



POLITECHNIKA POZNAŃSKA
WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ



Rozprawa doktorska

**Kinematyka i dynamika
automatycznego pociągu logistycznego**

mgr inż. Wojciech PASZKOWIAK

Promotor:
dr hab. inż. Tomasz BARTKOWIAK, prof. PP

Promotor pomocniczy:
dr inż. Marcin PELIC

Poznań, 2025 r.

*Żonie Magdalenie
za cierpliwość, nieustające wsparcie
i wiarę w moje możliwości*

Spis treści

Streszczenie.....	7
Wykaz ważniejszych oznaczeń	9
1. Przegląd aktualnego stanu wiedzy	11
1.1 Charakterystyka i wyzwania związane z zastosowaniem pociągów logistycznych	11
1.2 Koncepcja Milk Run w intralogistyce	13
1.3 Istota, cel i budowa pociągów logistycznych.....	15
1.4 Układy skrętne wózków logistycznych.....	22
1.5 Modelowanie kinematyczne wielocłonowych pojazdów przegubowych	26
1.6 Modelowanie dynamiczne wielocłonowych pojazdów przegubowych.....	29
1.7 Ujęcie interakcji koła z podłożem w modelach dynamicznych pojazdów	32
1.8 Układy sterowania wielocłonowych pojazdów przegubowych.....	45
2. Geneza, cel i zakres pracy	50
2.1 Geneza podjęcia tematu pracy	50
2.2 Cel i zakres pracy.....	51
3. Model kinematyczny pociągu logistycznego	54
3.1 Wprowadzenie do modelowania kinematycznego	54
3.2 Model kinematyczny ciągnika	56
3.3 Wariant z przyczepami z układem stałego dyszla (FDSS)	60
3.4 Wariant z przyczepami z układem podwójnego Ackermanna (DASS).....	66
4. Model dynamiczny pociągu logistycznego	74
4.1 Wprowadzenie do modelowania dynamicznego	74
4.2 Model dynamiczny z więzami nieholonomicznymi (DM-NHC).....	75
4.3 Model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia	86
5. Algorytmy sterowania pociągiem logistycznym	107
5.1 Algorytm śledzenia trajektorii przez holownik pociągu logistycznego	107
5.2 Neuroewolucyjny algorytm sterowania pociągu logistycznego (EANN)	116
6. Badania symulacyjne pociągu logistycznego	123
6.1 Wstęp do badań symulacyjnych	123
6.2 Badania symulacyjne modelu kinematycznego.....	123
6.3 Badania symulacyjne wpływu kół swobodnie skrętnych	131
6.4 Badania symulacyjne poślizgu poprzecznego.....	134
6.5 Badania symulacyjne neuroewolucyjnego algorytmu sterowania EANN	144

6.6 Analiza porównawcza metod wyznaczania macierzy transformacji prędkości	148
7. Badania eksperymentalne pociągu logistycznego	149
7.1 Konstrukcja automatycznego pociągu logistycznego.....	149
7.2 Walidacja modeli symulacyjnych pociągu logistycznego	151
8. Podsumowanie, wnioski i kierunki dalszych badań	187
8.1 Podsumowanie	187
8.2 Wnioski.....	187
8.3 Kierunki dalszych badań	189
Bibliografia.....	191
Dodatek A. Rozszerzony model dynamiczny (DM-EXT).....	203

Streszczenie

Niniejsza rozprawa dotyczy modelowania kinematycznego i dynamicznego automatycznego pociągu logistycznego, stanowiącego wieloczołowy pojazd przegubowy składający się z ciągnika holującego liczbę n przyczep, przy różnych konfiguracjach układów skrętnych holownika i przyczep. W pierwszym rozdziale pracy przedstawiono charakterystykę oraz ideę stosowania pociągów logistycznych w logistyce wewnętrznej oraz metody modelowania i sterowania wieloczołowymi pojazdami przegubowymi. W kolejnym rozdziale zaprezentowano genezę podjęcia tematu, cele i zakres pracy. Następnie przedstawiono opracowane modele pociągu logistycznego: model kinematyczny, model dynamiczny z więzami nieholonomicznymi, model dynamiczny uwzględniający poślizg poprzeczny oraz model dynamiczny uwzględniający poślizg wzdłużny, poprzeczny oraz opory toczenia. Każdy z tych modeli został opracowany dla dwóch wariantów układów skrętnych holownika: układu z różnicowo napędzaną tylną osią oraz układu ze sterowanym, napędzanym przednim kołem skrętnym, a także dla dwóch wariantów układów skrętnych przyczep: układu stałego dyszla i układu podwójnego Ackermanna. Dla wszystkich tych modeli opracowano algorytm śledzenia trajektorii w środowisku symulacyjnym oparty na regulatorze PID. Opracowano neuroewolucyjny algorytm sterowania pociągiem logistycznym, którego celem było wytrenowanie sztucznych sieci neuronowych do sterowania pojazdem w taki sposób, aby zapewnić bezkolizyjny przejazd w zamkniętych korytarzach transportowych. W algorytmie zastosowano sztuczne sieci neuronowe, których wagi były globalnie optymalizowane przez algorytmy ewolucyjne. W ramach badań przeprowadzono symulacje dla opracowanych modeli kinematycznych i dynamicznych, uwzględniających różne konfiguracje układów skrętnych holownika i przyczep. Dodatkowo, za pomocą opracowanego algorytmu sterowania, przeprowadzono proces uczenia sieci neuronowej na podstawie przejazdów pociągu logistycznego przez mapę tunelową, stosując model dynamiczny uwzględniający poślizg poprzeczny. W końcowej części rozprawy zaprezentowano wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych na pełnowymiarowym pociągu logistycznym z przyczepami wyposażonymi w układ stałego dyszla, których celem była walidacja opracowanych modeli.

Summary

This doctoral dissertation concerns the kinematic and dynamic modeling of an autonomous logistic train, which is a multi-body articulated vehicle consisting of a tractor towing n trailers, with various configurations of steering systems for both the tractor and the trailers. The first chapter presents the characteristics and the concept of using logistic trains in internal logistics, as well as methods for modeling and controlling multi-body articulated vehicles. The following chapter outlines the motivation behind the undertaken research, along with the objectives and scope of the study. The subsequent chapters present the developed models of the logistic train: a kinematic model, a dynamic model with nonholonomic constraints, a dynamic model accounting for lateral slip, and a dynamic model that includes longitudinal and lateral slip as well as rolling resistance. Each of these models was developed for two variants of the tractor's steering system: a system with a differentially driven rear axle and a system with a steerable, powered front wheel. Additionally, two trailer steering configurations were considered: a fixed drawbar system and a double Ackermann steering system. For all of these models, a trajectory tracking control algorithm was developed in a simulation environment based on a PID controller. A neuroevolutionary control algorithm was developed to train artificial neural networks for controlling the logistic train in such a way as to ensure collision-free passage through enclosed transport corridors. In this algorithm, artificial neural networks were used with global weight optimization performed using evolutionary algorithms. Within the simulation study, simulations were carried out for the developed kinematic and dynamic models in various steering configurations of the tractor and trailers. Furthermore, using the developed control algorithm, a neural network training process was conducted based on the logistic train's passage through a tunnel-like map, using a dynamic model that accounts for lateral slip. In the final part of the dissertation, experimental results are presented based on a full-scale logistic train equipped with trailers featuring a fixed drawbar system, with the aim of validating the developed models.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

Układy napędowe i skrętne

DDT	– ciągnik z różnicowo napędzaną tylną osią oraz pasywnym kołem skrętnym z przodu (ang. <i>differential-drive tractor</i>)
TTFS	– trójkołowy ciągnik z przednim kołem napędzanym i sterowanym (ang. <i>three-wheeled tractor with front steering</i>)
FDSS	– przyczepa z układem stałego dyszla (ang. <i>fixed drawbar steering system</i>)
DASS	– przyczepa z układem podwójnego Ackermanna ze stałymi osiami i skrętnymi kołami (ang. <i>double Ackermann steering system</i>)

Modele matematyczne

KM	– model kinematyczny (ang. <i>kinematic model</i>)
DM-NHC	– model dynamiczny z więzami nieholonomicznymi (ang. <i>dynamic model with nonholonomic constraints</i>)
DM-LF	– model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia poprzecznego (ang. <i>dynamic model with lateral friction</i>).
DM-EXT	– rozszerzony model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia poprzecznego, wzdłużnego i oporów toczenia (ang. <i>extended dynamic model with lateral and longitudinal friction and rolling resistance</i>)

Indeksy dolne

0	– ciągnik
i	– i -ta przyczepa
L	– koło lewe
R	– koło prawe
$f0$	– przednia oś ciągnika
$r0$	– tylna oś ciągnika
$fM0$	– przednie środkowe koło ciągnika
$rL0$	– tylne lewe koło ciągnika
$rR0$	– tylne prawe koło ciągnika
fi	– przednia oś i -tej przyczepy
ri	– tylna oś i -tej przyczepy
fLi	– przednie lewe koło i -tej przyczepy
fRi	– przednie prawe koło i -tej przyczepy
rLi	– tylne lewe koło i -tej przyczepy
rRi	– tylne prawe koło i -tej przyczepy
di	– przedni dyszel i -tej przyczepy (DASS)

Parametry i zmienne

β_0	[rad]	– kąt orientacji ciągnika
β_i	[rad]	– kąt orientacji korpusu i -tej przyczepy
β_{i1}	[rad]	– kąt orientacji przedniego dyszla i -tej przyczepy (FDSS)
β_{i2}	[rad]	– kąt orientacji korpusu i -tej przyczepy (DASS)
φ	[rad]	– kąt orientacji koła skrętnego
θ	[rad]	– kąt obrotu koła
m	[kg]	– masa ciała
I	[kg · m ²]	– moment bezwładności ciała
τ	[N · m]	– moment obrotowy
g	[N/s ²]	– przyspieszenie ziemskie
F_z	[N]	– siła reakcji podłoża
F_x	[N]	– siła wzdłużna względem koła
F_y	[N]	– siła poprzeczna względem koła

