepności.

Belki ulegały zniszczeniu na skutek zmiążdżenia betonu w strefie ściskanej. Na fot. 5.27÷5.33 pokazano przykładowe belki po zniszczeniu. Zdjęcia wszystkich belek znajdują się na dołączonej płycie CD. Jak widać na fotografiach, w przypadku belek sprężonych cięgnami z przyczepnością (belki nr 1÷6) w chwili zniszczenia występowało wiele rys o znacznej rozwarłości. W belkach sprężonych cięgnami bez przyczepności (belki nr 7÷12) w chwili zniszczenia widoczne jest jedno pęknięcie, a pozostałe rysy mają niewielką rozwarłość.



*Fot. 5. 27 Belka nr 2 po osiągnięciu SGN*

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



*Fot. 5. 28 Belka nr 3 po osiągnięciu SGN*



*Fot. 5. 29 Belka nr 4 po osiągnięciu SGN*



## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



*Fot. 5. 30 Belka nr 6 po osiągnięciu SGN*



*Fot. 5. 31 Belka nr 9 po osiągnięciu SGN*



## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



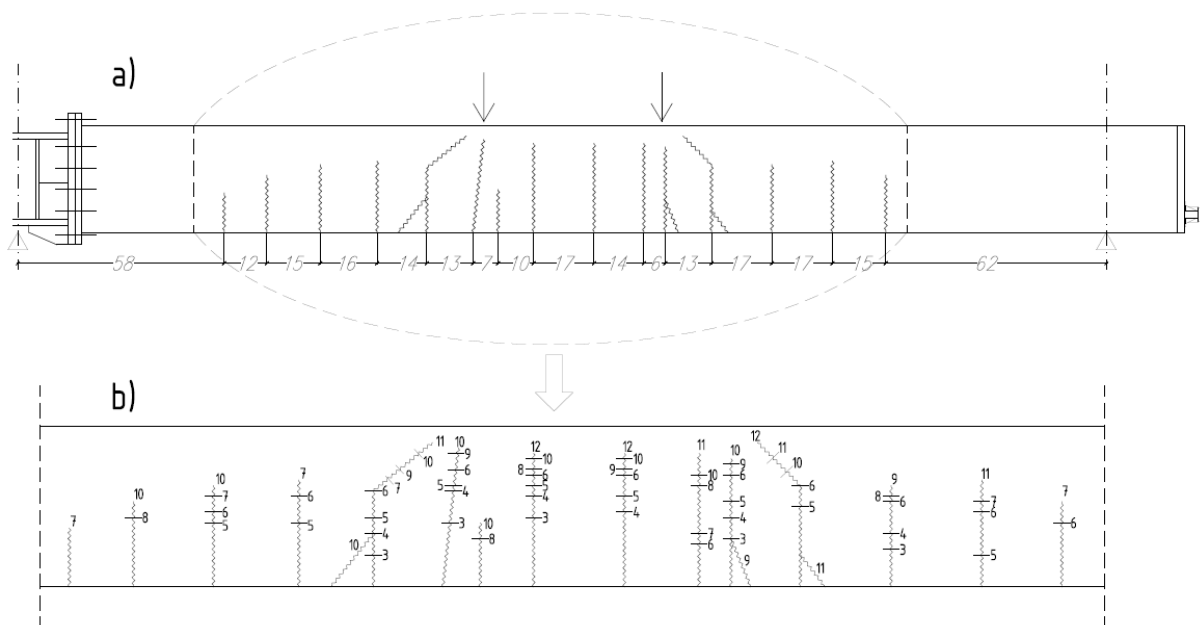
*Fot. 5. 32 Belka nr 10 po osiągnięciu SGN*



*Fot. 5. 33 Belka nr 12 po osiągnięciu SGN*

### 5.4.2. Obraz zarysowania

Podczas obciążania belek zarejestrowano obraz ich zarysowania w poszczególnych fazach obciążenia. Opis oraz schemat zarysowania każdej z belek znajduje się w załączniku nr 2. Na rys. 5.16 przedstawiono przykładowy schemat zarysowania belki nr 4. Numery przy rysach na rys. 5.16b oznaczają zasięg rys powstałych w kolejnych fazach obciążenia (liczby oznaczają wartości obciążenia w [kN] podzieloną przez dziesięć).



Rys. 5.16 Schemat zarysowania belki nr 4

a) widok z boku badanej belki (wymiar w [cm])

b) obraz zarysowania z uwzględnieniem rozwoju rys w kolejnych fazach obciążenia

### Analiza obrazu zarysowania belek

- 1) W belkach sprężonych ciągniami bez przyczepności występuje mniej rys w większym rozstawie niż w przypadku belek sprężonych ciągniami z przyczepnością.
- 2) W belkach ciągłych sprężonych bez przyczepności całkowita długość odcinka zarysowanego jest mniejsza niż w belkach ciągłych sprężonych z przyczepnością o ok. 10% (patrz także p. 5.5).
- 3) Wysokość strefy ściskanej w chwili zniszczenia była równa dla wszystkich typów belek (tj. belek swobodnie podpartych i ciągłych) i wyniosła  $0,1h$  ( $h$  – wysokość przekroju).

Analiza rezultatów badań opisana w p. 5.4.1 oraz 5.4.2 potwierdza znane z literatury zjawiska zachodzące w obciążonych belkach sprężonych. Wysokość strefy ściskanej betonu w chwili osiągnięcia SGN była taka sama dla belek sprężonych ciągniami z przyczepnością oraz bez przyczepności, jednak nośność graniczna przekroju sprężonego ciągniami bez

pryczepności jest wyraźnie mniejsza niż nośność przekroju sprężonego ciągniami z przyczepnością. W związku z tym, szacowanie momentu granicznego tylko na podstawie warunków równowagi sił wewnętrznych może zatem prowadzić do błędnych wyników.

### 5.4.3. Moment rysujący

Do zarysowania przekroju betonowego dochodzi, gdy naprężenia rozciągające w betonie osiągną wytrzymałość na rozciąganie. Precyzyjne wyznaczenie momentu rysującego nie jest zadaniem łatwym. Działanie momentu zginającego wywołuje naprężenia normalne, których rozkład pokazano na rys. 5.17 (linia ciągła). Rozkład ten charakteryzuje się liniowym przebiegiem naprężeń w strefie ściskanej i krzywoliniowym przebiegiem w strefie rozciąganej, który wynika z częściowego uplastycznienia betonu w strefie rozciąganej. Najdokładniejsze byłoby przyjęcie sprężysto-plastycznej pracy materiału w strefie rozciąganej, ale w praktyce w celu uproszczenia obliczeń przyjmuje się liniowy rozkład naprężeń w strefie rozciąganej betonu, jednocześnie zwiększając wytrzymałość betonu na rozciąganie do umownej granicy  $\lambda f_{ctm}$ , gdzie parametr  $\lambda$  został nazwany współczynnikiem uplastycznienia. Zależy on m.in. od kształtu przekroju, intensywności sprężenia, a także stopnia nasycenia przekroju zbrojeniem zwykłym [2, 3, 34, 73]. W konsekwencji moment rysujący  $M_r$  obliczany jest wzorem [73]:

$$M_r = W \left( \frac{P}{A_c} + \frac{Pz_{cp}}{W} + \lambda f_{ctm} \right) \quad (5.7)$$

gdzie:

$P$  – siła sprężająca po stratach w chwili zarysowania,

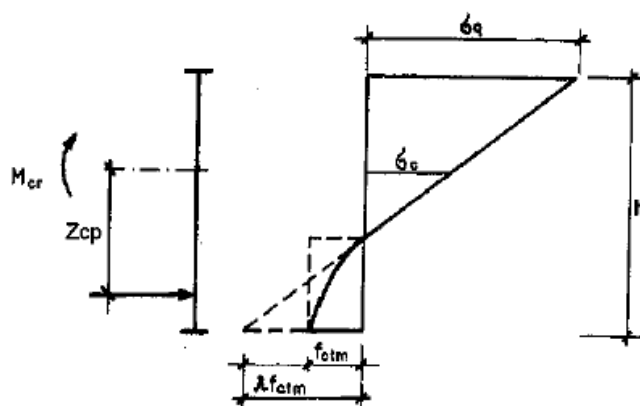
$A_c$  – pole przekroju elementu,

$z_{cp}$  – mimośród siły sprężającej,

$W$  – wskaźnik wytrzymałości przekroju, w odniesieniu do analizowanej krawędzi,

$f_{ctm}$  – średnia wytrzymałości betonu na rozciąganie w chwili obciążenia przekroju ( $f_{ctm}(t)$ ),

$\lambda$  - tzw. współczynnik uplastycznienia, wyrażający większą odkształcalność betonu zbrojonego w chwili zarysowania.



Rys. 5.17 Rozkład naprężeń rozciągających w chwili zarysowania w zginanej belce sprężonej [73]

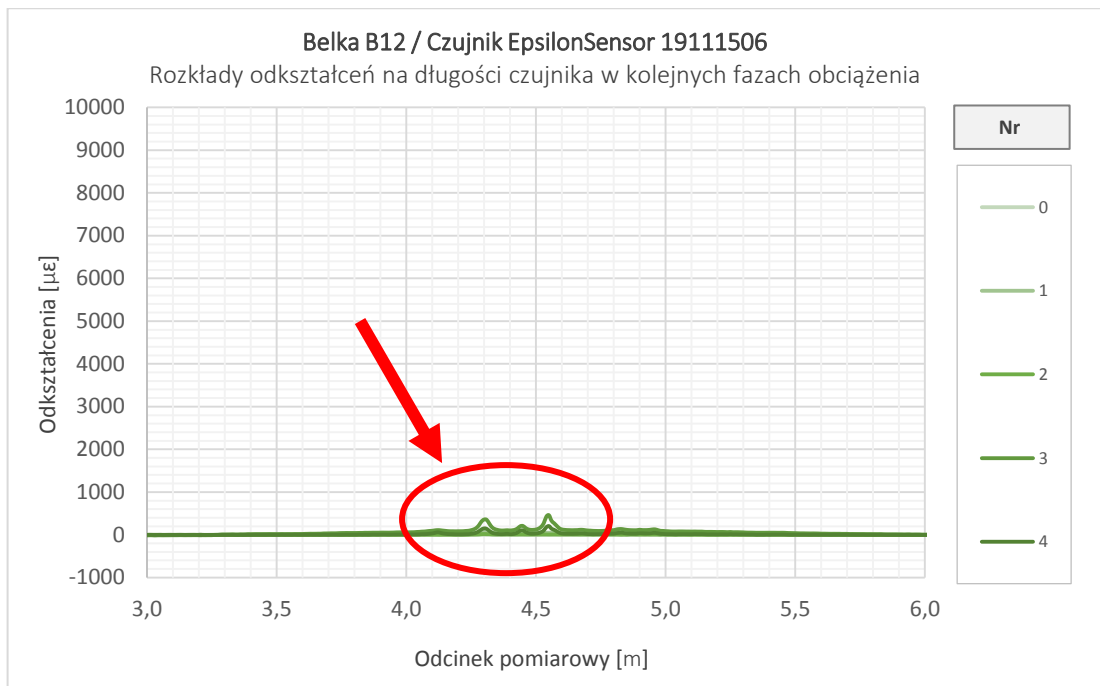
Współczynnik uplastycznienia  $\lambda$  jest różnie przyjmowany, zazwyczaj w przedziale  $\lambda=1,0 \div 2,0$ . Przyjęcie współczynnika  $\lambda = 1,0$  (jak np. zaleca norma [88, 89]) oznacza przyjęcie założenia sprężystej pracy elementu sprężonego w chwili zarysowania. W [3] podano zalecenie, aby przyjmować współczynnik  $\lambda = 1,7$ .

W tab. 5.14 zestawiono wartości momentów rysujących wyznaczone dla badanych belek w zależności od przyjętej wartości współczynnika  $\lambda$ .

Tab. 5.14 Wartości obliczonego momentu rysującego  $M_r$  w zależności od przyjętego współczynnika  $\lambda$

$\lambda$ [-]	$M_r$ [kNm]
1,0	20,0
1,7	29,0
2,0	33,0

Dzięki zastosowaniu nowoczesnej techniki światłowodowej w czasie badań weryfikowano pojawianie się rys na podstawie odkształceń światłowodów umieszczonych w belce (w czterech różnych punktach na wysokości przekroju, patrz p. 5.3). Przed obciążeniem belki momentem zginającym odpowiadającym  $M_r$  dla  $\lambda = 1,0$ , obserwowano lokalne wzrosty odkształceń światłowodu, które świadczą o prawdopodobnym niszczeniu struktury betonu (występowaniu mikro zarysowania betonu, patrz rys. 5.18). Zarysowanie możliwe do zaobserwowania na zewnętrznych powierzchniach belek pojawiało się po osiągnięciu wartości momentu rysującego wyznaczonego dla parametru  $\lambda = 1,0$ . Zgodność pomierzonego momentu rysującego z obliczonym przy przyjęciu  $\lambda = 1,0$  była prawdopodobnie spowodowana niskim stopniem zbrojenia belek.



Rys. 5.18 Przykładowy rozkład odkształceń światłowodów w belce nr 12 we wstępnych fazach obciążenia  
(nr 0 – pomiar początkowy; 1 – obciążenie wywołujące 0,46M<sub>r</sub>; 2 – odciążenie; 3 – obciążenie wywołujące 0,78M<sub>r</sub>; 4 – odciążenie)

Odcinek pomiarowy na rys. 5.18, odpowiadający zakresowi odległości od początku czujnika od 3m do 6m, to fragment światłowodu znajdujący się najniżej w przekroju (5 cm od dolnej powierzchni belki, na wysokości cięgna sprężającego).

#### 5.4.4. Redystrybucja momentów zginających

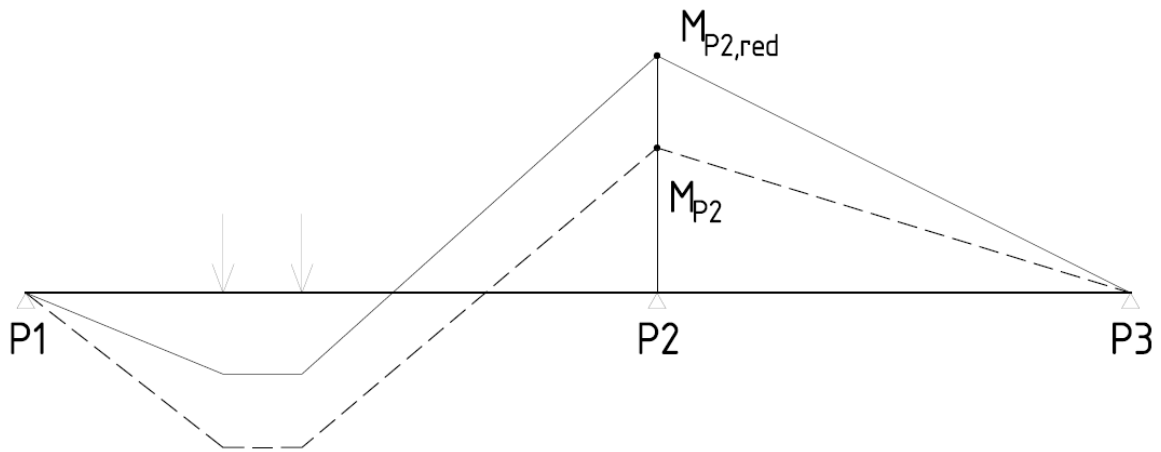
Definicja redystrybucji momentów zginających została opisana w rozdz. 4. Analizując badane belki dwuprzęsłowe, oszacowano redystrybucję momentów zginających „z przęsa na podporę”.

Stopień redystrybucji  $\delta$  został ustalony w oparciu o analizę zmian wartości momentów zginających nad podporą pośrednią, tj. w części stalowej belki ciągłej, w odniesieniu do wartości obliczonych na podstawie analizy w zakresie sprężystym. Stopień redystrybucji  $\delta$  obliczono jako stosunek wartości momentów zginających pomierzonych ( $M_{stalP2,red}$ ) do wartości momentów zginających obliczonych w zakresie sprężystym ( $M_{stalP2}$ ):

$$\delta = \frac{M_{stalP2,red}}{M_{stalP2}} \quad (5.8)$$

Wartości momentów zginających zostały wyznaczone na podstawie pomiarów odkształceń.





Rys. 5.19 Schemat redystrybucji momentów zginających „z przęsła na podporę” (linia ciągła – wykres momentów zginających po redystrybucji, linia przerywana – wykres momentów zginających przed redystrybucją)

Współczynnik redystrybucji  $\delta$  był analizowany dla kolejnych faz obciążenia, do wartości obciążenia 90kN. Powyżej tej wartości obciążenia następowała większa niż założono na etapie projektowania redystrybucja i miejsce zerowe momentów zginających uległo przemieszczeniu w kierunku części betonowej belki. W konsekwencji styk montażowy nie znajdował się w już w pobliżu miejsca zerowego momentów, co było pierwotnie założeniem przy projektowaniu (patrz rys. 5.19), co skutkowało niezamierzonym rozwarciem styku montażowego.

Analiza wartości odkształceń światłowodów, pozwoliła stwierdzić zmianę położenia miejsca zerowego momentów zginających. W tab. 5.15 zestawiono przykładowe wartości odkształceń światłowodu znajdującego się 3cm od górnej powierzchni belki w przekroju oddalonym o 2,5m od podpory skrajnej (tj. 0,5m od styku montażowego części betonowej i stalowej belki ciągłej) dla belki nr 2. Początkowo odcinek światłowodu jest ściskany (wartości ujemne), lecz przy obciążeniu o wartości 80kN znajduje się już w strefie rozciąganej (wartości dodatnie). Miejsce zerowe momentów zginających, znajdujące się pierwotnie w okolicach styku montażowego, na skutek zmniejszenia sztywności części betonowej belki, przesunęło się o ponad 0,5m, co stanowi ponad 12,5% rozpiętości pierwszego przęsła.

Tab. 5.15 Wartości odkształceń w kolejnych fazach obciążenia w najwyższym odcinku światłowodu w przekroju oddalonym o 2,5m od podpory skrajnej P1 dla belki nr 2

P [kN]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu\epsilon$ [-]	-22	-42	-50	-49	-42	-25	-3	17	40	41

Szczegółowe wyniki obliczeń redystrybucji momentów zginających podano w zał. 3. W tab. 5.16 oraz tab. 5.17 zestawiono współczynniki redystrybucji momentów zginających w

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności. Wyniki pokazano na wykresach na rys. 5.20 oraz rys. 5.21.

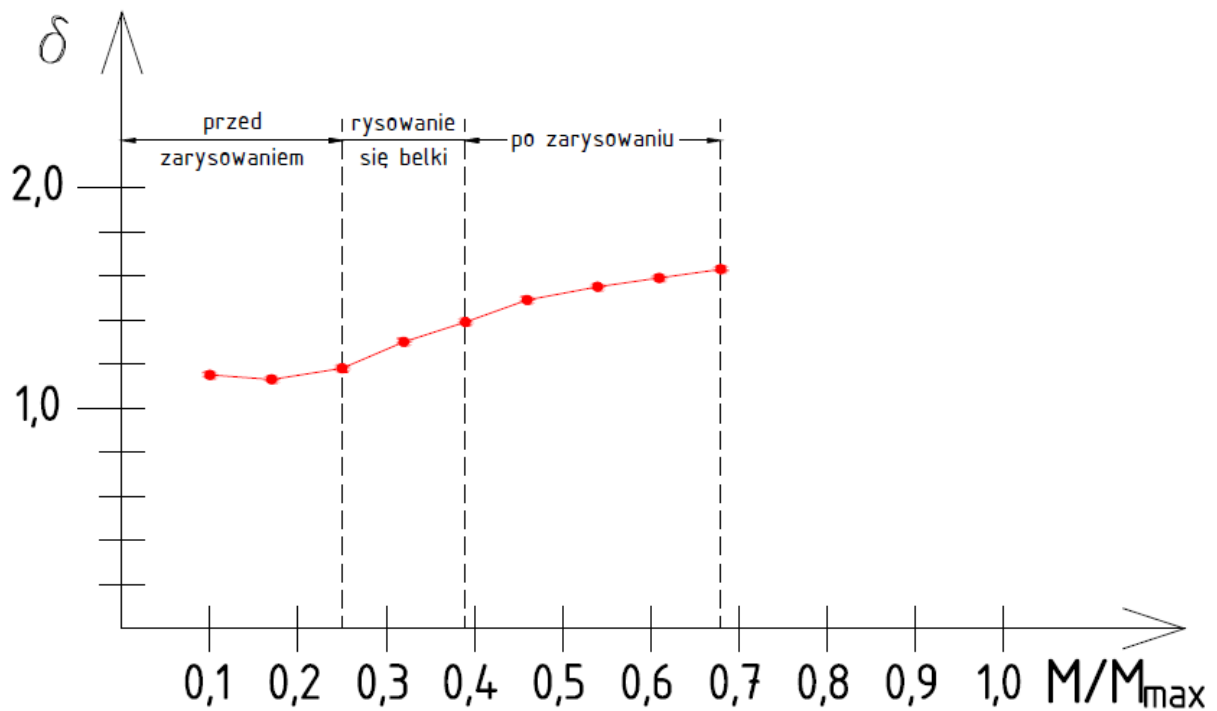
*Uwaga: W parametrze  $X = M/M_{max}$  moment zginający  $M$  wyznaczono przy założeniu stałego rozkładu sztywności na długości belki w zakresie sprężystym, a maksymalny moment  $M_{max}$  przenoszony przez przekrój określono na podstawie wyników uzyskanych dla belek swobodnie podpartych. Wartości podano dla przekroju najbardziej wyężonego w części betonowej belki.*

Tab. 5.16 Współczynniki redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością: w belce nr 2 ( $\delta_2$ ), belce nr 3 ( $\delta_3$ ) oraz w belce nr 5 ( $\delta_5$ );  $\delta$  – wartość średnia dla wszystkich belek

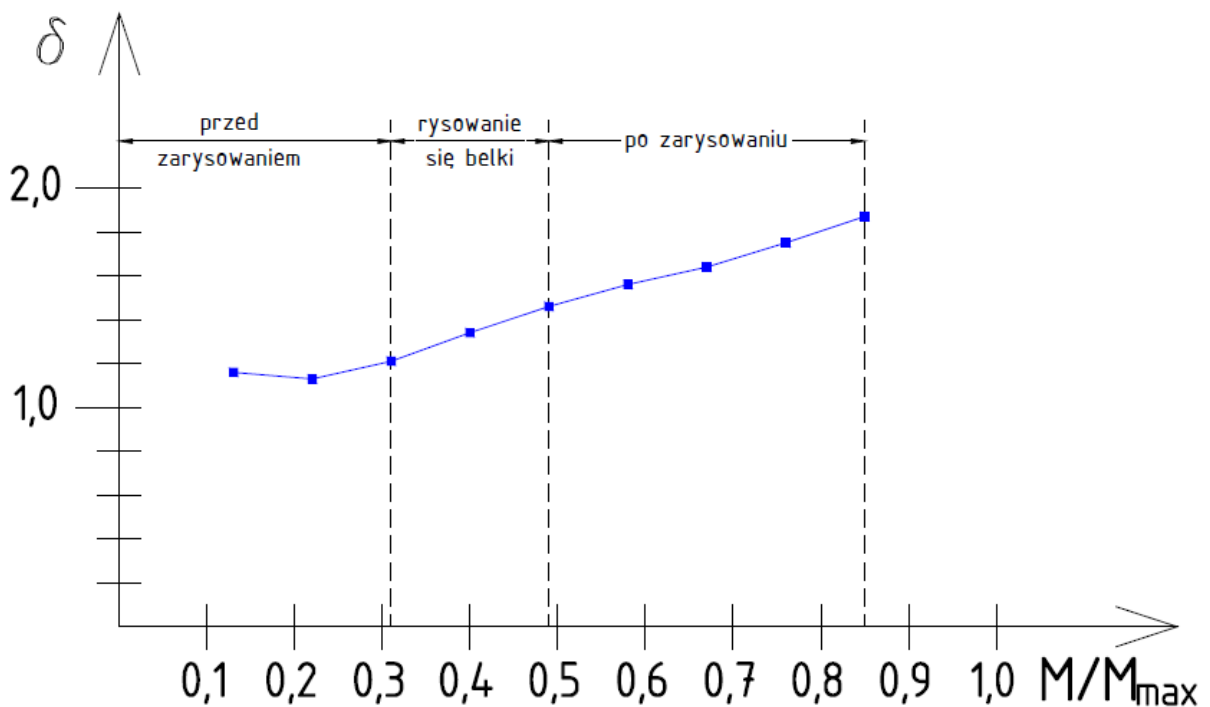
$X=M/M_{max}$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_5$	$\delta$
0,10	1,19	1,20	1,07	<b>1,15</b>
0,17	1,15	1,16	1,07	<b>1,13</b>
0,25	1,18	1,26	1,11	<b>1,18</b>
0,32	1,28	1,40	1,21	<b>1,30</b>
0,39	1,40	1,50	1,28	<b>1,39</b>
0,46	1,53	1,58	1,35	<b>1,49</b>
0,54	1,61	1,64	1,40	<b>1,55</b>
0,61	1,66	1,69	1,42	<b>1,59</b>
0,68	1,70	1,75	1,43	<b>1,63</b>

Tab. 5.17 Współczynniki redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami bez przyczepności: w belce nr 7 ( $\delta_7$ ), belce nr 8 ( $\delta_8$ ) oraz w belce nr 11 ( $\delta_{11}$ );  $\delta$  – wartość średnia dla wszystkich belek

$X=M/M_{max}$	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_{11}$	$\delta$
0,13	1,26	1,14	1,09	<b>1,16</b>
0,22	1,23	1,10	1,06	<b>1,13</b>
0,31	1,33	1,17	1,13	<b>1,21</b>
0,40	1,45	1,33	1,24	<b>1,34</b>
0,49	1,58	1,43	1,37	<b>1,46</b>
0,58	1,70	1,49	1,50	<b>1,56</b>
0,67	1,78	1,54	1,59	<b>1,64</b>
0,76	1,85	1,69	1,69	<b>1,75</b>
0,85	1,95	1,84	1,81	<b>1,87</b>



Rys. 5.20 Współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością



Rys. 5.21 Współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami bez przyczepności

Dla otrzymanych wyników w zakresie stałego obrazu zarysowania wyznaczono liniową funkcję odwzorowującą zmianę współczynnika redystrybucji momentów zginających (wykorzystując dopasowanie punktów metodą najmniejszych kwadratów) wg równania:

$$y = mx + b \quad (5.9),$$

gdzie:

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

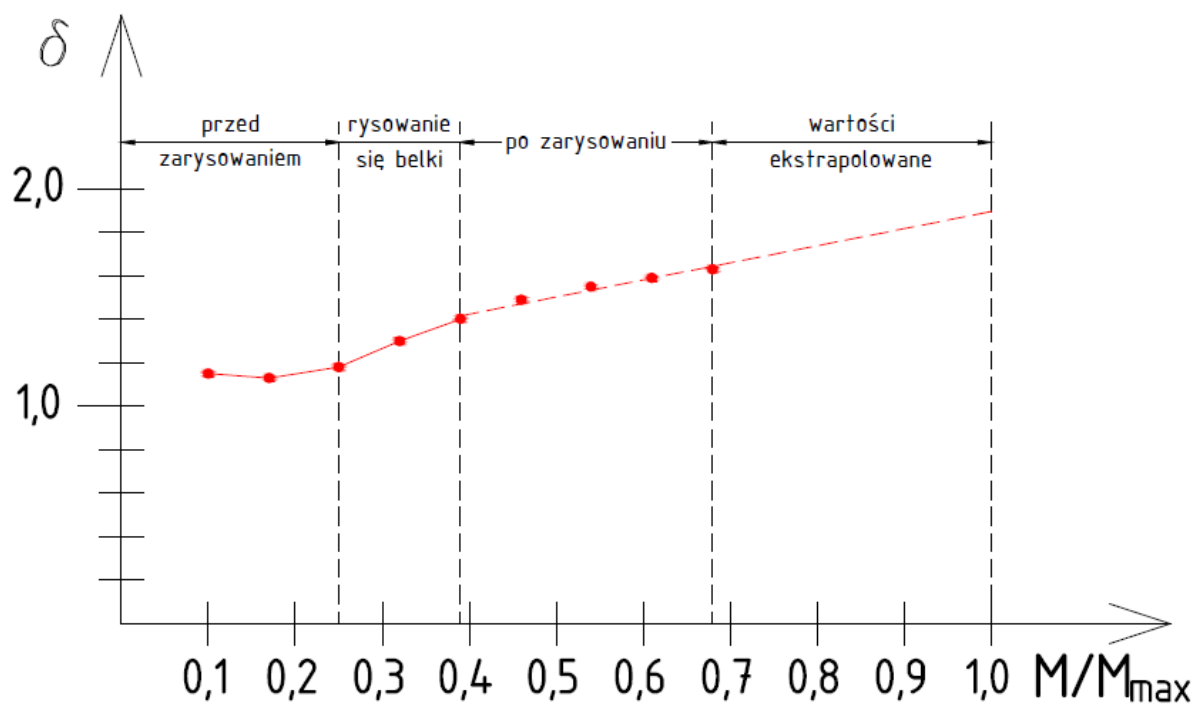
$m$  – współczynnik nachylenie prostej do osi odciętych,

$b$  – punkt przecięcia prostej z osią rzędnych.

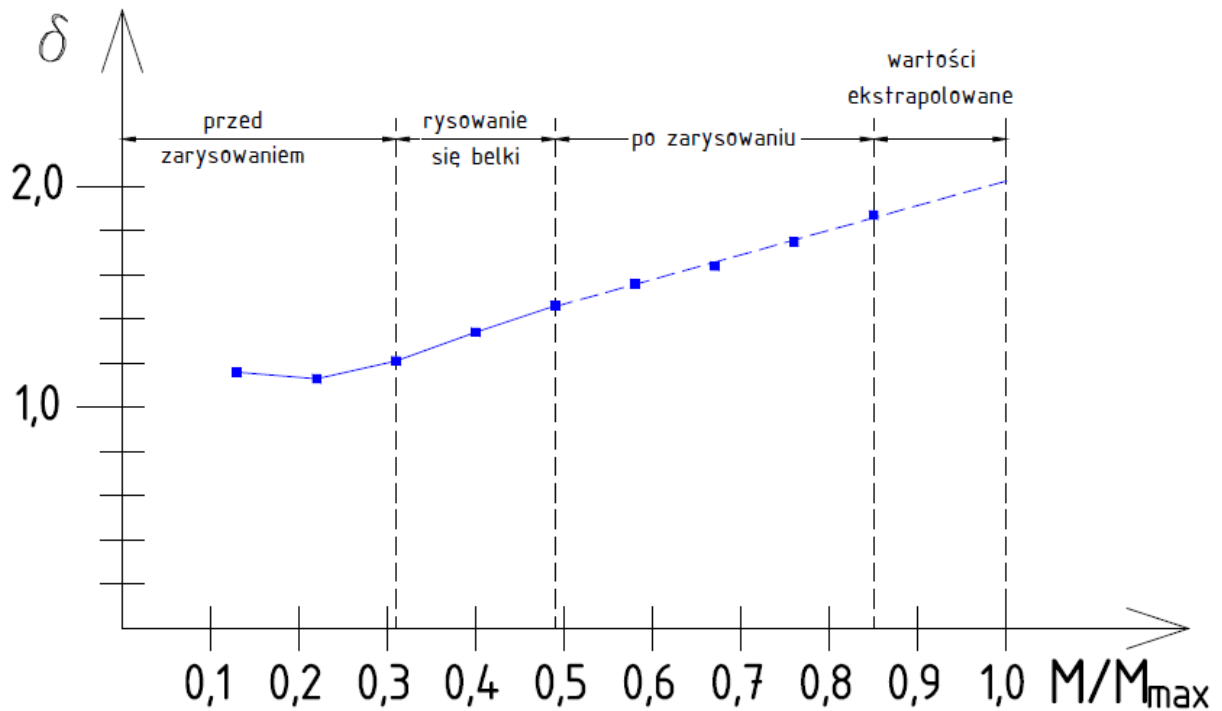
Otrzymano następujące równania prostych:

- dla belek sprężonych cięgnami z przyczepnością  $y = 0,79x + 1,11$  (5.10),
- dla belek sprężonych cięgnami bez przyczepności  $y = 1,11x + 0,91$  (5.11).

W oparciu o wyznaczone funkcje dokonano ekstrapolacji wartości współczynnika redystrybucji momentów zginających  $\delta$  do wyczerpania SGN ( $M/M_{\max}=1,0$ , rys. 5. 22 oraz 5.23).



Rys. 5.22 Współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych cięgnami z przyczepnością z wartościami ekstrapolowanymi



Rys. 5.23 Współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami bez przyczepności z wartościami ekstrapolowanymi

W fazie powstawania rys belki sprężone ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności wykazują podobne wartości stopnia redystrybucji momentów zginających  $\delta$  „z przęsła na podporę”. Przy stałym obrazie zarysowania większy stopień redystrybucji cechuje belki sprężone ciągniami bez przyczepności.

Współczynnik redystrybucji  $\delta$  osiąga wartości większe od 1,0 już w zakresie sprężystym pracy konstrukcji. Jest to prawdopodobnie spowodowane mikrozarysowaniem betonu, do którego dochodzi we wczesnych fazach obciążenia (patrz rys. 5.18). Zatem do zmniejszenia sztywności i związanej z tym redystrybucji momentów zginających może prawdopodobnie dochodzić jeszcze przed widocznym zarysowaniem elementu.

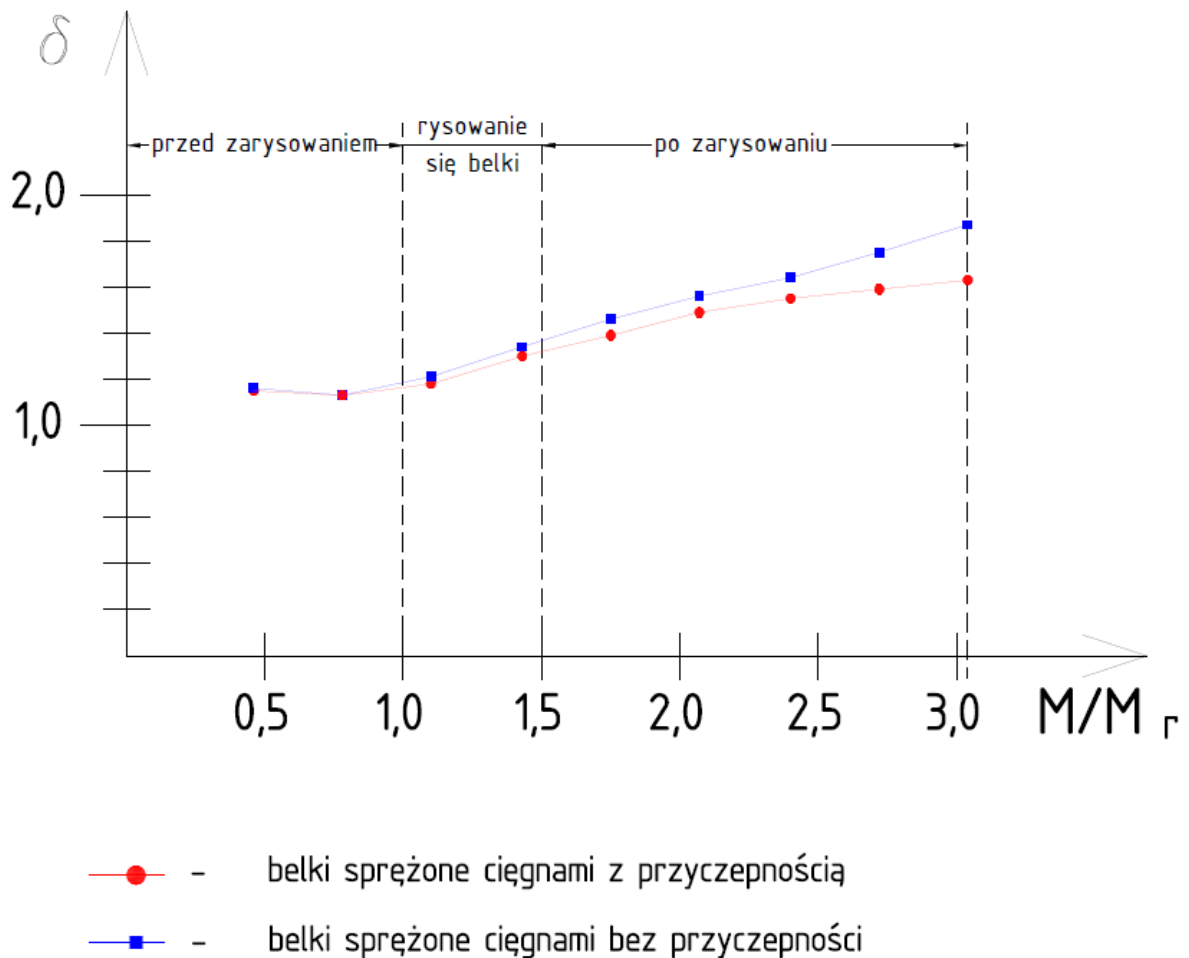
Badania prowadzono na dość ograniczonej populacji belek, tj. 12, co w mojej ocenie nie pozwala na wnioskowanie o stopniu redystrybucji dla dowolnego typu belek sprężonych. Wskazane na podstawie przeprowadzonych badań współczynniki  $m$  oraz  $b$  we wzorze (5.9) należy poddać dalszej walidacji dla większej ilości badanych elementów, aby uzyskane równania uznać za miarodajne dla dowolnych belkowych elementów sprężonych.