Wektory i macierze

$\mathbf{q}$	– wektor współrzędnych uogólnionych
$\dot{\mathbf{q}}$	– wektor prędkości uogólnionych
$\mathbf{J}(\mathbf{q})$	– macierz transformacji prędkości
$\mathbf{A}(\mathbf{q})$	– macierz ograniczeń nieholonomicznych
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	– macierz bezwładności układu
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	– wektor sił odśrodkowych i Coriolisa
$\mathbf{Q}(\mathbf{q})$	– wektor sił uogólnionych
$\mathbf{B}(\mathbf{q})$	– macierz transformacji sił i momentów wejściowych
$\boldsymbol{\tau}$	– wektor sił i momentów wejściowych

1. Przegląd aktualnego stanu wiedzy

1.1 Charakterystyka i wyzwania związane z zastosowaniem pociągów logistycznych

Intensywny rozwój produkcji prowadzi do poszukiwań nowych rozwiązań w zakresie środków transportu wewnątrzzakładowych. Jednym z takich rozwiązań jest pociąg logistyczny, którego zadaniem jest zbiorcze dostarczanie i odbieranie materiałów i innych ładunków ze stanowisk produkcyjnych, montażowych lub magazynowych. Składa się on z holownika, nazywanego również ciągnikiem, oraz z określonej liczby przyczep, popularnie nazywanych wózkami logistycznymi [1–7]. Przykładowe pociągi logistyczne zostały przedstawione na rysunku 1.1. W literaturze niemieckojęzycznej funkcjonują określenia *Routenzug* lub *Logistikzug* [8], natomiast w języku angielskim najczęściej spotykany jest termin *tugger train* [4]. W polskiej praktyce przemysłowej przyjęło się natomiast określenie „pociąg logistyczny”, które trafnie oddaje funkcję tego środka transportu [9]. Mimo że fraza „pociąg logistyczny” zawiera w sobie słowo „pociąg”, to znacząco różni się on od klasycznego pociągu kolejowego. Najważniejszą różnicą pomiędzy nimi jest fakt, że pociąg kolejowy porusza się po torach, które zapewniają stałą, wspólną trajektorię dla lokomotywy oraz wszystkich wagonów. W przypadku pociągu logistycznego jest inaczej, ponieważ ten nie porusza się po szynach, a po powierzchni, która nie zapewnia stałej i jednakowej ścieżki przejazdu dla wszystkich jednostek pociągu [10, 11]. Powierzchnia ta nazywana jest korytarzem transportowym pociągu logistycznego i jest ściśle określona w przedsiębiorstwach. Oznacza to, że żaden z elementów pociągu nie powinien znajdować się poza wydzielonym obszarem. Wózki logistyczne wchodzące w skład pociągu mogą mieć różną trajektorię względem siebie oraz względem holownika, co powoduje trudności w przewidzeniu obszaru wymaganego do swobodnego przejazdu pociągu [10, 12]. Zarys powierzchni uzyskany przez pociąg logistyczny podczas przejazdu nazywany jest skrajnią ruchu [13–16]. Ze względu na swoją budowę, pociąg logistyczny jest przykładem wieloczlonowego pojazdu przegubowego, w którym jednostki są połączone przegubowo i mogą przemieszczać się względem siebie. W przypadku manualnie sterowanego holownika istnieje bardzo duża trudność w uzyskaniu powtarzalności przejazdów dla tej samej trasy [17–19]. Nawet małe zmiany w prowadzeniu pociągu przez kierowcę mogą spowodować duże różnice w uzyskanej skrajni ruchu pociągu logistycznego. Trajektorja pociągu logistycznego jest zatem uzależniona od kierowcy pociągu, który zadaje parametry wejściowe wpływające

na prędkość, kierunek jazdy ciągnika, a w efekcie trajektorie wózków logistycznych [3, 4, 17, 20].

a)



b)



Rys. 1.1. Przykłady pociągów logistycznych: a) pociąg logistyczny firmy *Jtec Industries* [21]; b) pociąg logistyczny firmy *WAMECH* [22]

Jednym z głównych problemów związanych ze stosowaniem pociągów logistycznych jest fakt, że trasy transportowe zazwyczaj są projektowane z myślą o ruchu pojedynczych pojazdów, co skutkuje ograniczonymi wymiarami tych dróg i utrudnia przejazd pociągów bez kolizji z infrastrukturą, czy innymi użytkownikami tych dróg [4, 11, 23]. W związku z tym prowadzone są badania nad analizą trajektorii układów kierowniczych, co pozwala

minimalizować skrajnię ruchu przy zachowaniu niezmięnionej ładowności pociągu logistycznego [10–12, 24].

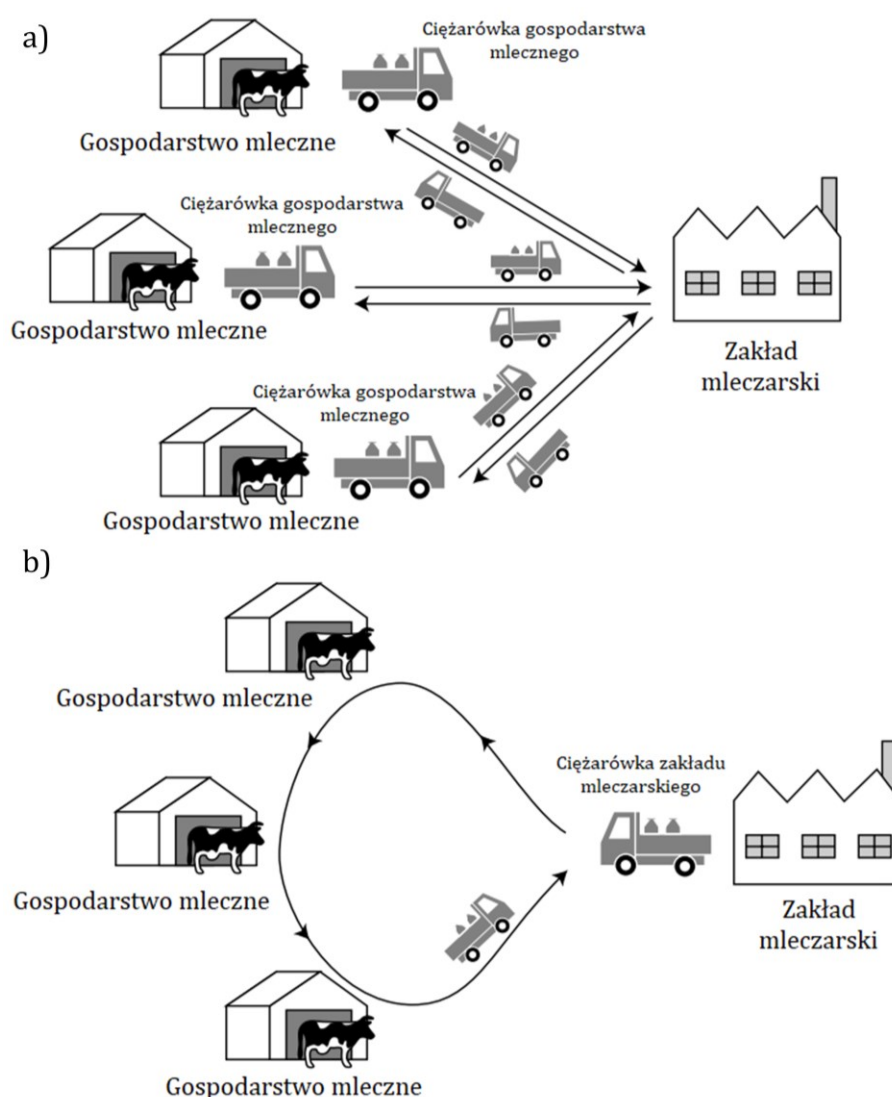
Istotnym zagadnieniem związanym z zastosowaniem pociągów logistycznych w intralogistyce jest odpowiedni dobór parametrów układu kinematycznego oraz możliwość wcześniejszego sprawdzenia, czy zaprojektowany pociąg jest w stanie bezkolizyjnie pokonać zadaną trasę [11, 12]. Weryfikację dobranych parametrów można przeprowadzić poprzez symulację z użyciem modelu matematycznego analizowanego układu. W tym celu stosuje się modele kinematyczne oraz dynamiczne, które w zależności od przyjętych założeń mogą zakładać brak poślizgu dzięki odpowiednim ograniczeniom lub uwzględniać możliwość jego występowania. Zjawisko poślizgu odgrywa istotną rolę zwłaszcza przy większych prędkościach jazdy lub podczas pokonywania zakrętów o małym promieniu, gdzie siły poprzeczne działające na koła znacząco wzrastają. Ryzyko poślizgu jest szczególnie istotne w przypadku nieobciążonych wózków, gdy siła docisku kół do podłoża jest niewielka [12, 25]. Alternatywnym rozwiązaniem zapewniającym bezkolizyjny przejazd jest zastosowanie automatycznych lub autonomicznych pociągów logistycznych [2, 10, 11, 26, 27].

1.2 Koncepcja Milk Run w intralogistyce

Milk Run to koncepcja transportowa wywodząca się z *Lean Manufacturing*, choć bywa również stosowana poza tą metodyką [7, 28, 29]. Jej główną ideą jest realizacja cyklicznych dostaw na stałych trasach, w ustalonych przedziałach czasowych, z konsolidacją ładunków pochodzących od wielu źródeł [7, 30, 31]. Nazwa koncepcji *Milk Run* pochodzi z tradycyjnej praktyki zbiorczego odbioru mleka od kilku rolników za pomocą cysterny drogowej, w której mleko łączone jest w jedną partię i przewożone do zakładów przetwórstwa nabiałowego (rys. 1.2) [1, 32]. Termin ten nawiązuje też do tradycyjnego dostarczania butelek mleka do gospodarstw domowych, gdzie codzienna trasa dostawcy obejmowała zarówno dowóz pełnych butelek, jak i odbiór pustych [32]. W przypadku idei *Milk Run* w logistyce wewnątrzzakładowej dostawcą butelek mleka staje się kierowca pociągu logistycznego, który zamiast gospodarstw domowych odwiedza kolejne stacje produkcyjne lub magazynowe dostarczając i odbierając produkty. W kontekście intralogistyki *Milk Run* to manualnie obsługiwany system transportowy, który dostarcza surowce i komponenty w stałym rytmie, zgodnie z określoną trasą i harmonogramem [23, 33]. Dzięki zastosowaniu tej koncepcji

możliwe jest regularne zaopatrywanie wielu stanowisk produkcyjnych przez jeden pojazd, który dostarcza potrzebne materiały, a równocześnie odbiera zużyte komponenty, odpady lub puste pojemniki [5, 34–37]. Podejściu *Milk Run* towarzyszą następujące cechy [7]:

- stałe trasy,
- stałe, cykliczne przedziały czasowe odbiorów i dostaw,
- mniejsze dostawy od wielu dostawców są konsolidowane w jedną trasę,
- trasy są okrężne, a pojemniki zwrotne wymieniane 1:1 (pełne na puste),
- dostawy są planowane przez odbiorcę.



Rys. 1.2. Koncepcje transportowe na przykładzie odbioru mleka od producentów: a) podejście tradycyjne; b) podejście *Milk Run* (opracowanie własne na podstawie [1])

W praktyce *Milk Run* może występować w wersji statycznej, charakteryzującej się stałymi trasami i objętościami dostaw, lub w wersji dynamicznej, z elastycznymi cyklami

i zmienną ilością przewożonego ładunku. Odpowiedni dobór rodzaju systemu zależy od charakterystyki produkcji oraz stabilności zapotrzebowania na komponenty [7].

Wraz z rozwojem koncepcji Przemysłu 4.0 rośnie zainteresowanie implementacją automatycznych i autonomicznych pociągów logistycznych w systemach *Milk Run*. Celem takich rozwiązań jest zwiększenie niezawodności i powtarzalności dostaw, ograniczenie udziału człowieka w procesach transportowych oraz optymalizacja planowania tras i zarządzania zasobami [10, 38–40].

1.3 Istota, cel i budowa pociągów logistycznych

1.3.1 Istota i cel stosowania pociągów logistycznych

Istotą stosowania pociągów logistycznych jako środków transportu logistyki wewnętrznej jest przede wszystkim zwiększenie wydajności, zmniejszenie kosztu transportu oraz zapewnienie bezpiecznego transportu między stanowiskami [5, 41]. Pociąg logistyczny może w jednym kursie przewieźć więcej towarów niż klasyczne środki transportu intralogistycznego [4, 35], co przekłada się na usprawnienie przepływu materiałów w zakładzie oraz obniżenie kosztów funkcjonowania logistyki wewnętrznej [32, 42]. W tradycyjnym transporcie intralogistycznym często stosuje się wiele wózków widłowych, które mają mniejszą ładowność niż pociąg logistyczny, co skutkuje koniecznością wykonywania większej liczby kursów i zwiększa liczbę pojazdów w ruchu. To z kolei może prowadzić do zwiększenia kosztów operacyjnych oraz ryzyka kolizji, szczególnie w przypadku intensywnego ruchu wewnątrzzakładowego. Wraz ze wzrostem liczby stanowisk oraz zwiększaniem się powierzchni hali produkcyjnej lub magazynowej maleje racjonalność stosowania wózków widłowych w celach czysto transportowych. Stosowanie wózków widłowych jako głównego środka transportu intralogistycznego może wiązać się z [4, 32, 35]:

- koniecznością zakupu większej liczby pojazdów w celu zapewnienia wymaganej wydajności,
- zapewnieniem specjalistycznej i stosunkowo drogiej obsługi serwisowej, gwarantującej pracę wózków przez 24 godziny, 7 dni w tygodniu.
- koniecznością zatrudnienia wielu wyspecjalizowanych operatorów wózków widłowych posiadających odpowiednie kompetencje i uprawnienia do ich prowadzenia w obszarze produkcyjno-magazynowym.

Zastąpienie wielu wózków widłowych przez pociąg logistyczny pozwala uzyskać [4, 35]:

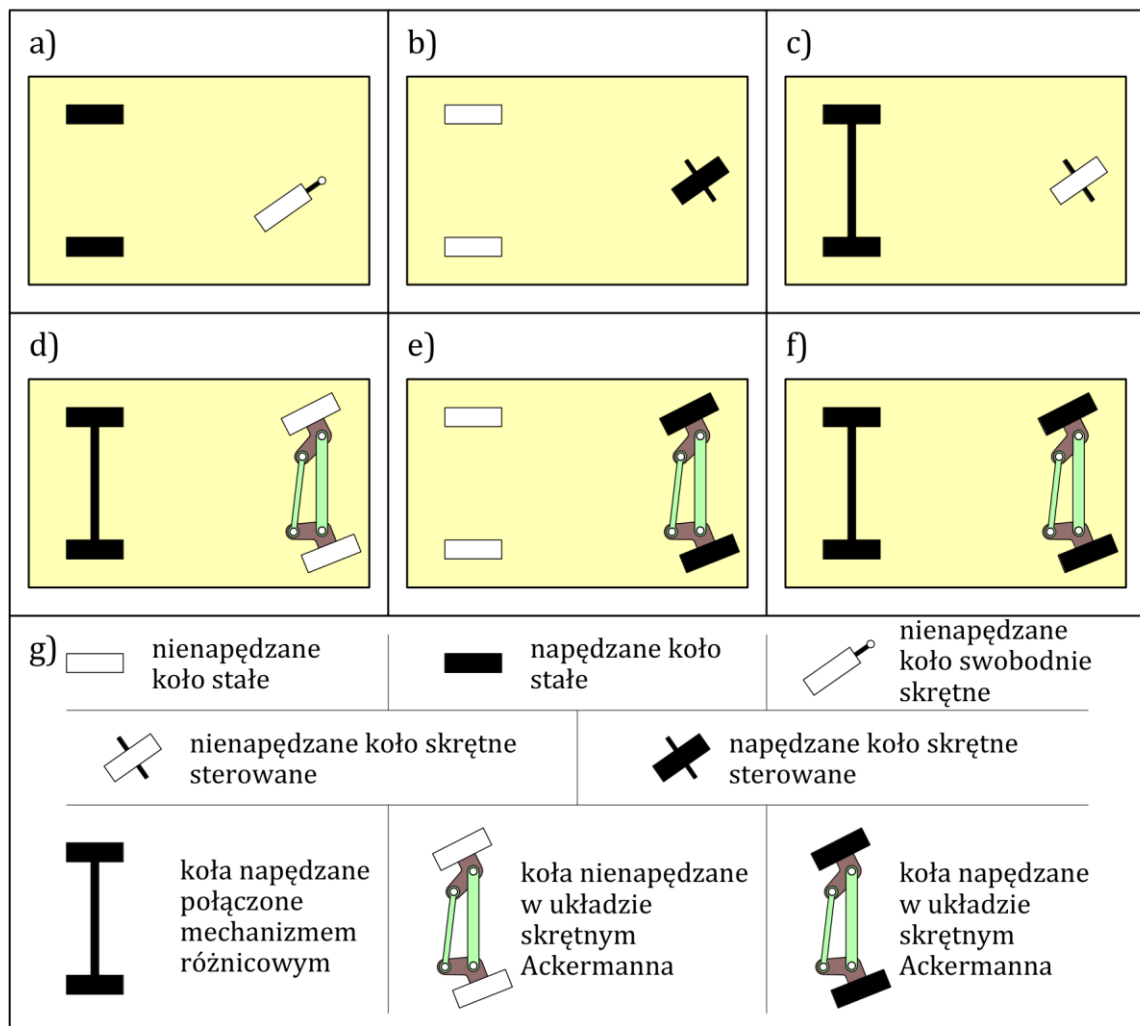
- wzrost wydajności – pociąg logistyczny wykonuje zadania transportowe wielu wózków widłowych w tym samym czasie,
- zmniejszenie kosztu transportu – jeden pociąg logistyczny generuje niższe koszty zakupu i utrzymania niż grupa wózków widłowych o porównywalnej wydajności transportowej,
- elastyczność – możliwość doboru pociągu o odpowiednich parametrach (wymiary gabarytowe, liczba i rodzaj wózków, typ zastosowanego układu skrętnego), dostosowanych do konkretnej przestrzeni transportowej i charakteru pracy,
- wszechstronność – możliwość transportu różnorodnych typów jednostek ładunkowych,
- wzrost bezpieczeństwa – zaplanowana trasa, czyli wydzielony korytarz transportowy zmniejsza ryzyko kolizji na terenie przedsiębiorstwa.

Pomimo wielu niepodważalnych zalet pociągów logistycznych w obszarze transportowym, nie spowodują one całkowitej rezygnacji z użytkowania wózków widłowych. Pojazdy te pozostają podstawowym środkiem stosowanym do operacji załadunku, rozładunku oraz obsługi regałów magazynowych, zgodnie ze swoim głównym przeznaczeniem [35]. Pociągi logistyczne, poza zastosowaniem w halach produkcyjnych i magazynowych, są powszechnie stosowane w obszarach lotnisk do transportu ładunków i bagaży pomiędzy samolotami, a terminalami lotniska [2, 17].