Wyznaczone wartości współczynników redystrybucji odniesiono do parametru  $Y=M/M_r$  (tab. 5.18, rys. 5.24), w którym moment zginający  $M$  wyznaczono, jak wcześniej, przy założeniu stałego rozkładu sztywności na długości belki w zakresie sprężystym, a  $M_r$  to wartość momentu rysującego – patrz p. 5.4.3.

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.18 Współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością ( $\delta_p$ ) i bez przyczepności ( $\delta_{b/p}$ ) w funkcji  $M/M_r$

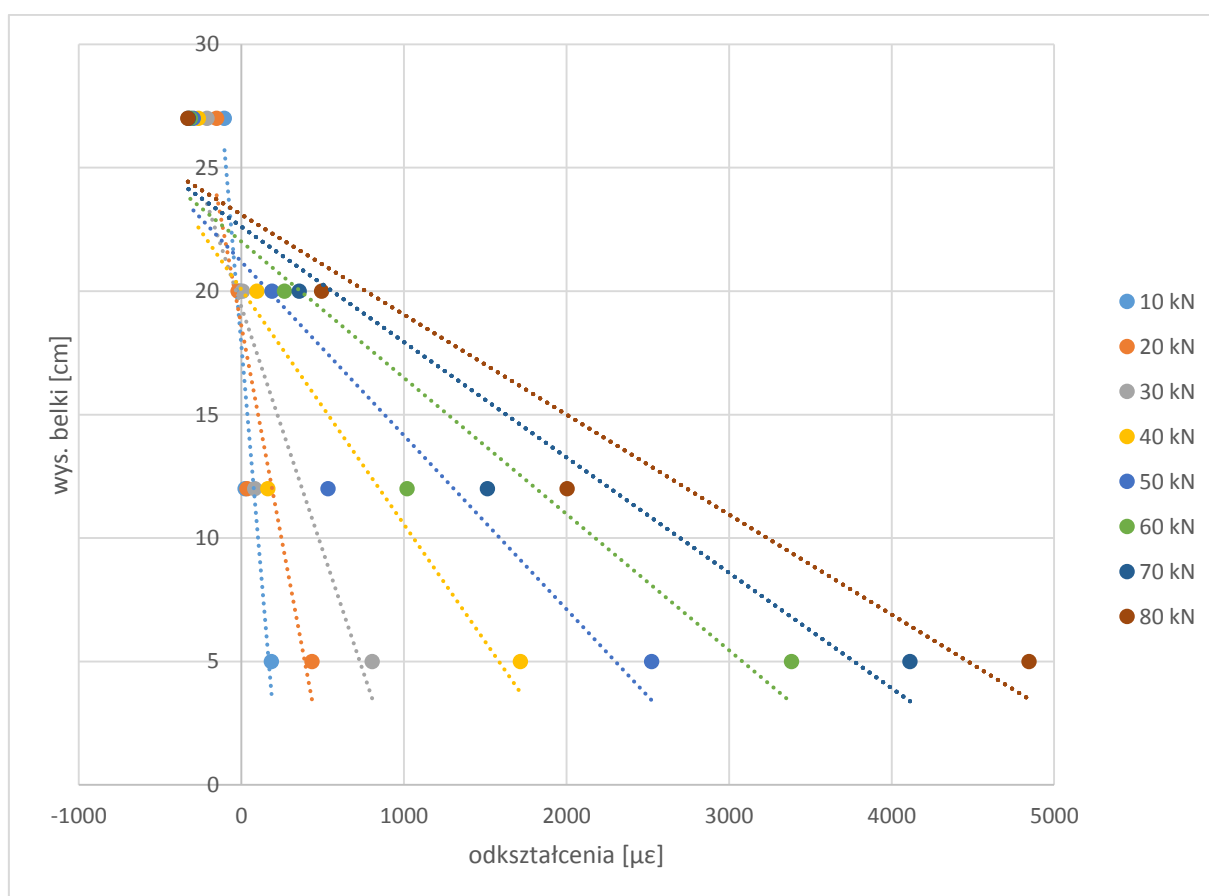
$Y=M/M_r$	$\delta_p$	$\delta_{b/p}$
0,46	1,15	1,16
0,78	1,13	1,13
1,10	1,18	1,21
1,43	1,30	1,34
1,75	1,39	1,46
2,07	1,49	1,56
2,40	1,55	1,64
2,72	1,59	1,75
3,04	1,63	1,87



Rys. 5.24 Współczynnik redystrybucji w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności w funkcji  $M/M_r$

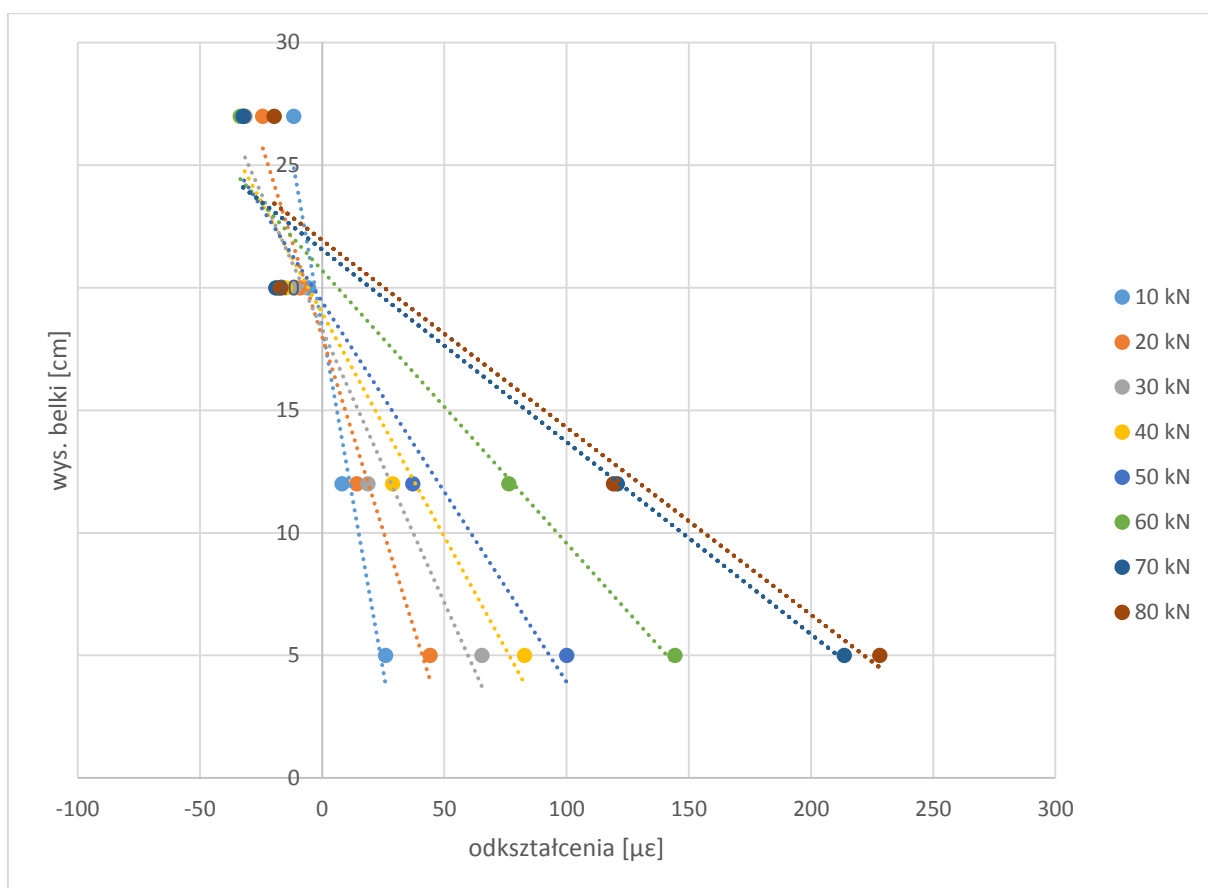
## 5.4.5. Szacowanie położenia osi obojętnej

Światłowód do pomiaru odkształceń został umieszczony w belkach na czterech poziomach (patrz p. 5.3), co umożliwia szacowanie położenia osi obojętnej w poszczególnych fazach wyężenia przekroju. Przykładowy rozkład odkształceń w belce betonowej w poszczególnych fazach wyężenia zaprezentowano na rys. 5.25 oraz rys. 5.26 w przekroju znajdującym się w połowie długości belki. Dla pomierzonych odkształceń światłowodu wyznaczono funkcję liniową (wykorzystując dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów) odwzorowującą przebieg zmierzonych wielkości. Jakkolwiek funkcja liniowa nie daje najlepszego dopasowania do wyników, to została wykorzystana ze względu na przyjęte założenie o obowiązywaniu hipotezy płaskich przekrojów. Rozbieżności w rozkładzie wartości odkształceń wynikają z silnego zarysowania belki. Na wykresach widać, jak wraz ze wzrostem obciążenia zmniejsza się wysokość strefy ściskanej. Wysokość strefy ściskanej wyraźnie zaczyna się zmniejszać po przekroczeniu obciążenia wywołującego moment rysujący, a w badanym zakresie obciążenia maleje o ok. 33%.



Rys. 5.25 Wykres odkształceń w przekroju w odległości 1,5m od podpory skrajnej belki nr 3 (belka ciągła, sprzężenie z przyczepnością) w kolejnych fazach obciążenia

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Rys. 5.26 Wykres odkształceń w przekroju w odległości 1,5m od podpory skrajnej belki nr 8 (belka ciągła, sprężenie bez przyczepności) w kolejnych fazach obciążenia



#### 5.4.6. Szacowanie krzywizny przekroju

Na podstawie zmierzonych odkształceń określono krzywiznę przekroju wg wzoru [19]:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{c,d} - \varepsilon_{c,g}}{h} \quad (5.12),$$

gdzie:

$1/r$  – krzywizna przekroju,

$\varepsilon_{c,d}$  – odkształcenia na poziomie dolnego światłowodu,

$\varepsilon_{c,g}$  – odkształcenia na poziomie górnego światłowodu,

$h$  – odległość między światłowodem górnym i dolnym.

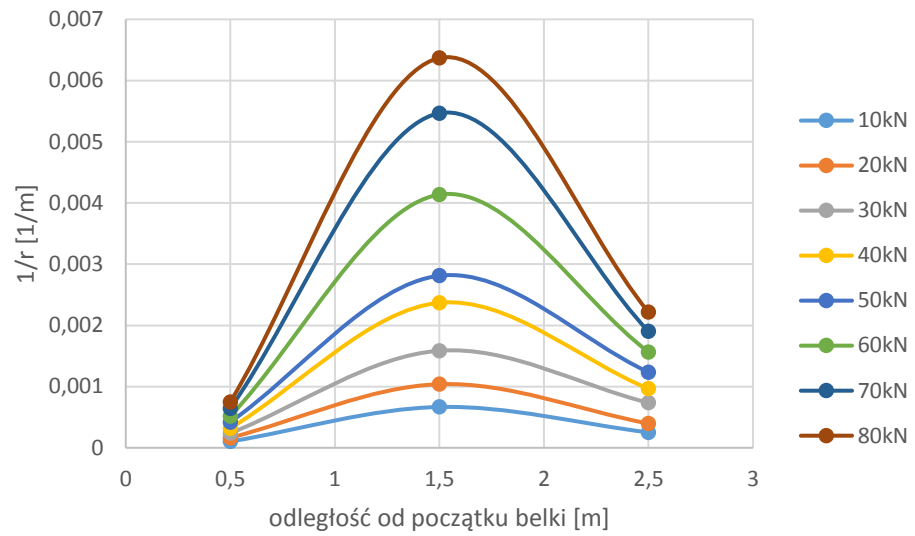
W analizie przyjęto założenie, że obowiązuje zasada płaskich przekrojów.

W tab. 5.19 oraz tab. 5.20 przedstawiono wyniki uzyskane w dwóch przykładowych belkach w kolejnych fazach obciążenia (po jednej belce sprężonej cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności). Wykresy krzywizny przekrojów na długości belki sporządzono dla porównania na podstawie różnej ilości punktów pomiarowych. Wybrano punkty pomiarowe co 1m (schematy A w tab. 5.19 oraz 5.20) oraz punkty pomiarowe co 25cm (schematy B w tab. 5.19 i 5.20). Dowolny wybór ilości punktów pomiarowych umożliwiała zastosowana technika pomiaru odkształceń w sposób ciągły z wykorzystaniem światłowodów.

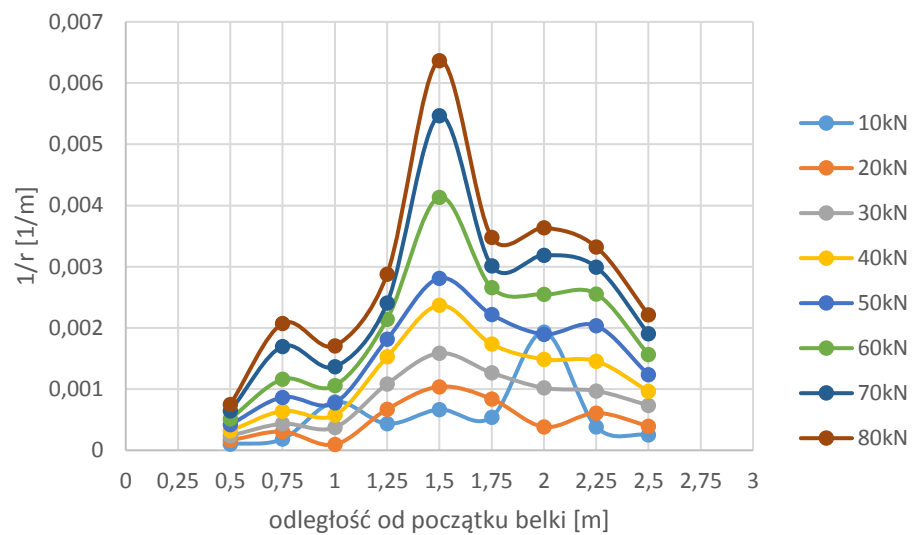
Analizując wykresy krzywizn sporządzone na podstawie punktów pomiarowych rozmieszczonych co 1m, nie jest widoczna wyraźna różnica między badanymi krzywiznami na długości w belkach sprężonych cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności. Natomiast przy wykorzystaniu punktów pomiarowych co 25cm, taka różnica jest już bardzo wyraźna. W przypadku belek sprężonych cięgnami z przyczepnością największe krzywizny są skoncentrowane na odcinku występowania stałej, największej wartości momentu zginającego, a w przypadku belek sprężonych cięgnami bez przyczepności rozkład krzywizny na długości belki jest bardziej równomierny. W obu przypadkach rozkład obliczonych krzywizn jest spójny z obrazem zarysowania belki. Lokalne zaburzenia krzywizny pokrywają się z miejscami występowania rys. Wnioski zostały potwierdzone analizą krzywizn we wszystkich badanych belkach.

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

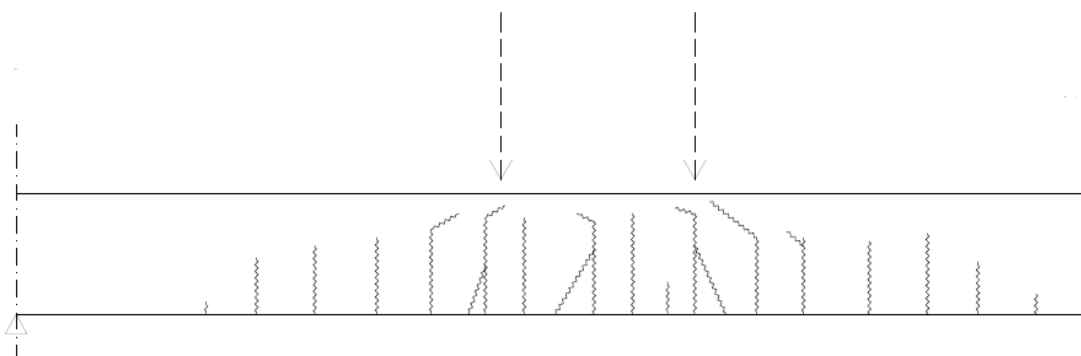
**Tab. 5.19 Belka nr 6 (swobodnie podparta, sprężenie z przyczepnością)**



**A. Krzywizna belki na podstawie 3 punktów pomiarowych**



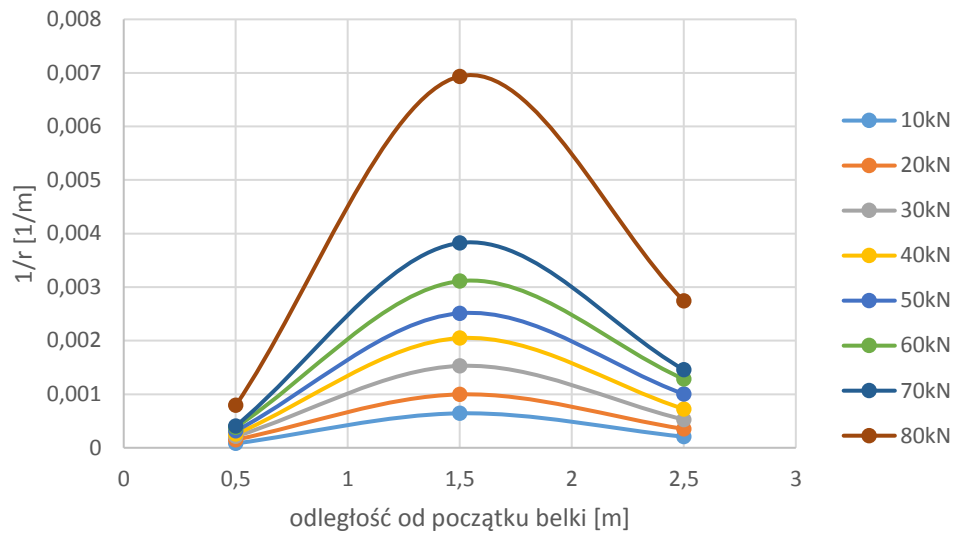
**B. Krzywizna belki na podstawie 9 punktów pomiarowych**



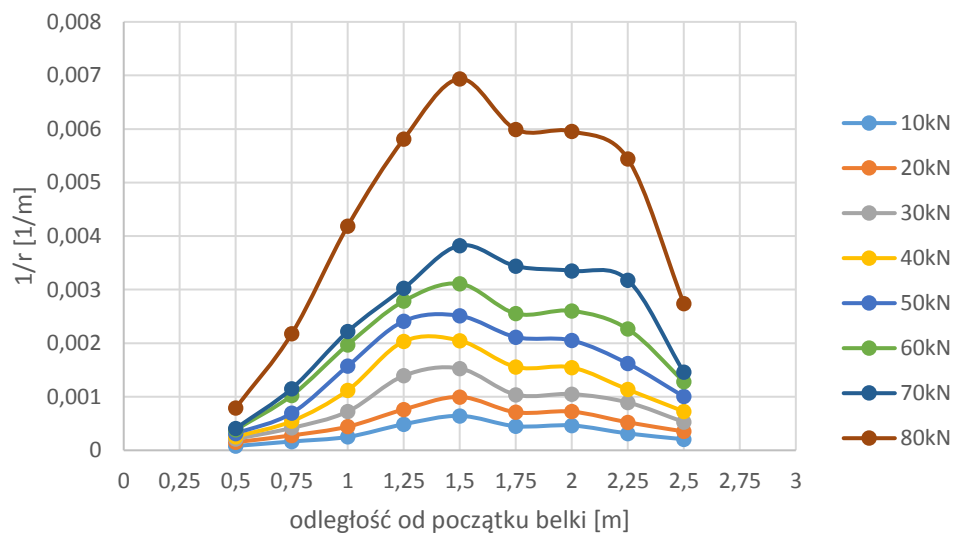
**C. Obraz zarysowania belki**

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

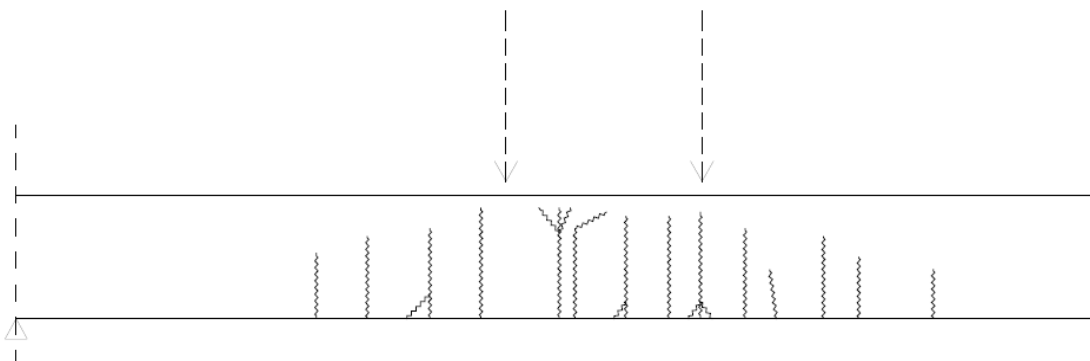
**Tab. 5.20 Belka nr 9 (swobodnie podparta, sprężenie bez przyczepności)**



**B. A. Krzywizna belki uśredniona – na podstawie 3 punktów pomiarowych**



**B. Krzywizna belki na podstawie 9 punktów pomiarowych**

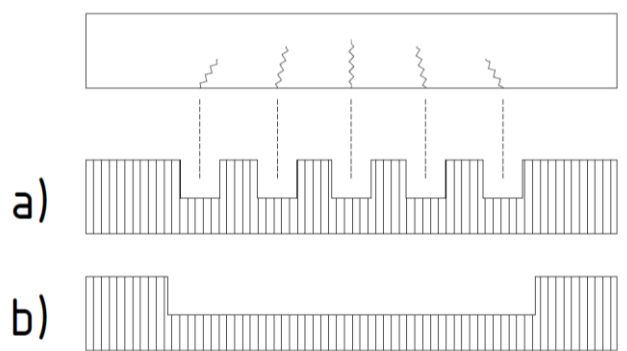


**C. Obraz zarysowania belki**

## 5.5. Analiza sztywności belek po zarysowaniu

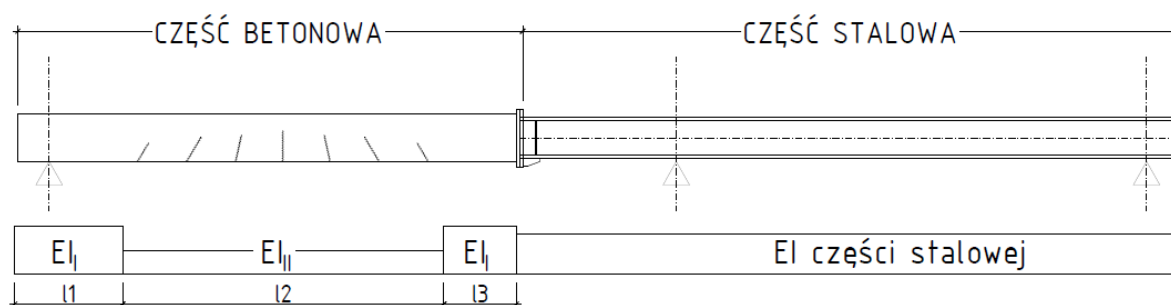
## 5.5.1. Przyjęcie schematu sztywności zastępczej

Zarysowanie elementu wpływa na zmianę rozkładu sztywności, a to z kolei na rozkład sił wewnętrznych w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych. Następstwem zarysowania jest lokalna degradacja sztywności [107]. Najprostszym schematem obrazującym zmiany sztywności elementu zarysowanego jest belka o stałej sztywności zastępczej. Innym podejściem jest przyjęcie sztywności stałej odcinkami. Na odcinkach elementu bez rys zakładana jest sztywność przekroju niezarysowanego ( $EI_I$ ). W miejscach występowania rys następuje redukcja sztywności, która może być uwzględniono w bezpośrednim otoczeniu rysy lub na całym odcinku z rysami (rys. 5.27). W pracy przyjmuję rozkład sztywności zastępczej stałej ( $EI_{II}$ ) na całym zarysowanym odcinku (rys. 5.28), podejmując próbę oszacowania sztywności przekroju zarysowanego (faza II) badanych belek wg wytycznych PCI (*Precast/Prestressed Concrete Institute*) w oparciu o [37, 38, 77, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 102, 109].



Rys. 5.27 Uproszczony schemat zmian sztywności zarysowanej zbrojonej belki betonowej

- a) redukcja sztywności w bezpośrednim otoczeniu rysy  
b) redukcja sztywności na całym odcinku zarysowanym



Rys. 5.28 Przyjęty do analiz schemat sztywności zastępczej stałej na odcinku zarysowanym

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Długości odcinków zarysowanych ( $l_2$ ) oraz długości odcinków o sztywności przekroju niezarysowanego ( $l_1$  oraz  $l_3$ ) określono na podstawie badanych belek (patrz zał. 2). Otrzymane wyniki przedstawiono w tab. 5.21 oraz tab. 5.22. Analizę przeprowadzono dla obciążenia w zakresie 30÷90kN. Dolną granicę 30kN przyjęto jako obciążenie powodujące powstawanie pierwszych rys; górną granicę 90kN, jak w analizie w p. 5.4.

Tab. 5.21 Średnie długości odcinków zarysowanych i niezarysowanych belek sprężonych z przyczepnością (oznaczenia wg rys. 5.28)

a) wartości bezwzględne				b) wartości względne ( $l$ – długość belki betonowej)			
obciążenie [kN]	$l_1$ [cm]	$l_2$ [cm]	$l_3$ [cm]	obciążenie [kN]	$l_1/l$	$l_2/l$	$l_3/l$
30	98	79	124	30	33%	26%	41%
40	92	105	102	40	31%	35%	34%
50	88	134	78	50	29%	45%	26%
60	78	144	78	60	26%	48%	26%
70	70	162	68	70	23%	54%	23%
80	70	168	62	80	23%	56%	21%
90	65	178	57	90	22%	59%	19%

Tab. 5.22 Średnie długości odcinków zarysowanych i niezarysowanych dla belek sprężonych bez przyczepności (oznaczenia wg rys. 5.28)

a) wartości bezwzględne				b) wartości względne ( $l$ – długość belki betonowej)			
obciążenie [kN]	$l_1$ [cm]	$l_2$ [cm]	$l_3$ [cm]	obciążenie [kN]	$l_1/l$	$l_2/l$	$l_3/l$
30	110	74	116	30	37%	25%	39%
40	95	103	102	40	32%	34%	34%
50	95	117	88	50	32%	39%	29%
60	90	126	84	60	30%	42%	28%
70	90	134	76	70	30%	45%	25%
80	90	139	71	80	30%	46%	24%
90	90	139	71	90	30%	46%	24%

Wnioski dotyczące obrazu zarysowania opisano w p. 5.4.2.

**5.5.2. Obliczanie sztywności przekroju zarysowanego wg wytycznych PCI [38, 83, 85]**

Wytyczne PCI pozwalają określić moment bezwładności sprężonego przekroju zarysowanego ( $I_{cr}$ ) z rozróżnieniem na przekrój sprężony cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności:

- dla elementu sprężonego cięgnami z przyczepnością

$$I_{cr} = (n_p A_p d_p^2 + n_s A_s d_s^2) (1 - \sqrt{\rho_p + \rho_s}) \quad (5.13),$$

- dla elementu sprężonego cięgnami bez przyczepności

$$I_{cr} = (\Omega_c n_p A_p d_p^2 + n_s A_s d_s^2) (1 - \sqrt{\Omega_c \rho_p + \rho_s}) \quad (5.14),$$

gdzie:

$I_{cr}$  – moment bezwładności przekroju zarysowanego,

$$n_p = \frac{E_p}{E_c} \quad (5.15),$$

$$n_s = \frac{E_s}{E_c} \quad (5.16),$$

$$\rho_p = \frac{A_p}{b d_p} \quad (5.17),$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b d_s} \quad (5.18),$$

$\Omega$  – współczynnik redukcji odkształceń stali sprężającej przed zarysowaniem wg [38, 83, 85],

$\Omega_c$  – współczynnik redukcji odkształceń po zarysowaniu wg [38, 83, 85].

Do obliczania sztywności elementów sprężonych cięgnami bez przyczepności można stosować te same wzory co dla elementów sprężonych cięgnami z przyczepnością, wprowadzając współczynnik redukcji odkształceń  $\Omega$  w celu uwzględnienia poślizgu cięgien na długości belki. Współczynnik ten jest definiowany jako stosunek wzrostu odkształceń powyżej wartości wywołanej wprowadzeniem siły sprężającej w cięgnach bez przyczepności do tej samej wartości w cięgnach z przyczepnością w dowolnej chwili obciążenia. Współczynniki redukcji odkształceń stali sprężającej przed ( $\Omega$ ) i po zarysowaniu ( $\Omega_c$ ) dane są wzorami [38]:

$$\Omega = \frac{\Delta \varepsilon_{p, \text{ bez przyczepności}}}{\Delta \varepsilon_{p, \text{ z przyczepnością}}} \quad (5.19),$$

$$\Omega_c = \Omega - 0,5 \left( 1 - \frac{L_0}{L} \right) \left[ \frac{M_r}{M} - \frac{1}{\left( \frac{M}{M_r} - 1 \right) \frac{I_g}{I_{cr}} + 1} \right] \quad (5.20).$$

Współczynnik redukcji odkształceń przed zarysowaniem  $\Omega$  podany jest w [38] w zależności od trasy cięgien i sposobu obciążenia (tab. 5.23).

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.23 Wartości współczynnika redukcji odkształceń przed zarysowaniem [38]

Typ obciążenia i rodzaj trasy ciągu	Współczynnik redukcji odkształceń w stanie niezarysowanym $\Omega$
Obciążenie równomiernie rozłożone i ciągu proste	$\Omega = 2/3$
Obciążenie równomiernie rozłożone i ciągu o trasie parabolicznej	$\Omega = (8/15) + (1/4)(e_s/e_c)$
Obciążenie skupione i ciągu proste	$\Omega = 2/3$
Obciążenie skupione i ciągu paraboliczne	$\Omega = (44/81) + (10/81)(e_s/e_c)$
Obciążenie skupione w środku przęśta i ciągu proste	$\Omega = 1/2$
Obciążenie skupione w środku przęśta i ciągu paraboliczne	$\Omega = (5/12) + (1/12)(e_s/e_c)$
$e_s$ – mimośród nad podporą skrajną; $e_c$ – mimośród w przęśle	

W [38] podano, że dopuszczalne jest przyjmowane w uproszczeniu  $\Omega = \Omega_c$ .

W pracy [112] zaproponowano inne podejście do analizy konstrukcji kablobetonowych sprężonych cięgnami bez przyczepności. Wprowadzono współczynnik redukcji naprężeń  $\alpha_p$ , który wyraża stosunek zmiany naprężeń w cięgnach sprężających do zmiany naprężeń w zwykłym zbrojeniu rozciągającym. Takie podejście nie zostało potwierdzone przez innych badaczy i w związku z tym zrezygnowano z jego wykorzystania.

Wg zaleceń PCI [85] w obliczeniach można stosować efektywny moment bezwładności ( $I_e$ ). Idea efektywnego momentu bezwładności na przykładzie zależności moment zginający ( $M$ ) – ugięcie ( $u$ ) została przedstawiona na rys. 5.29. Zastosowanie efektywnego momentu bezwładności pozwala na uproszczenie obliczeń. W celu odwzorowania pracy konstrukcji, należy uwzględnić stan przed i po zarysowaniu, stosując odpowiednio sztywność przekroju niezarysowanego i zarysowanego. Wprowadzenie efektywnego momentu bezwładności powoduje, że nie jest konieczne rozgraniczenie między stanem niezarysowanym i zarysowanym.

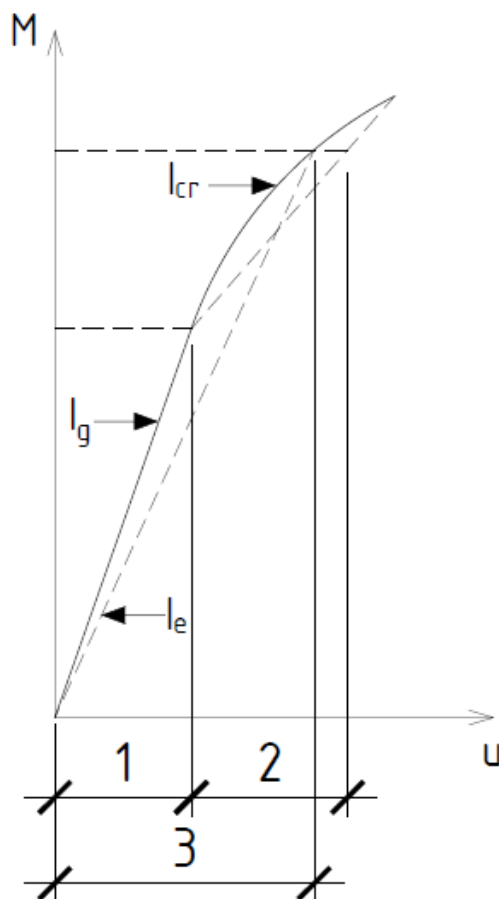
$$I_e = I_{cr} + \left(\frac{M_r}{M}\right)^3 (I_g - I_{cr}) \quad (5.21) \text{ wg [83] lub}$$

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \frac{M_r}{M} \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right)} \quad (5.22) \text{ wg [38],}$$

gdzie:

$I_g$  – moment bezwładności przekroju sprowadzonego.





Rys. 5.29 Bilinearny wykres moment zginający ( $M$ ) – ugięcie ( $u$ ) obrazujący ideę efektywnego momentu bezwładności [85]

- 1 – wartość obliczona na podstawie  $I_g$ ,
- 2 – wartość obliczona na podstawie  $I_{cr}$ ,
- 3 – wartość obliczona na podstawie  $I_e$ .

### 5.5.3. Analiza wyników sztywności przekroju badanych belek w fazie I oraz fazie II

W fazie I (przekrój niezarysowany) wyznaczono:

$I = 67500\text{cm}^4$  – moment bezwładności przekroju betonowego netto w fazie I,

$I_g = 72100\text{cm}^4$  – moment bezwładności przekroju sprowadzonego w fazie I.

W fazie II (przekrój zarysowany) podjęto próbę oszacowania sztywności wg wytycznych PCI [38, 83, 85] wg p. 5.5.2. Dla belek sprężonych cięgnami bez przyczepności przyjęto  $\Omega = 2/3$  – wg tab. 5.23 na podstawie [38]. Wyniki obliczeń zamieszczono w tab. 5.24÷5.26.

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Tab. 5.24 Moment bezwładności przekroju zarysowanego belek sprężonych cięgnami z przyczepnością

<b>obciążenie [kN]</b>	<b><math>I_e</math> [m<sup>4</sup>] wg [80]</b>	<b><math>I_e</math> [m<sup>4</sup>] wg [88]</b>
30	0,000721	0,000721
40	0,000350	0,000384
50	0,000267	0,000264
60	0,000231	0,000210
70	0,000211	0,000183
80	0,000197	0,000168
90	0,000188	0,000159

Tab. 5.25 Moment bezwładności przekroju zarysowanego belek sprężonych cięgnami bez przyczepności oraz dla  $\Omega = \Omega_c$

<b>obciążenie [kN]</b>	<b><math>I_e</math> [m<sup>4</sup>] wg [80]</b>	<b><math>I_e</math> [m<sup>4</sup>] wg [88]</b>
30	0,000721	0,000721
40	0,000323	0,000374
50	0,000243	0,000251
60	0,000208	0,000196
70	0,000189	0,000169
80	0,000177	0,000153
90	0,000168	0,000144

Tab. 5.26 Moment bezwładności przekroju zarysowanego belek sprężonych cięgnami bez przyczepności oraz dla  $\Omega \neq \Omega_c$

<b>obciążenie [kN]</b>	<b><math>I_e</math> [m<sup>4</sup>] wg [80]</b>	<b><math>I_e</math> [m<sup>4</sup>] wg [88]</b>
30	0,000721	0,000721
40	0,000314	0,000371
50	0,000234	0,000247
60	0,000200	0,000192
70	0,000182	0,000164
80	0,000170	0,000148
90	0,000162	0,000139

Uzyskano zgodność wyników obliczeń z wynikami z badań przy wykorzystaniu efektywnych momentów bezwładności wyznaczonych wg wytycznych PCI. Porównując wartości momentów bezwładności uzyskiwane dla różnych współczynników redukcji odkształceń przed i po zarysowaniu do wartości uzyskanych w podejściu uproszczonym (współczynnik redukcji odkształceń po zarysowaniu jest równy współczynnikowi przed zarysowaniem), można stwierdzić, że proponowane w [38] założenie  $\Omega = \Omega_c$  jest prawidłowe.

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

Przyjęcie założenia  $\Omega = \Omega_c$  powoduje różnice w wyznaczanych momentach bezwładności przekroju zarysowanego wg [38] maksymalnie o 4%, a wg [83] o 3% (patrz tab. 5.27).