1.3.2 Konfiguracje kinematyczne holowników logistycznych

W zestawie tworzącym pociąg logistyczny, pierwszą jednostką jest holownik (nazywany również ciągnikiem lub ciągnikiem holowniczym, ang. *tow tractor*). Jego podstawowym zadaniem jest holowanie podłączonych do niego wózków przewożących materiały. W praktyce spotykane są różnorodne warianty konstrukcji kinematycznej holowników logistycznych, co przedstawiono na rysunku 1.3. W przypadku manualnie sterowanych holowników najczęściej stosuje się układ jezdny z kołami skrętnymi na przedniej osi, których kąt odchylenia zadawany jest przez kierowcę za pomocą kierownicy. Układ skrętu może być realizowany w konfiguracji trójkątowej lub czterokołowej, przy czym w tym drugim przypadku stosowana jest zwykle zasada Ackermanna. Napędzane mogą być koła przednie lub tylne. W przypadku trójkątowych układów, w przedniej części pojazdu często znajdują się dodatkowe

pasywne koła podporowe (swobodnie skrętne), o niewielkich rozmiarach, których zadaniem jest zwiększenie stabilności ciągnika bez istotnego wpływu na jego kinematykę [10, 43–46]. W związku z tym nie są one wliczane do struktury kinematycznej pojazdu. W przypadku autonomicznych pociągów logistycznych najczęściej stosuje się holowniki z różnicowo napędzanymi kołami tylnej osi, które umożliwiają zmianę kierunku jazdy poprzez różnicowanie prędkości obrotowej kół. Tego typu jednostki należą do klasy mobilnych robotów przemysłowych i również wyposażane są w przednie koła podporowe, pełniące funkcję podtrzymującą [46–49]. Konfiguracja układu jezdnego, zarówno w pojazdach sterowanych manualnie, jak i autonomicznych, ma istotne znaczenie dla kinematyki całego zestawu oraz sposobu jego modelowania [46, 48–51].



Rys. 1.3. Układy skrętne holownika: a) trójkołowy, koła tylnej osi napędzane różnicowo, przednie koło swobodnie skrętne; b) trójkołowy, przednie koło napędzane i sterowane; c) trójkołowy, napędzane tylne koła połączone mechanizmem różnicowym, nienapędzane przednie koło sterowane; d) czterokołowy, układ skrętny Ackermanna, napędzane tylne koła połączone mechanizmem różnicowym; e) czterokołowy, układ skrętny Ackermanna z napędzanymi kołami przedniej osi; f) czterokołowy, układ skrętny Ackermanna z napędzanymi kołami przedniej osi oraz napędzane tylne koła połączone mechanizmem różnicowym; g) opis symboli

Na rynku dostępne są różne typy holowników dostosowane do specyfiki środowiska pracy. W zastosowaniach wewnętrznych najczęściej stosuje się trójkołowe holowniki bezkabinowe, przystosowane do manewrowania w ograniczonej przestrzeni hal produkcyjnych (rys. 1.4). Ich kompaktowe wymiary i mały promień skrętu sprzyjają efektywnemu poruszaniu się po zdefiniowanych trasach transportowych [52–55].



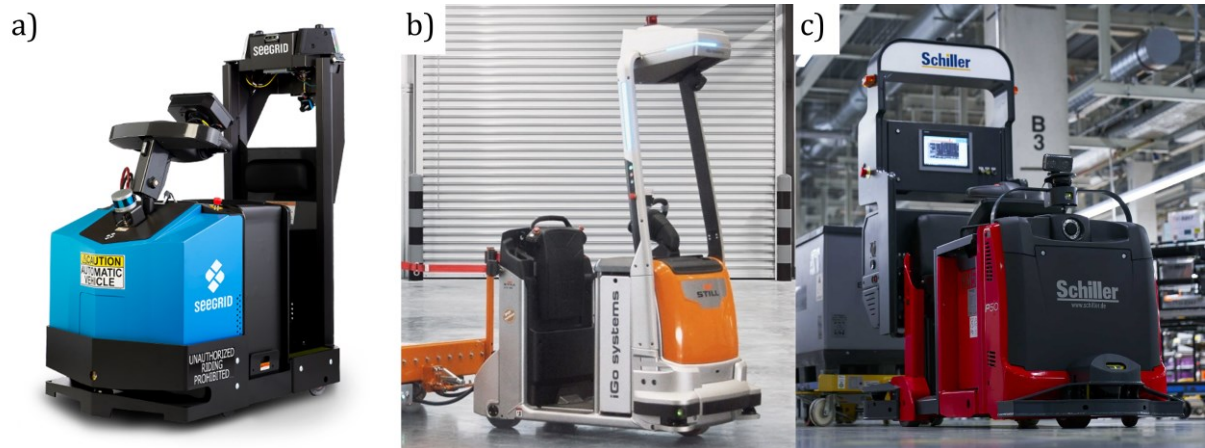
Rys. 1.4. Przykładowe holowniki trójkołowe bez kabiny: a) Toyota (sterowane i napędzane przednie koło) [53]; b) Clark (napędzana tylna oś, przednie koło sterowane) [55]; c) Linde (sterowane i napędzane przednie koło) [54]

W przypadku pracy na zewnątrz stosuje się najczęściej holowniki kabinowe o zwiększonej mocy, wizualnie zbliżone do niewielkich samochodów ciężarowych posiadających przestrzeń ładunkową na tylnej części pojazdu. Przykłady takich holowników przedstawiono na rysunku 1.5 [56–58].



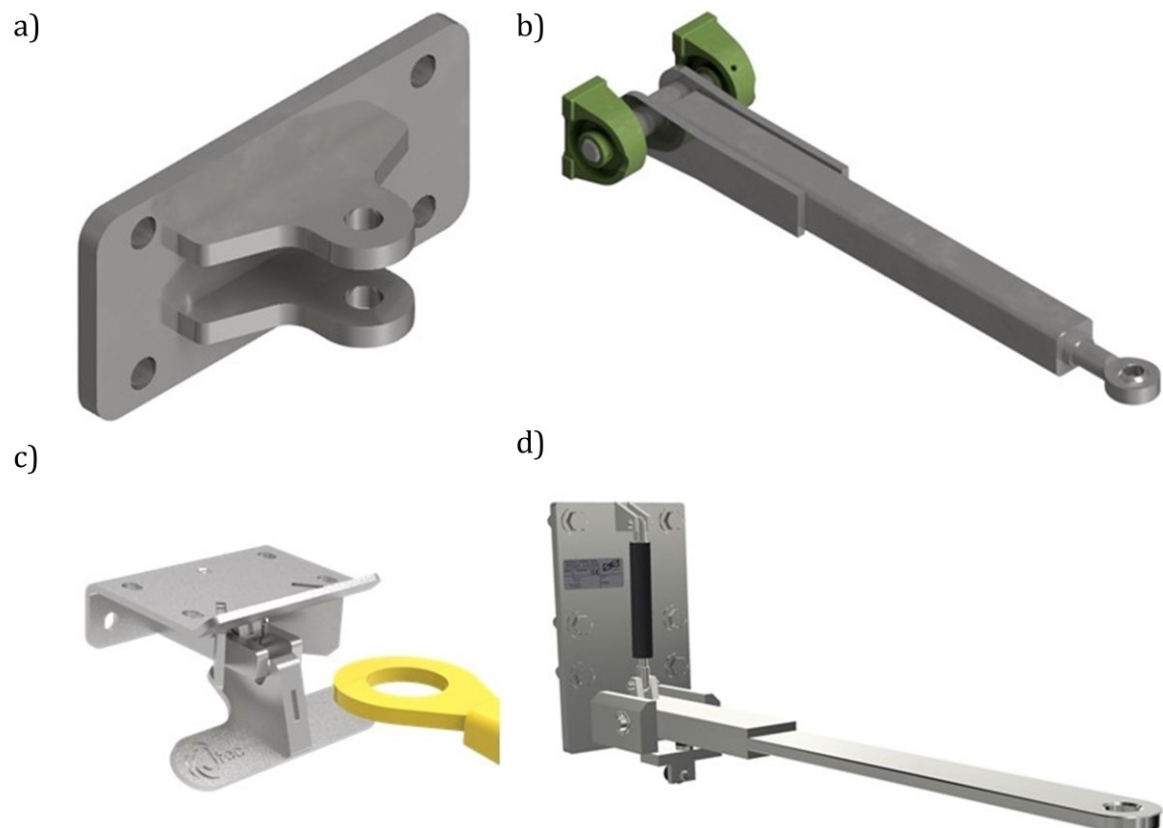
Rys. 1.5. Przykładowe holowniki czterokołowe kabinowe z napędzaną tylną osią: a) Bradshaw [56]; b) Still [57]; c) Linde [58]

Postępująca automatyzacja procesów logistycznych doprowadziła do popularyzacji holowników autonomicznych. Ich konstrukcja często jest zbliżona do modeli sterowanych manualnie (rys. 1.6). Wyposażone są one w systemy wizyjne i sensoryczne umożliwiające jazdę autonomiczną. Wiele z nich zachowuje również możliwość manualnego sterowania, co pozwala na przełączenie trybu pracy w zależności od potrzeb [10, 26, 44, 59–61].



Rys. 1.6. Autonomiczne holowniki logistyczne: a) Seegrid [59]; b) Still [60]; c) Schiller [61]

W zależności od zastosowanego układu skrętnego w wózkach logistycznych, holownik wyposażony jest w odpowiedni typ sprzęgu, najczęściej zaczep lub dyszel (rys. 1.7).



Rys. 1.7. Łączniki pomiędzy jednostkami: a) klasyczny zaczep; b) klasyczny dyszel; c) zaczep z automatyczną blokadą [62]; d) dyszel z samoczynnym powrotem do pozycji pionowej [63]

W układach z dyszlem zamocowanym z przodu przyczepy lub w konfiguracji z podwójnym Ackermannem stosuje się zaczep zlokalizowany w tylnej części holownika. Natomiast w pociągach logistycznych z układem skrętnym odwróconego dyszla, w tylnej części ciągnika montowany jest dyszel. Występują zarówno proste mechanizmy sprzęgające (rys. 1.7a-b), jak i konstrukcje samoblokujące się, ułatwiające szybkie

połączenie jednostek (rys. 1.7c). Często stosowany jest dyszel z mechanizmem sprężynowym, który samoczynnie ustawia go w pozycji pionowej po odłączeniu od holownika (rys. 1.7d). Tego typu rozwiązania znacząco przyspieszają obsługę i zwiększają ergonomię pracy operatora [62–65].

1.3.3 Budowa wózków logistycznych

Konstrukcja wózków logistycznych zależy w dużej mierze od zastosowanego układu skrętnego, wpływającego zarówno na typ i liczbę kół, jak i sposób ich połączenia z pozostałymi jednostkami zestawu (np. za pomocą zaczepu lub dyszla). Niniejszy podrozdział koncentruje się na klasyfikacji oraz ogólnej charakterystyce konstrukcyjnej wózków, natomiast szczegółowe informacje dotyczące układów skrętnych omówiono w podrozdziale 1.4.

Z perspektywy konstrukcyjnej wózki logistyczne można sklasyfikować według trzech podstawowych koncepcji [66, 67]:

- koncepcja przyczepy (ang. *trailer concept*),
- koncepcja taksówki (ang. *taxi concept*),
- koncepcja przenośnika rolkowego (ang. *roller conveyor concept*).

Przykładowe rozwiązania tych koncepcji przedstawiono na rys. 1.8.



Rys. 1.8. Koncepcje wózków logistycznych: a) koncepcja przyczepy; b) koncepcja taksówki [68]; c) koncepcja przenośnika rolkowego [69]

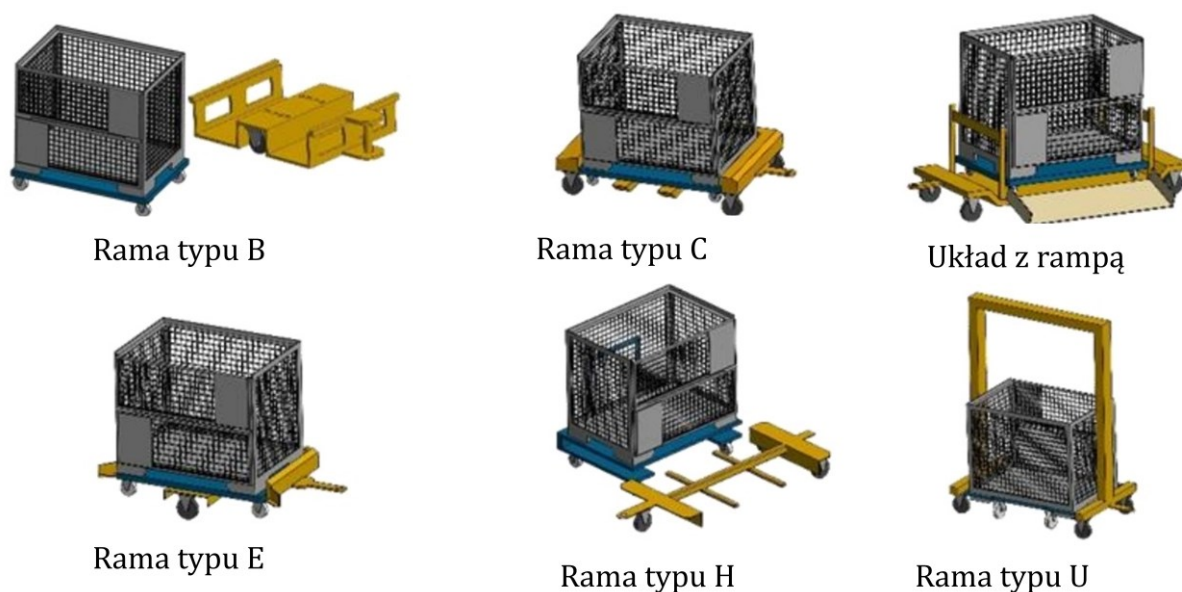
Koncepcja przyczepy

Wózki zgodne z koncepcją przyczepy są rozwiązaniami minimalistycznymi, które zbudowane są z podstawowych elementów, takich jak rama nośna, prowadniki oraz zestaw kół (rys. 1.8a). Ładunek w tym przypadku umieszczany jest bezpośrednio na ramie nośnej, co przekłada się na niskie koszty produkcji wózka, ale również na ograniczoną funkcjonalność. Przewóz ładunków odbywa się zazwyczaj na paletach. Taka konstrukcja znacząco utrudnia operacje załadunku i rozładunku – wymagany jest udział dodatkowego sprzętu (wózek widłowy lub paletowy). Co więcej, pozycjonowanie wózka

względem punktu przeładunkowego może wymagać dodatkowego manewrowania, co przekłada się na spadek wydajności operacyjnej i wzrost kosztów [32, 65–67].

Koncepcja taksówki

Wózki zgodne z koncepcją taksówki umożliwiają transport ładunków za pomocą wymiennych platform ładunkowych posiadających własne koła jezdne (rys. 1.8b). Celem tego rozwiązania jest znaczne uproszczenie i przyspieszenie operacji załadunku oraz rozładunku. W momencie dostawy możliwa jest szybka wymiana platformy: operator odstawia platformę z materiałami przy stanowisku roboczym i w jej miejsce zabiera pustą lub załadowaną platformę zwrotną. Krótki czas wymiany platformy pozwala na skrócenie postoju pociągu przy stanowisku roboczym, co zwiększa ogólną efektywność transportu. Platformy można rozładować również klasycznym wózkiem widłowym lub paletowym, z tą różnicą, że dzięki odseparowaniu platformy od samego wózka logistycznego możliwe jest precyzyjniejsze pozycjonowanie jednostki względem punktu odbioru. W zależności od rodzaju geometrii ramy wózka (rys. 1.9), możliwy jest jedno- lub dwustronny załadunek i rozładunek. Platformy mogą być wypychane, wciągane lub wysuwane, a mechanizmy ich obsługi mogą mieć charakter manualny, mechaniczny, pneumatyczny, hydrauliczny lub elektryczny – w zależności od specyfiki systemu i wymagań użytkownika [66, 67].



Rys. 1.9. Przykładowe idee rozwiązań wózków logistycznych typu *taxi* (opracowanie własne na podstawie [67])

Koncepcja przenośnika rolkowego

Trzecia z podstawowych koncepcji zakłada montaż przenośników rolkowych bezpośrednio na konstrukcji wózka (rys. 1.8c). Ładunki są w takim układzie przemieszczane z pomocą rolek, co znacząco ułatwia ich automatyczny lub półautomatyczny transfer pomiędzy wózkiem a stacją docelową, np. linią montażową. Rozwiązanie to znajduje zastosowanie głównie w zautomatyzowanych środowiskach produkcyjnych, gdzie istotna jest szybka i bezobsługowa wymiana ładunków [21, 57, 66, 67].

W praktyce przemysłowej spotykane są także rozwiązania hybrydowe, będące połączeniem kilku powyższych koncepcji, a także jednostki nietypowe, które są projektowane indywidualnie pod kątem konkretnych zastosowań. Producenci nieustannie rozwijają konstrukcje wózków logistycznych, wprowadzając modyfikacje zwiększające ich funkcjonalność, ergonomię i bezpieczeństwo użytkowania. Wiele czynników wpływa na konstrukcję wózków logistycznych, warunkując m.in. ich wymiary, dopuszczalne obciążenie oraz możliwość wyposażenia w dodatkowe funkcje, takie jak osłony chroniące przed warunkami atmosferycznymi, systemy oświetleniowe, sygnalizacyjne czy elementy pozycjonujące [21, 57, 65–67, 69–77].

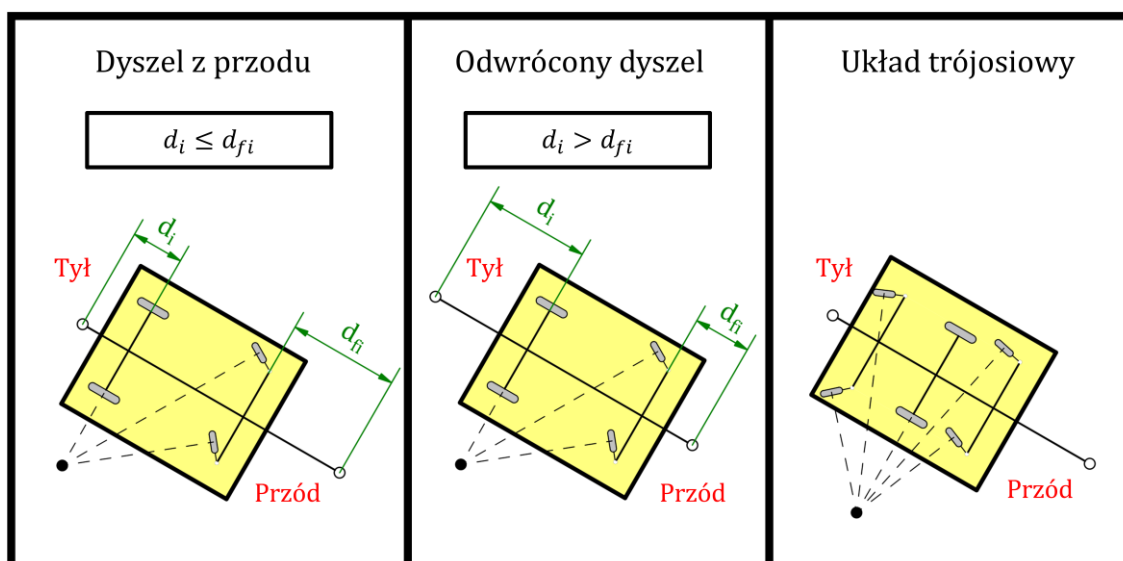
1.4 Układy skrętne wózków logistycznych

Istnieje wiele rodzajów układów skrętnych stosowanych w wózkach logistycznych. Najczęściej spotykane są układy z nieruchomymi osiami, bazujące na połączeniu jednostek za pomocą dyszla. Dyszel może być stały lub ruchomy. Stały dyszel jest przymocowany do wózka w sposób uniemożliwiający jego obrót w płaszczyźnie poziomej. W przypadku dyszla ruchomego, jego kąt względem wózka może się zmieniać. Określenie „nieruchoma oś” oznacza, że położenie osi względem ramy wózka pozostaje stałe w trakcie ruchu. Do osi tej mogą być przymocowane różne typy kół, zarówno stałe, jak i skrętne. W systemach intralogistycznych występują również inne rozwiązania, takie jak układy dyszlowe z ruchomymi osiami oraz układy bezdyszlowe, choć są one rzadziej stosowane [10–12, 66, 67]. Do najczęściej spotykanych układów skrętnych w wózkach logistycznych należą: dyszel z przodu, odwrócony dyszel, układ trójosiowy oraz układ podwójnego Ackermanna [11, 12].