Tab. 5.27 Stosunek wartości momentów bezwładności przekroju zarysowanego dla różnych współczynników redukcji odkształceń przed i po zarysowaniu ( $I_e$  dla  $\Omega \neq \Omega_c$ ) do wartości uzyskanych w podejściu uproszczonym (współczynnik redukcji odkształceń po zarysowaniu jest równy współczynnikowi przed zarysowaniem,  $I_e$  dla  $\Omega = \Omega_c$ ) wg [38] oraz [83]

obciążenie [kN]	$I_e$ dla $\Omega \neq \Omega_c$ / $I_e$ dla $\Omega = \Omega_c$	
	[80]	[88]
30	1,00	1,00
40	0,97	0,99
50	0,97	0,98
60	0,96	0,98
70	0,96	0,97
80	0,96	0,97
90	0,96	0,97

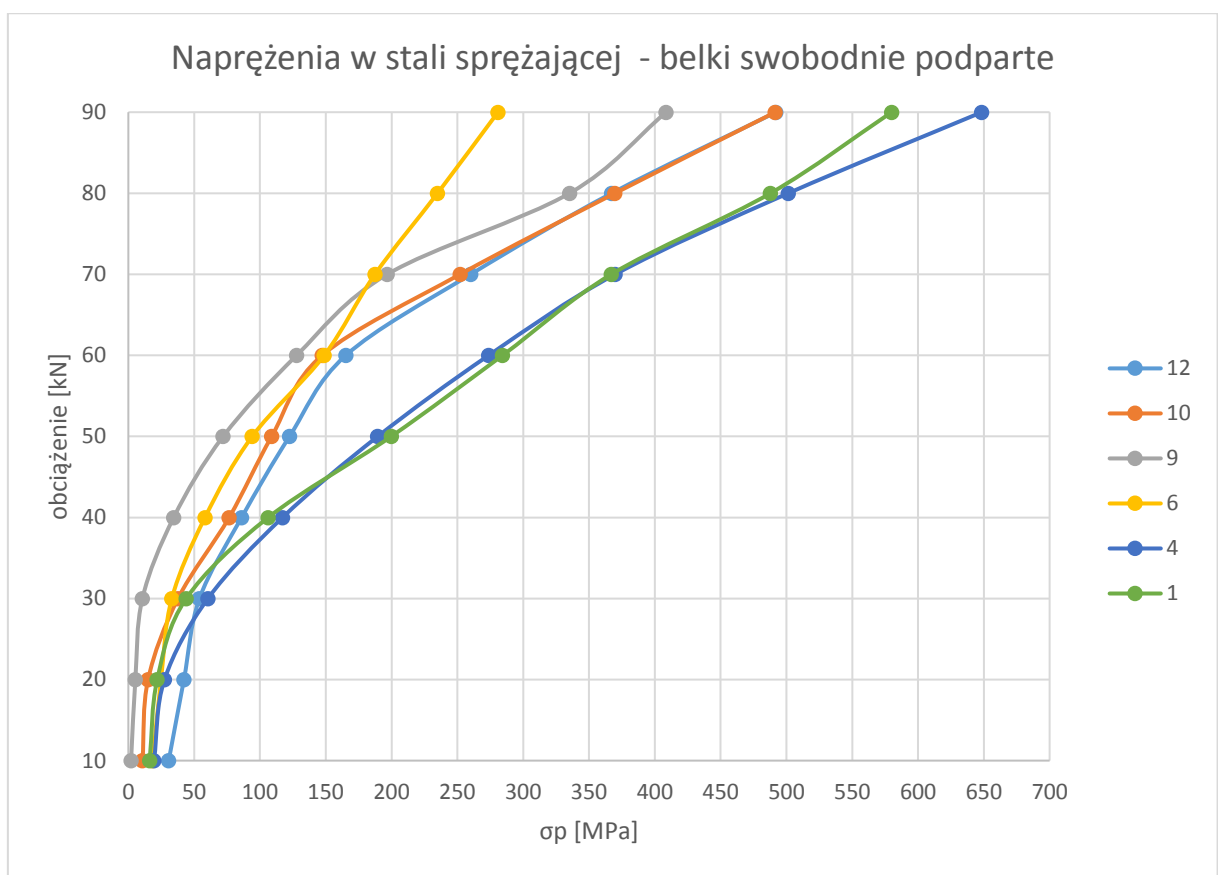
Wykorzystując dane z pomiaru odkształceń wykonanego za pomocą tensometrów elektrooporowych naklejonych na splotach sprężających (patrz p. 5.3.1), wyznaczono wartości współczynnika redukcji odkształceń  $\Omega$  wg wzoru (5.12). Uśredniony współczynnik z wszystkich faz obciążania belek wyniósł:

- belki swobodnie podparte  $\Omega = 0,767$ ,
- belki ciągłe  $\Omega = 0,667$ .

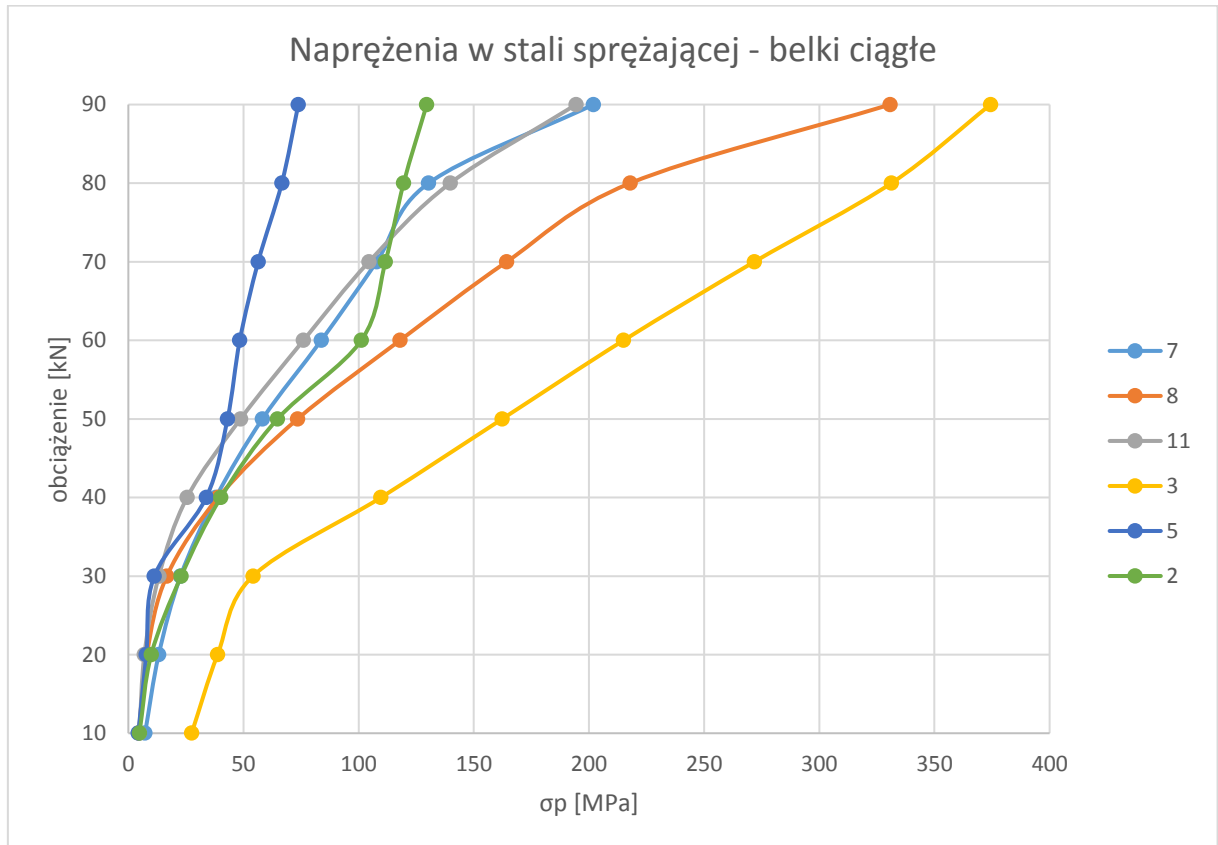
Wartość otrzymana z wyników badań belek ciągłych ( $\Omega = 0,667 = 2/3$ ) jest identyczna z wartością podawaną w [80] (patrz tab. 5.25 w p. 5.5.2).

Na podstawie wartości odkształceń pomierzonych za pomocą tensometrów umieszczonych na splotach sprężających oraz wykorzystując związki konstytutywne ciała idealnie liniowo sprężystego dla stali sprężającej, sporządzono wykresy naprężeń w stali sprężającej przy zwiększającym się obciążeniu (rys. 5.30 oraz rys. 5.31).

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe



Rys. 5.30 Wykres naprężeń w stali sprężającej od obciążenia dla belek swobodnie podpartych (belki nr 1, 4, 6, 9, 10, 12)



Rys. 5.31 Wykres naprężeń w stali sprężającej od obciążenia dla belek ciągłych (belki nr 2, 3, 5, 7, 8, 11)

## 5. Badania empiryczne i analizy obliczeniowe

---

Dla belek ciągłych naprężenia w splotach osiągały zdecydowanie mniejsze wartości naprężeń niż w przypadku belek swobodnie podpartych. Do wartości obciążenia wynoszącej 30kN (przed zarysowaniem belek) zależność naprężenie – obciążenie ma charakter zbliżony do liniowego. Nie jest widoczna różnica w rozkładzie naprężeń w belkach sprężonymi cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności.

Wykresy na rys. 5.30 oraz rys. 5.31 pozwalają na obserwację trendu zmian naprężeń. Zgodnie z przewidywaniami, część tensometrów umieszczonych na splotach ulegała mechanicznemu blokowaniu przez tarcie i docisk, dlatego wyznaczone wartości nie stanowiły podstawy do zasadniczej części analiz w pracy, a miały jedynie charakter pomocniczy i uzupełniający.

6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

6.1. Zależność moment - krzywizna w obszarze umownego przegubu plastycznego

W oparciu o przeprowadzone studia literatury, własne badania empiryczne i analityczne proponuje się przyjęcie trzyczęściowej linii łamanej obrazującej zależność moment zginający – krzywizna w obszarze umownego przegubu plastycznego w belce sprężonej. Przyjęcie takiego podejścia zostało potwierdzone m. in. w [4] oraz [56]. Dla każdego zakresu pracy elementu – w stanie niezarysowanym, zarysowanym oraz po lokalnym uplastycznieniu – przyjmuje się zależność moment-krzywizna jako funkcję liniową (rys. 6.1). Po lokalnym uplastycznieniu przyjmuje się zachowanie idealnie plastyczne materiału w obszarze umownego przegubu plastycznego. Ze względu na niejednoznaczność określenia granicy plastyczności stali sprężającej (patrz rozdz. 2), przyjęto założenie wg [100], że  $M_y = 0,85M_u$ , tzn. moment przy uplastycznieniu stali sprężającej  $M_y$  jest równy 0,85 momentu granicznego  $M_u$ . Przyjęto oznaczenia:

$\phi_r$  – krzywizna w chwili osiągnięcia momentu rysującego,

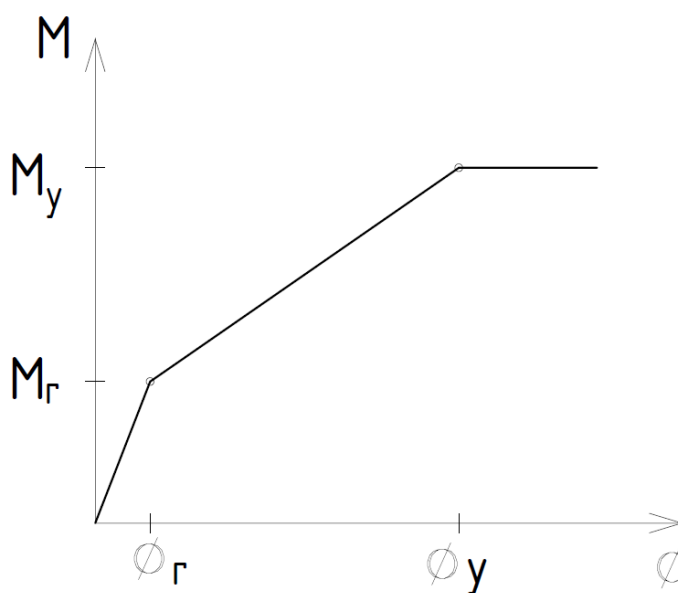
$\phi_y$  – krzywizna przy uplastycznieniu,

$\phi_u$  – krzywizna graniczna,

$M_r$  – moment rysujący,

$M_y$  – moment zginający powodujący uplastycznienie,

$M_u$  – moment zginający powodujący wyczerpanie nośności.

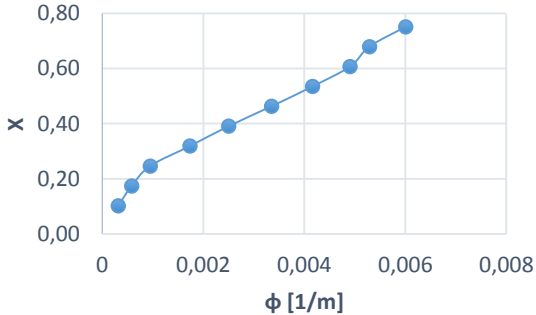
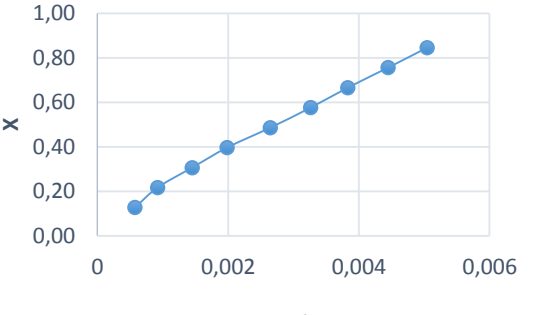
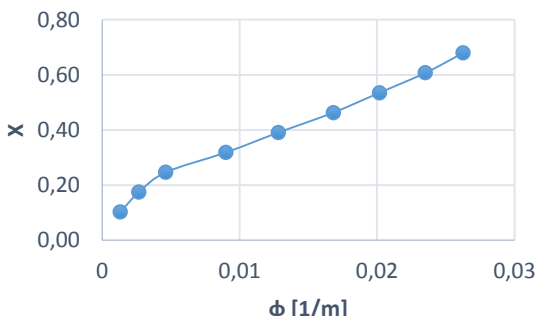
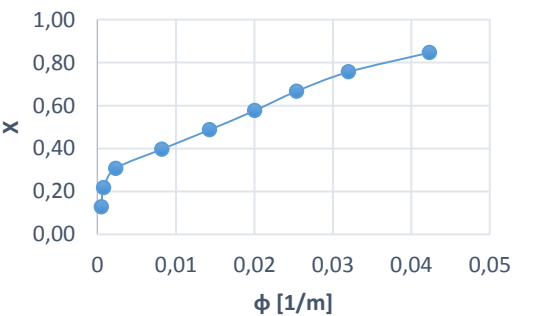
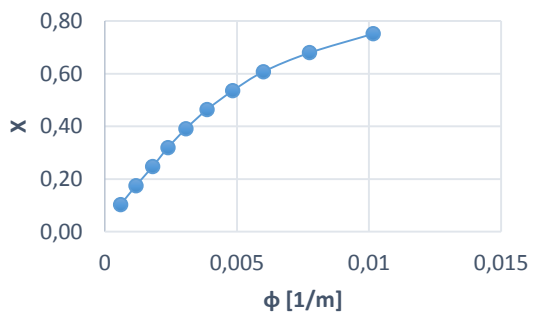
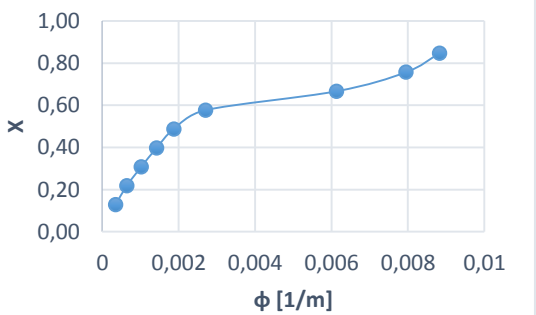


Rys. 6.1 Trójliniowy wykres moment – krzywizna [124, 128]

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

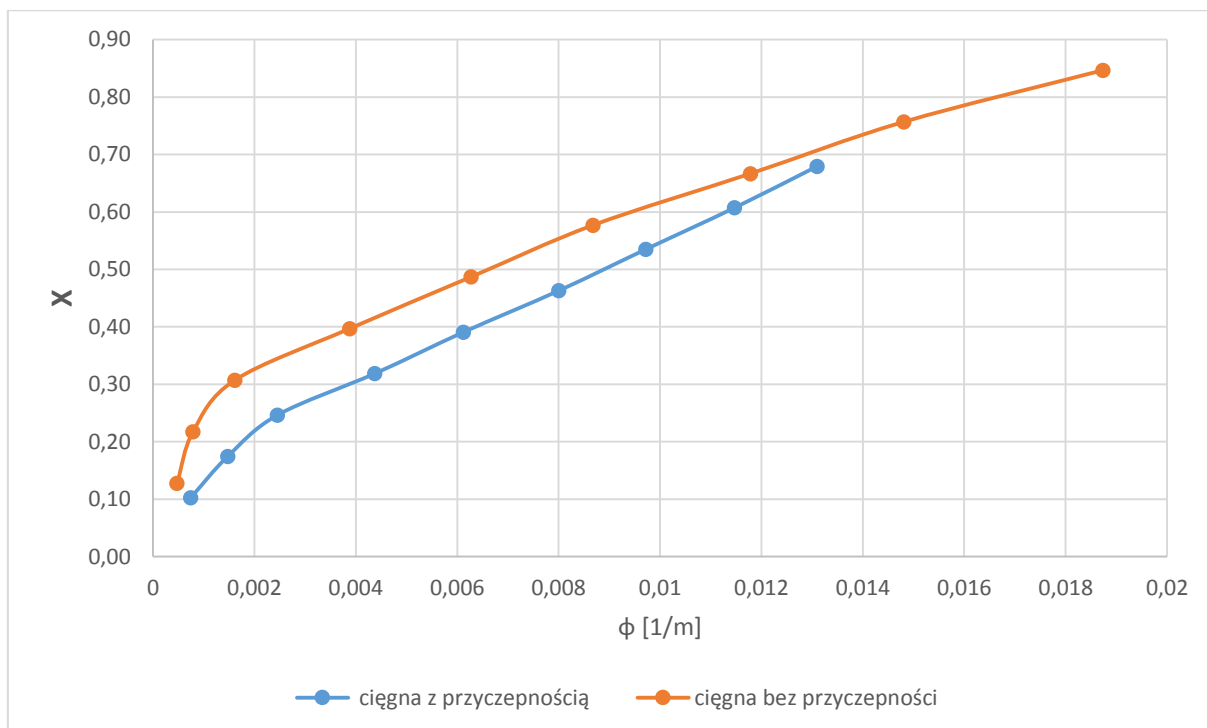
Wyniki badań potwierdzają przyjęcie proponowanej trójliniowej zależności moment-krzywizna. W tab. 6.1 przedstawiono wykresy krzywizny przekroju najbardziej wyężonego w zależności od parametru związanego z momentem zginającym, wyrażonego bezwymiarowym współczynnikiem  $X = M/M_{max}$  (patrz rozdz. 5.4) w poszczególnych belkach ciągłych. Na rys. 6.2 pokazano tę samą zależność dla wartości średnich uzyskanych w belkach sprężonych ciągłymi z przyczepnością (średnia wyników w belkach nr 2, 3, 5) i bez przyczepności (średnia wyników w belkach nr 7, 8, 11).

Tab. 6.1 Wykresy zależności krzywizny przekroju najbardziej wyężonego od parametru X

Wykres $X - \phi$ dla belek sprężonych ciągłymi z przyczepnością	Wykres $X - \phi$ dla belek sprężonych ciągłymi bez przyczepności
<p style="text-align: center;"><b>Belka nr 2</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Belka nr 7</b></p> 
<p style="text-align: center;"><b>Belka nr 3</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Belka nr 8</b></p> 
<p style="text-align: center;"><b>Belka nr 5</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Belka nr 11</b></p> 



## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych



Rys. 6.2 Zależność parametr  $X$  – krzywizna w belkach sprężonych cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności

Wartości krzywizn przekrojów uzyskane z badań analizowano zarówno w przypadku belek sprężonych cięgnami z przyczepnością, jak i bez przyczepności, do wartości obciążeń wywołujących moment zginający o wartości nie przekraczającej 0,85 momentu powodującego wyczerpanie nośności (wyjaśnienie – patrz rozdz. 5). Wykresy na rys. 6.2 odpowiadają zatem dwóm pierwszym częściom trójliniowej zależności moment – krzywizna i dają dobrą zgodność wyników badań z proponowanym modelem. Wyraźnie widoczna jest zmiana nachylenia prostej po przekroczeniu wartości momentu rysującego, a odcinki wykresów są zbliżone do liniowych. Dla pozostałego zakresu wartości momentów zginających aż do osiągnięcia SGN dokonano ekstrapolacji wyników, przy jednoczesnym uwzględnieniu założenia, że po osiągnięciu momentu zginającego powodującego uplastycznienie stali sprężającej ( $M_y = 0,85M_u$ ) odpowiedź konstrukcji jest idealnie plastyczna. W celu ekstrapolacji wykresu krzywizn wyznaczono liniowe funkcje odwzorowujące zmiany zależności moment - krzywizna przed zarysowaniem i po zarysowaniu (wykorzystując dopasowanie punktów metodą najmniejszych kwadratów) wg równania:

$$y = mx + b \quad (6.1),$$

gdzie:

$m$  – współczynnik nachylenie prostej do osi odciętych,

$b$  – punkt przecięcia prostej z osią rzędnych.

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

Otrzymano następujące równania:

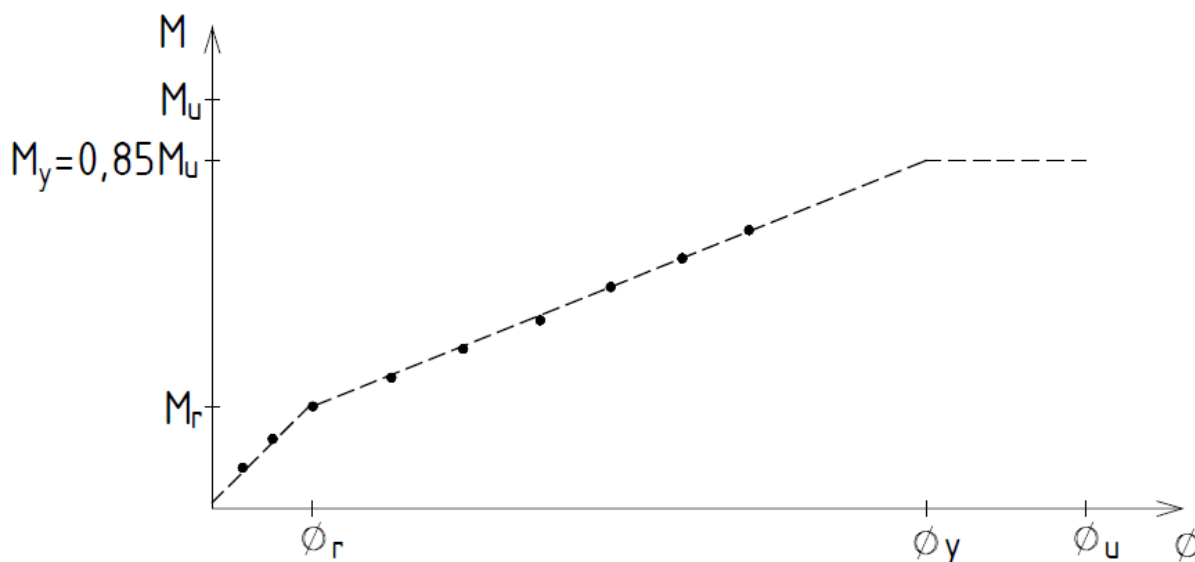
- dla belek sprężonych cięgnami z przyczepnością

$$\begin{cases} y = 99,27x + 0,02 & \text{dla } M < M_r \\ y = 40,61x + 0,14 & \text{dla } M_r < M < M_y \end{cases} \quad (6.2)$$

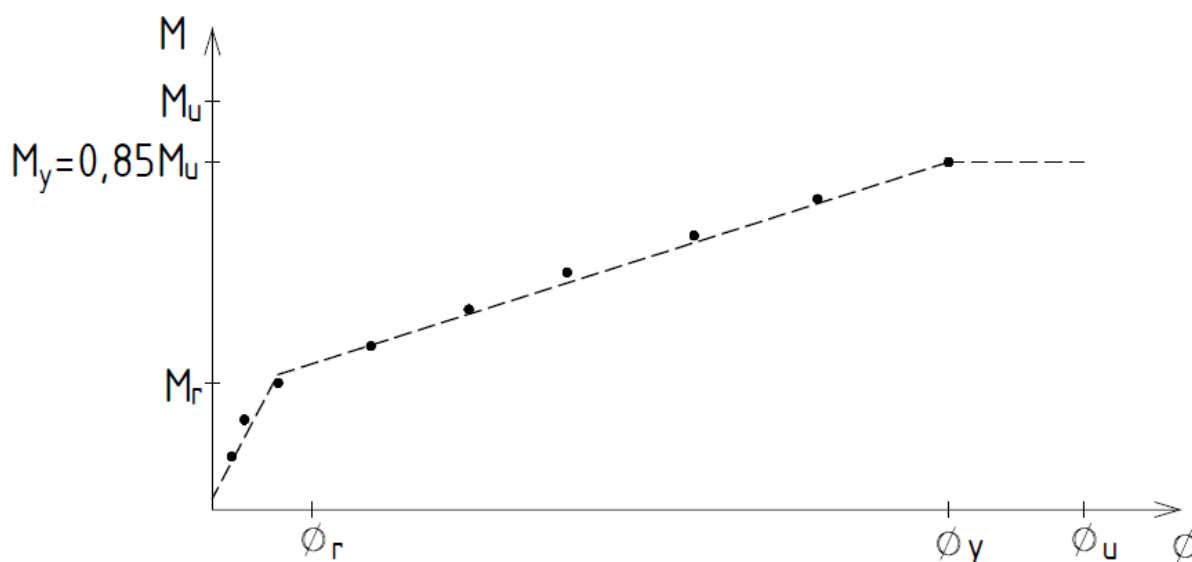
- dla belek sprężonych cięgnami bez przyczepności

$$\begin{cases} y = 187,36x + 0,03 & \text{dla } M < M_r \\ y = 31,68x + 0,28 & \text{dla } M_r < M < M_y \end{cases} \quad (6.3)$$

Na rys. 6.3 oraz 6.4 przedstawiono wykresy moment-krzywizna z wartościami ekstrapolowanymi na podstawie zależności danych wzorami (6.2) oraz (6.3).



Rys. 6.3 Trójliniowy wykres moment – krzywizna dla belek sprężonych cięgnami z przyczepnością z uwzględnieniem ekstrapolacji poza badany zakres



Rys. 6.4 Trójliniowy wykres moment – krzywizna dla belek sprężonych ciągniami bez przyczepności z uwzględnieniem ekstrapolacji poza badany zakres

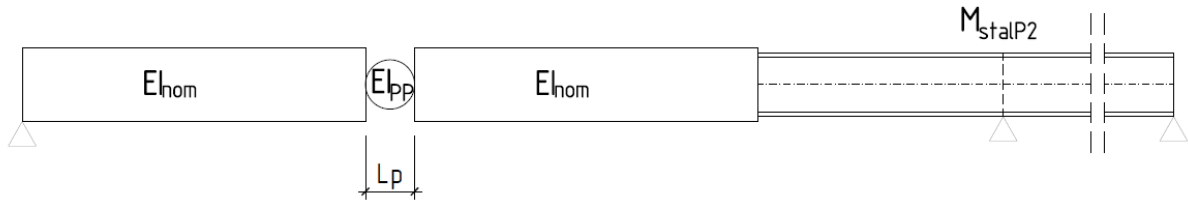
Trójliniowy model zależności moment – krzywizna był pierwotnie zaproponowany do konstrukcji żelbetowych. Przedstawiona analiza potwierdza możliwość stosowania tego modelu także w odniesieniu do konstrukcji sprężonych. Przyjęcie trójliniowego wykresu moment – krzywizna jest korzystne pod względem praktycznym także w obliczeniach numerycznych, ponieważ tylko trzy punkty jednoznacznie definiują krzywą.

Do oceny możliwości plastycznego obrotu oraz nośności można pominąć fazę pracy przekroju przed zarysowaniem, lecz ma ona zasadnicze znaczenie przy obliczeniach w stanie granicznym użyteczności (np. dotyczących ugięć od obciążeń zmiennych). Dlatego przyjęcie modelu trójliniowego, uwzględniającego fazę przed zarysowaniem, jest wskazane w zastosowaniach praktycznych, m.in. przy projektowaniu konstrukcji z wykorzystaniem analizy plastycznej.

## 6.2. Zastępcza sztywność umownego przegubu plastycznego

Proponuje się przyjęcie zastępczej sztywności umownego przegubu plastycznego na długości  $l_p$  (długość  $l_p$  wyznaczona wg propozycji Mattocka [75, 76] – patrz rozdz. 2). Sztywność umownego przegubu plastycznego ( $EI_{pp}$ ) została dobrana tak, aby obliczane wartości sił wewnętrznych były zgodne z wartościami pomierzonymi, z uwzględnieniem redystrybucji momentów zginających (rys. 6.5).

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych



Rys. 6.5 Model konstrukcji przyjęty do obliczeń

Do obliczeń zastępczej sztywności umownego przegubu plastycznego przyjęto, że:

- a) idealizowany – umowny przegub plastyczny ma długość  $l_p$ , wyznaczoną wg propozycji Mattocka [75, 76]:

$$l_p = 0,5d + 0,05z \quad (6.4)$$

gdzie:

$d$  – wysokość użyteczna przekroju,

$z$  – odległość od przekroju w którym występuje maksymalny moment zginający do sąsiadującego z tym przekrojem miejsca zerowego momentów (ang. *point of contraflexure*, patrz rozdz. 2).

W analizie badanych belek przyjęto  $l_p = 0,20m$ .

- b) umowny przegub plastyczny wytwarza się w miejscu występowania największego momentu zginającego, a pozostałe obszary belki pracują w zakresie sprężystym. Przyjęcie takiego założenia znajduje potwierdzenie w pracy [76],
- c) na odcinkach poza przegubem plastycznym belka traktowana jest jako niezarysowana o nominalnej sztywności z fazy I ( $EI_{nom}$ ),
- d) sztywność umownego przegubu plastycznego  $EI_{pp}$  zostanie dobrana tak, aby obliczone wartości momentów zginających nad podporą pośrednią P2 odpowiadały wartościom pomierzonym. Przyjęto wartość średnią momentu zginającego pomierzonego nad podporą pośrednią P2 ( $M_{stalP2}$  z pom.) dla belek sprężonych cięgami z przyczepnością i bez przyczepności (tab. 6.2 oraz tab. 6.3). Sposób wyznaczania wartości momentów zginających oraz parametru  $X = M/M_{max}$  opisano w rozdz. 5.4.

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

Tab. 6.2 Wartości momentów zginających nad podporą pośrednią P2 obliczone na podstawie badań w belkach sprężonych cięgnami z przyczepnością

x	M <sub>stalP2</sub> z pom. [kNm]			
	2	3	5	średnio
0,10	5,4	5,5	4,5	5,1
0,17	9,9	9,9	9,0	9,6
0,25	15,0	16,3	13,9	15,1
0,32	21,9	24,2	20,6	22,2
0,39	30,0	32,3	27,2	29,8
0,46	39,2	40,8	34,5	38,2
0,54	48,2	49,2	41,4	46,3
0,61	56,8	57,7	48,1	54,2
0,68	65,0	67,0	54,2	62,1

Tab. 6.3 Wartości momentów zginających nad podporą pośrednią P2 obliczone na podstawie badań w belkach sprężonych cięgnami bez przyczepności

x	M <sub>stalP2</sub> z pom. [kNm]			
	7	8	11	średnio
0,13	5,9	5,1	4,7	5,2
0,22	10,8	9,3	8,9	9,7
0,31	17,3	14,9	14,3	15,5
0,40	25,1	22,8	21,0	23,0
0,49	34,2	30,6	29,2	31,3
0,58	44,1	38,2	38,5	40,2
0,67	53,6	46,0	47,6	49,1
0,76	63,6	57,7	57,8	59,7
0,85	75,1	70,5	69,6	71,7

Element odwzorowujący w analizie umowny przegub plastyczny ma następujące wymiary: założona a priori długość ( $l_p = 0,20m$ ), szerokość równa szerokości rzeczywistej belki ( $b = 0,30m$ ), wysokość – parametr poszukiwany. Wysokość elementu odzwierciedlającego przegub plastyczny była poszukiwana metodą iteracyjną. W tab. 6.4 oraz tab. 6.5 przedstawiono wyniki w kolejnych fazach obciążenia: wysokość umownego przegubu plastycznego ( $h_{pp}$ ), sztywność umownego przegubu plastycznego ( $I_{pp}$ ) oraz stosunek

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

sztynności umownego przegubu plastycznego do sztywności belki betonowej niezarysowanej.

Na tej podstawie wyznaczono współczynnik  $\kappa$  ( $\kappa = 1 - \frac{I_{PP}}{I_{nom}}$ ), który określa redukcję sztywności na odcinku umownego przegubu plastycznego w stosunku do sztywności belki niezarysowanej. Graficzną interpretacją współczynnika  $\kappa$  przedstawiono na rys. 6.6, rys. 6.7 (w funkcji parametru  $X = M/M_{max}$  – wyjaśnienie p. 5.4) oraz rys. 6.8 (w funkcji  $M/M_r$  – wyjaśnienie p. 5.4).