Ze względu na prostotę budowy i niski koszt produkcji, układy ze stałym dyszlem należą do najczęściej stosowanych w praktyce. Najprostszy z nich składa się z ramy nośnej

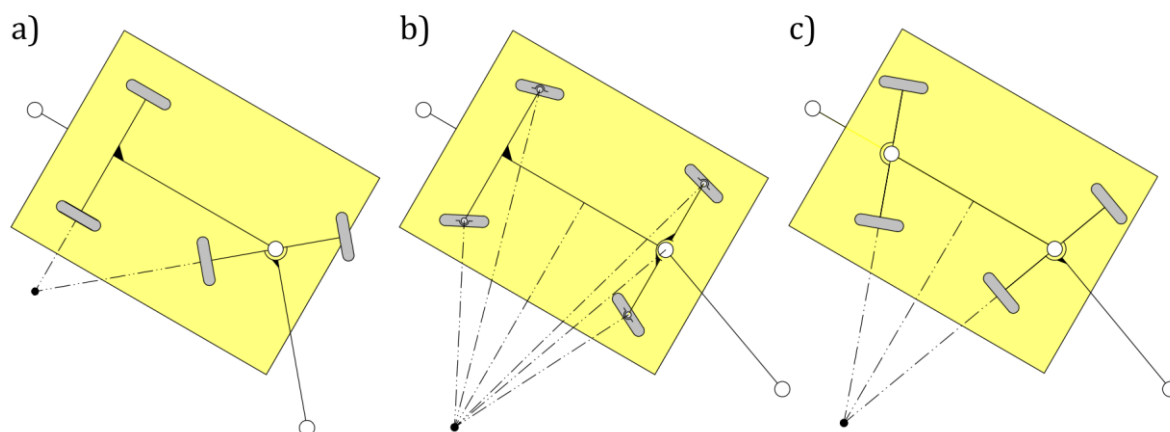
wózka, dyszla, zaczepu, dwóch kół stałych i kół swobodnie skrętnych. Do najpopularniejszych układów należą: dyszel z przodu, odwrócony dyszel oraz układ trójosiowy. Zostały one przedstawione na rysunku 1.10. Cechy wspólne tych konfiguracji to dwa koła stałe zamontowane na jednej osi, występowanie kół swobodnie skrętnych oraz połączenie jednostek przy pomocy stałego dyszla i zaczepu. Różnice pomiędzy poszczególnymi układami wynikają z rozmieszczenia kół i usytuowania dyszla oraz zaczepu [10, 25, 78, 79].

Klasycznym rozwiązaniem do łączenia wózków ze sobą jest układ dyszla z przodu, w którym dyszel umieszczony jest w przedniej części wózka, a zaczep stanowiący mocowanie dla kolejnych jednostek znajduje się z tyłu. Odwrotna sytuacja występuje w układzie odwróconego dyszla, gdzie dyszel znajduje się w tylnej części wózka i służy do podłączenia kolejnych jednostek, natomiast z przodu umieszczony jest zaczep, do którego podłączany jest dyszel wózka poprzedzającego. Zarówno w układzie dyszla z przodu, jak i w układzie odwróconego dyszla stosuje się dwa koła stałe na tylnej osi oraz dwa swobodnie skrętne na przedniej [12, 63]. Układ trójosiowy charakteryzuje się rozmieszczeniem dwóch kół stałych na osi środkowej oraz zastosowaniem kół swobodnie skrętnych na osi przedniej i tylnej. W zależności od konfiguracji, taki wózek może być wyposażony w cztery koła skrętne (dwa na przedniej i dwa na tylnej osi) lub dwa, jedno na każdej z tych osi. Układ ten dobrze sprawdza się podczas manewrowania, ponieważ jego chwilowy punkt obrotu pokrywa się ze środkową osią wózka, co ułatwia ręczne przestawianie jednostki [78, 80–82].



Rys. 1.10. Najpopularniejsze układy skrętne wózków logistycznych ze stałym dyszlem

Kolejną grupą układów skrętnych przyczep są konstrukcje ze skrętnym dyszlem (rys. 1.11). Jednym z podstawowych rozwiązań stosowanych w prostych przyczepach rolniczych i przemysłowych jest układ z kołami stałymi na tylnej osi oraz skrętnym dyszlem połączonym z przednią osią, która obraca się względem ramy pojazdu (rys. 1.11a) [83]. Bardziej złożoną konstrukcją jest układ podwójnego Ackermanna, w którym skrętny dyszel steruje ustawieniem kół lub całych osi skrętnych. Wyróżnia się dwa warianty tego rozwiązania: ze stałymi osiami (rys. 1.11b) oraz ze skrętnymi osiami (rys. 1.11c).



Rys. 1.11. Układy ze skrętnym dyszlem: a) przednia oś skrętna, tylna oś nieruchoma; b) podwójny Ackermann ze stałymi osiami i skrętnymi kołami; c) podwójny Ackermann ze skrętnymi osiami

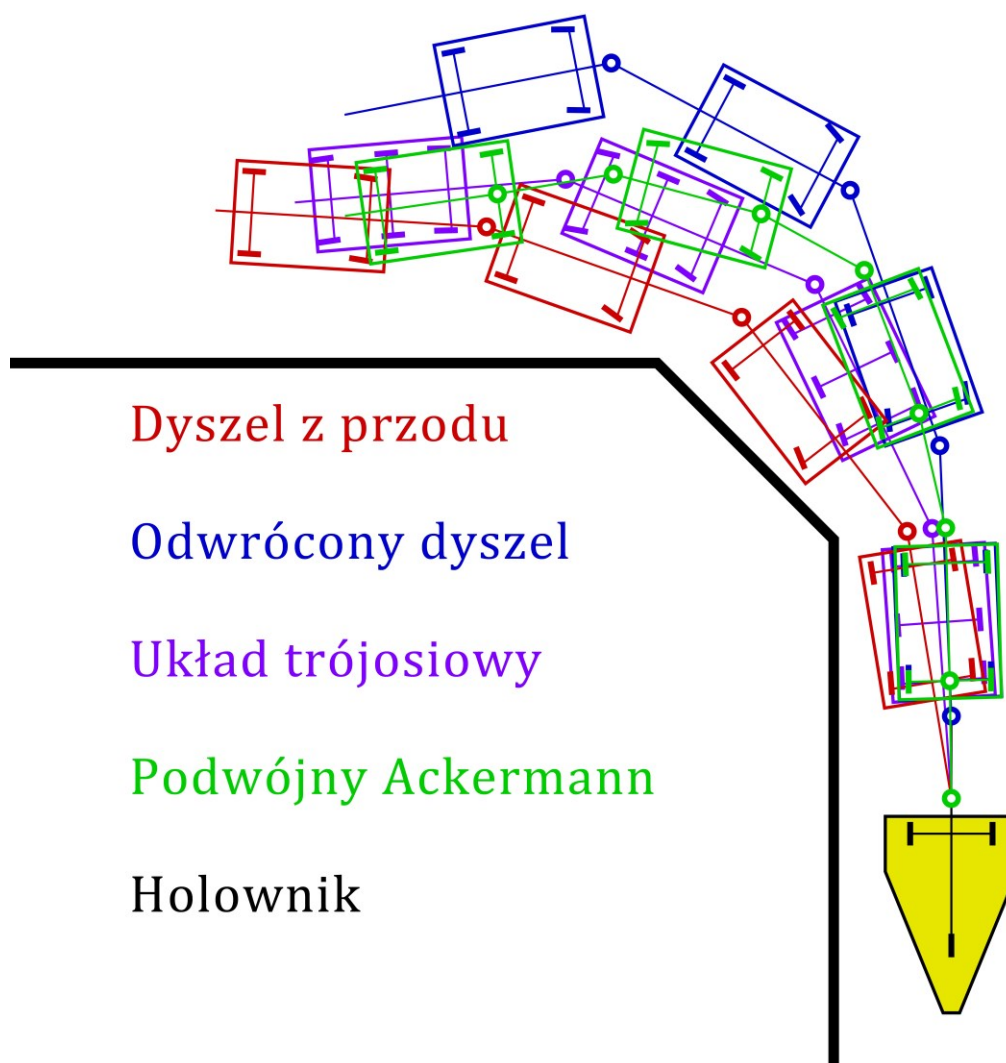
W układzie podwójnego Ackermanna ze stałymi osiami (rys. 1.11b) wózek posiada cztery koła skrętne, których kąty odchylenia są zależne od położenia kątownego dyszla. Model teoretyczny zakłada, że osie wszystkich kół przecinają się w jednym punkcie, stanowiącym chwilowy środek obrotu wózka. Jest to trudne do uzyskania w praktyce. W celu sprzężenia ze sobą skrętu kół na przedniej i tylnej osi stosuje się sterowanie elektryczne, hydrauliczne lub mechaniczne [10, 11, 84–90].

W przypadku układu podwójnego Ackermanna ze skrętnymi osiami (rys. 1.11c), podczas skrętu osie wszystkich kół przecinają się w jednym punkcie. W tym wariantcie trudność dotyczy synchronizacji skrętu tylnej osi względem przedniej. W idealnym przypadku chwilowy środek obrotu, do którego zbiegają się wszystkie osie, leży na prostej prostopadłej do wzdłużnej osi symetrii przechodzącej przez środek geometryczny wózka. W praktyce uzyskanie takiego efektu jest trudne, co powoduje, że pozycja środka obrotu zmienia się w zależności od kąta skrętu dyszla [10, 91].

Idealnym układem kinematycznym wózka logistycznego jest układ, który zapewnia: małą odległość między jednostkami, powtarzalność trajektorii przez kolejne wózki

w zestawie oraz niski koszt produkcji. Skrócenie odległości pomiędzy jednostkami można osiągnąć poprzez zastąpienie klasycznego dyszla mechanizmami zmniejszającymi odległość między wózkami, takimi jak mechanizm nożycowy [92], dyszel składany [93] lub inne unikalne rozwiązania [94, 95]. Pozwala to znacznie skrócić całkowitą długość pociągu logistycznego przy zachowaniu tej samej liczby wózków i tej samej ładowności. Mechanizmy te zazwyczaj poprawiają także manewrowość, dzięki czemu sprawdzają się szczególnie dobrze przy zawracaniu w wąskich korytarzach transportowych [92–95].