Tab. 6.4 Zestawienie wyników uzyskanych dla umownego przegubu plastycznego dla belek sprężonych ciągniami z przyczepnością

$X=M/M_{max}$	$h_{PP}$ [cm]	$I_{PP}$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_{PP}/I_{nom}$	$\kappa$
0,10	30,0	67500	100,0%	<b>0,00</b>
0,17	30,0	67500	100,0%	<b>0,00</b>
0,25	29,0	60973	90,3%	<b>0,10</b>
0,32	20,0	20000	29,6%	<b>0,70</b>
0,39	14,5	7622	11,3%	<b>0,89</b>
0,46	14,0	6860	10,2%	<b>0,90</b>
0,54	13,0	5493	8,1%	<b>0,92</b>
0,61	12,5	4883	7,2%	<b>0,93</b>
0,68	12,5	4883	7,2%	<b>0,93</b>

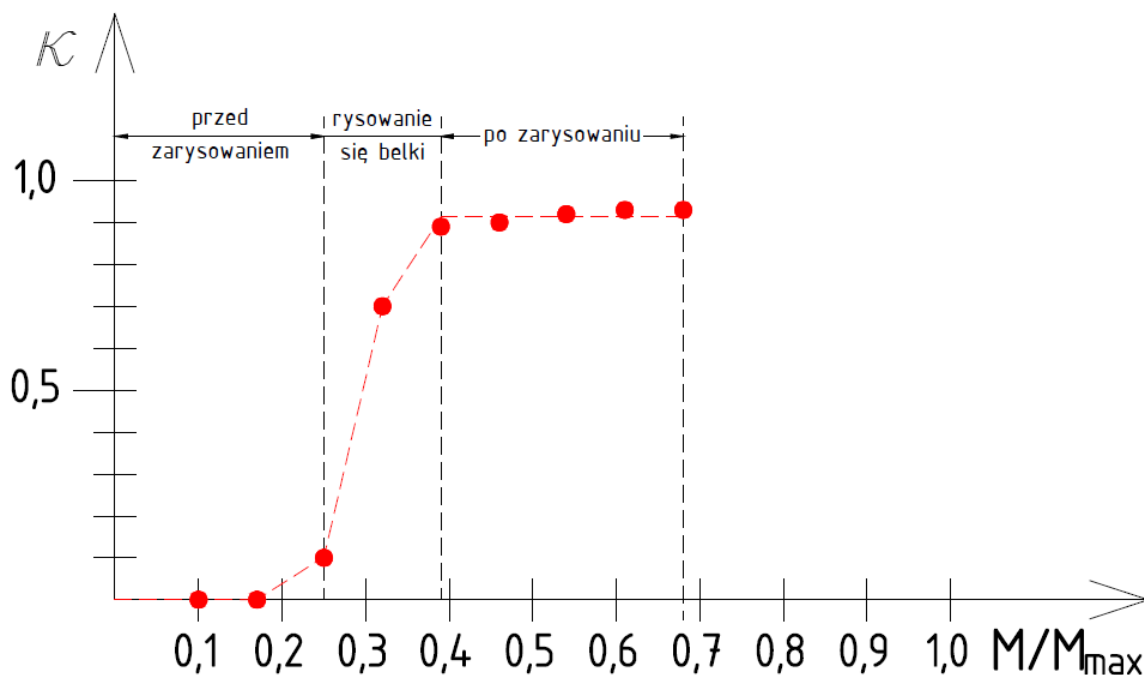
Tab. 6.5 Zestawienie wyników uzyskanych dla umownego przegubu plastycznego dla belek sprężonych ciągniami bez przyczepności

$X=M/M_{max}$	$h_{PP}$ [cm]	$I_{PP}$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_{PP}/I_{nom}$	$\kappa$
0,13	30,0	67500	100,0%	<b>0,00</b>
0,22	30,0	67500	100,0%	<b>0,00</b>
0,31	29,0	60973	90,3%	<b>0,10</b>
0,40	20,0	20000	29,6%	<b>0,70</b>
0,49	14,0	6860	10,2%	<b>0,90</b>
0,58	13,0	5493	8,1%	<b>0,92</b>
0,67	12,5	4883	7,2%	<b>0,93</b>
0,76	12,0	4320	6,4%	<b>0,94</b>
0,85	11,5	3802	5,6%	<b>0,94</b>

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

Tab. 6.6 Współczynnik  $\kappa$  w zależności od parametru  $Y=M/M_r$  ( $\kappa_p$  – współczynnik w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością;  $\kappa_{b/p}$  – współczynnik w belkach sprężonych ciągniami bez przyczepności;  $\kappa_{\text{śr}}$  – wartość średnia z  $\kappa_p$  oraz  $\kappa_{b/p}$ )

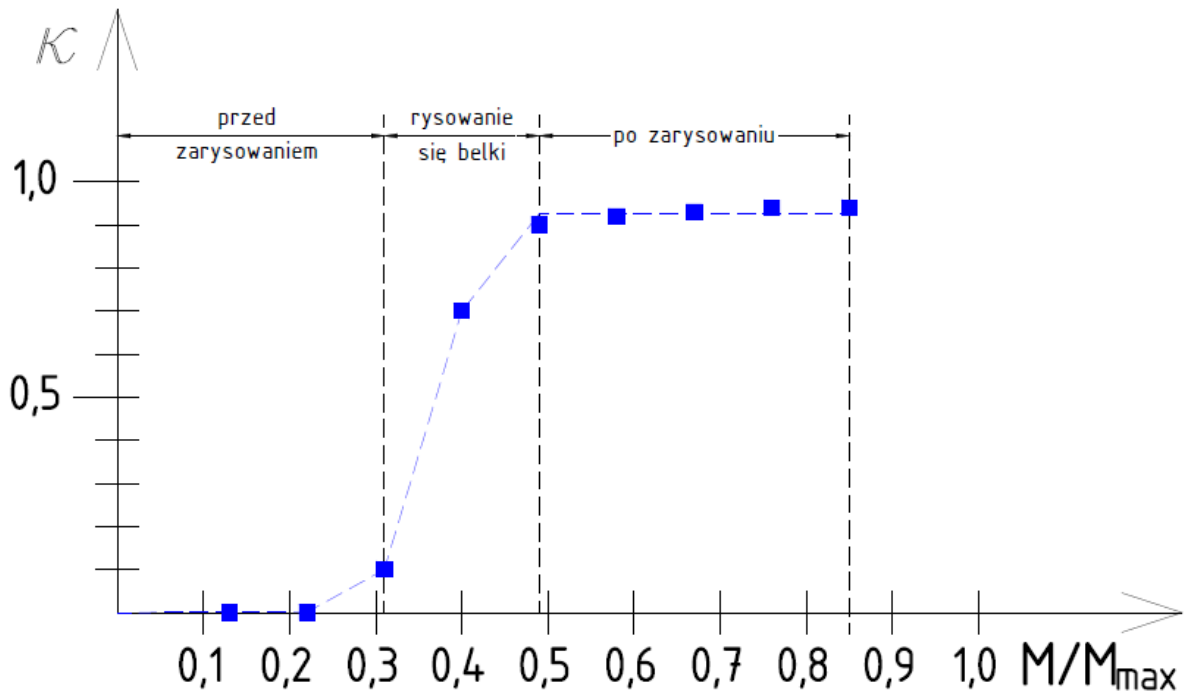
$Y=M/M_r$	$\kappa_p$	$\kappa_{b/p}$	$\kappa_{\text{śr}}$
0,46	0,00	0,00	0,00
0,78	0,00	0,00	0,00
1,10	0,10	0,10	0,10
1,43	0,70	0,70	0,70
1,75	0,89	0,90	0,89
2,07	0,90	0,92	0,91
2,40	0,92	0,93	0,92
2,72	0,93	0,94	0,93
3,04	0,93	0,94	0,94



Rys. 6.6 Wykres zależności współczynnika  $\kappa$  od parametru  $X = M/M_{\max}$  dla belek sprężonych ciągniami z przyczepnością

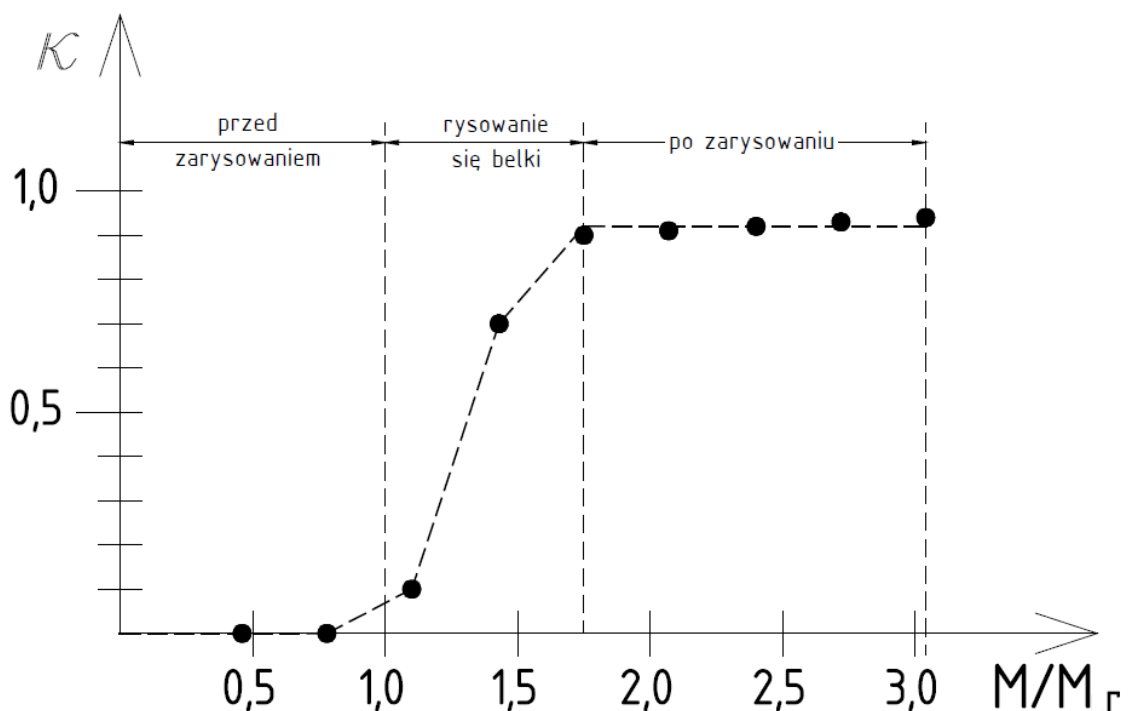


## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych



Rys. 6.7 Wykres zależności współczynnika  $\kappa$  od parametru  $X = M/M_{max}$  dla belek sprężonych cięgnami bez przyczepności

Wartości współczynnika  $\kappa$  w funkcji  $Y=M/M_r$  są do siebie bardzo zbliżone dla belek sprężonych cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności. W tab. 6.6 zestawiono wyniki uzyskane dla obu grup belek oraz wartości średnie. Różnice w wynikach między belkami sprężonymi cięgnami z przyczepnością i bez przyczepności nie przekraczają 1%, dlatego przedstawiono je na jednym wykresie (rys. 6.8).



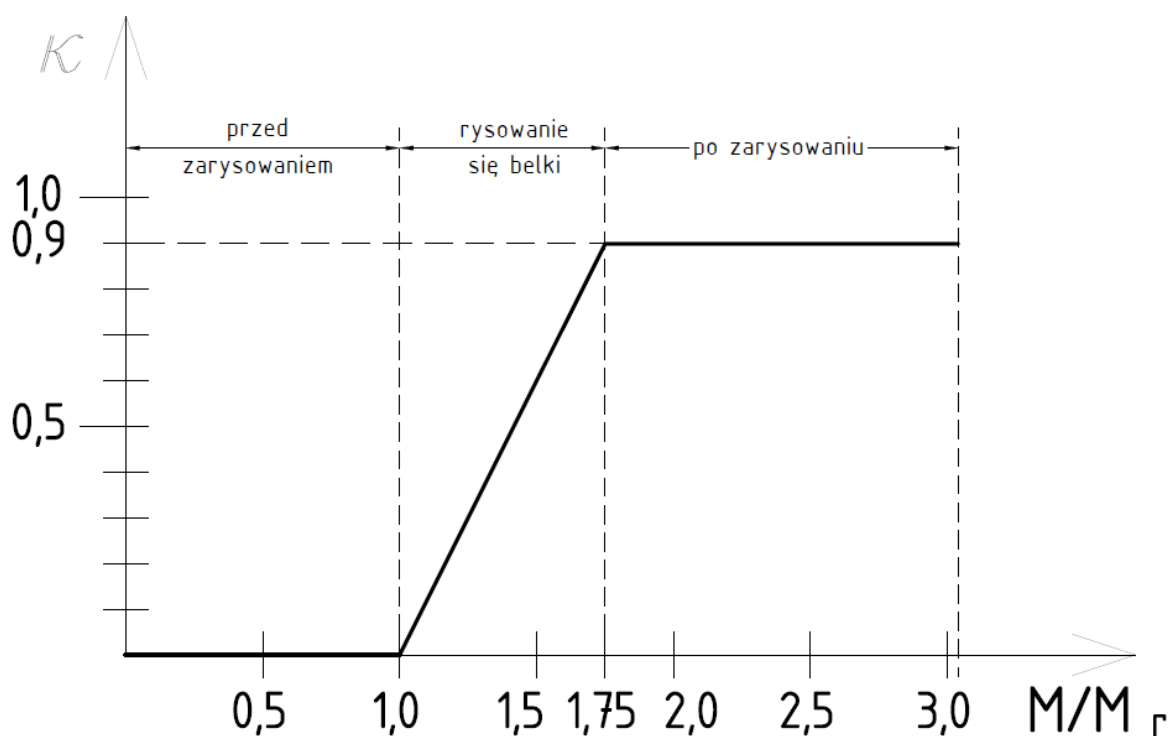
Rys. 6.8 Wykres zależności współczynnika  $\kappa$  od parametru  $Y = M/M_r$

## 6. Proponowany model przegubu plastycznego w konstrukcjach sprężonych

Na podstawie wykonanej analizy można wskazać trzy zasadnicze przedziały w zmienności współczynnika  $\kappa$ :

- faza przed zarysowaniem – zmienność redukcji sztywności, rzędu maksymalnie 10%,
- faza powstawania rys – redukcja sztywności zmienna od 10% do 90%,
- faza z ustalonym obrazem zarysowania (zwiększa się jedynie wysokość i rozwarłość rys) – redukcja sztywności o ustabilizowanej wartości ok. 90%.

Redukcja wysokości elementu odzwierciedlającego umowny przegub plastyczny w stosunku do wysokości przekroju belki wyniosła do 60%. Do zastosowań praktycznych uzyskany wykres z rys. 6.8 proponuje się aproksymować do uproszczonej zależności trójliniowej, z możliwością liniowej interpolacji wartości w fazie rysowania się belki jak pokazano na rys. 6.9. Propozycja ta wymaga dalszej analizy dla większej ilości badanych belek w celu weryfikacji. Moment rysujący zaleca się wyznaczać dla wartości parametru  $\lambda = 1,0$  (patrz p. 5.4.3), co jest zgodne z normą [88].



Rys. 6.9 Proponowane uproszczenie wykresu zależności współczynnika  $\kappa$  od parametru  $Y = M/M_r$

### 7. Podsumowanie pracy

#### 7.1. Zakres zrealizowanych zadań

Na podstawie przeprowadzonych badań w pracy podano propozycję opisu modelu przegubu plastycznego w betonowych konstrukcjach sprężonych. Punktem wyjścia do własnych analiz były zebrane informacje dotyczące zagadnień związanych z przegubami plastycznymi w konstrukcjach żelbetowych i sprężonych oraz przeprowadzone badania eksperymentalne. W rezultacie potwierdzono, że opis wybranych parametrów, takich jak długość umownego przegubu plastycznego czy zależność moment – krzywizna, sformułowane dla elementów żelbetowych można stosować także w odniesieniu do konstrukcji sprężonych. Ponadto, w pracy przedstawiono propozycję zależności moment-krzywizna w przegubie plastycznym oraz propozycję wyznaczania zastępczej sztywności przegubu plastycznego w belce sprężonej. Określono także współczynnik redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności. Uzyskane wyniki badań empirycznych i analiz mogą zostać wykorzystane do projektowania konstrukcji sprężonych w stanie granicznym nośności i użyteczności.

W ramach pracy przeprowadzono badania eksperymentalne na 12 belkach. Wykonano badania sześciu referencyjnych belek swobodnie podpartych oraz sześciu belek o schemacie statycznym belki ciągłej, dwuprzęsłowej. Belki składały się z części betonowej oraz części stalowej. Część betonowa została sprężona, przy czym trzy belki kablem z przyczepnością, a trzy belki kablem bez przyczepności w ramach każdej z dwóch grup, tj. sześciu belek swobodnie podpartych i sześciu belek ciągłych.

Zaproponowano nietypowy sposób badań z wykorzystaniem konstrukcji hybrydowej belek, tj. połączenie elementów z betonu sprężonego i stalowego. Jest to korzystne rozwiązanie, ponieważ interpretacja wyników pomiarów odkształceń wykonanych w elemencie stalowym jest bardziej precyzyjna niż w betonowym, ze względu na stałą sztywność oraz liniowo-sprężystą pracę elementu w zakresie przykładanych obciążeń. W badaniach do pomiarów wykorzystano m.in. innowacyjną technikę pomiaru odkształceń za pomocą światłowodów.

Dla badanych belek opracowano model numeryczny oraz potwierdzono jego zgodność z wynikami badań eksperymentalnych. Dokonano także przeglądu literatury z przedmiotowego zakresu.

### 7.2. Wnioski

- I. W rezultacie przeprowadzonych badań empirycznych, teoretycznych i analiz:
- stwierdzono, że występują trzy przedziały zmienności badanych parametrów, tj. współczynnika redystrybucji momentów zginających oraz współczynnika, który określa redukcję sztywności na odcinku umownego przegubu plastycznego: przed zarysowaniem, w trakcie rysowania się oraz przy stałym, ustalonym obrazie zarysowania.
  - stwierdzono, że zaproponowane przyjęcie trójliniowego wykresu moment – krzywizna w obszarze umownego przegubu plastycznego w belce sprężonej zostało potwierdzone wynikami badań empirycznych. Przyjęcie w obliczeniach trójliniowego wykresu moment – krzywizna jest korzystne pod względem praktycznym, także w obliczeniach numerycznych, ponieważ tylko trzy punkty jednoznacznie definiują trzyczęściową linię łamaną. Do oceny możliwości plastycznego obrotu oraz nośności można pominąć fazę pracy przekroju przed zarysowaniem, lecz ma ona zasadnicze znaczenie przy obliczeniach w stanie granicznym użyteczności (np. dotyczących ugięć od obciążeń zmiennych). Dlatego przyjęcie modelu trójliniowego, uwzględniającego fazę przed zarysowaniem, jest wskazane w celach projektowych w obliczeniach w stanie granicznym użyteczności.
  - do modelowania parametrów opisujących umowny przegub plastyczny zaproponowano wprowadzenie współczynnika  $\kappa$ , który określa redukcję sztywności na odcinku umownego przegubu plastycznego w stosunku do sztywności belki niezarysowanej. W analizie własnej wykorzystano jako podstawę umowną długość przegubu plastycznego wyznaczoną wg propozycji Mattocka [75]. Wskazano trzy zasadnicze przedziały w zmienności współczynnika  $\kappa$ : w fazie przed zarysowaniem – zmienność redukcji sztywności na odcinku umownego przegubu plastycznego, rzędu maksymalnie 10%; w fazie powstawania rys – redukcja sztywności zmienna z propozycją interpolacji liniowej od 10% do 90%; w fazie z ustalonym obrazem zarysowania – redukcja sztywności o ustabilizowanej wartości ok. 90%.
  - określono stopień redystrybucji momentów zginających w belkach ciągłych. Do chwili osiągnięcia wartości momentu rysującego w belkach następuje redystrybucja momentów zginających do 15%, która dalej wzrasta niemal dwukrotnie do wyczerpania stanu granicznego nośności. W fazie powstawania rys belki sprężone

ciągami z przyczepnością i bez przyczepności wykazują podobne wartości stopnia redystrybucji momentów zginających „z przęsła na podporę”. Przy stałym obrazie zarysowania większy stopień redystrybucji cechuje belki sprężone cięgami bez przyczepności.

- stwierdzono, że w stanie granicznym użyteczności praktyczne zastosowanie może mieć szacowanie sztywności zarysowanego przekroju sprężonego opisane w p. 5.5. wg zaleceń PCI. W pracy potwierdzono, że prawidłowym jest przyjmowanie uproszczenia, że w belkach sprężonych cięgami bez przyczepności współczynnik redukcji odkształceń stali sprężającej po zarysowaniu przekroju jest równy współczynnikowi redukcji odkształceń stali sprężającej przed zarysowaniem. W praktyce do wyznaczania ugięć, przydatne może być wykorzystanie efektywnego momentu bezwładności, uwzględniającego jednocześnie fazę przed i po zarysowaniu.
- potwierdzono przewidywane różnice w pracy belek sprężonych cięgami z przyczepnością i bez przyczepności. Wartości obciążeń powodujących wyczerpanie stanu granicznego nośności były większe dla belek sprężanych cięgami z przyczepnością zarówno dla belek swobodnie podpartych jak i ciągłych, przy tej samej wysokości strefy ściskanej. W belkach sprężonych cięgami bez przyczepności występuje mniej rys w większym rozstawie niż w przypadku belek sprężonych cięgami z przyczepnością. W przypadku belek sprężonych cięgami z przyczepnością największe krzywizny są skoncentrowane na odcinku występowania stałej, największej wartości momentu zginającego, a w przypadku belek sprężonych cięgami bez przyczepności rozkład krzywizny na długości belki jest bardziej równomierny. W obu przypadkach rozkład obliczonych krzywizn jest spójny z obrazem zarysowania belki. Potwierdzono natomiast zgodność zmienności współczynnika redystrybucji momentów zginających, zależność moment – krzywizna oraz zmienność współczynnika do wyznaczania zastępczej sztywności umownego przegubu plastycznego dla belek sprężonych cięgami z przyczepnością i bez przyczepności.

### II. Praktyczne wnioski związane z techniką prowadzenia badań:

- Nie zaleca się stosowania tensometrów elektrooporowych klejonych bezpośrednio na splotach sprężających w celu dokładnego określania wielkości naprężeń w stali sprężającej. Czujniki te ze względu na mechaniczne blokowanie m.in. przez tarcie i docisk nie stanowią źródła wiarygodnych wyników, a jedynie dają obraz jakościowy

mierzonych odkształceń. Biorąc pod uwagę pracochłonność i koszty ich montażu, nie poleca się.

- Bardzo dobre rezultaty pomiarów otrzymano dzięki zastosowaniu innowacyjnej metody pomiaru odkształceń w sposób ciągły czujnikami światłowodowymi (DFOS). Możliwość analizy wyników w czasie rzeczywistym w czasie badań oraz bardzo duża liczba punktów pomiarowych na długości światłowodu (belki) dają znaczną korzyść w badaniach empirycznych. Pozwalają m.in. na określenie momentu rysującego, rozkładu zarysowania na długości belki czy zmian położenia osi obojętnej na wysokości przekroju. W badaniach sprawdziły się zarówno światłowody w osłonach betonowane w belkach, jak i światłowody klejone bezpośrednio na powierzchni badanego elementu. Zdecydowanie jest to polecana na przyszłość technika pomiarowa.

### 7.3. Kierunki dalszych badań

Parametry związane z opisem przegubu plastycznego, zmian sztywności oraz redystrybucji momentów zginających w betonowych konstrukcjach sprężonych należy zbadać na większej ilości belek, różniących się m.in. kształtem, proporcją zbrojenia zwykłego i sprężającego czy klasą betonu w celu uzyskania bardziej uniwersalnych wyników, z możliwością szerszego ich wykorzystania. Podstawą do dalszych badań mogą być symulacje komputerowe prowadzone na sprawdzonym modelu numerycznym, który został opracowany w ramach tej pracy i dla którego została potwierdzona zgodność z wynikami badań eksperymentalnych.

W przyszłości proponuje się także zastosowanie otrzymanych rezultatów do analizy w zakresie pozasprężystym w projektowaniu i sprawdzaniu nośności konstrukcji sprężonych. Wynikiem połączonych dotychczasowych prac badawczych oraz badań przeprowadzonych w ramach tej pracy i aktualnych zapisów normowych może być kompletny algorytm projektowania sprężonej belki betonowej, zapewniający jednocześnie uwzględnienie korzyści wynikających z zastosowania analizy plastycznej i będący na tyle nieskomplikowany, aby był możliwy do powszechnego zastosowania.

#### Planowane dalsze badania eksperymentalne i analizy:

- analiza numeryczna belek różniących się danymi materiałowymi (klasa betonu, gatunek stali sprężającej oraz zbrojeniowej),

## 7. Podsumowanie pracy

---

- analiza numeryczna belek różniących się proporcją zbrojenia zwykłego oraz sprężającego, a także kształtem trasy kabli sprężających (badania dla tras krzywoliniowych),
- analiza numeryczna belek o zmiennej geometrii i proporcji rozpiętości przęseł,
- poszerzenie weryfikacji modelu w oparciu o dalsze badania eksperymentalne.



**Bibliografia**

1. ACI (*American Concrete Institute*) *Building Code Requirements for Reinforced Concrete* (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318-R-05), 2005, ACI Committee 318, Farmington Hills, MI, USA.
2. Ajdukiewicz A., Mames J., 2001, *Betonowe konstrukcje sprężone*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice.
3. Ajdukiewicz A., Mames J., 1976, *Konstrukcje sprężone*, PWN, Warszawa.
4. Alwis W. A. M., 1990, *Trilinear moment-curvature relationship for reinforced concrete beams*, ACI Structural Journal, vol. 87, no. 3, s. 276-283.
5. Babu R. R., Benipal G. S., Singh A. K., 2005, *Constitutive modelling of concrete: an overview*, Asian Journal of Civil Engineering, vol. 6 no. 4, s. 211-246.
6. Baker A. L. L., Amarakone A. M. N., 1964, *Inelastic Hyper Static Frames Analysis*, Proceedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, Florida, ASCE 1965-50, ACI SP-12, s. 85-142.
7. Barrias A., Casas J. R., Villalba S., 2016, *A Review of Distributed Optical Fiber Sensors for Civil Engineering Applications*, Sensors 2016, 16.
8. Benaim R., 2007, *The design of prestressed concrete bridges. Concepts and principles*, Taylor&Francis, London.
9. Bernardo L.F.A, Lopes S.M.R., 2004, *Neutral Axis Depth versus Flexural Ductility in High-Strength Concrete Beams*, Journal of Structural Engineering, vol. 130, no. 3, s. 452-459.
10. Borkowski A., 1985, *Statyczna analiza układów prętowych w zakresach sprężystym i plastycznym*, PWN, Warszawa.
11. Brenkus N. R., Tatar J., Hamilton H. R., Consolazio G. R., 2019, *Simplified finite element modelling of post-tensioned concrete members with mixed bonded and unbonded tendons*, Engineering Structures 179, s. 387-397.
12. Bychawski Z., Eimer C., Kauffman S., Olszak W., 1961, *Teoria konstrukcji sprężonych*, PWN, Warszawa.
13. Campbell T.I., Kodur V.K., 1990, *Deformation Controlled nonlinear analysis of Prestressed Concrete Continuous Beams*, PCI Journal, vol. 35, no. 5, s. 42-55.
14. do Carmo R. N. F., Lopes S. M. R., 2008, *Available plastic rotation in continuous high-strength concrete beams*, Canadian Journal of Civil Engineering, v. 35, s. 1152-1162.
15. do Carmo R. N. F., Lopes S. M. R., 2005, *Ductility and linear analysis with moment redistribution in reinforced high-strength concrete beams*, Canadian Journal of Civil Engineering , v. 32, s. 194-203.
16. Carreira D. J., Chu K-H., 1986, *Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension*, ACI Journal vol. 83, s. 21- 28.
17. CEB-FIP fib Model Code 2010 Volume 1
18. CEB-FIP fib Model Code 2010 Volume 2
19. CEB-FIP fib Bulletin 92: *Serviceability limit states of concrete structures*, 2019.

20. Chandrasekaran S., Nunziante L., Serino G., Carannante F., 2011, *Curvature Ductility of RC Sections Based on Eurocode: Analytical Procedure*, KSCE Journal of Civil Engineering, vol. 15, no. 1, s. 131-144.
21. Chien-Hung Lin, Yu-Min Chien, 2000, *Effect of section ductility on moment redistribution of continuous concrete beams*, Journal of the Chinese Institute of Engineers, vol. 23 no. 2, s. 131-141.
22. Cohn M. Z., Riva P., 1991, *Flexural Ductility of Structural Concrete Sections*, PCI Journal, v. 36, no. 2, s. 72-87.
23. Corley W. G., 1966, *Rotation Capacity of Reinforced Concrete Beams*, Proceeding of the ASCE Structural Journal, v. 92, No. ST-5, s. 121-146.
24. Czkwianianc A., Kamińska M., 1993, *Metoda nieliniowej analizy żelbetowych elementów prętowych*, PAN Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, Warszawa.
25. Deng L., Ghosn M., Znidaric A., Casas J. R., 2001, *Nonlinear flexural behaviour of prestressed concrete girder bridges*, Journal of Bridge Engineering, vol. 6, no. 4, s. 276-284.
26. Dodd L. L., Restrepo-Posada J. I., 1995, *Model for predicting cyclic behaviour of reinforcing steel*, Journal of Structural Engineering, vol. 121, no. 3, s. 433-445.
27. Eibl J., 1992, *Nichtlineare Traglastermittlung / Bemessung*, Beton – und Stahlbetonbau 87, H. 6, s. 137-139.
28. Eimer C., Kauffman S., Olszak W., 1965, *Budownictwo betonowe tom III. Konstrukcje sprężone*, Arkady, Warszawa.
29. Eligehausen R., Langer P., 1986, *The rotation capacity of plastic hinges in reinforced concrete beams and slabs*, International symposium on Fundamental Theory of Reinforced and Prestressed Concrete, September 18-20 1986, NIT, Nanjing, China, s. 1341-1349.
30. Eligehausen R., Li L., 1992, *Rotation capacity of prestressed concrete members*, Bond in concrete : proceedings, Riga, Latvia, Oct. 15-17, 1992 / International Conference Bond in Concrete from Research to Practice. Bd. 1. Riga : Riga Technical University, s. 2-58-2-67.
31. Furtak K., 2013, *Mosty Betonowe. Podstawy konstruowania i obliczania*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków.
32. Gawęcki A., 1998, *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań.
33. Godycki – Ćwirko T., 1982, *Mechanika Betonu*, Arkady, Warszawa.
34. Guo W., Han Z.-J., Chen Y. F., Liu Z.-H., 2018, Ying-sheng Ni, *An improved Approach for Measuring Cracking and Decompression Moments in Prestressed Concrete Members*, Structural Engineering International, vol. 28, no.1, s. 71-80.
35. Guo Z., 2014, *Principles of Reinforced Concrete*, Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier.
36. Hafezolghorani M., Hejazi F., Vaghei R., Jaafar M. S. B., Karimzade K., 2017, *Simplified Damage Plasticity Model for Concrete*, Structural Engineering International, vol. 1/2017, s. 68-78.

37. Harajli M. H., 2006, *On the Stresses in Unbonded Tendons at Ultimate: Critical Assessment and Proposed Changes*, ACI Structural Journal, v. 103, no. 6, s. 803-812.
38. Harajli M. H., Kanj M. Y., 1992, *Service Load Behaviour of Concrete Members Prestressed with Unbonded Tendons*, Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 118, no. 9, s. 2569-2589.
39. Hendy C.R., Smith D. A., 2007, *Designers' guide to EN 1992-2. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 2: Concrete bridges*, Thomas Telford, Bodmin.
40. Hodge P.G., 1959, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
41. Howiacki T., 2017, *Światłowody w pomiarach inżynierskich*, Builder nr 5 maj 2017, s. 70-72.
42. Jankowiak T., Łodygowski T., 2005, Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model, Foundations of Civil and Environmental Engineering, no. 6/2005, s. 53-69.
43. Jędrzejczak M., Knauff M., 2007, *Kąty obrotu w przegubach plastycznych żelbetowych belek ciągłych w zależności od stopnia redystrybucji momentów*, Inżynieria i Budownictwo nr 12/2007, s. 664-666.
44. Jędrzejczak M., 2004, *Sprawdzenie zdolności do obrotu w przegubach plastycznych żelbetowych belek ciągłych*, Inżynieria i Budownictwo nr 10/2004, s. 553 – 556.
45. Jędrzejczak M., Knauff M., 2002, *Redystrybucja momentów zginających w żelbetowych belkach ciągłych – zasady polskiej normy na tle Eurokodu*, Inżynieria i Budownictwo nr 8/2002, s. 428-430.
46. Jędrzejczak M., Knauff M., 2008, *The plastic equalization method for bending moments and the rotation capacity of plastic hinges in continuous reinforced concrete beams in light of Eurocode requirements*, Technical Sciences No 11/2008, s. 108-116.
47. Joo H.-E., Han S.-J., Lee D., Ju H., Seo S.-Y., Kim K. S., 2019, *Design method for checking tensile stresses under service loads in cracked prestressed concrete members with 2400-MPa strands*, Structural Design of Tall and Special Buildings, e1681.
48. Khan N. M., Mattock A. H., 1956, *An experimental investigation of the influence of the formation of plastic hinge on the shear strength of a singly reinforced concrete beam*, Magazine of Concrete Research, v. 8, no. 24, , s. 151-156.
49. Kheyroddin A., Naderpour H., 2007, *Plastic Hinge Rotation Capacity of Reinforced Concrete Beams*, International Journal of Civil Engineering, Vol.5, No. 1, s. 30-47.
50. Klisiński M., Mróz Z., 1988, *Opis niesprężystych deformacji i uszkodzenia betonu*, Politechnika Poznańska Rozprawy nr 193, Poznań.
51. Knauff M., 2019, *Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2*, wyd. III poszerzone. PWN, Warszawa.
52. Knauff M., 2011, *Projektowanie konstrukcji z betonu według Eurokodu – podstawowe założenia i zasady*, w: Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i Inżynieria Środowiska, vol. 58, nr 3/I, s. 135-154.

53. Kodur V. K. R., Campbell T. I., 1996, *Evaluation of Moment Redistribution in a Two-Span Continuous Prestressed Concrete Beam*, ACI Structural Journal, vol. 93, no. 6, s. 721 – 728.
54. Kong F.K., Evans R.H., 1987, *Reinforced and prestressed concrete*. 3<sup>rd</sup> Edition, Springer Science + Business Media, Dordrecht.
55. Korentz J., 2015, *Metoda analizy żelbetowych elementów prętowych w stanie deformacji pozakrytycznych*, PAN Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, Studia z zakresu inżynierii nr 90, Warszawa.
56. Korentz J., 2009, *Model zależności moment-krzywizna dla belek żelbetowych - ocena ciągliwości*, 55 Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZiTB, Problemy naukowo-badawcze budownictwa, s. 231-238, Kielce-Krynica.
57. Korentz J., 2005, *O nowej metodzie modelowania pracy przegubu plastycznego w belkach i słupach żelbetowych*, 51 Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZiTB, Gdańsk-Krynica, t.3 Konstrukcje betonowe, s. 89-96.
58. Lee S.-H., Abolmaali A., Shin K.-J., Lee H.-D., 2020, *ABAQUS modelling for post-tensioned reinforced concrete beams*, Journal of Building Engineering 30, 101273.
59. Leung C. C. Y., Au F. T. K., Kwan A. K. H., 2013, *Non-linear analysis and moment redistribution of prestressed concrete members*, Engineering and Computational Mechanics, vol. 166 issue EM1, s. 9-21.
60. Li L., Eligehausen R., 1996, *Tragverhalten von vorgespannten plastischen Gelenken*, Beton- und Stahlbetonbau 91, Heft 8, s. 183-187.
61. Li L., Zheng W., Wang Y., 2019, *Review of moment redistribution in statically indeterminate RC members*, Engineering Structures no. 196, s. 1-14.
62. Libby J.R., 1990, *Modern prestressed concrete. Design principles and construction methods*, Fourth Edition, Springer Science + Business Media, New York.
63. Lopes S.M.R., Bernardo L.F.A, 2003, *Plastic Rotation capacity of high-strength concrete beams*, Materials and Structures, Vol.36, s. 22-31.
64. Lopes S. M., do Carmo R. N. F., 2006, *Deformable strut and tie model for the calculation of the plastic rotation capacity*, Computers and Structures 84, s. 2174-2183.
65. Lopez A. M., Sosa P., Senach J., Prada M., 2020, *Influence of the plastic hinge rotations on shear strength in continuous reinforced concrete beams with shear reinforcement*, Engineering Structures vol. 207, 110242.
66. Lou T., Peng Ch., Karavasilis T. L., Min D., Sun W., 2020, *Moment redistribution versus neutral axis depth in continuous PSC beams with external CFRP tendons*, Engineering Structures vol. 209, 109927.
67. Machelski Cz., 2010, *Modelowanie sprężenia mostów*, Dolnośląskie wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.
68. Madaj A., 2005, *Doraźna nośność i sztywność na zginanie zespolonych belek stalowo-betonowych*, Rozprawy nr 391, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań.

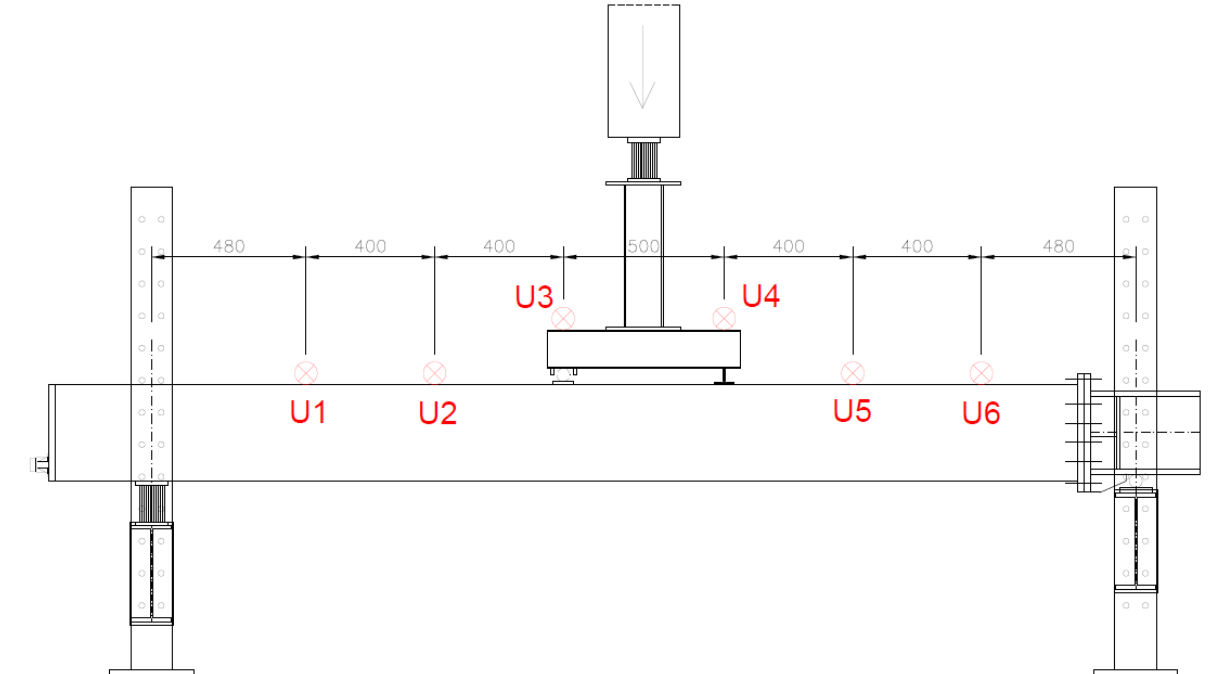
69. Madaj A., Mossor K., 2012, *Projektowanie wg PN-EN swobodnie podpartej mostowej belki sprężonej*, Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej nr 14/2012, s. 161-172.
70. Madaj A., Mossor K., 2014, *Nośność graniczna statycznie niewyznaczalnych belek sprężonych zgodnie z założeniami normy PN-EN 1992*, Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej, nr 18/2014, s. 73-91.
71. Madaj A., Mossor K., 2015, w: Praca zbiorowa pod red. I. Jankowiak, A. Madaja, *Projektowanie mostów zgodnie z systemem norm PN-EN. Wybrane zagadnienia, rozdział III: Projektowanie swobodnie podparte belki sprężonej wg PN-EN s. 210-220, Nośność graniczna statycznie niewyznaczalnych belek sprężonych zgodnie z założeniami normy PN-EN 1992*, s. 221-238, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań.
72. Madaj A., Mossor K., 2015, w: Praca zbiorowa pod red. György L. Balázs, *Reinforced concrete. Testimonials: Rotation in a plastic hinge and the bearing capacity of a continuous concrete beam*, s. 71-78, Cypress Nyomdai Szolgáltató Kft., Budapest.
73. Madaj A., Wołowicki W., 2010, *Projektowanie mostów betonowych*, WKŁ, Warszawa.
74. Mander J. B., Priestley M. J. N., Park R., 1988, *Theoretical stress-strain model for confined concrete*, Journal of Structural Engineering vol. 114 (8), s. 1804 – 1826.
75. Mattock A. H., 1967, *Discussion of rotational capacity of reinforced concrete beams by W. D. G. Corley*. ASCE J. Struct. Div., 93(2), s. 519–522.
76. Mattock A. H., 1964, *Rotational Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams*, Proceedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, Florida, ACI SP-12, p. 143-181.
77. Mattock A. H., Yamazaki J., Kattula B. T., 1971, *Comparative Study of Prestressed Concrete Beams With and Without Bond*, ACI Journal, v. 68, no. 2, s. 116-125.
78. Menn Ch., 1990, *Prestressed concrete bridges*, Birkhäuser Verlag, Basel. [tłumaczenie monografii: Menn Ch., Stahlbetonbrücken, Springer-Verlag, Wien 1986; tłumaczenie P. Gauvreau]
79. Naaman A. E., Burns N., French C., Gamble W. L., Mattock A. H., 2002, *Stresses in Unbonded Prestressing Tendons at Ultimate: Recommendation*, ACI Structural Journal, v. 99, no. 4, s. 518-529.
80. Naaman A. E., Fadi M. A., 1991, *Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioning Tendons: Part 1 – Evaluation of the State-of-the-Art*, ACI Structural Journal, v. 88, no. 5, s. 641-651.
81. Naaman A. E., Fadi M. A., 1991, *Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioning Tendons: Part 2 – Proposed Methodology*, ACI Structural Journal, v. 88, no. 6, s. 683-692.
82. Naaman A. E., Harajli M., Wight J. K., 1986, *Analysis of ductility in partially prestressed concrete flexural members*, PCI Journal, s. 64 – 87.
83. Naaman a. E., Siriaksorn A., 1979, *Serviceability Based Design of Partially Prestressed Beams*, PCI Journal, v. 24, no. 2, s. 64-89.

84. Pannell F. N., 1969, *The ultimate moment of resistance of unbonded prestressed concrete beams*, Magazine of Concrete Research, v. 21, no. 66, s. 43-54.
85. *PCI design handbook – Precast and Prestressed concrete* 2008. 7<sup>th</sup> Edition, Precast/Prestressed Concrete Institute, Chicago.
86. Pisanty A., Regan P. E., 1998, *Ductility requirements for redistribution of moments in reinforced concrete elements and a possible size effect*, Materials and Structures, vol. 31 s. 530-535.
87. Pisanty A., Regan P. E., 1998, *Redistribution of Moments – from Serviceability to Ultimate Limit State*, Structural Engineering International, vol. 8, no. 1, s. 35-39.
88. PN – EN 1992-1-1:2004. *Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.*
89. PN – EN 1992-2:2005. *Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 2: Mosty z betonu. Obliczenia i reguły konstrukcyjne.*
90. Pokhrel M., Bandelt M.J., 2019, *Plastic hinge behaviour and rotation capacity in reinforced ductile concrete flexural members*, Engineering Structures 200, s. 1-20.
91. Praca zbiorowa Universität Stuttgart, Combri, 2008, *Handbuch Brücken. Teil I: Anwendung von Eurocode – Regelungen*, Stuttgart.
92. Radomski W., Oleszek R., Mossakowski P., 2013, *O projektowaniu mostowych konstrukcji kablobetonowych w świetle PN-91/S-10042 i PN-EN 1992-1-1*, Drogownictwo 7-8/2013, s. 199-209.
93. Radomski W., Siwowski T., 2011, *Mosty betonowe - podstawy naukowe projektowania i konstruowania, a normalizacja*, w: Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i Inżynieria Środowiska, vol. 58, nr 3/I, s. 215-234.
94. Ren W., Sneed L. H., Yang Y., He R., 2015, *Numerical Simulation of Prestressed Precast Concrete Bridge Deck Panels Using damage Plasticity Model*, International Journal of Concrete Structures and Materials, vol. 9, no. 1, s. 45-54.
95. Riva P., Cohn M. Z., 1994, *Rotation Capacity of Structural Concrete Members*, Magazine Concrete Research, V. 46, No. 168, s. 223-234.
96. Rodriguez M. E., Botero J. C., Villa J., 1999, *Cyclic stress-strain behaviour of reinforcing steel including effect of buckling*, Journal of Structural Engineering, vol. 125, no. 6, s. 605-612.
97. Ryżyński A., 1965, *Nośność graniczna żelbetowych belek ciągnących pracujących pod obciążeniem ruchomym*, Rozprawy nr 12, Politechnika Poznańska, Poznań.
98. Saenz, L.P., 1964, *Discussion of Paper "Equation for Stress-Strain Curve of Concrete" by Desai, P. and Krishnan, S.*, Journal of American Concrete Institute, vol. 61, s. 1229-1235.
99. Sawyer H. A., 1965, *Design of concrete frames for two failure stages*, Special Publication 12, s. 405 – 437.
100. Scholz H., 1990, *Ductility, Redistribution and Hyperstatic Moments in Partially Prestressed Members*, ACI Structural Journal, vol. 87, no. 3, s. 341-349.

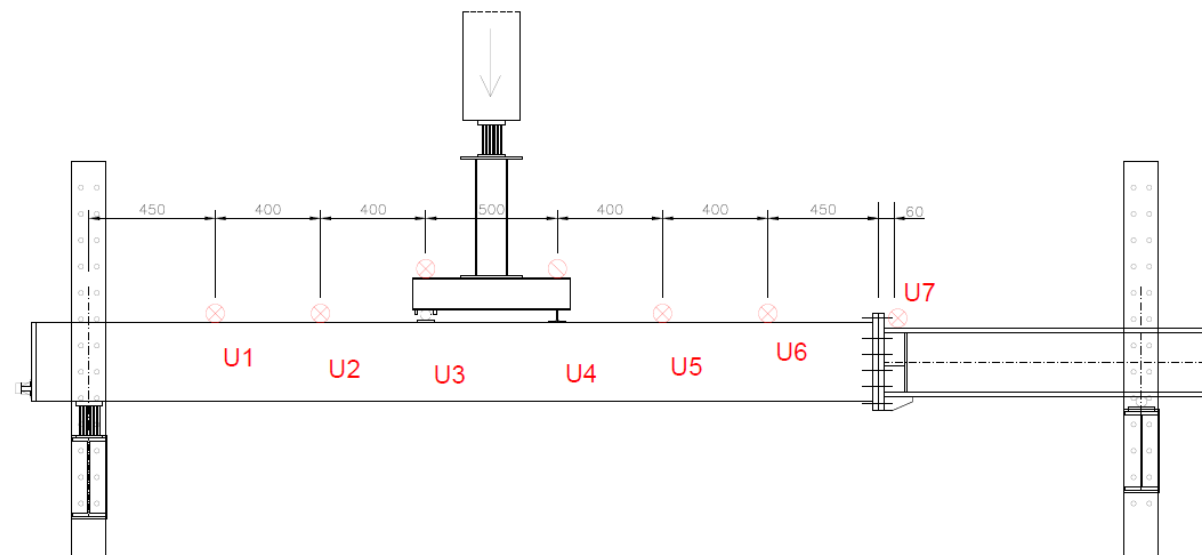
101. Sekcja Konstrukcji Betonowych KILiW PAN, 2006, *Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.
102. Seruga A., Politalski W., 2008, *Graniczne naprężenia stali sprężającej w elementach zginanych sprężonych cięgnami bez przyczepności*, Czasopismo techniczne Politechniki Krakowskiej, z. 1-B/2008, s. 109-133.
103. Sieńko R., Bednarski Ł., Howiacki T., Koryciński J., 2018, *Pomiary deformacji mostu podwieszonoego z wykorzystaniem światłowodowych czujników geometrycznie ciągłych DFOS*, Wrocławskie Dni Mostowe, Wrocław, 29-30 listopada 2018.
104. Siwowski T., Sieńko R., Bednarski Ł., Rajchel M., Howiacki T., 2017, *Światłowodowe pomiary odkształceń elementów mostów kompozytowych na przykładzie wybranych badań*, Wrocławskie Dni Mostowe, Wrocław, 28-29 listopada 2017.
105. Skogman B. C., Tadros M. K., Grasmick R., 1988, *Ductility of reinforced and prestressed concrete flexural members*, PCI Journal, s. 94-107.
106. Szarliński J., Winnicki A., Podleś K., 2002, *Konstrukcje z betonu w płaskich stanach*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków.
107. Szechiński M., 1990, *Deformacje zginanych elementów żelbetowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Budownictwo, z. 69, s. 79-133.
108. Śledziewski K., 2015, *Praca stalowo-betonowej belki zespolonej z uwzględnieniem zarysowania płyty*, Rozprawa doktorska, Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury, Lublin.
109. Tadros M. K., Ghali A., Meyer A. W., 1985, *Prestressed Loss and Deflection of Precast Concrete Members*, PCI Journal, vol. 30, no. 1, s. 114-141.
110. Zhao X., Wu Y.-F., Leung A. Yt., Lam H. F., 2011, *Plastic Hinge Length in Reinforced Concrete Flexural Members*, Procedia Engineering 14, s. 1266-1274.
111. Zhou W., Zheng W., 2010, *Experimental research on plastic design method and moment redistribution in continuous concrete beams prestressed with unbonded tendons*, Magazine of Concrete Research, vol. 62, no. 1, s. 51-64.
112. Zhou W., Zheng W., 2014, *Unbonded Tendon Stresses in Continuous Post-Tensioned Beams*, ACI Structural Journal, vol. 111, no. 3, s. 525-536.

Załącznik nr 1 Ugięcia belek

- Na rys. Z1.1 oraz Z1.2 pokazano lokalizację czujników do pomiarów ugięć, a w tab. Z1.1÷Z1.4 linie ugięcia.



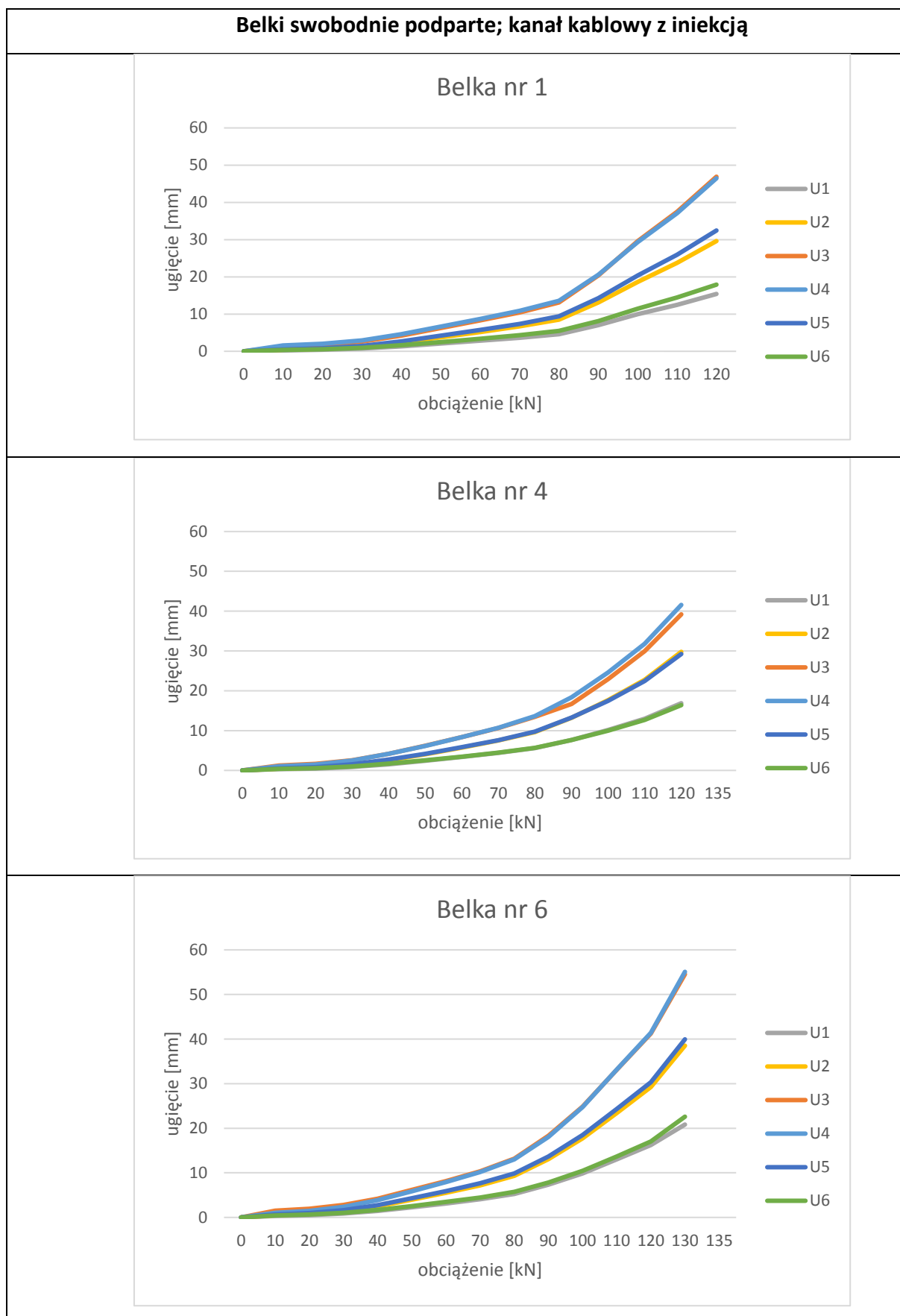
Rys. Z1.1 Lokalizacja czujników do pomiarów ugięć belek swobodnie podpartych (wymiary w [mm])



Rys. Z1.2 Lokalizacja czujników do pomiarów ugięć belek ciągłych (wymiary w [mm])

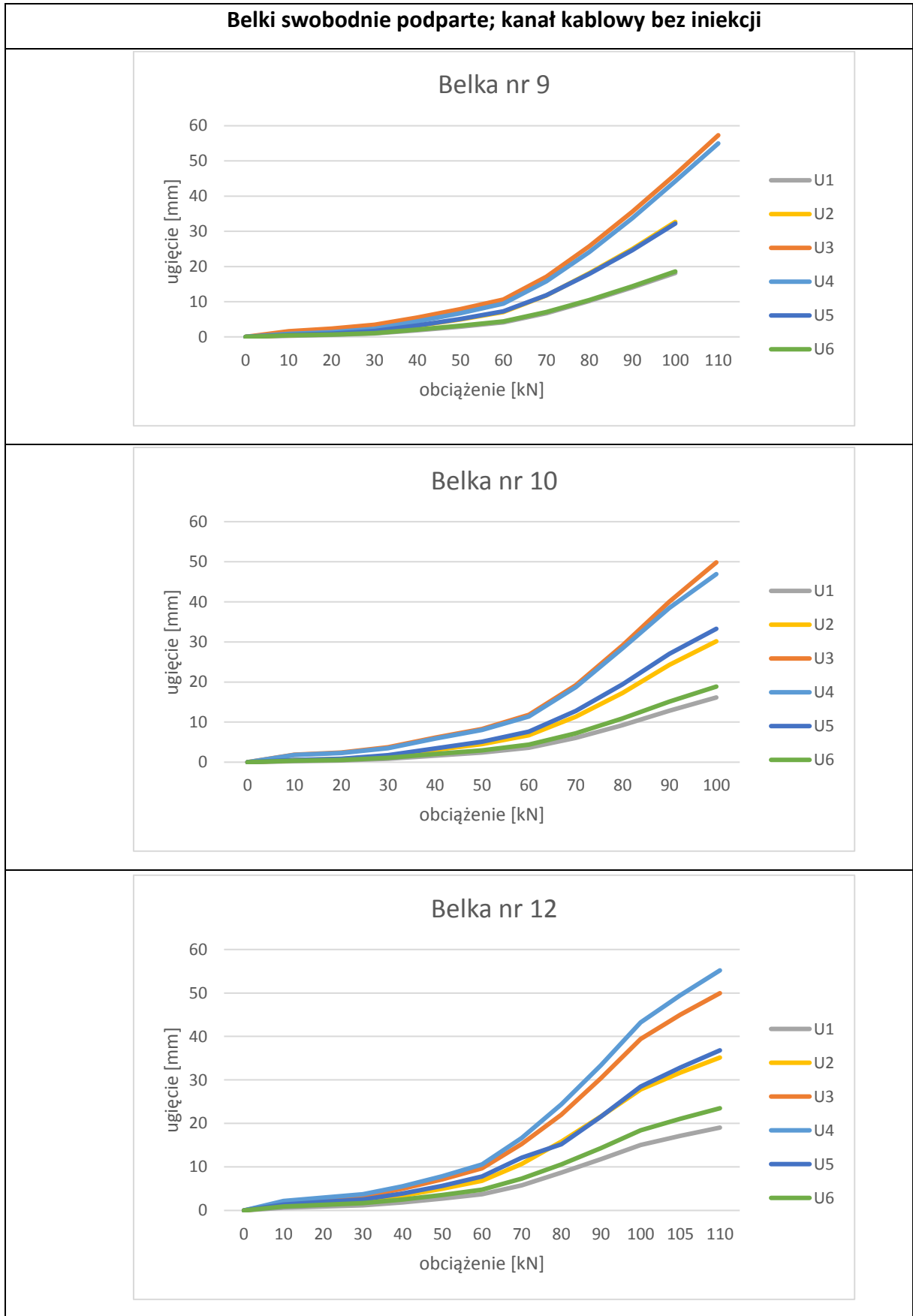


Tab. Z1.1 Linie ugięcia dla belek swobodnie podpartych sprzężonych ciągniami z przyczepnością



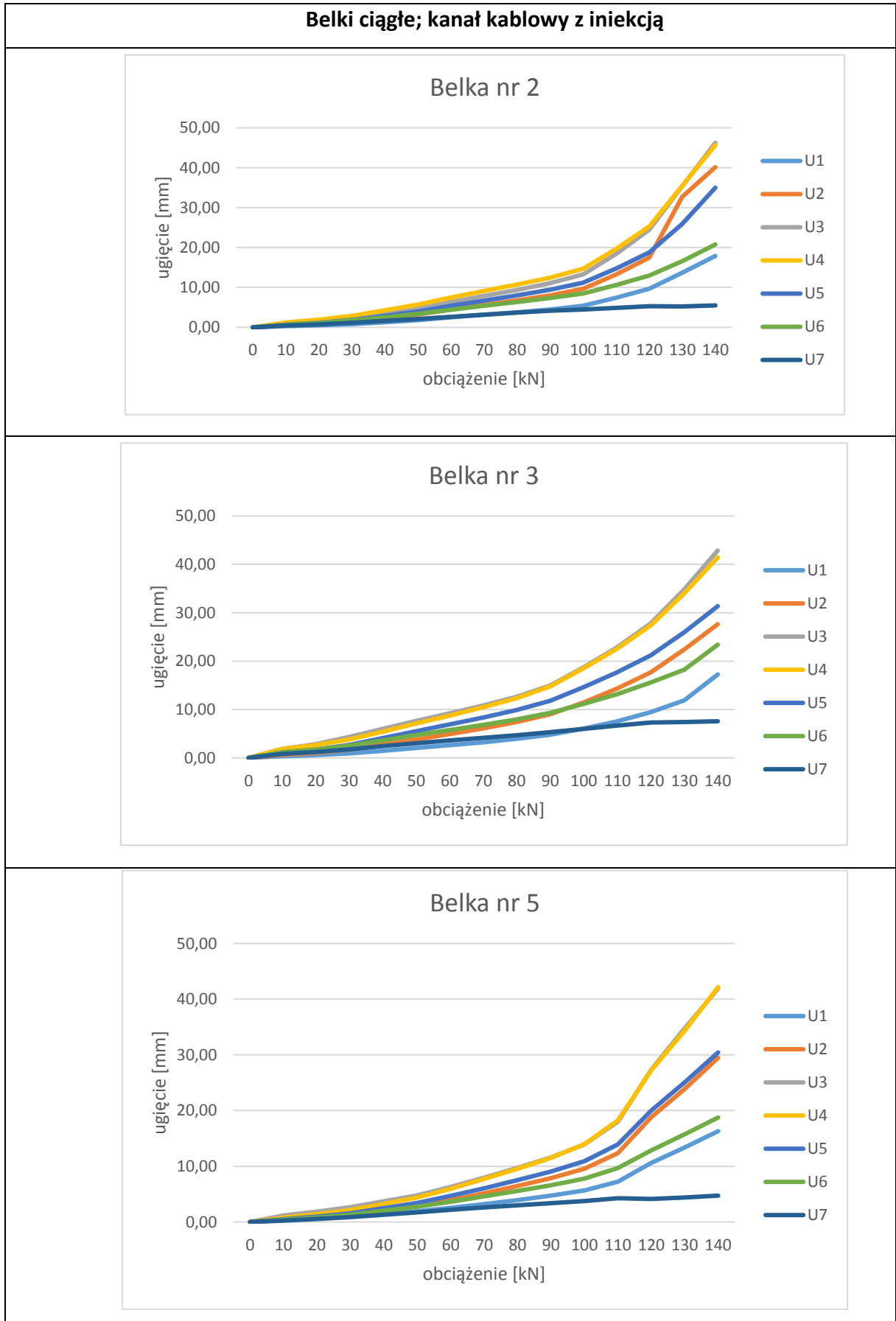
Załącznik nr 1 Ugięcia belek

Tab. Z1.2 Linie ugięcia dla belek swobodnie podpartych sprzężonych ciągniami bez przyczepności



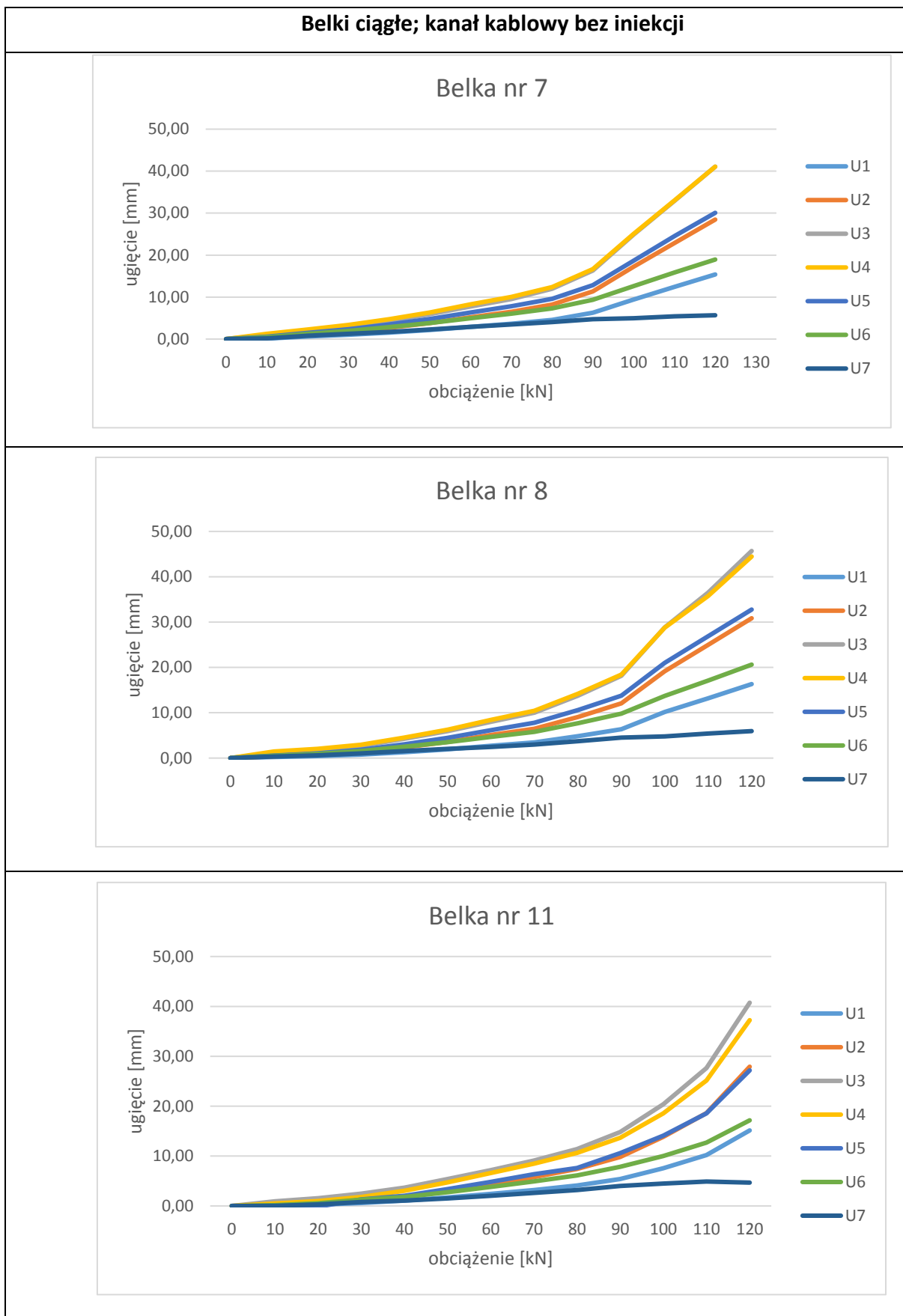
## Załącznik nr 1 Ugięcia belek

Tab. Z1.3 Linie ugięcia dla belek ciągłych sprężonych cięgnami z przyczepnością



## Załącznik nr 1 Ugięcia belek

Tab. Z1.4 Linie ugięcia dla belek ciągłych sprężonych cięgnami bez przyczepności



**Załącznik nr 2 Zarysowanie belek**

- W tab. Z2.1÷Z2.4 zestawiono dane dotyczące inwentaryzacji rys. Przyjęto oznaczenia:
  - zasięg – długość odcinka, na którym występuje zarysowanie,
  - $h_{\max}$  rysy – maksymalna wysokość rysy przy danej wartości obciążenia.
- W tab. Z2.5 oraz Z2.6 pokazano końcowy obraz zarysowania belek, a w tab. Z2.7 oraz Z2.8 rozwój rys. Numery przy rysach w tab. Z2.7 oraz Z2.8 oznaczają zasięg rys powstałych w kolejnych fazach obciążenia (liczby oznaczają wartości obciążenia w [kN] podzieloną przez dziesięć). Na fot. Z2.1÷Z2.4 pokazano zdjęcia przykładowych belek po zarysowaniu.

Tab. Z2.1 Inwentaryzacja rys w belkach swobodnie podpartych sprzężonych ciągniami z przyczepnością

<b>Belki swobodnie podparte, kanał kablowy z iniekcją</b>						
<b>belka nr</b>		<b>6</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>średnio</b>	
p o z i o m  o b c i ą ż e n i a  — k N —	<b>40</b>	zasięg [cm]	110	97	147	118,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	17	18	17	17,3
		ilość nowych rys	7	6	10	8
	<b>50</b>	zasięg [cm]	173	144	147	154,7
		$h_{\max}$ rysy [cm]	19	19	21	19,7
		ilość nowych rys	6	4	1	4
	<b>60</b>	zasięg [cm]	173	159	197	176,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	21	22	21	21,3
		ilość nowych rys	0	2	2	1
	<b>70</b>	zasięg [cm]	186	186	197	189,7
		$h_{\max}$ rysy [cm]	21	22	23	22,0
		ilość nowych rys	1	1	1	1
	<b>80</b>	zasięg [cm]	214	186	197	199,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	22	24	23,0
		ilość nowych rys	3	2	1	2
	<b>90</b>	zasięg [cm]	214	186	197	199,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	25	25	26	25,3
		ilość nowych rys	0	0	0	0
	<b>100</b>	zasięg [cm]	214	186	197	199,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	26	26	27	26,3
		ilość nowych rys	0	0	1	0
	<b>110</b>	zasięg [cm]	214	186	197	199,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	26	27	27	26,7
		ilość nowych rys	0	0	1	0
<b>120</b>	zasięg [cm]	214	186	197	199,0	
	$h_{\max}$ rysy [cm]	<b>28</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	27,7	
	ilość nowych rys	0	0	0	0	
ilość rys łącznie		<b>17</b>	<b>15</b>	<b>17</b>	16	
średni rozstaw rys [cm]		<b>13,4</b>	<b>13,3</b>	<b>12,3</b>	13,0	

Tab. Z2.2 Inwentaryzacja rys w belkach swobodnie podpartych sprężonych ciągnami bez przyczepności

<b>Belki swobodnie podparte, kanał kablowy bez iniekcji</b>						
<b>belka nr</b>		<b>12</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>średnio</b>	
p o z i o m  o b c i ą ż e n i a  [ k N ]	<b>40</b>	zasięg [cm]	98	136	144,5	126,2
		$h_{\max}$ rysy [cm]	18	21	21	20,0
		ilość nowych rys	8	10	9	9
	<b>50</b>	zasięg [cm]	129	136	144,5	136,5
		$h_{\max}$ rysy [cm]	22	21	22	21,7
		ilość nowych rys	2	0	3	2
	<b>60</b>	zasięg [cm]	158	153	157,5	156,2
		$h_{\max}$ rysy [cm]	24	23	24	23,7
		ilość nowych rys	2	2	1	2
	<b>70</b>	zasięg [cm]	158	167	157,5	160,8
		$h_{\max}$ rysy [cm]	25	25	27	25,7
		ilość nowych rys	0	1	1	1
	<b>80</b>	zasięg [cm]	158	167	157,5	160,8
		$h_{\max}$ rysy [cm]	25	27	27	26,3
		ilość nowych rys	0	0	0	0
	<b>90</b>	zasięg [cm]	158	167	157,5	160,8
		$h_{\max}$ rysy [cm]	27	27	27	27,0
		ilość nowych rys	0	0	0	0
	<b>100</b>	zasięg [cm]	158	167	157,5	160,8
		$h_{\max}$ rysy [cm]	<b>28</b>	<b>27</b>	<b>27</b>	27,3
		ilość nowych rys	0	0	0	0
	ilość rys łącznie		<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	13
	średni rozstaw rys [cm]		<b>14,4</b>	<b>13,9</b>	<b>12,1</b>	13,5

Tab. Z2.3 Inwentaryzacja rys w belkach ciągłych sprężonych cięgnami z przyczepnością

<b>Belki ciągłe, kanał kablowy z iniekcją</b>						
<b>belka nr</b>		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>średnio</b>	
p o z i o m  o b c i ą ż e n i a  [ k N ]	<b>30</b>	zasięg [cm]	112	55	69	78,7
		$h_{\max}$ rysy [cm]	10	3	12	8,3
		ilość nowych rys	7	3	3	4
	<b>40</b>	zasięg [cm]	131	86	99	105,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	17	10	16	14,3
		ilość nowych rys	2	3	3	3
	<b>50</b>	zasięg [cm]	147	116	140	134,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	19	17	18	18,0
		ilość nowych rys	1	1	3	2
	<b>60</b>	zasięg [cm]	147	145	140	144,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	19	19	20	19,3
		ilość nowych rys	2	3	2	2
	<b>70</b>	zasięg [cm]	163	169	155	162,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	21	20	21	20,7
		ilość nowych rys	0	1	1	1
	<b>80</b>	zasięg [cm]	163	186	155	168,0
		$h_{\max}$ rysy [cm]	21	22	22	21,7
		ilość nowych rys	2	3	0	2
	<b>90</b>	zasięg [cm]	178	186	171	178,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	22	22	22,3
		ilość nowych rys	0	0	2	1
	<b>100</b>	zasięg [cm]	178	186	171	178,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	24	23	23	23,3
		ilość nowych rys	1	1	1	1
	<b>110</b>	zasięg [cm]	178	186	171	178,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	25	25	24	24,7
		ilość nowych rys	0	0	0	0
<b>120</b>	zasięg [cm]	178	186	171	178,3	
	$h_{\max}$ rysy [cm]	25	26	26	25,7	
	ilość nowych rys	1	1	0	1	
<b>130</b>	zasięg [cm]	178	186	171	178,3	
	$h_{\max}$ rysy [cm]	<b>27</b>	<b>27</b>	<b>27</b>	27,0	
	ilość nowych rys	0	1	1	1	
ilość rys łącznie		<b>16</b>	<b>17</b>	<b>16</b>	16	
średni rozstaw rys [cm]		<b>11,9</b>	<b>11,6</b>	<b>11,4</b>	11,6	

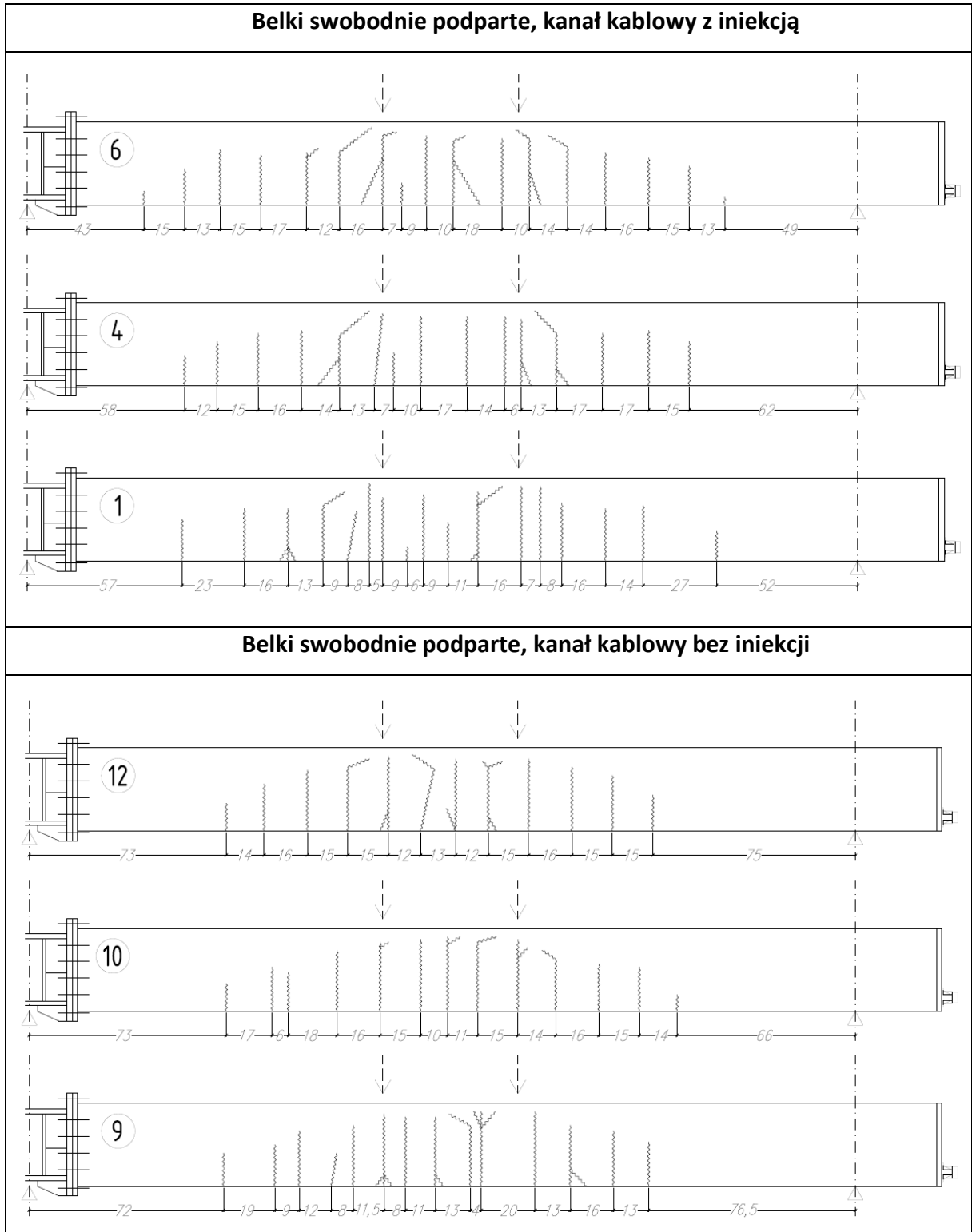
Tab. Z2.4 Inwentaryzacja rys w belkach ciągłych sprężonych cięgnami bez przyczepności

<b>Belki ciągłe, kanał kablowy bez iniekcji</b>						
<b>belka nr</b>		<b>7</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>średnio</b>	
P o z i o m  o b c i ą ż e n i a  [ k N ]	<b>30</b>	zasięg [cm]	101	68	52	73,7
		$h_{\max}$ rysy [cm]	12	12	12	12,0
		ilość nowych rys	4	3	3	3
	<b>40</b>	zasięg [cm]	114	97	97	102,7
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	18	15	18,7
		ilość nowych rys	3	4	4	4
	<b>50</b>	zasięg [cm]	141	97	112	116,7
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	20	20	21,0
		ilość nowych rys	2	0	1	1
	<b>60</b>	zasięg [cm]	141	126	112	126,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	21	21	21,7
		ilość nowych rys	3	3	0	2
	<b>70</b>	zasięg [cm]	141	126	136	134,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	22	24	23,0
		ilość nowych rys	0	0	2	1
	<b>80</b>	zasięg [cm]	141	141	136	139,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	23	25	25	24,3
		ilość nowych rys	0	1	0	0
	<b>90</b>	zasięg [cm]	141	141	136	139,3
		$h_{\max}$ rysy [cm]	24	25	26	25,0
		ilość nowych rys	0	0	1	0
<b>100</b>	zasięg [cm]	174	141	136	150,3	
	$h_{\max}$ rysy [cm]	25	27	26	26,0	
	ilość nowych rys	2	0	0	0	
<b>110</b>	zasięg [cm]	174	141	136	150,3	
	$h_{\max}$ rysy [cm]	25	27	26	26,0	
	ilość nowych rys	0	0	0	0	
<b>120</b>	zasięg [cm]	174	141	136	150,3	
	$h_{\max}$ rysy [cm]	<b>26</b>	<b>28</b>	<b>28</b>	27,3	
	ilość nowych rys	0	0	0	0	
ilość rys łącznie		<b>14</b>	<b>11</b>	<b>11</b>	12	
średni rozstaw rys [cm]		<b>13,4</b>	<b>14,1</b>	<b>13,6</b>	13,7	