Zadawalającą powtarzalność trajektorii można uzyskać stosując układ podwójnego Ackermanna z odpowiednio dobranymi parametrami geometrycznymi [10–12]. Odchylenie trajektorii kolejnych wózków w układzie względem pierwszego wózka może być niwelowane poprzez zastosowanie mechanizmu przesuwne punktu sprzęgającego (ang. *sliding kingpin*). Zgodnie z tą techniką punkt sprzęgający przesuwa się w kierunku prostopadłym do osi wzdłużnej jednostki, do której przyłączona jest przyczepa [96, 97]. Na rysunku 1.12 przedstawiono porównanie przejazdów przez zakręt 90° pociągów logistycznych wyposażonych w przyczepy z najpopularniejszymi układami skrętnymi stosowanymi w intralogistyce. Porównanie to wykonano na podstawie własnego modelu kinematycznego opisanego w [12]. Parametry geometryczne wózków zostały tak dobrane, aby kontury zewnętrzne wszystkich zestawów pokrywały się, co zapewnia jednakową długość całkowitą pociągu logistycznego w każdym przypadku. Z analizy porównawczej wynika, że układ z dyszlem z przodu najintensywniej ścina zakręty, co znacząco utrudnia pokonywanie ciasnych łuków, szczególnie przy większej liczbie wózków. Odmiennie zachowuje się układ odwróconego dyszla, w którym wózki silnie naddają się względem toru ruchu, co ułatwia manewrowanie w ciasnych przestrzeniach. Należy jednak zwrócić uwagę, że zbyt duże naddawanie może prowadzić do ryzyka kolizji z otoczeniem. Układ trójosiowy stanowi kompromis, ogranicza zarówno zjawisko naddawania, jak i ścinania zakrętów. Największą powtarzalność trajektorii kolejnych jednostek zapewnia układ podwójnego Ackermanna. Warto podkreślić, że uzyskane trajektorie są silnie uzależnione od doboru parametrów geometrycznych układu, w szczególności długości dyszla i rozstawu osi wózka [11, 12, 25].



Rys. 1.12. Porównanie układów skrętnych wózków logistycznych podczas przejazdu pociągu logistycznego przez zakręt 90°, wykonane na podstawie modelu kinematycznego z [12]

1.5 Modelowanie kinematyczne wieloosłonowych pojazdów przegubowych

Kinematyka jest jedną z podstawowych dziedzin mechaniki klasycznej, zajmującą się badaniem ruchu bez uwzględnienia czynników fizycznych, które go wywołują. Celem analizy kinematycznej jest opisanie ruchu elementów mechanizmu oraz określenie zależności pomiędzy ich położeniem, prędkością i przyspieszeniem [98, 99].

Modele kinematyczne pojazdów odgrywają znaczącą rolę w projektowaniu oraz kontroli ruchu pojazdów. Są one również ważne w rozwoju systemów nawigacji i sterowania pojazdami autonomicznymi. Analizy kinematyczne są często stosowane w celu wyznaczenia trajektorii charakterystycznych punktów pojazdu oraz ich prędkości. Model kinematyczny pojazdu może być stosowany jako samodzielne narzędzie lub być częścią modelu dynamicznego zawierającego ograniczenia kinematyczne. Często również, analiza kinematyczna pojazdów jest stosowana do opracowania wyników

uzyskanych z symulacji modelu dynamicznego. W sytuacjach, gdy uwzględnienie zjawisk dynamicznych nie jest konieczne, model kinematyczny w wielu przypadkach jest wystarczającym narzędziem do analizy ruchu [98, 100, 101].

Pojazd składa się z wielu ruchomych podsystemów, takich jak koła czy układ zawieszenia, ale może być traktowany jako jedno ciało stałe poruszające się w inercjalnym układzie współrzędnych. W przypadku modeli kinematycznych, złożony pojazd upraszcza się do ciała sztywnego poruszającego się na kołach po płaszczyźnie poziomej [98]. Położenie pojazdu wielocłonowego można opisać za pomocą współrzędnych uogólnionych, których liczba N odpowiada liczbie stopni swobody układu. Można je zapisać w postaci wektora współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]^T. \quad (1.1)$$

Pojedynczy pojazd może być zdefiniowany za pomocą trzech współrzędnych, dwóch definiujących jego położenie (np. współrzędne x , y) oraz kąta odchylenia, który określa orientację wzdłuż osi pionowej, ortogonalnej do płaszczyzny, po której porusza się pojazd. W przypadku układu składającego się z ciągnika holującego liczbę n przyczep, poza trzema współrzędnymi uogólnionymi definiującymi pozycję ciągnika, konieczne są współrzędne opisujące pozycję przyczep. W przypadku przyczep z układem skrętnym stałego dyszla do opisu pozycji przyczep wystarczą kąty ich odchylenia od osi referencyjnej. W przypadku układu podwójnego Ackermanna konieczne są kąty odchylenia dyszli każdej przyczepy [11, 24, 102–108].

Model matematyczny pojazdu uznaje się za kinematyczny, jeśli pominięte zostają wszelkie siły wywołujące ruch, a jego opis oparty jest na więzach kinematycznych. Przy założeniu braku poślizgu, koła pojazdu podlegają ograniczeniom kinematycznym, które określają, w jaki sposób pojazd może się poruszać bez poślizgu. Z uwagi na fakt, że tych ograniczeń nie można sprowadzić do zależności opisujących bezpośrednio położenie, nazywa się je ograniczeniami nieholonomicznymi. Więzy nieholonomiczne ograniczają możliwości manewrowe pojazdu, ale nie uniemożliwiają dotarcia do dowolnego położenia w przestrzeni. Więzy te gwarantują, że poszczególne koło pojazdu nie przemieści się w kierunku poprzecznym (wzdłuż osi obrotu danego koła) [49, 109]. Więzy dla systemu składającego się z k ograniczeń kinematycznych można zapisać w formie ograniczeń Pfaffa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times N}$ jest macierzą ograniczeń systemu, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_N]^T$ jest wektorem prędkości uogólnionych [49, 109, 110].

W takich układach ruch pojazdu wynika z danych wejściowych, które są zwykle wyrażone w formie położenia lub prędkości lokalnego układu współrzędnych pojazdu względem układu odniesienia. Często stosowanym podejściem jest bezpośrednie zadawanie prędkości kątowych kół napędzanych oraz kąta skrętu koła sterowanego (jeśli takie koło występuje w układzie). Następnie, z uwzględnieniem układu kinematycznego pojazdu, prędkości kątowe kół przeliczane są na prędkość liniową i kątową jednostki [103, 111].

Klasyczne podejście budowania modelu kinematycznego polega na opisanu układu zgodnie z głównym równaniem prędkości:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \quad (1.3)$$

gdzie: $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^K$ jest wektorem prędkości wejściowych, gdzie $K = N - k$, $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times K}$ jest macierzą transformacji prędkości. Równanie 1.3 wiąże dane wejściowe zawarte w wektorze prędkości $\mathbf{u}$ z prędkościami uogólnionymi wyrażonymi w formie wektora $\dot{\mathbf{q}}$. Elementami wektora $\mathbf{u}$ pojazdu z napędem różnicowym na tylną oś najczęściej są: prędkość liniowa środka tylnej osi wzdłuż osi pojazdu oraz prędkość kątowa pojazdu względem środka tylnej osi lub prędkości kątowe kół. W przypadku pojazdu trójkołowego ze sterowanym skrętnym przednim kołem, jedną z prędkości wejściowych jest zwykle prędkość kątowa skrętu tego koła. Drugą prędkością wejściową może być prędkość liniowa środka tylnej osi wzdłuż osi pojazdu lub prędkość kątowa obrotu przedniego koła. W pierwszym wariantcie, gdy drugą wielkością sterującą jest prędkość liniowa tylnej osi, występuje osobliwość dla kąta skrętu przedniego koła równego $\pm\pi/2$. W drugim wariantcie, gdy jako dane wejściowe stosuje się prędkość obrotową samego koła, taka osobliwość nie występuje [110, 112–114].

Równanie 1.3 przedstawia kinematyczny model ruchu układu. W związku z tym można zapisać następującą zależność, wynikającą z własności naturalnego dopełnienia ortogonalnego:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Elementy macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, można wyznaczyć poprzez rozwiązanie układu równań reprezentowanego przez równanie macierzowe 1.4 oraz zależności wiążące elementy wektora $\mathbf{u}$ z prędkościami uogólnionymi jednostki napędowej [49, 98, 115].

Omówiony wcześniej klasyczny model kinematyczny bazuje na prędkościach. Zarówno dane wejściowe, jak i zależności wyrażone są w tej postaci, co wymaga rozwiązywania układu równań różniczkowych w celu wyznaczenia położenia pojazdu. W pracy [12] autorzy zaproponowali alternatywny iteracyjny model kinematyczny pociągu logistycznego, bazujący na położeniach, z pominięciem prędkości. Dzięki temu możliwe jest wyznaczanie pozycji pojazdu bez konieczności rozwiązywania równań różniczkowych. Procedura obliczeniowa algorytmu wykonywana jest iteracyjnie. Dokładność ruchu jest zależna od częstotliwości kroków czasowych. W każdej iteracji nowa pozycja ciągnika inicjuje przemieszczenie kolejnych wózków w zestawie. Wyznaczanie pozycji wózka rozpoczyna się od jednostki bezpośrednio połączonej z ciągnikiem i kontynuowane jest dla kolejnych przyczep. W pierwszym etapie wózek wykonuje obrót (bez translacji) wokół chwilowego środka obrotu, wynikającego z geometrii jego układu skrętnego. Obrót ten odbywa się w taki sposób, aby przedłużenie osi wózka przecinało punkt połączenia z jednostką poprzedzającą. Następnie wózek przemieszcza się wzdłuż swojej osi, aż do osiągnięcia pozycji umożliwiającej fizyczne połączenie z poprzednikiem (zaczep lub dyszel). Po przetworzeniu wszystkich jednostek zestawu iteracja kończy się wyznaczeniem nowej konfiguracji pociągu. Proces powtarza się cyklicznie w kolejnych krokach. W przypadku układu podwójnego Ackermanna dyszel skrętny traktowany jest jako odrębna jednostka. Jego obrót następuje względem punktu połączenia z jednostką, do której należy. Zadawanie danych wejściowych w formie położenia ciągnika może być problematyczne przy odwzorowaniu rzeczywistego przejazdu oraz implementacji układu sterowania np. umożliwiającego przejazd po zadanej ścieżce [12].