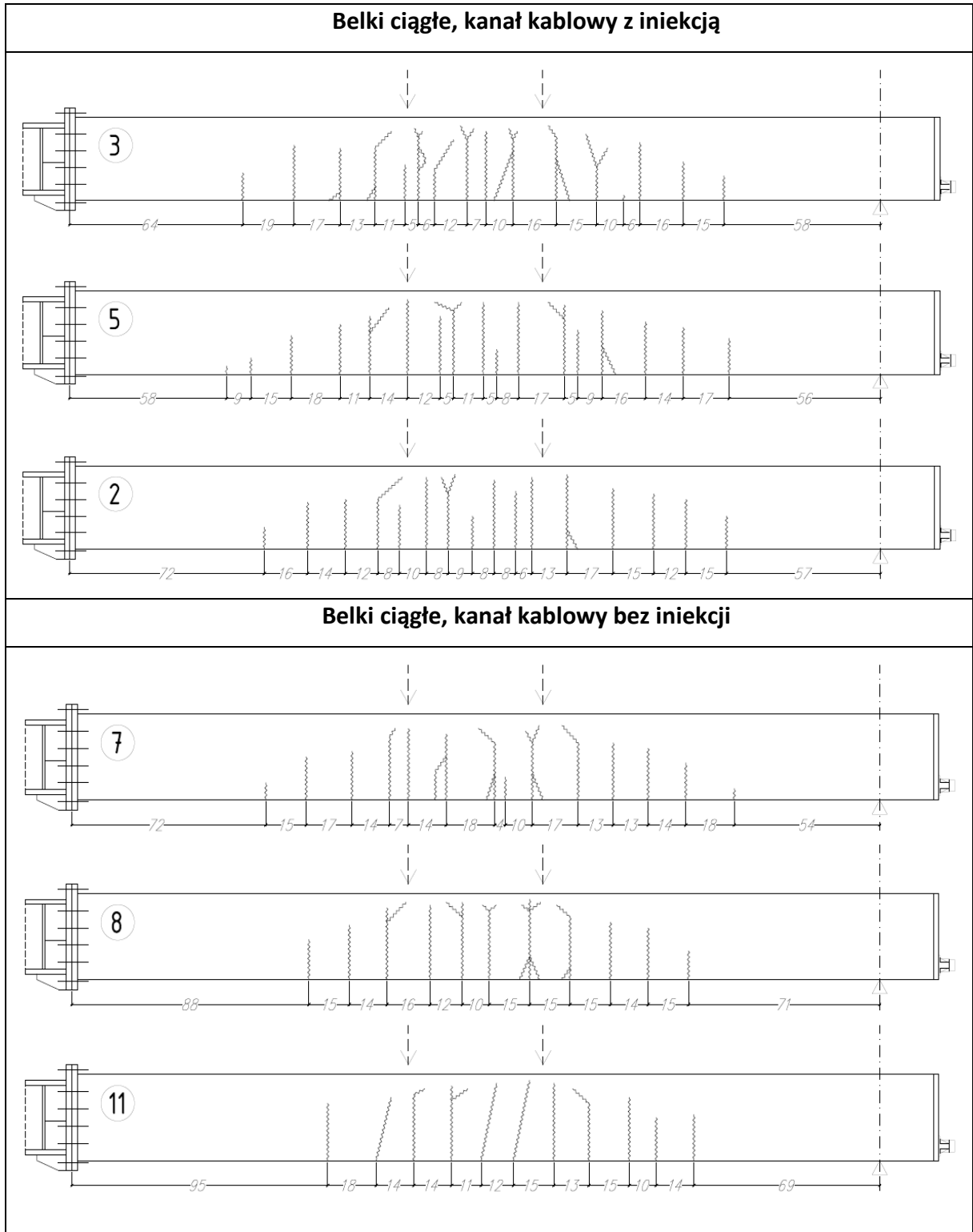
**Załącznik nr 2 Zarysowanie belek**

Tab. Z2.5 Końcowy obraz zarysowania belek swobodnie podpartych (wymiary w [cm])



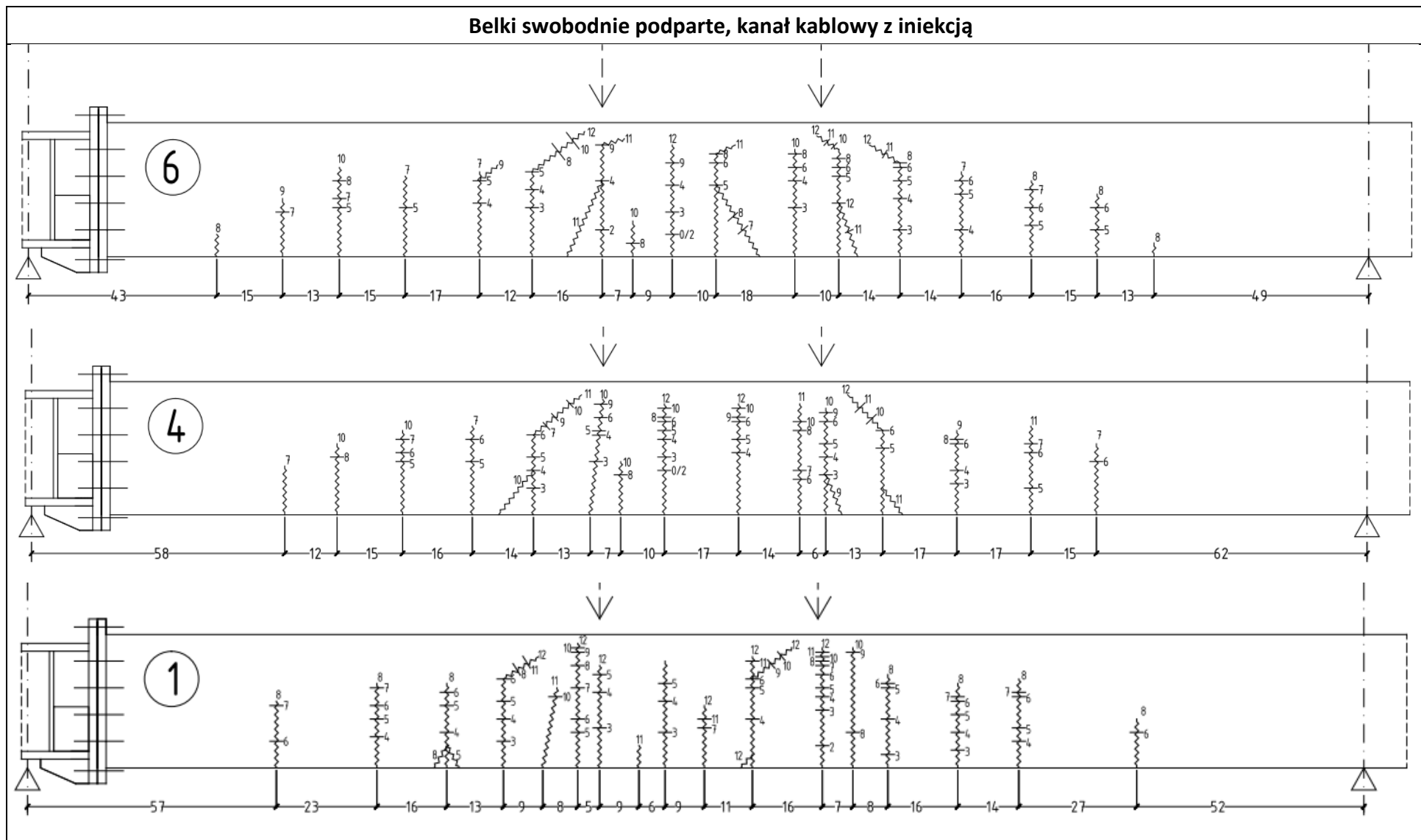
**Załącznik nr 2 Zarysowanie belek**

Tab. Z2.6 Końcowy obraz zarysowania belek ciągłych (wymiary w [cm])



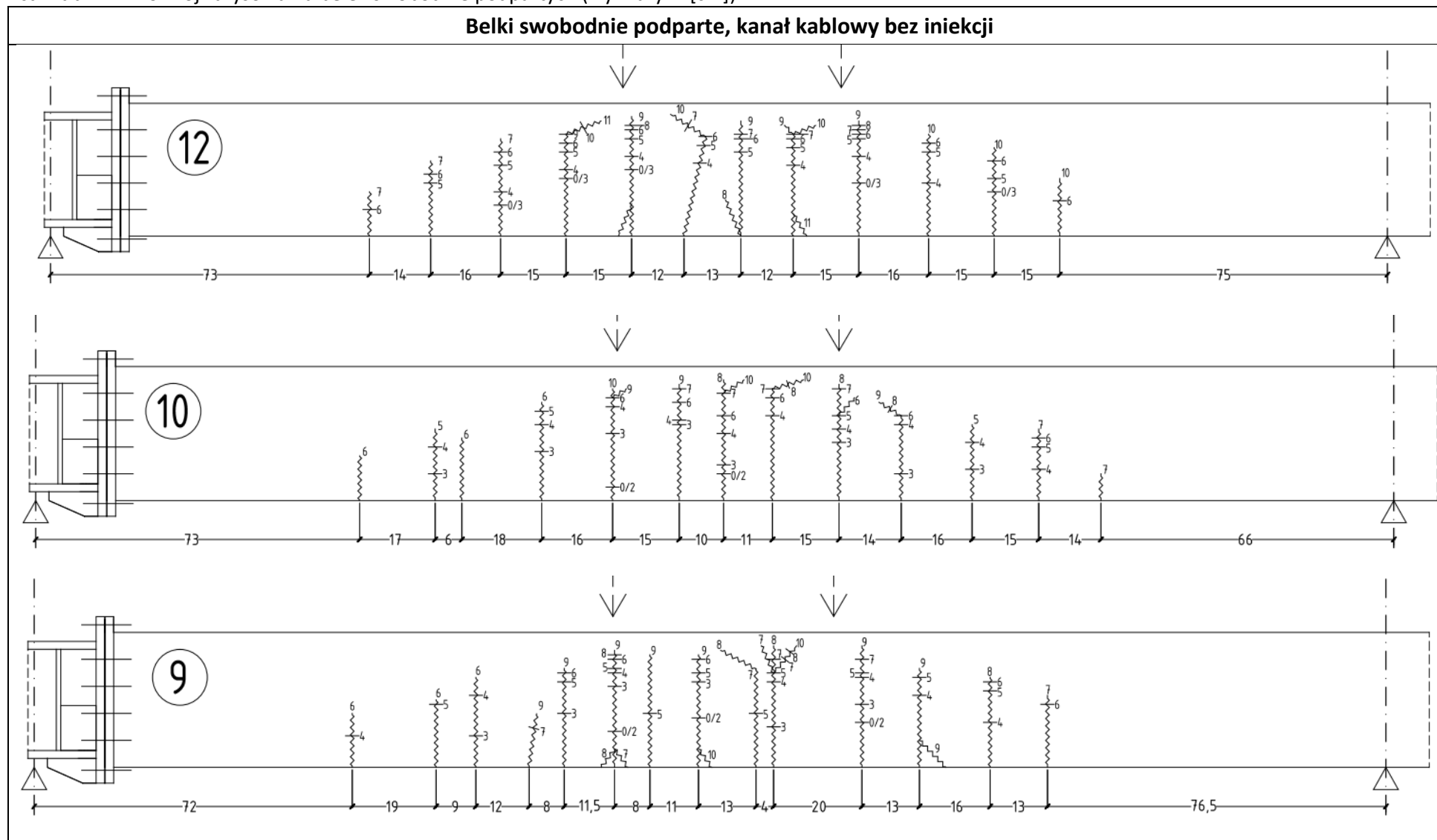
## Załącznik nr 2 Zarysowanie belek

Tab. Z2.7 Rozwój zarysowania belek swobodnie podpartych (wymiary w [cm])



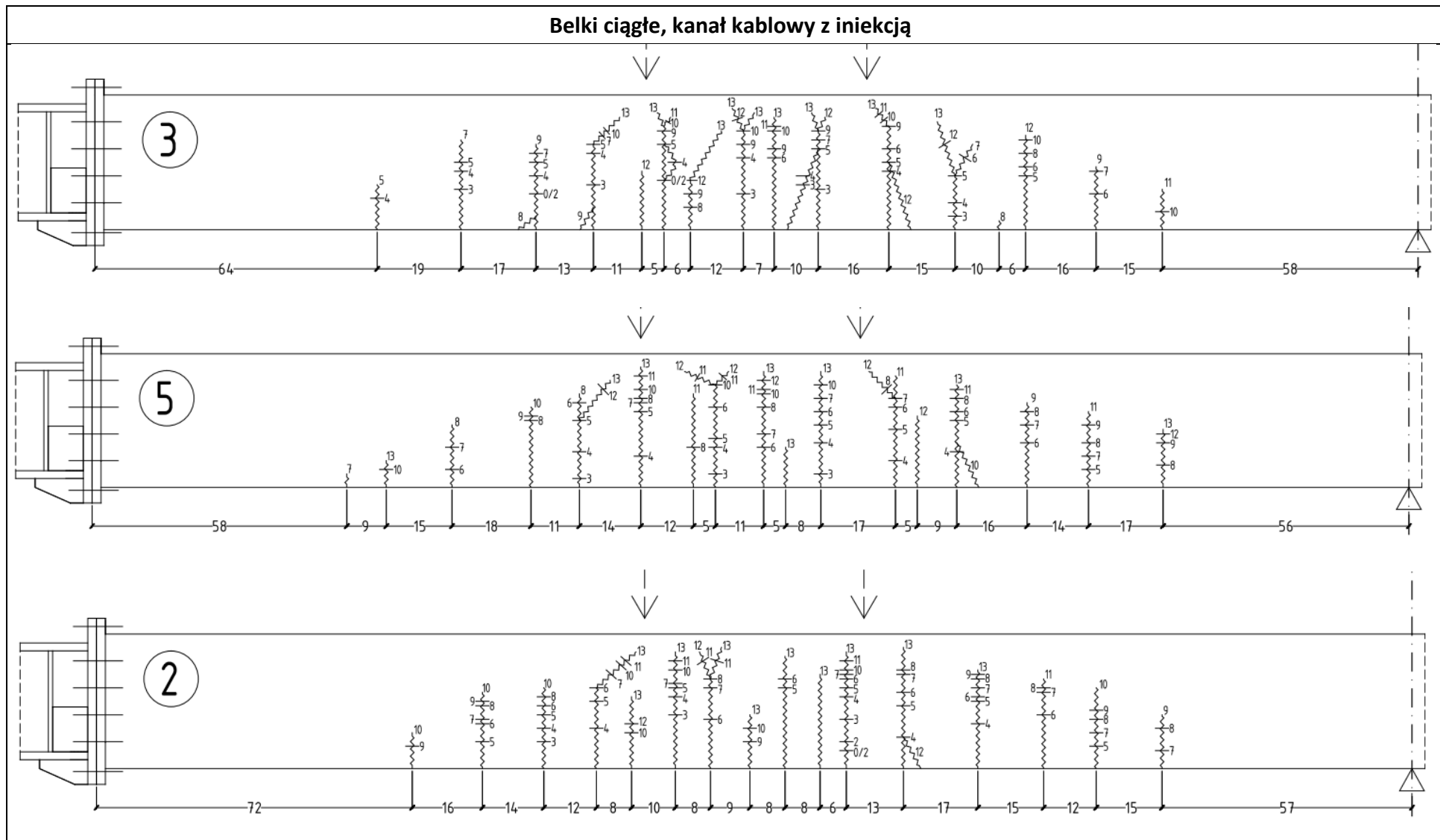
## Załącznik nr 2 Zarysowanie belek

cd. Tab. Z2.7 Rozwój zarysowania belek swobodnie podpartych (wymiary w [cm])



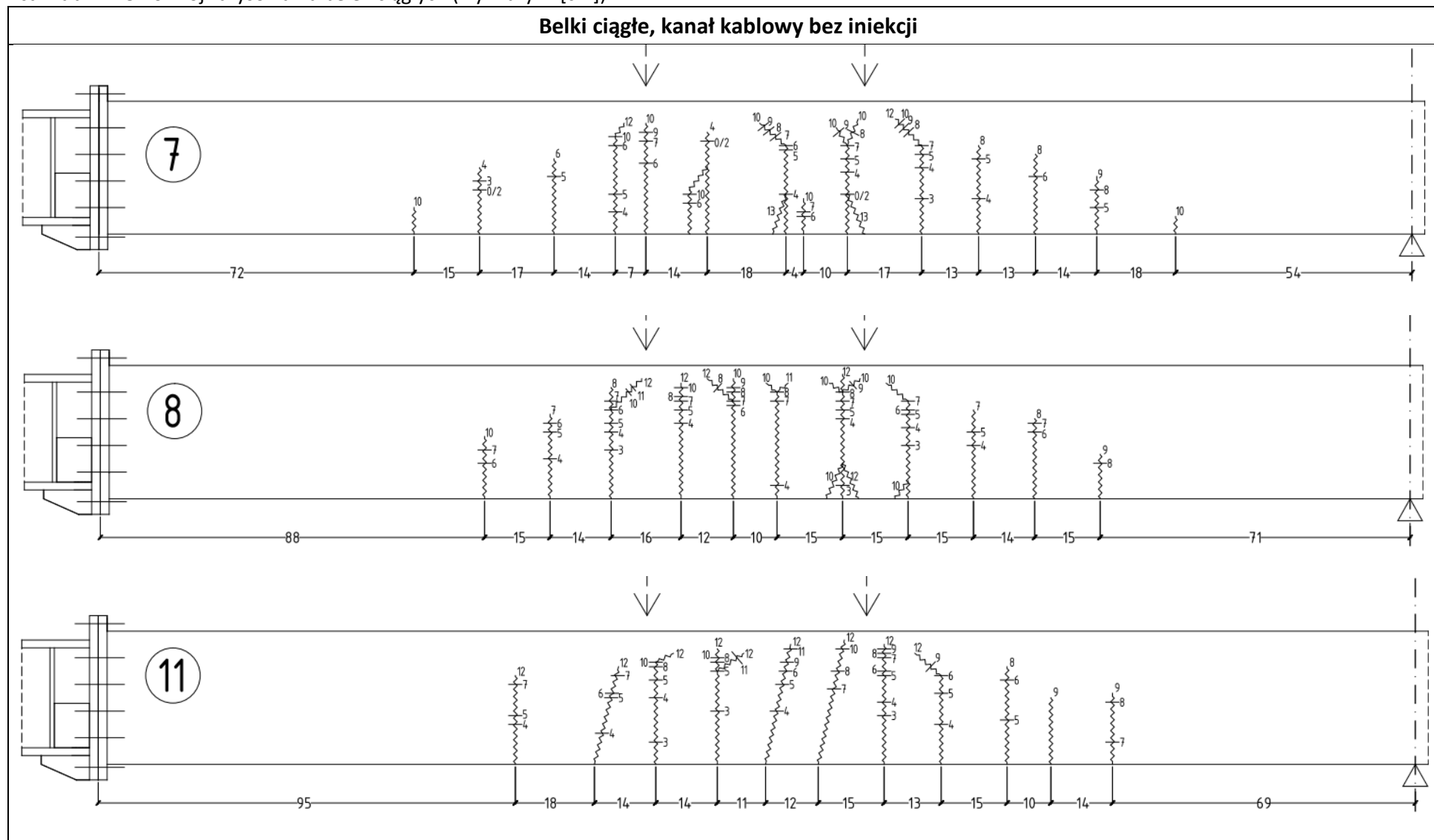
### Załącznik nr 2 Zarysowanie belek

Tab. Z2.8 Rozwój zarysowania belek ciągłych (wymiary w [cm])



## Załącznik nr 2 Zarysowanie belek

cd. Tab. Z2. 8 Rozwój zarysowania belek ciągłych (wymiary w [cm])





Fot. Z2.1 Rysy w belce nr 12

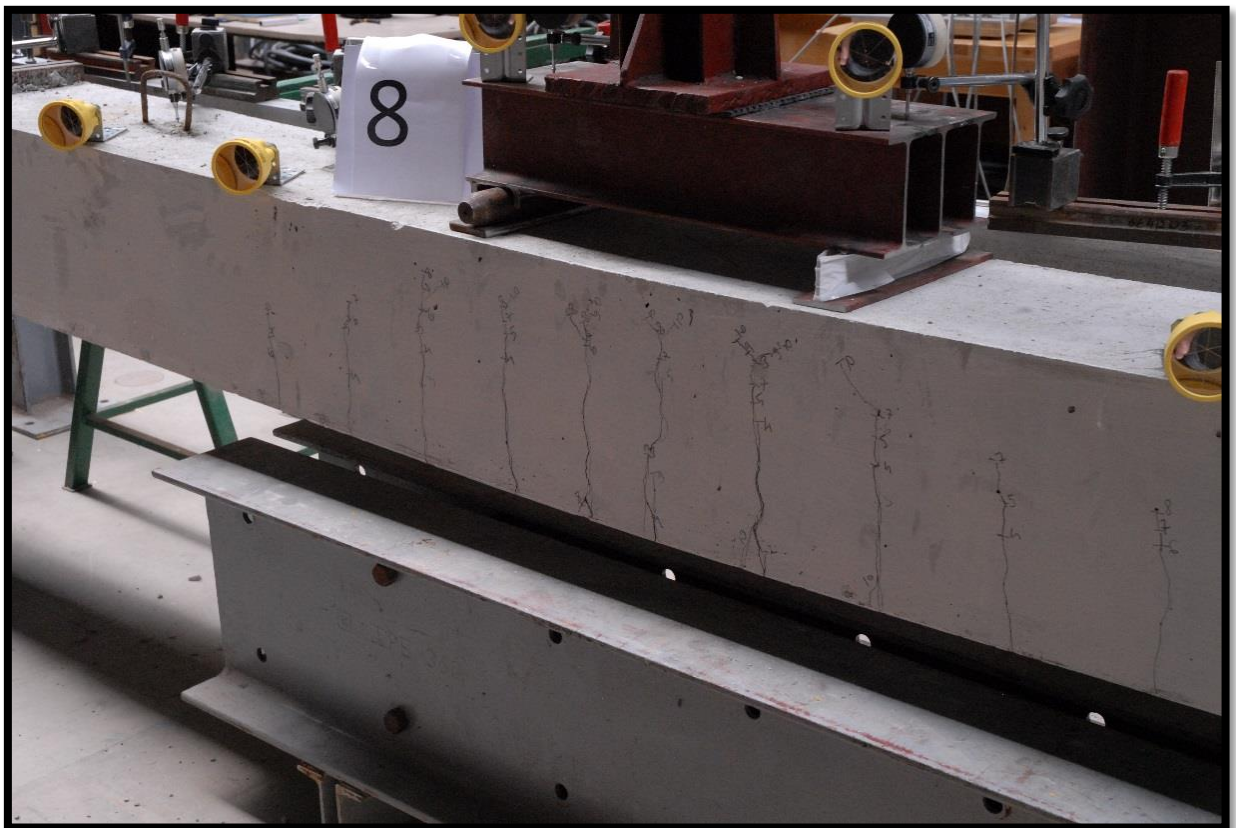


Fot. Z2.2 Rysy w belce nr 6





Fot. Z2.3 Rysy w belce nr 3



Fot. Z2.4 Rysy w belce nr 8



**Załącznik nr 3 Wyniki obliczeń dotyczące redystrybucji momentów zginających**

W tab. Z3.1 przedstawiono wartości momentów zginających obliczone przy założeniu stałego rozkładu sztywności w zakresie liniowo – sprężystym ( $M_{\text{stalP2}}$ ). W obliczeniach uwzględniono podatność podpór, rozpatrując graniczne przedziały jej zmienności.

Tab. Z3.1 Wartości momentów zginających w przekroju nad podporą pośrednią

obciążenie [kN]	$M_{\text{stalP2}}$ [kNm]	
	<i>podatność podpór - wartość dolna</i>	<i>podatność podpór - wartość górna</i>
<b>10</b>	6,74	7,42
<b>20</b>	10,65	11,71
<b>30</b>	14,56	16,00
<b>40</b>	18,47	20,30
<b>50</b>	22,38	24,59
<b>60</b>	26,30	28,88
<b>70</b>	30,21	33,18
<b>80</b>	34,12	37,47
<b>90</b>	38,03	41,76

W tab. Z3.2÷Z3.7 przedstawiono wartości momentów zginających nad podporą pośrednią wyznaczone na podstawie pomiarów ( $M_{\text{stalP2}}$  z pom.) oraz współczynniki redystrybucji momentów zginających  $\delta$  dla poszczególnych belek.

Tab. Z3.2 Belka nr 2

obciążenie [kN]	$M_{\text{stalP2}}$ z pom. [kNm]	$\delta$
<b>10</b>	8,5	1,19
<b>20</b>	13,0	1,15
<b>30</b>	18,1	1,18
<b>40</b>	24,9	1,28
<b>50</b>	33,0	1,40
<b>60</b>	42,3	1,53
<b>70</b>	51,2	1,61
<b>80</b>	59,8	1,66
<b>90</b>	68,0	1,70

Tab. Z3.3 Belka nr 3

<b>obciążenie [kN]</b>	<b>M<sub>stalP2</sub> z pom. [kNm]</b>	<b>δ</b>
<b>10</b>	8,5	1,20
<b>20</b>	13,0	1,16
<b>30</b>	19,4	1,26
<b>40</b>	27,3	1,40
<b>50</b>	35,4	1,50
<b>60</b>	43,9	1,58
<b>70</b>	52,3	1,64
<b>80</b>	60,8	1,69
<b>90</b>	70,1	1,75

Tab. Z3.4 Belka nr 5

<b>obciążenie [kN]</b>	<b>M<sub>stalP2</sub> z pom. [kNm]</b>	<b>δ</b>
<b>10</b>	7,6	1,07
<b>20</b>	12,0	1,07
<b>30</b>	17,0	1,11
<b>40</b>	23,6	1,21
<b>50</b>	30,2	1,28
<b>60</b>	37,5	1,35
<b>70</b>	44,5	1,40
<b>80</b>	51,1	1,42
<b>90</b>	57,3	1,43

Tab. Z3.5 Belka nr 7

<b>obciążenie [kN]</b>	<b>M<sub>stalP2</sub> z pom. [kNm]</b>	<b>δ</b>
<b>10</b>	8,9	1,26
<b>20</b>	13,8	1,23
<b>30</b>	20,3	1,33
<b>40</b>	28,2	1,45
<b>50</b>	37,2	1,58
<b>60</b>	47,1	1,70
<b>70</b>	56,6	1,78
<b>80</b>	66,6	1,85
<b>90</b>	78,2	1,95

Tab. Z3.6 Belka nr 8

obciążenie [kN]	$M_{\text{stalP2}}$ z pom. [kNm]	$\delta$
10	8,1	1,14
20	12,3	1,10
30	17,9	1,17
40	25,9	1,33
50	33,6	1,43
60	41,2	1,49
70	49,1	1,54
80	60,7	1,69
90	73,6	1,84

Tab. Z3.7 Belka nr 11

obciążenie [kN]	$M_{\text{stalP2}}$ z pom. [kNm]	$\delta$
10	7,7	1,09
20	11,9	1,06
30	17,3	1,13
40	24,1	1,24
50	32,2	1,37
60	41,5	1,50
70	50,6	1,59
80	60,8	1,69
90	72,6	1,81

W tab. Z3.8 oraz tab. Z3.9 zestawiono średnie wartości redystrybucji momentów zginających grupy belek sprężonych ciągniami z przyczepnością i bez przyczepności, a uzyskane wyniki przedstawiono na wykresie na rys. Z3.1.

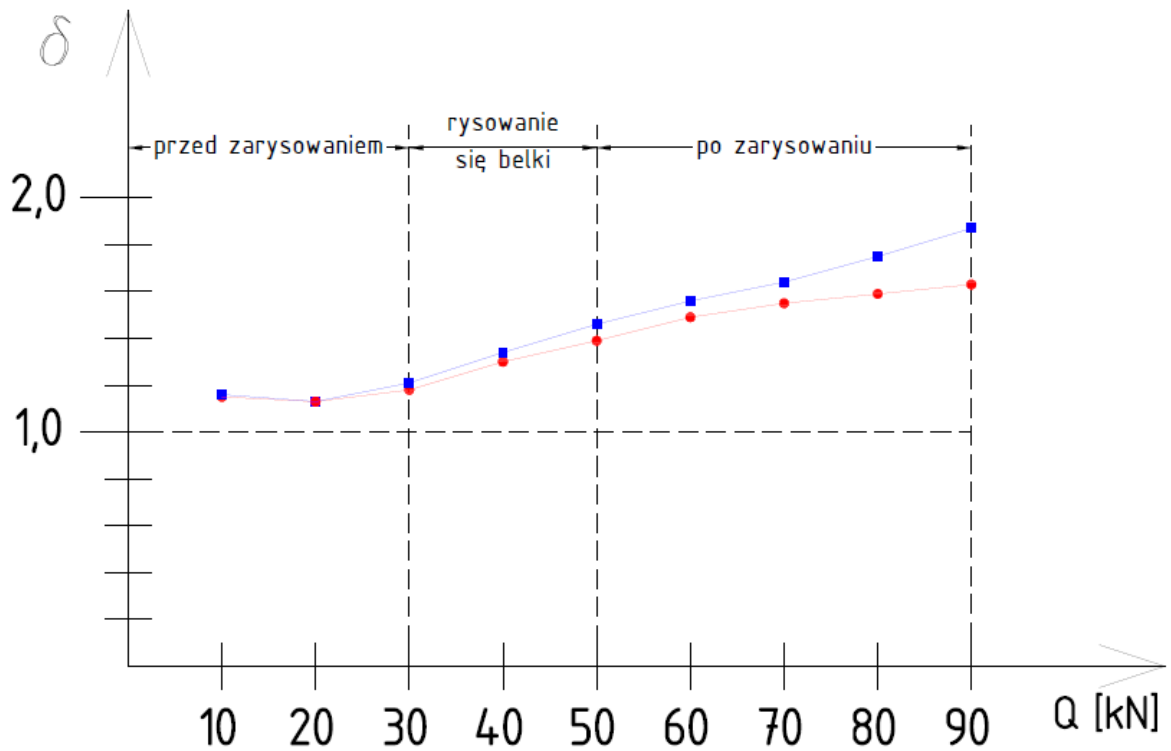
### Załącznik nr 3 Wyniki obliczeń dotyczące redystrybucji momentów zginających

Tab. Z3.8 Współczynniki redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągami z przyczepnością: w belce nr 2 ( $\delta_2$ ), w belce nr 3 ( $\delta_3$ ) oraz w belce nr 5 ( $\delta_5$ );  $\delta$  – wartość średnia dla wszystkich belek

obciążenie [kN]	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_5$	$\delta$
10	1,19	1,20	1,07	<b>1,15</b>
20	1,15	1,16	1,07	<b>1,13</b>
30	1,18	1,26	1,11	<b>1,18</b>
40	1,28	1,40	1,21	<b>1,30</b>
50	1,40	1,50	1,28	<b>1,39</b>
60	1,53	1,58	1,35	<b>1,49</b>
70	1,61	1,64	1,40	<b>1,55</b>
80	1,66	1,69	1,42	<b>1,59</b>
90	1,70	1,75	1,43	<b>1,63</b>

Tab. Z3.9 Współczynniki redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągami bez przyczepności: w belce nr 7 ( $\delta_7$ ), w belce nr 8 ( $\delta_8$ ) oraz w belce nr 11 ( $\delta_{11}$ );  $\delta$  – wartość średnia dla wszystkich belek

obciążenie [kN]	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_{11}$	$\delta$
10	1,26	1,14	1,09	<b>1,16</b>
20	1,23	1,10	1,06	<b>1,13</b>
30	1,33	1,17	1,13	<b>1,21</b>
40	1,45	1,33	1,24	<b>1,34</b>
50	1,58	1,43	1,37	<b>1,46</b>
60	1,70	1,49	1,50	<b>1,56</b>
70	1,78	1,54	1,59	<b>1,64</b>
80	1,85	1,69	1,69	<b>1,75</b>
90	1,95	1,84	1,81	<b>1,87</b>



- - belki sprężone ciągnami z przyczepnością
- - belki sprężone ciągnami bez przyczepności

Rys. Z3.1 Wykres współczynnika redystrybucji momentów zginających w belkach sprężonych ciągnami z przyczepnością i bez przyczepności

**Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych**

W załączniku przedstawiono szczegółowe informacje dotyczące pomiarów odkształceń wykonanych techniką światłowodową. Wyniki prezentowane są dla kolejnych faz obciążenia, które odpowiadają wielkościom siły zewnętrznej zgodnie z tab. Z4.1.

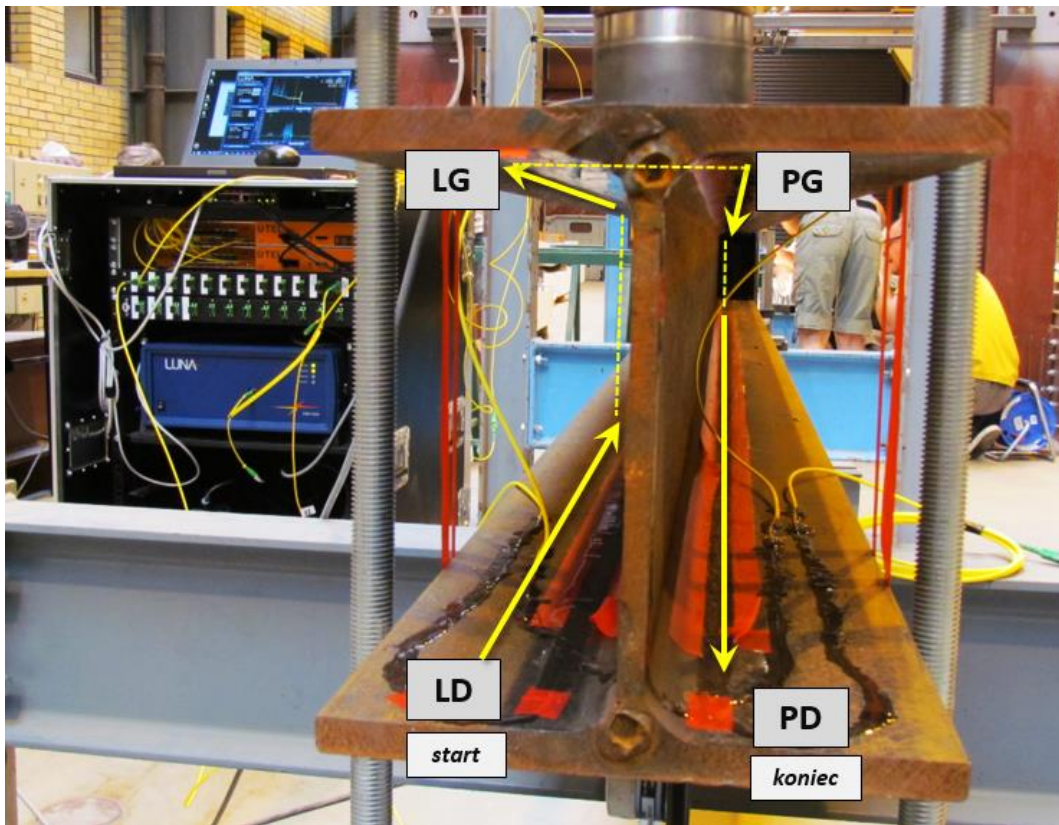
Tab. Z4.1 Wartości obciążenia zewnętrznego odpowiadające kolejnym fazom obciążenia

faza nr	Q [kN]
0	0
1	10
2	0
3	20
4	0
5	10
6	20
7	30
8	40
9	50
10	60
11	70
12	80
13	90
14	100
15	110
16	120
17	130
18	140
19	150

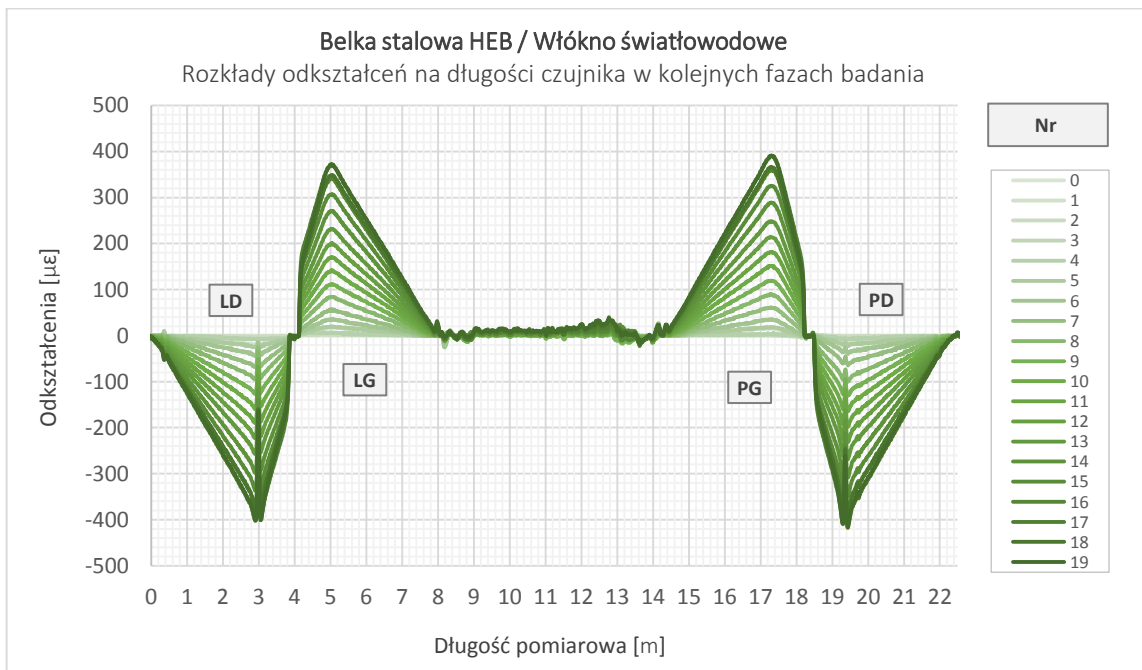
1. Pomiary odkształceń w części stalowej belek ciągłych

<b>Światłowodowe pomiary geometrycznie ciągłe DFOS</b>	
Data pomiarów:	<b>18-19.06.2020 r.</b>
Miejsce pomiarów:	<b>Politechnika Poznańska, Poznań</b>
Rodzaj pomiarów:	<b>światłowodowe rozłożone DFOS</b>
Reflektometr optyczny:	<b>OBR4600 produkcji LUNA</b>
Rozpraszanie światła:	<b>Rayleigha</b>
Czujnik światłowodowy:	<b>EpsilonSensor produkcji SHM System</b>
Zastosowane włókno:	<b>SM 9/125, OFS, ITU-T G657.A1</b>
Mierzona wielkość fizyczna:	<b>odkształcenie</b>
Sposób przekazywania odkształceń:	<b>przez przyklejenie do powierzchni</b>
Jednostka:	<b><math>\mu\epsilon = 10^{-6} = 0.0001\% = 0.001\text{‰} = 0.001\text{ mm/m}</math></b>
Konwencja znakowania:	<b>"+" rozciąganie, "-" ściskanie</b>
Rozdzielczość przestrzenna:	<b>10 mm</b>
Baza pojedynczego czujnika:	<b>10 mm</b>
Data kalibracji:	<b>18-19.06.2020 r.</b>
Zakres skanowania:	<b>1545.518 - 1588.258 nm</b>
Grupowy współczynnik załamania:	<b>1,47</b>
Wzmocnienie:	<b>25 dB</b>

<i>Oznaczenie</i>	<i>Opis</i>
L	<b>lewa strona belki</b>
P	<b>prawa strona belki</b>
G	<b>odcinek górny</b>
D	<b>odcinek dolny</b>



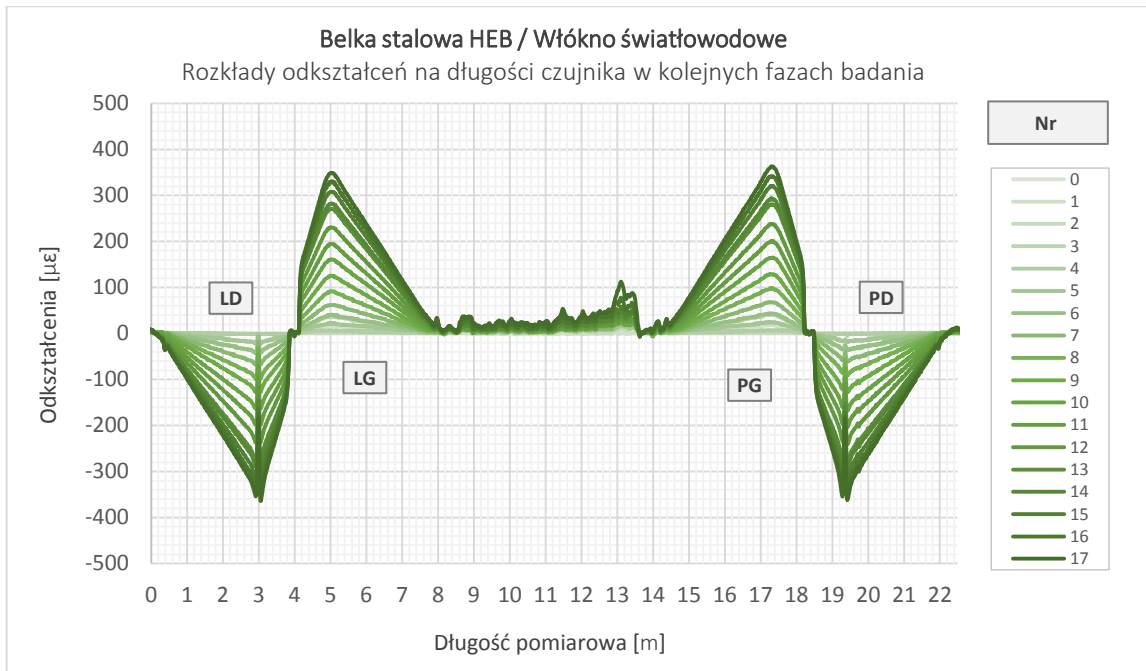
Rys. Z4.1 Schemat ułożenia włókna pomiarowego wraz z oznaczeniami



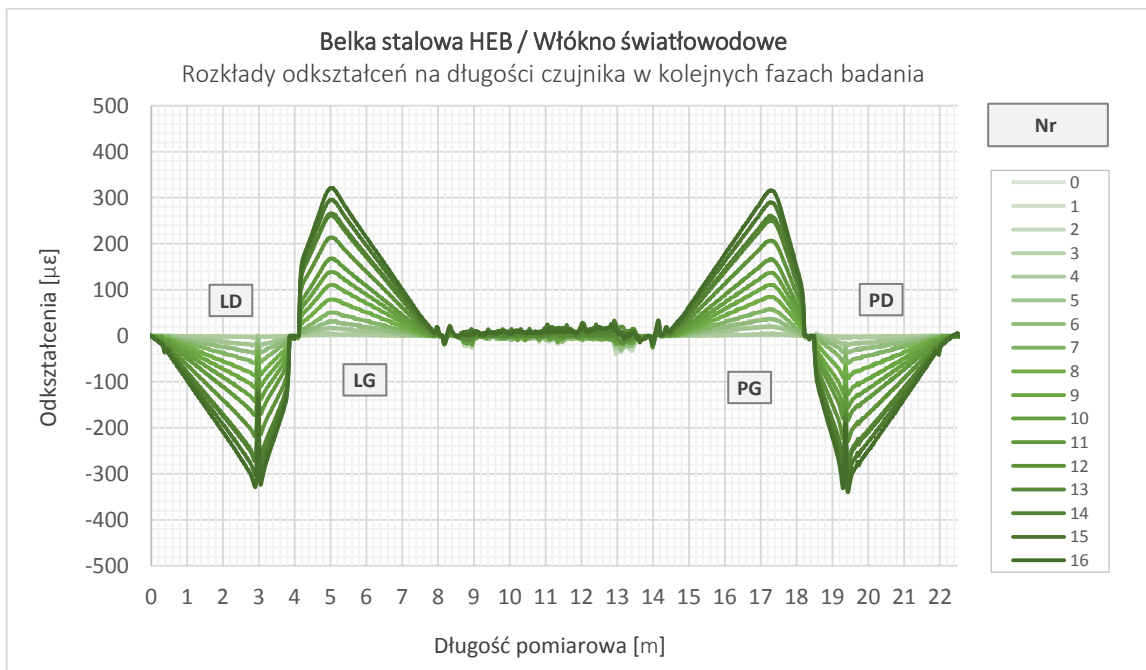
Rys. Z4.2 Wykres odkształceń w części stalowej belki w kolejnych fazach badania (belka ciągną z belką betonową nr 3)



#### Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych

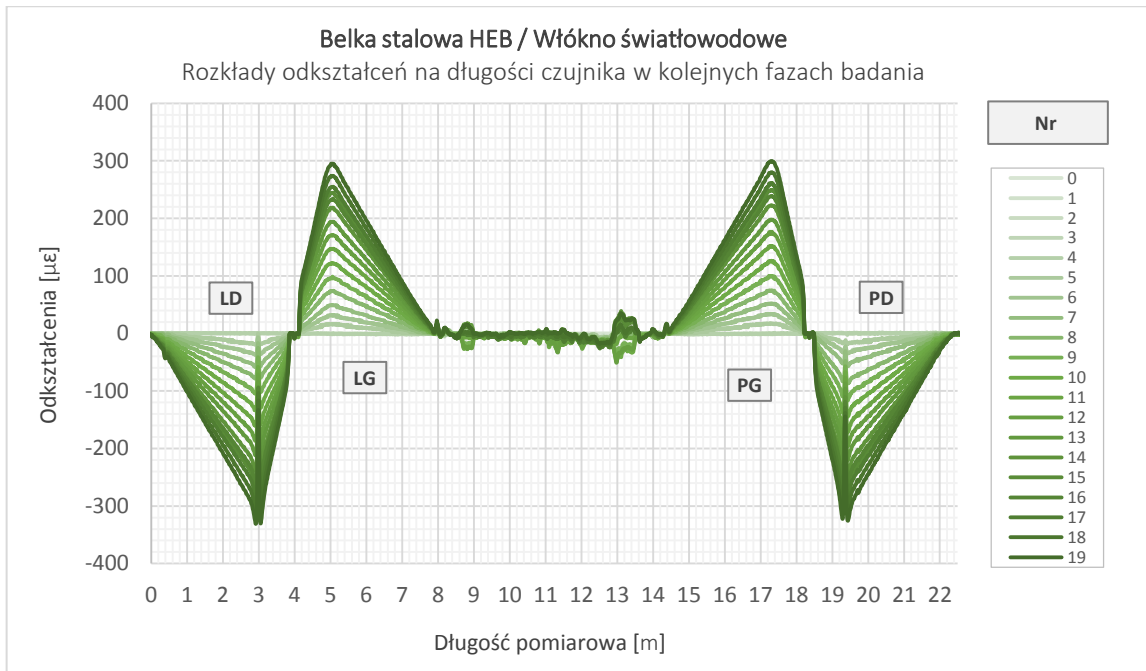


Rys. Z4.3 Wykres odkształceń w części stalowej belki w kolejnych fazach badania (belka ciągła z belką betonową nr 7)

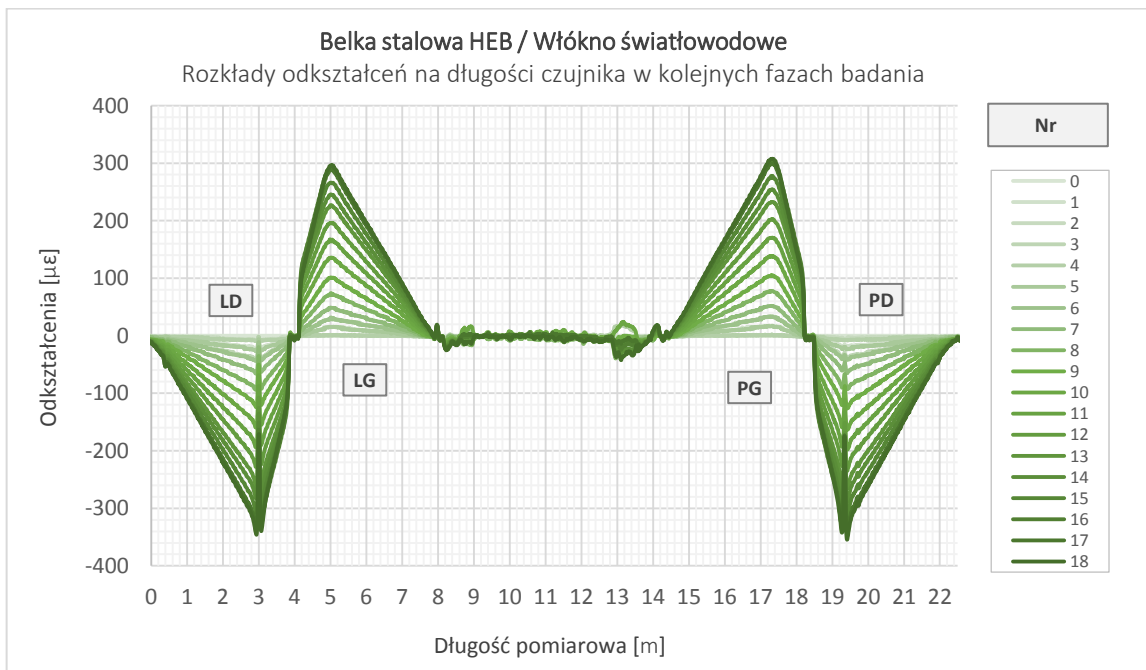


Rys. Z4.4 Wykres odkształceń w części stalowej belki w kolejnych fazach badania (belka ciągła z belką betonową nr 8)

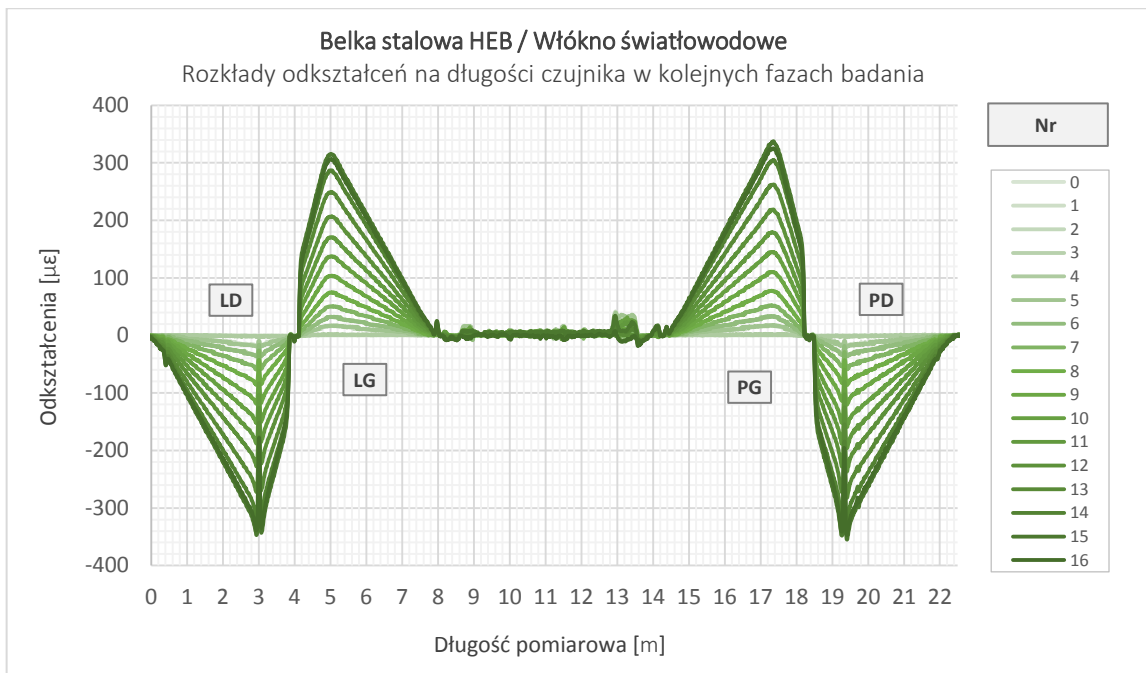
#### Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych



Rys. Z4.5 Wykres odkształceń w części stalowej belki w kolejnych fazach badania (belka ciągła z belką betonową nr 5)



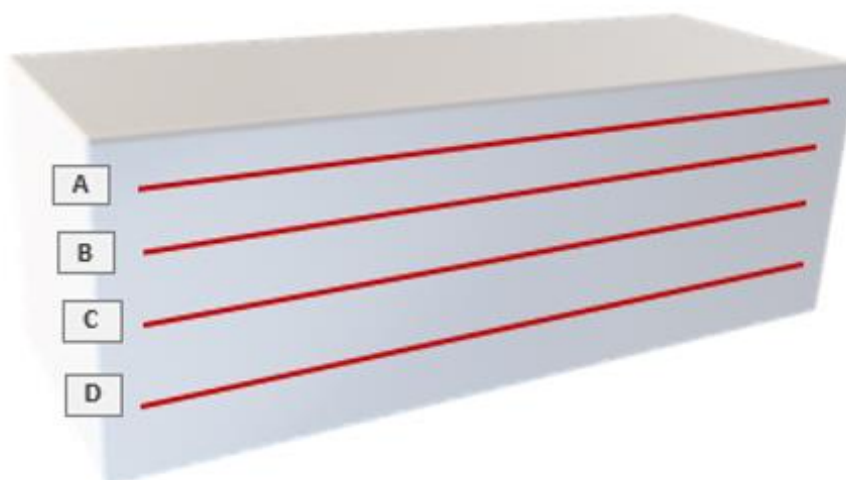
Rys. Z4.6 Wykres odkształceń w części stalowej belki w kolejnych fazach badania (belka ciągła z belką betonową nr 2)



Rys. Z4.7 Wykres odkształceń w części stalowej belki w kolejnych fazach badania (belka ciągnięta z belką betonową nr 11)

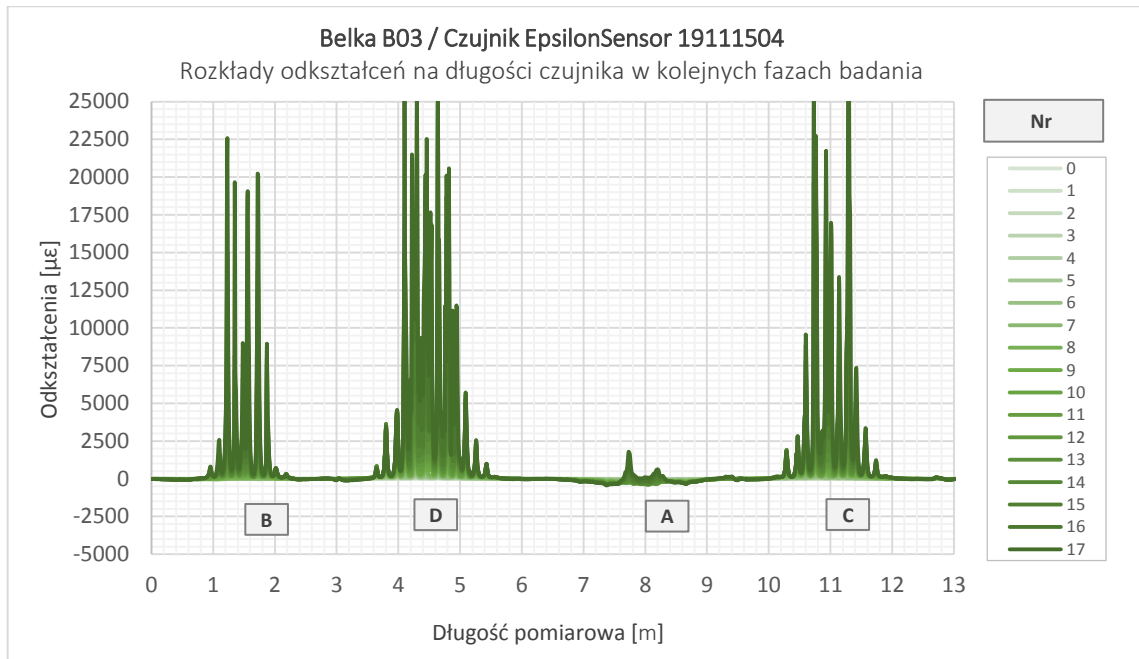
## 2. Pomiary odkształceń w części betonowej belek ciągłych

Światłowodowe pomiary geometrycznie ciągłe DFOS	
Data pomiarów:	18-19.06.2020 r.
Miejsce pomiarów:	Politechnika Poznańska, Poznań
Rodzaj pomiarów:	światłowodowe rozłożone DFOS
Reflektometr optyczny:	OBR4600 produkcji LUNA
Rozpraszanie światła:	Rayleigha
Czujnik światłowodowy:	EpsilonSensor produkcji SHM System
Zastosowane włókno:	SM 9/125, OFS, ITU-T G657.A1
Mierzona wielkość fizyczna:	odkształcenie
Sposób przekazywania odkształceń:	przez przyczepność do betonu
Jednostka:	$\mu\epsilon = 10^{-6} = 0.0001\% = 0.001\text{‰} = 0.001\text{ mm/m}$
Konwencja znakowania:	"+" rozciąganie, "-" ściskanie
Rozdzielczość przestrzenna:	10 mm
Baza pojedynczego czujnika:	10 mm
Data kalibracji:	18-19.06.2020 r.
Zakres skanowania:	1545.518 - 1588.258 nm
Grupowy współczynnik załamania:	1,47
Wzmocnienie:	25 dB

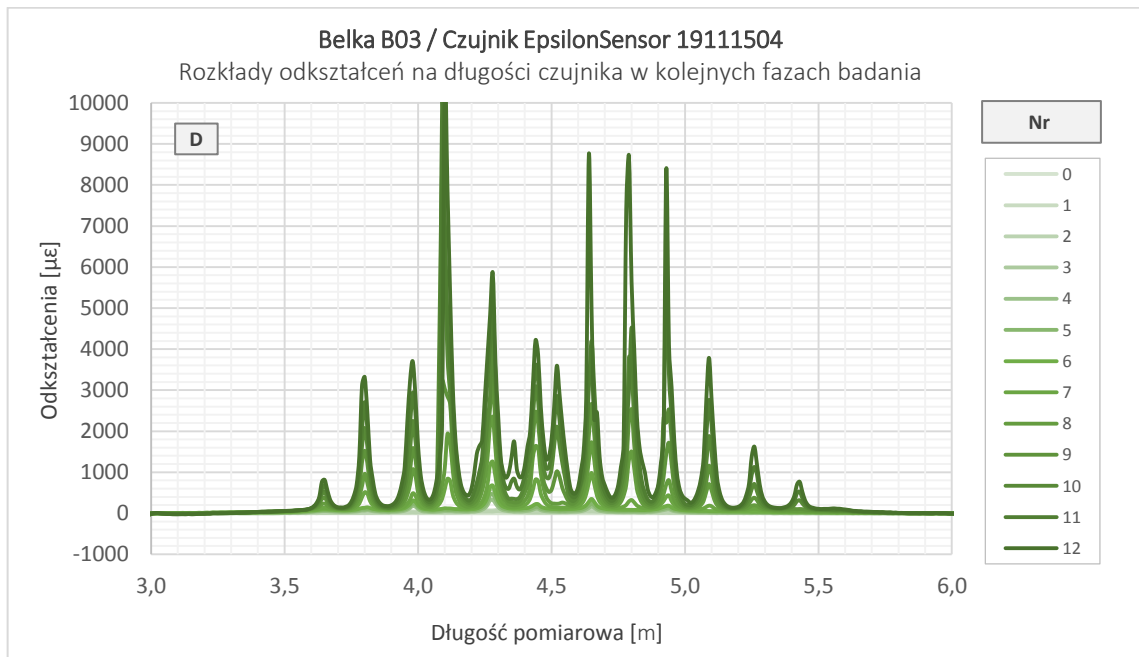


Rys. Z4.8 Schemat odcinków pomiarowych z oznaczeniami

## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych

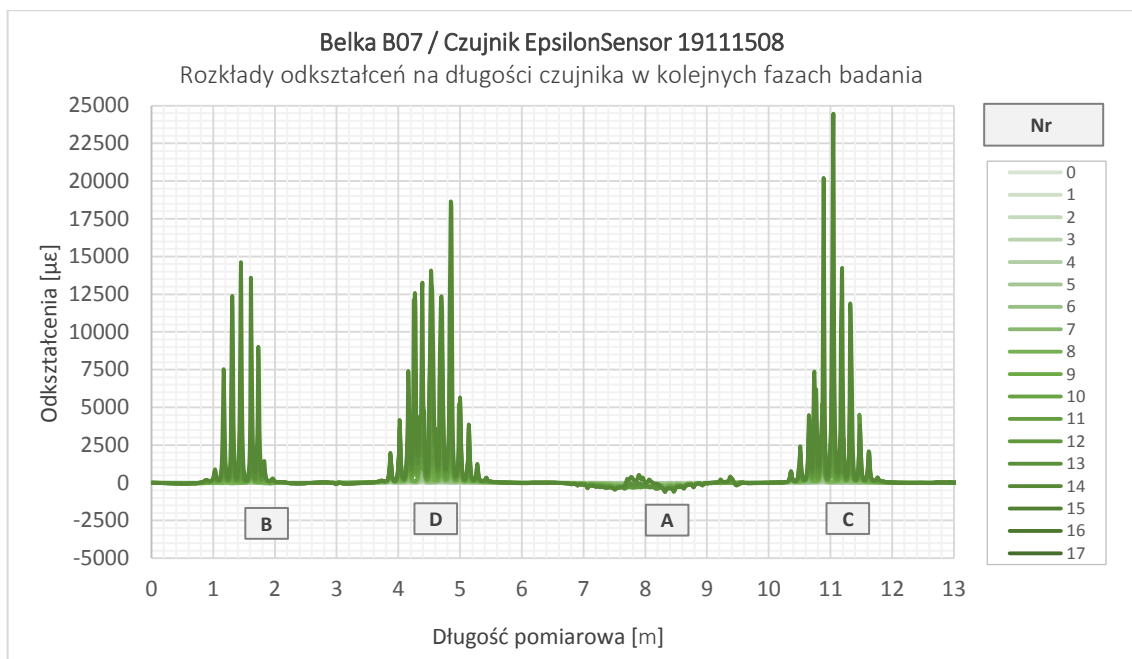


Rys. Z4.9 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 3 w kolejnych fazach badania

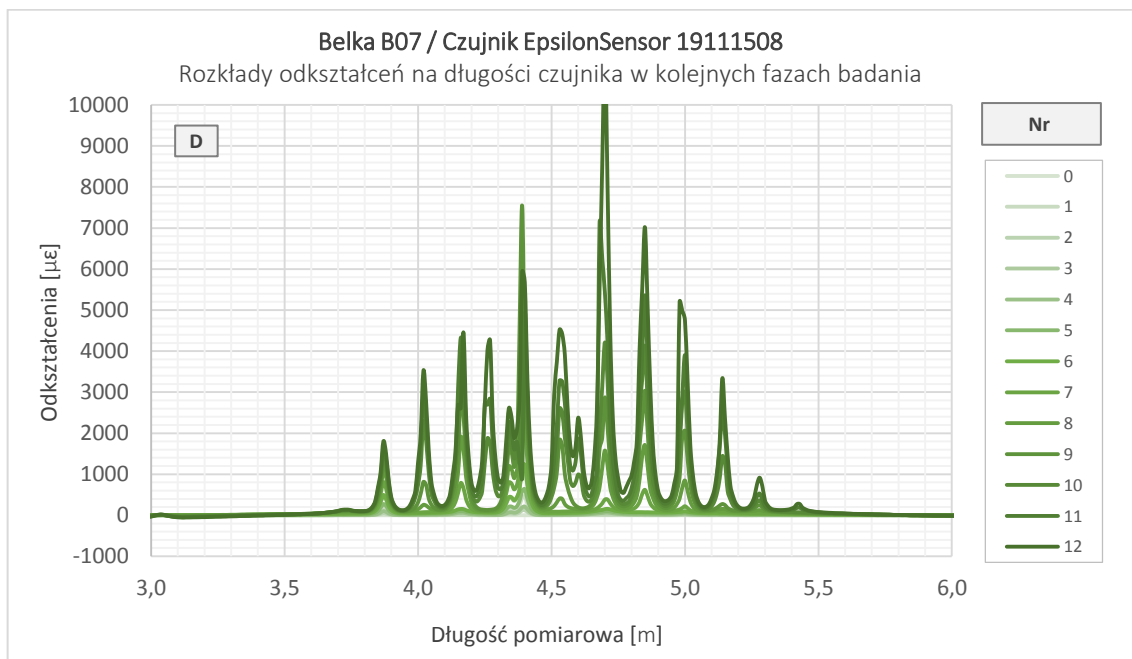


Rys. Z4.10 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 3 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych

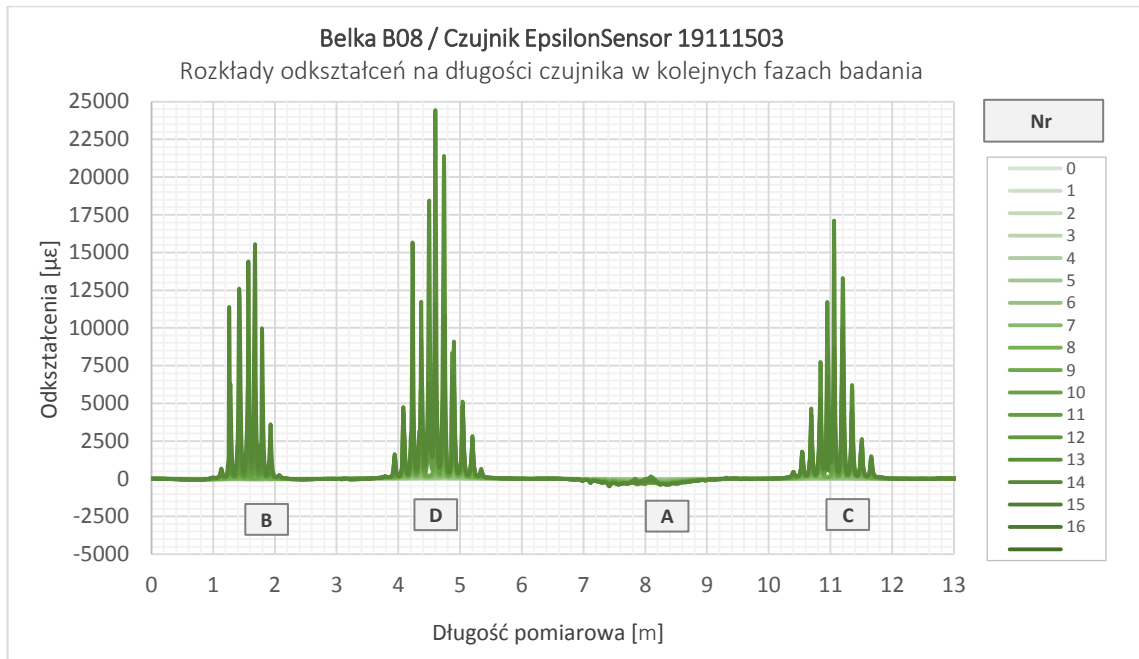


Rys. Z4.11 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 7 w kolejnych fazach badania

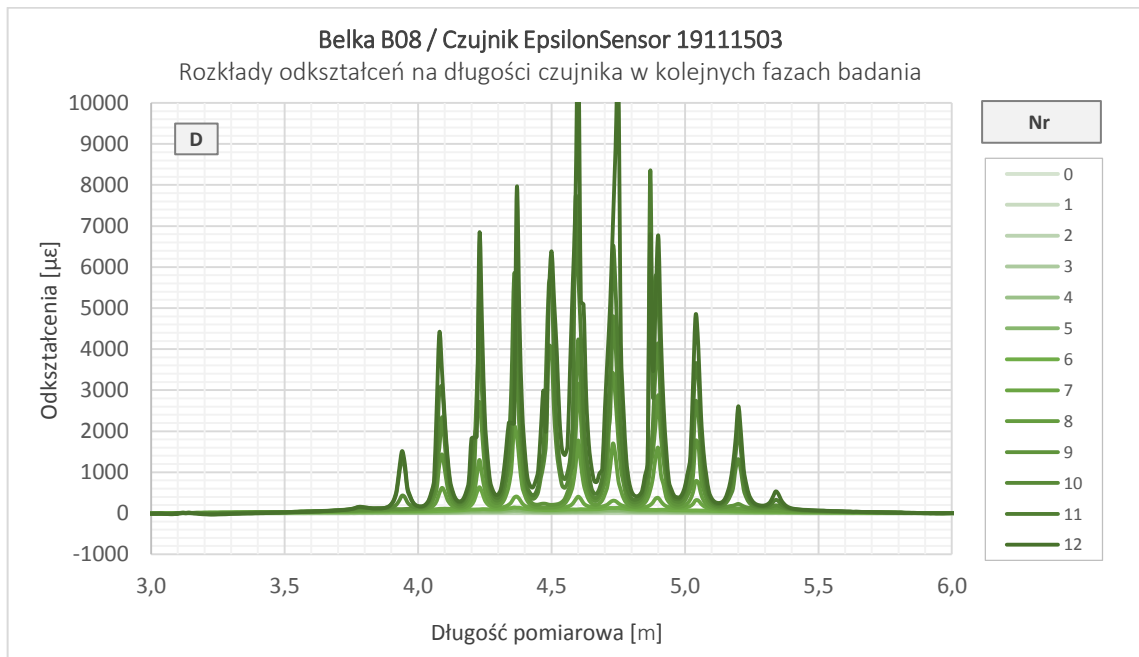


Rys. Z4.12 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 7 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

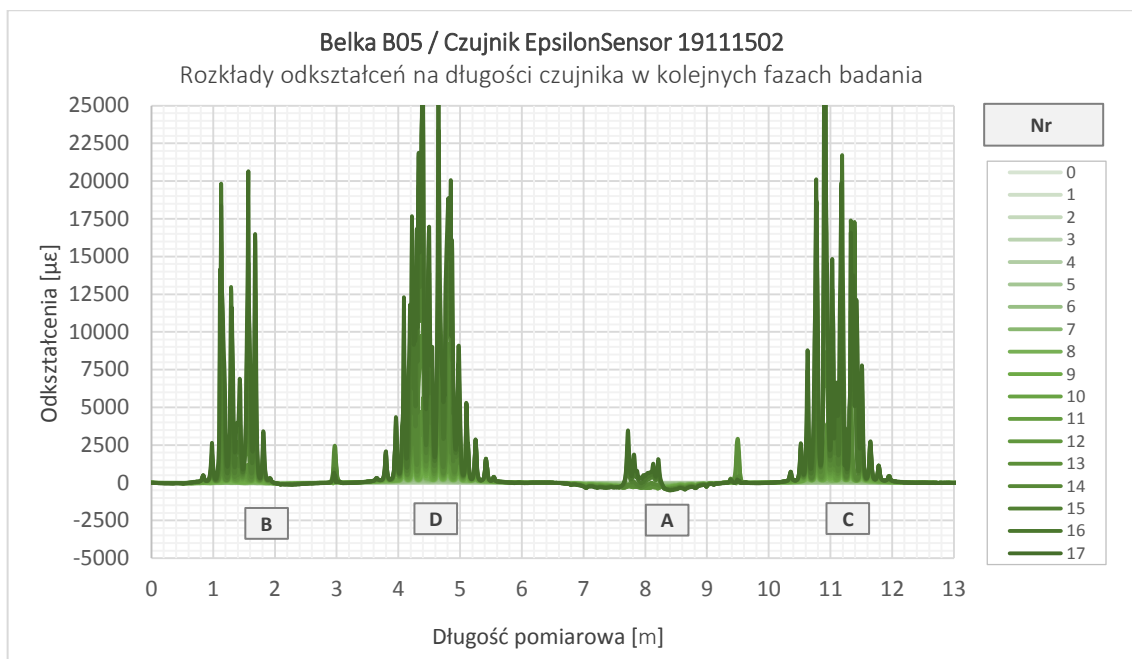
## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych



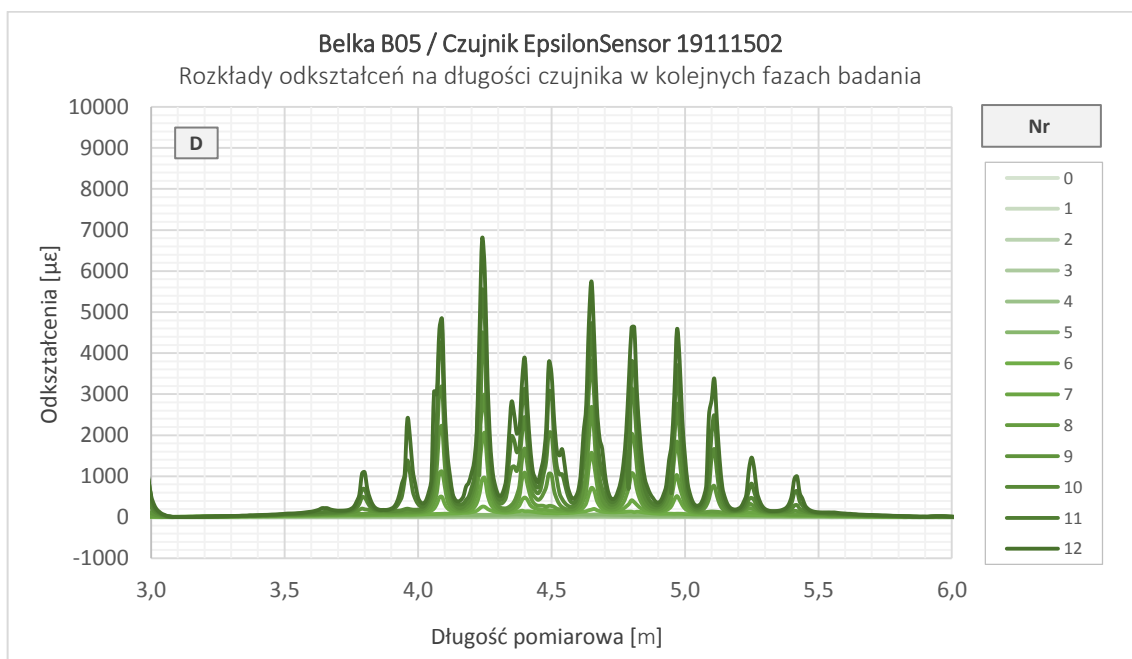
Rys. Z4.13 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 8 w kolejnych fazach badania



Rys. Z4.14 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 8 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”



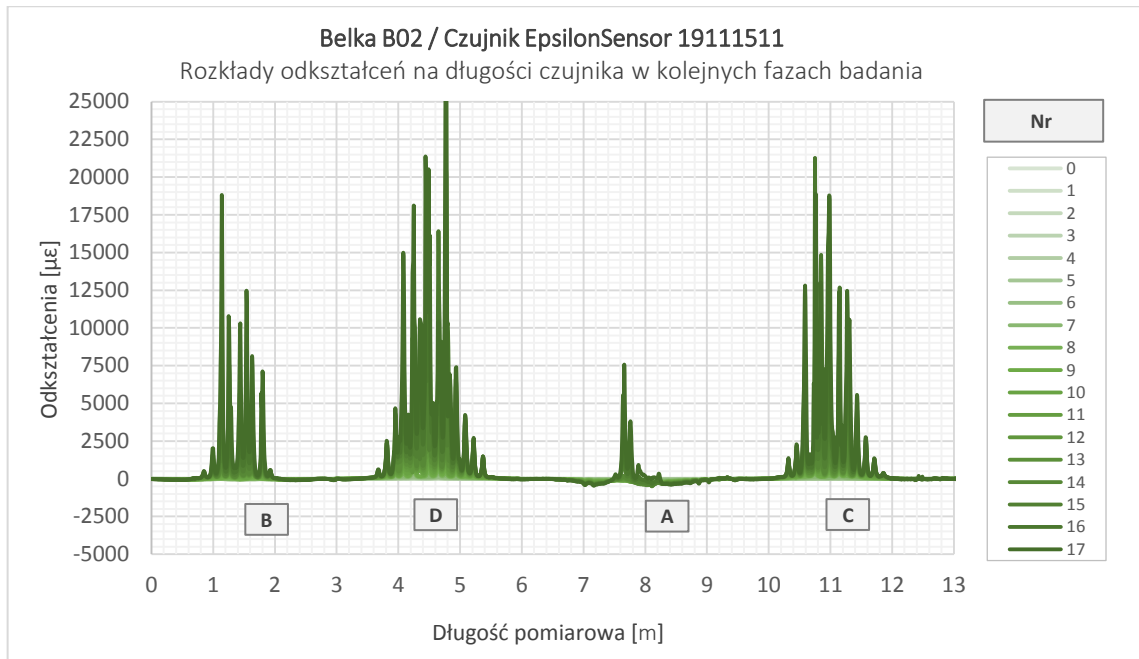
Rys. Z4.15 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 5 w kolejnych fazach badania



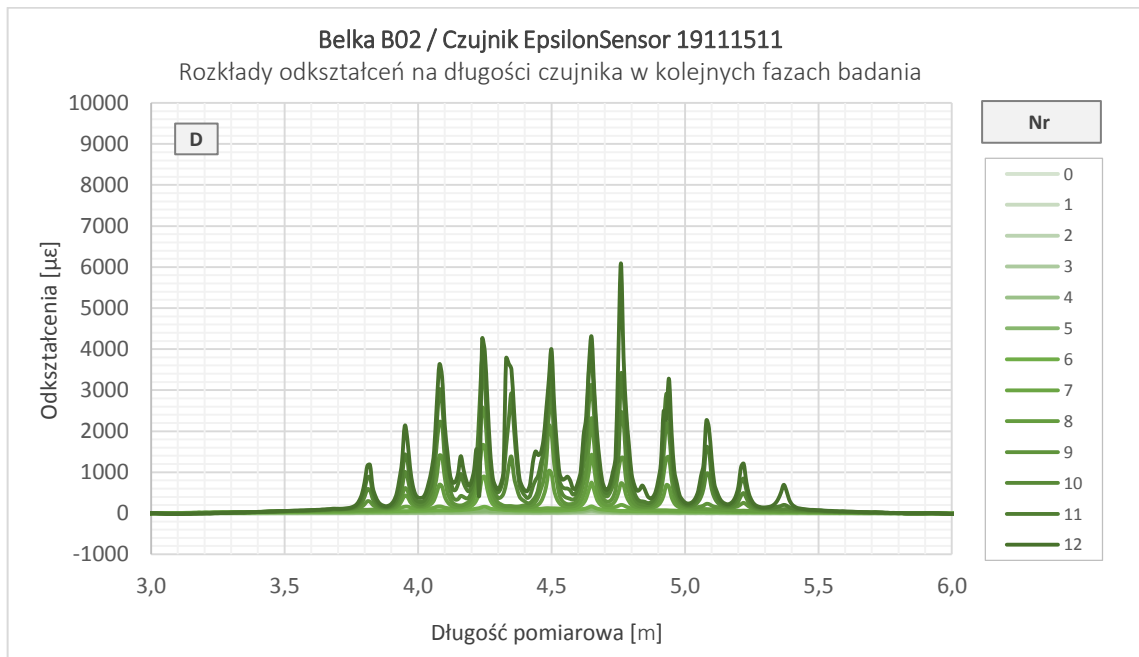
Rys. Z4.16 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 5 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”



## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych

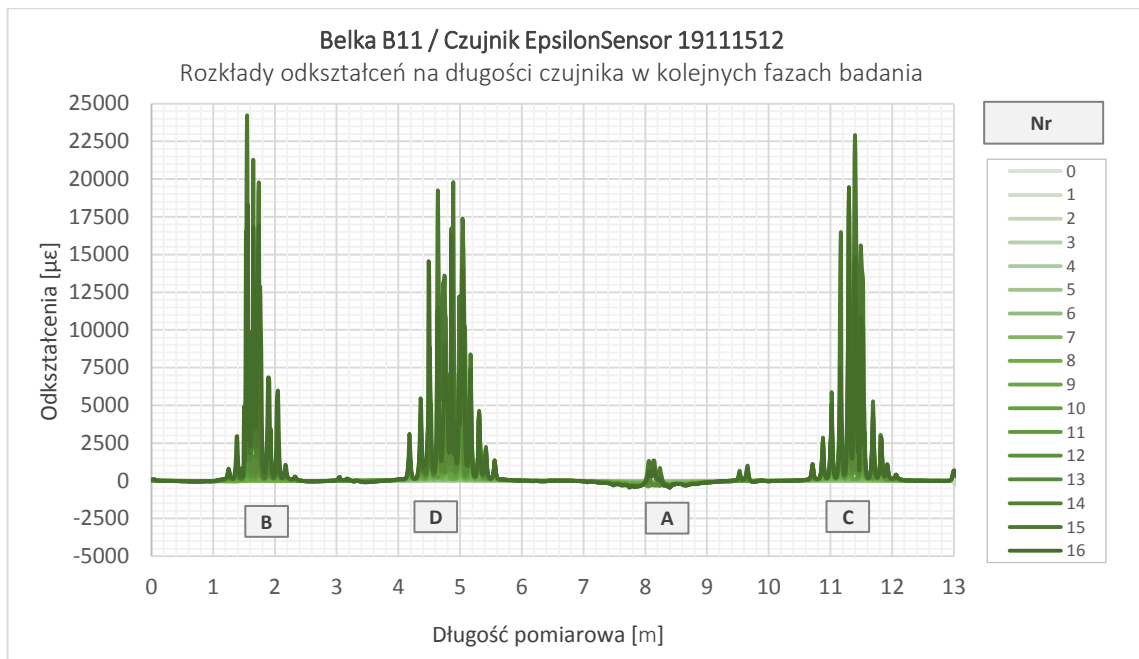


Rys. Z4.17 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 2 w kolejnych fazach badania

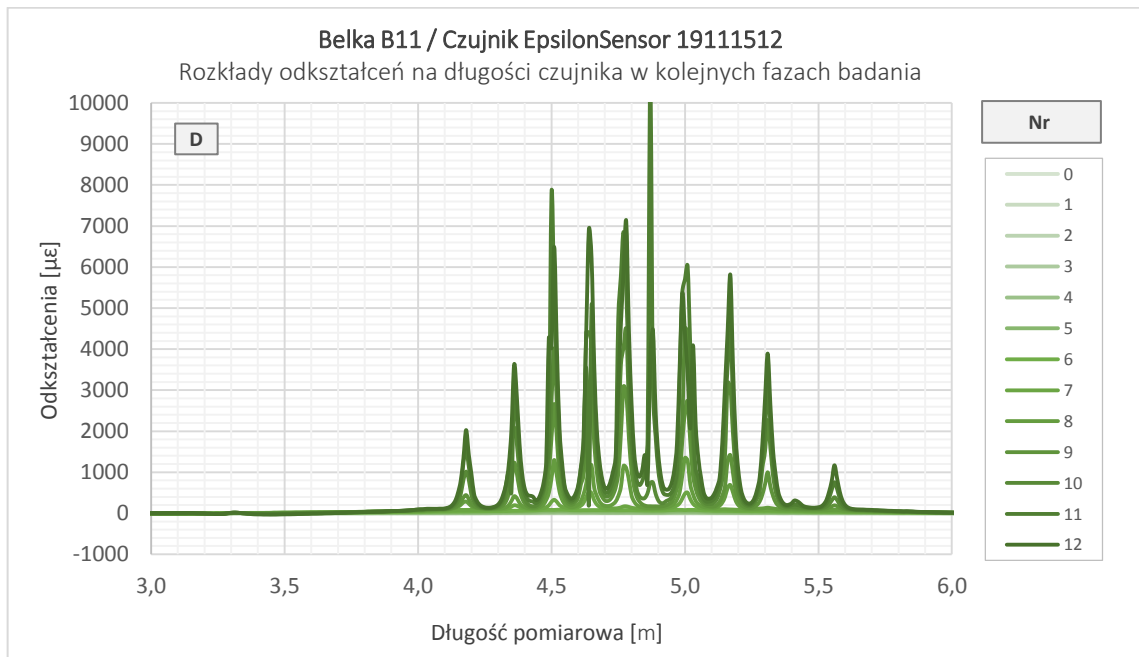


Rys. Z4.18 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 2 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych



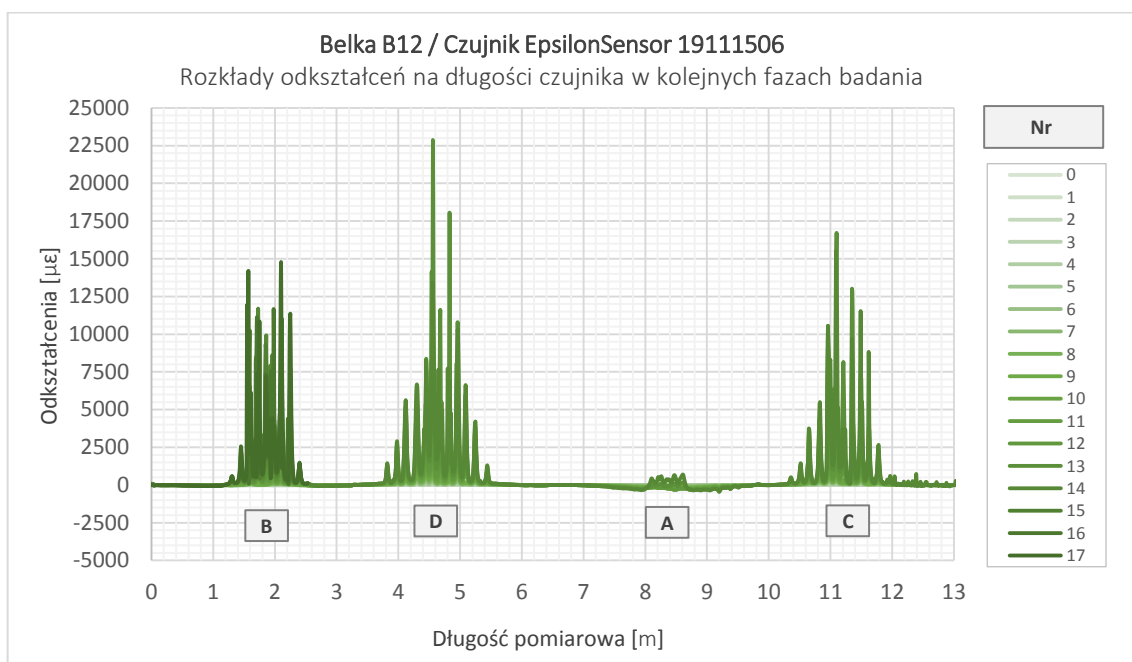
Rys. Z4.19 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 11 w kolejnych fazach badania



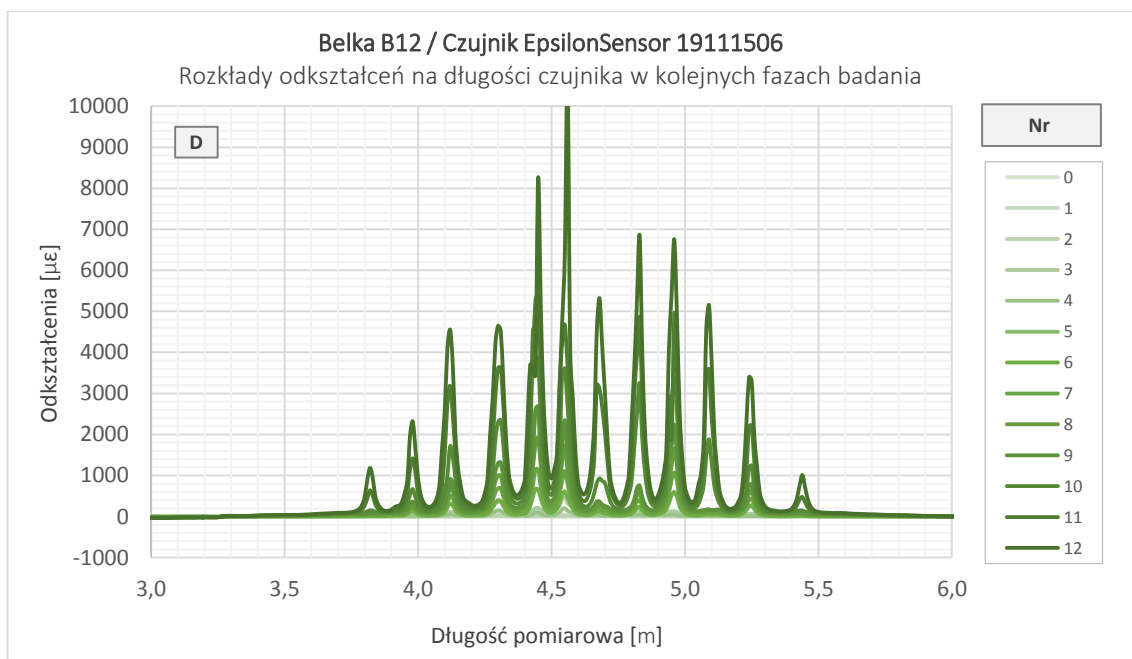
Rys. Z4.20 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 11 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

### 3. Pomiary odkształceń w części betonowej belek swobodnie podpartych

Dane odnośnie pomiarów oraz schemat ułożenia czujników – jak w p.2.

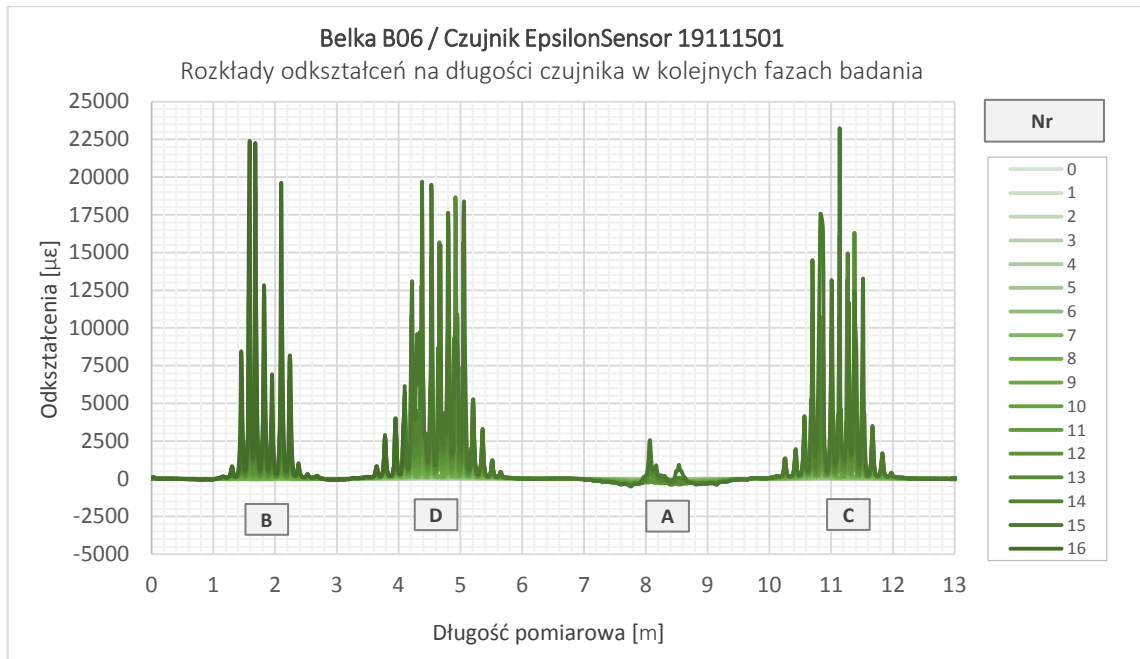


Rys. Z4.21 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 12 w kolejnych fazach badania

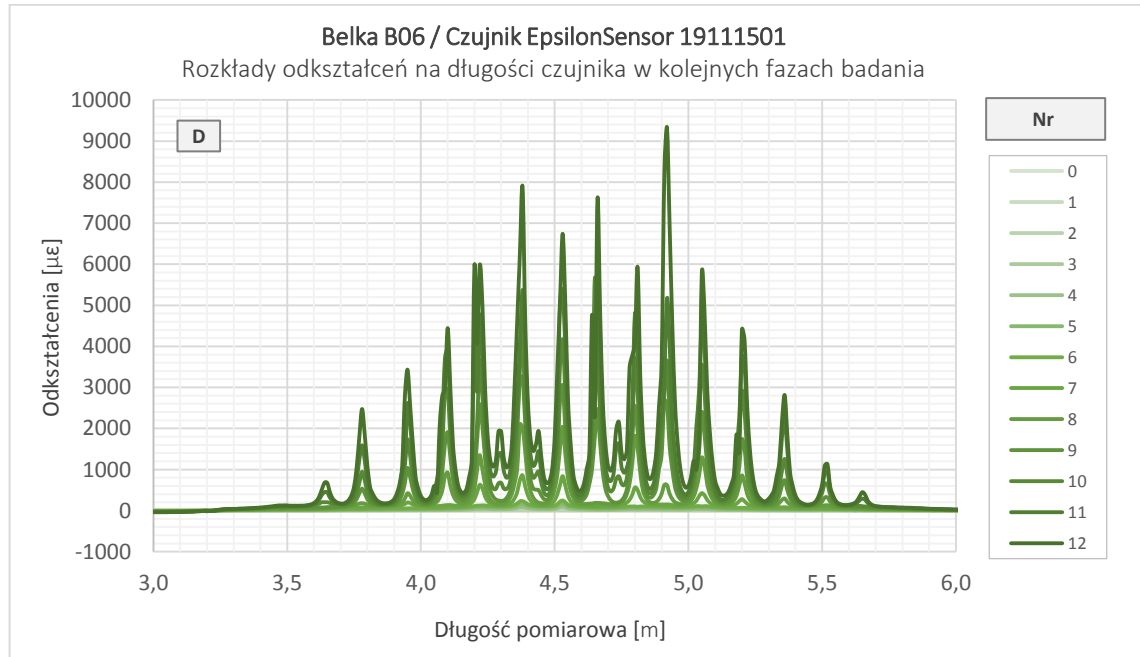


Rys. Z4.22 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 12 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych

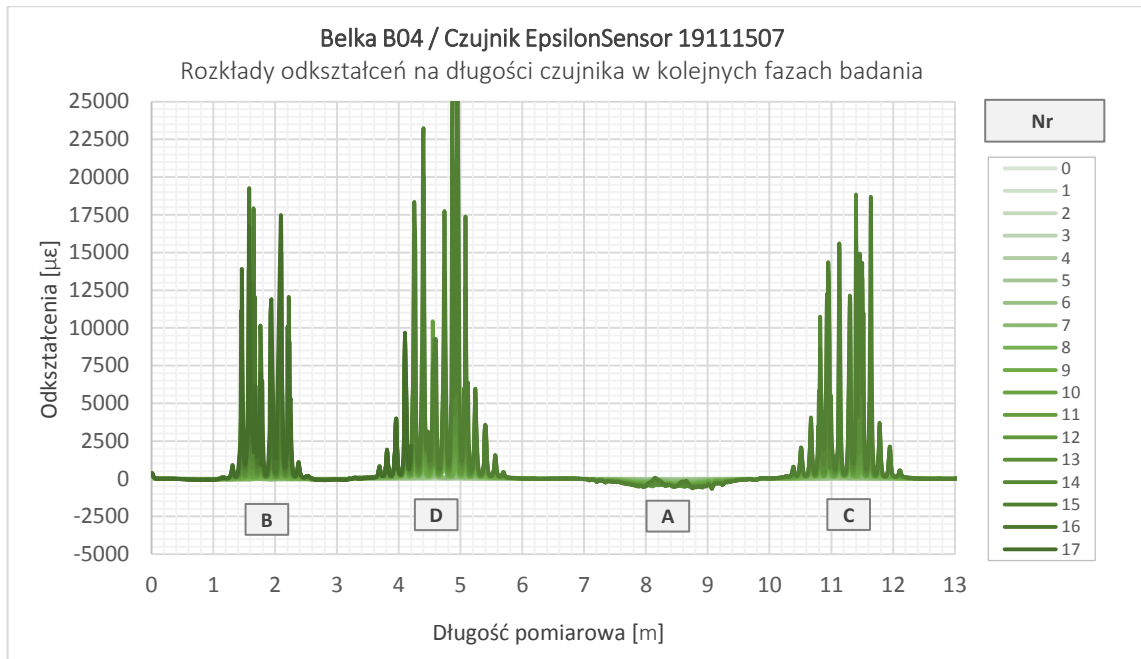


Rys. Z4.23 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 6 w kolejnych fazach badania

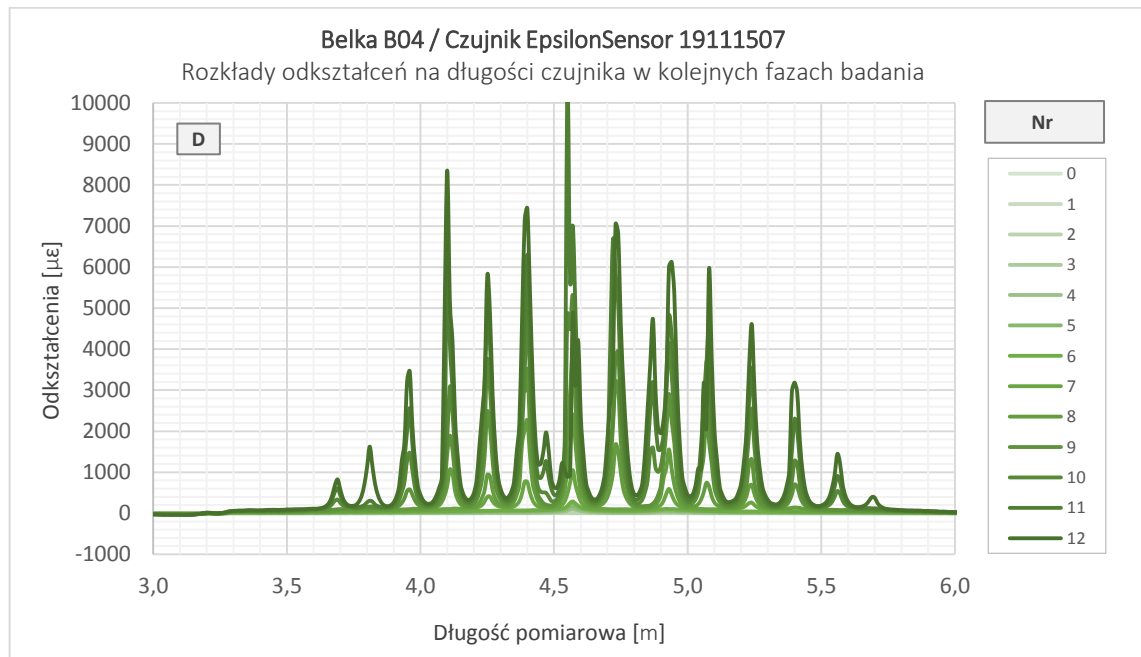


Rys. Z4.24 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 6 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

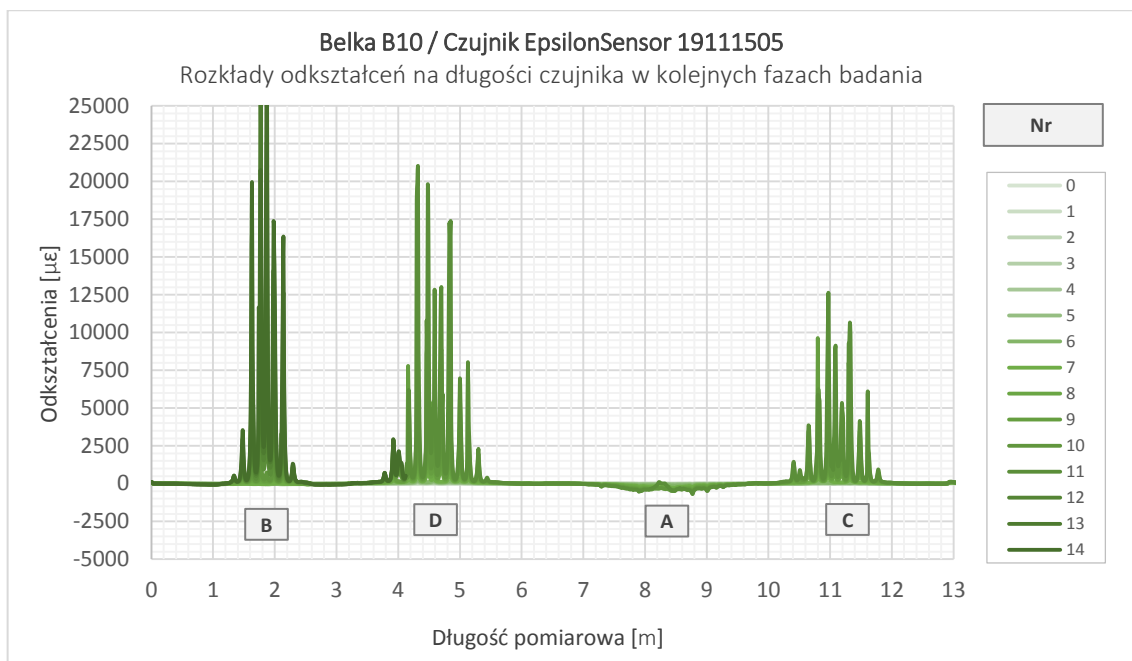
## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych



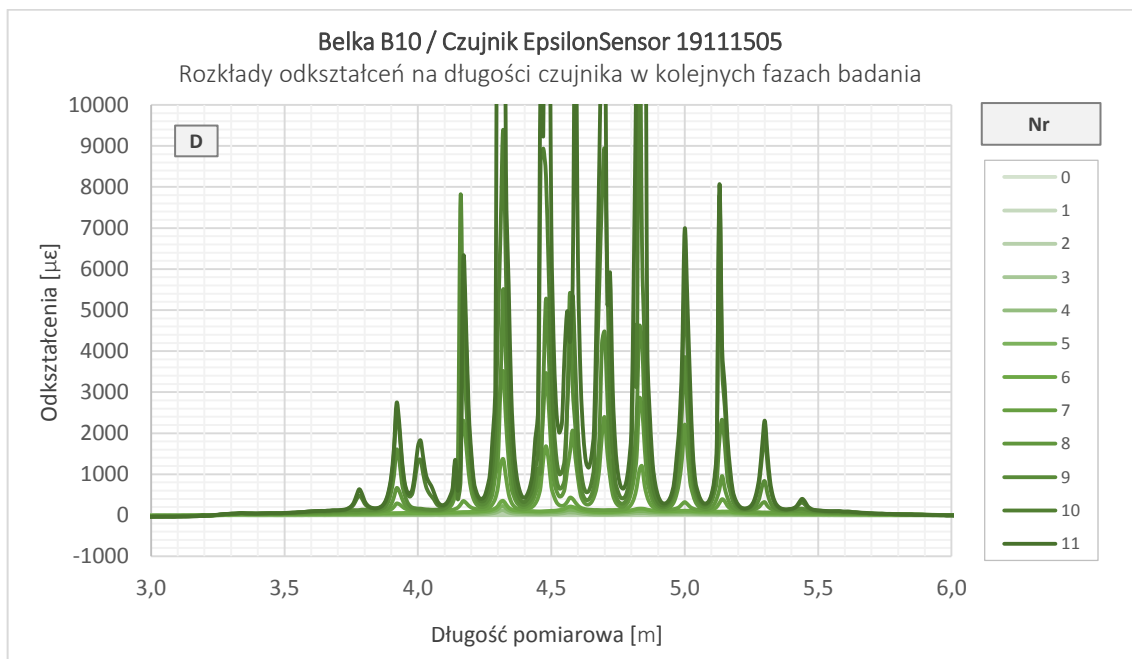
Rys. Z4.25 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 4 w kolejnych fazach badania



Rys. Z4.26 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 4 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

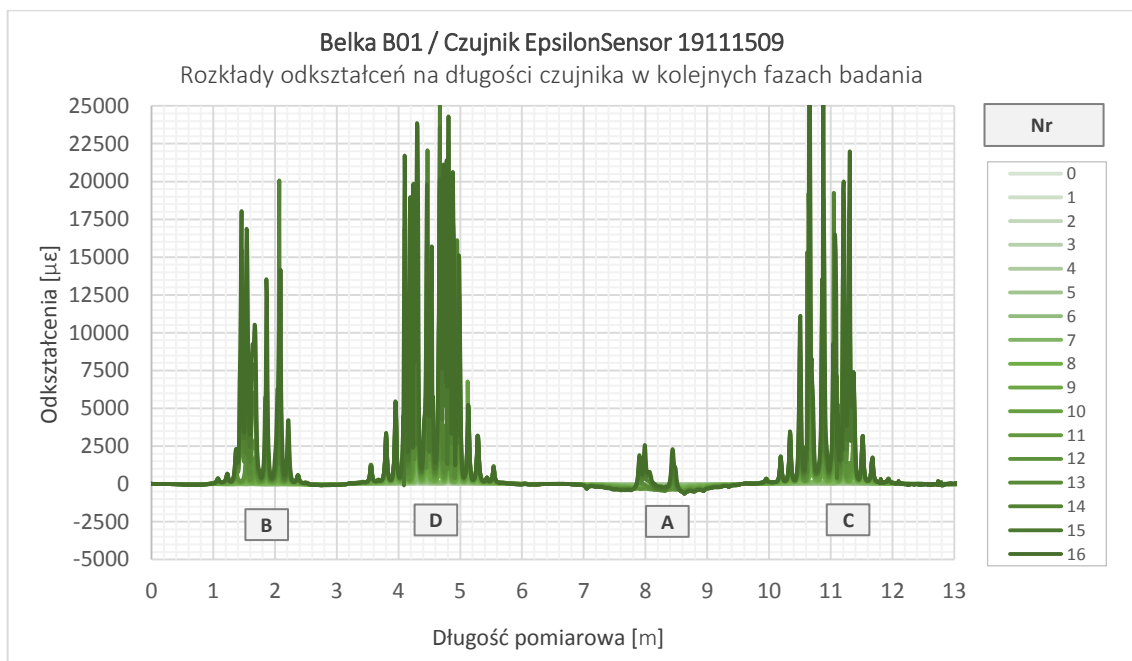


Rys. Z4.27 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 10 w kolejnych fazach badania

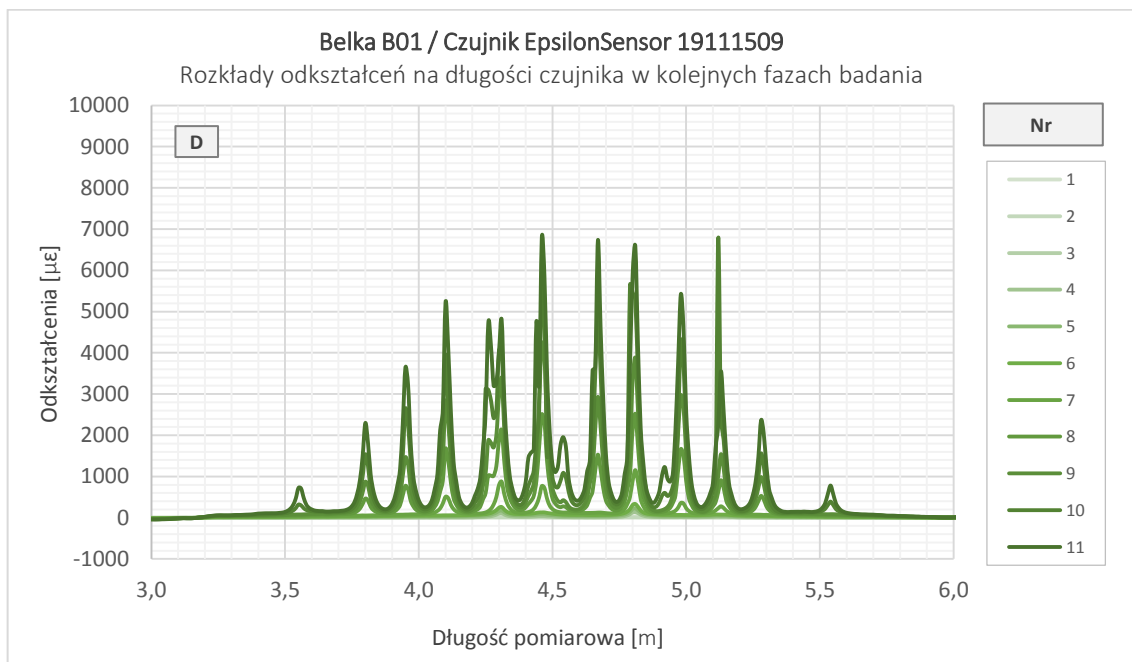


Rys. Z4.28 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 10 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”

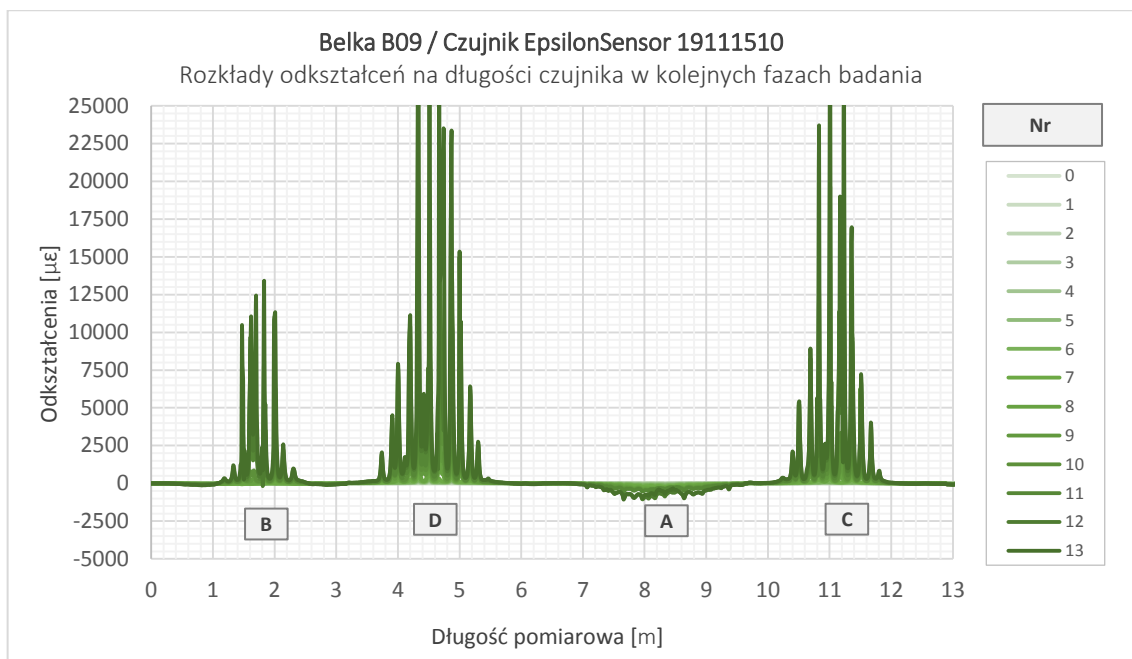
## Załącznik nr 4 Wyniki pomiarów światłowodowych



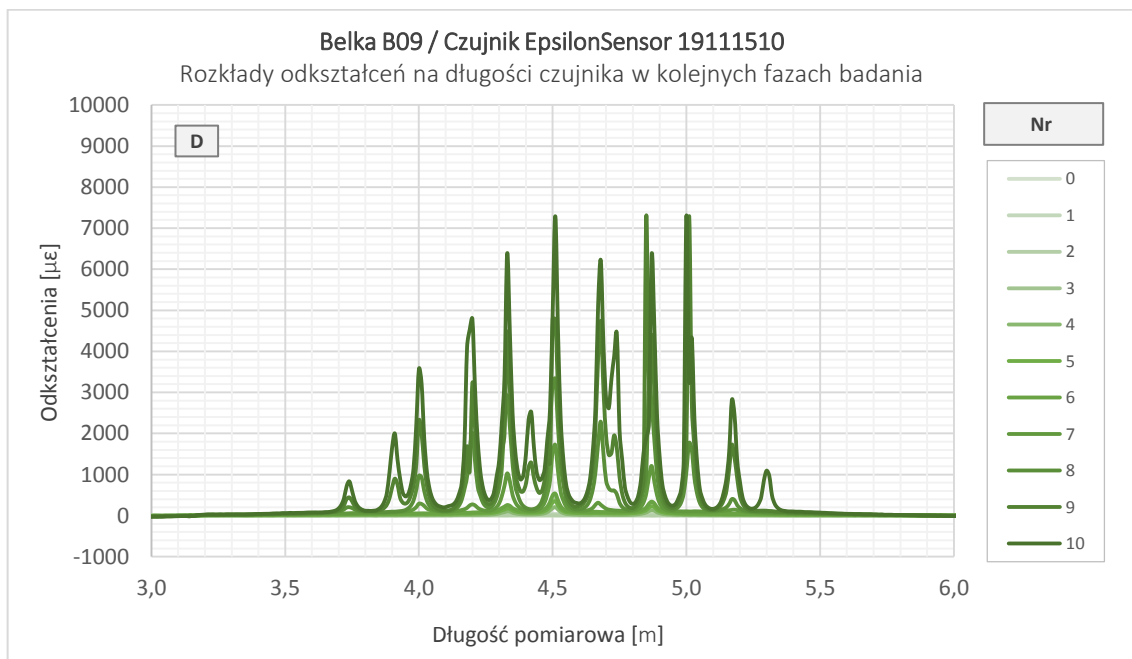
Rys. Z4.29 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 1 w kolejnych fazach badania



Rys. Z4.30 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 1 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”



Rys. Z4.31 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 9 w kolejnych fazach badania



Rys. Z4.32 Wykres odkształceń w belce betonowej nr 9 w kolejnych fazach badania dla odcinka „D”