1.6 Modelowanie dynamiczne wielocłonowych pojazdów przegubowych

Modele dynamiczne umożliwiają w matematyczny sposób opisanie zachowania pojazdów podczas ruchu. Dynamikę pojazdu zazwyczaj projektuje się w oparciu o założenie, że sztywny pojazd zachowuje się podobnie do płaskiego obiektu poruszającego się po płaszczyźnie. Porusza się on w ruchu planarnym, zazwyczaj z trzema stopniami swobody [100, 101]. Modele dynamiczne pojazdów najczęściej budowane są w oparciu o mechanikę newtonowską i lagranżowską [113, 116, 117]. Zdecydowanie rzadziej stosowane są równania Hamiltona [118], metoda Kane’a [119] lub Gibbsa i Appella [120–122]. Modele dynamiczne mają zastosowanie w wielu dziedzinach, w tym:

robotach mobilnych [104, 112], samochodach osobowych [123], ciężarówkach [124], pojazdach rolniczych [125–127], samolotach [128], rekonstrukcjach wypadków [129], pojazdach autonomicznych [130, 131] oraz grach wyścigowych [132].

W modelowaniu dynamicznym pojazdów możliwe jest uwzględnianie możliwości występowania poślizgu, ale nie zawsze jest to konieczne. Jeśli pojazd porusza się na nawierzchni o dużej przyczepności oraz jego jazda nie jest agresywna, wtedy w modelu zazwyczaj stosuje się więzy nieholonomiczne, które ograniczają ruch każdego z kół pojazdu w kierunku poprzecznym (wzdłuż osi obrotu koła). Ograniczenia te nie wynikają z przyłożonych sił lub momentów blokujących ruch w określonym kierunku, tylko z równań kinematycznych bazujących na założeniu, że prędkość w kierunku poprzecznym musi być równa zero [133, 134]. Ograniczenia te są ściśle powiązane z koncepcją modelową Chaplygina, które stanowią uproszczony model pojazdu, reprezentowany przez sanie [135, 136].

W modelach dynamicznych z więzami nieholonomicznymi istotny wpływ na uzyskiwaną trajektorię ma układ kinematyczny pojazdu, moc napędowa, masa pojazdu i jego bezwładność. W przeciwieństwie do modelu kinematycznego, w modelu dynamicznym ruch pojazdu wynika z działania zadanych sił i/lub momentów. Najczęściej są to momenty obrotowe zadawane na koła napędowe. W przypadku kół skrętnych sterowanych możliwe jest zadawanie kąta skrętu bezpośrednio lub za pomocą prędkości kątowej. Głównym równaniem modelu dynamicznego N -wymiarowego układu mechanicznego z k ograniczeniami kinematycznymi jest:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (1.5)$$

gdzie: $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – lagranżian, $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times K}$ jest macierzą transformacji sił i momentów wejściowych, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^K$ jest wektorem sił i momentów wejściowych, $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times N}$ jest macierzą ograniczeń nieholonomicznych, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ jest wektorem mnożników Lagrange’a, $K = N - k$. Lagranżian $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jest różnicą pomiędzy energią kinetyczną $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, a energią potencjalną $U(\mathbf{q})$ układu:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}), \quad (1.6)$$

gdzie $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ jest macierzą bezwładności systemu. Model dynamiczny układu mechanicznego z więzami to:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

gdzie $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem sił odśrodkowych i Coriolisa, który można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T + \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (1.9)$$

Macierz transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ stanowi bazę przestrzeni zerowej macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, spełniającą zależność $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a można pomnożyć obie strony równania 1.7 przez $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$, co prowadzi do zredukowanego modelu dynamicznego:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})(\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}. \quad (1.10)$$

Zakładając, że $\det[\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})] \neq 0$, można połączyć układ K równań różniczkowych 1.10 z głównym równaniem prędkości modelu kinematycznego 1.3 uzyskując [110]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}_z^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}_z\boldsymbol{\tau} - \mathbf{M}_z^{-1}\mathbf{C}_z \end{cases}, \quad (1.11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_z &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{C}_z &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \\ \mathbf{B}_z &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

W przypadku uwzględnienia możliwości występowania poślizgu w dynamice Lagrange'a bazuje się na równaniu Lagrange'a II rodzaju, które w przypadku pominięcia energii dyssypacji można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad (1.13)$$

gdzie: $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = [Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_N]^T$ jest wektorem sił uogólnionych [137, 138]. Równanie 1.13 może również być zapisane w następującej postaci [25, 138]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}). \quad (1.14)$$

Elementy lewej strony równania 1.14 są takie same jak w przypadku modelu dynamicznego z ograniczeniami kinematycznymi. Prawa strona równania reprezentowana jest przez wektor sił uogólnionych, którego i -ty element można wyznaczyć w następujący sposób:

$$Q_i = \sum_j \hat{\mathbf{F}}_j \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_j}{\partial q_i}, \quad (1.15)$$

gdzie: $\hat{\mathbf{F}}_j$ jest wektorem siły rzeczywistej działającej na układ w układzie współrzędnych kartezjańskich, $\hat{\mathbf{r}}_j$ jest wektorem położenia punktu, w którym działa siła $\hat{\mathbf{F}}_j$.

W modelach dynamicznych pojazdów siły i momenty oddziałujące na układ mogą pochodzić z różnych źródeł. Najczęściej są to momenty napędowe generowane przez układ napędowy pojazdu (np. siła trakcyjna kół napędzanych), siły aerodynamiczne, siły kontaktowe wynikające z interakcji kół z nawierzchnią oraz siły oporów ruchu, takie jak tarcie toczne czy opory skrętu. W szczególności, siły kontaktowe między kołem a podłożem są modelowane na podstawie odpowiednio dobranych modeli tarcia, zarówno wzdłużnego, jak i poprzecznego. Dokładność odwzorowania tych sił ma kluczowe znaczenie dla jakości symulacji dynamiki oraz dla projektowania systemów sterowania [100, 101, 139].

W przypadku uwzględnienia dynamiki kół swobodnie skrętnych, klasyczne modele bazujące na więzach kinematycznych okazują się niewystarczające. Przykładem jest praca [140], w której zastosowano hybrydowy model dynamiczny do opisu zjawisk przejściowych między tarciem statycznym a poślizgiem dla nienapędzanych kół biernych.

1.7 Ujęcie interakcji koła z podłożem w modelach dynamicznych pojazdów

1.7.1 Siły kontaktowe w interakcji koła z podłożem

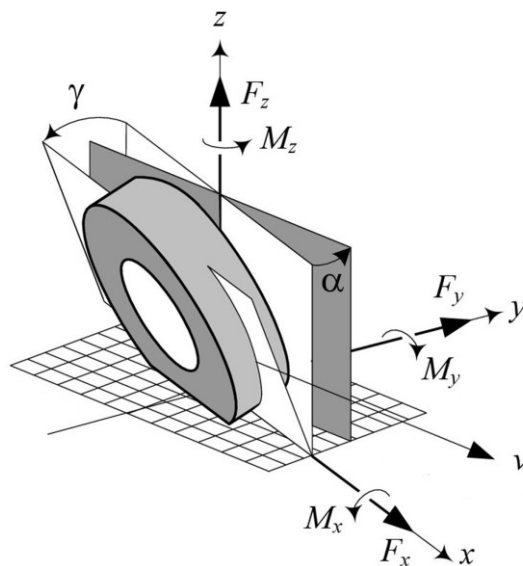
Tarcie jest zjawiskiem powszechnym w naturze, mającym kluczowe znaczenie dla funkcjonowania systemów mechanicznych. Może być zarówno pożądane, jak i niepożądane, w zależności od celu i procesu. Jest niezbędne w wielu aplikacjach, gdzie odpowiednio zarządzane pozwala na realizację specyficznych zadań.

W literaturze termin „opona” jest często utożsamiany z oponą pneumatyczną, jednak w kontekście niniejszej pracy pojęcie to odnosi się także do kół pełnych, wykonanych z litej gumy, poliuretanu lub innych tworzyw sztucznych, stosowanych m.in. w pojazdach przemysłowych. Mimo różnic konstrukcyjnych, zarówno opony pneumatyczne, jak i koła pełne realizują funkcję przekazywania sił między pojazdem a nawierzchnią, co pozwala na wspólne ich rozpatrywanie w modelach interakcji z podłożem.

Opona jest głównym elementem wchodzącym w interakcję z nawierzchnią. Osiągi pojazdu zależą w dużej mierze od jej charakterystyki. Wpływa ona na prowadzenie pojazdu, przyczepność, komfort jazdy oraz zużycie energii. Prawa Coulomba opisujące tarcie suche (technicznie suche) są elementarne, jednak w przypadku opon okazują się niedokładne lub niewystarczające w pewnych warunkach, co zauważył już Moore

[141] Powodem tego jest zachowanie gumy, czy innych mieszanek z tworzyw sztucznych, które nie zostały uwzględnione we wczesnych eksperymentach nad tarcie przeprowadzonych przez np. Coulomba, który badał tarcie materiałów takich jak m. in. szkło, drewno, metal. Zależność współczynnika tarcia od poślizgu jest jednym z kluczowych aspektów w modelach opon. Należy podkreślić, że to, co jest określane jako „model opony” odnosi się do modelu interakcji opona-podłoże [139].

Orientację opony można zdefiniować za pomocą dwóch kątów: kąt pochylenia koła γ oraz kąta znoszenia bocznego α , co zostało przedstawione na rysunku 1.13. Kąty te odnoszą się do układu współrzędnych (x, y, z) , w którym przedstawia się układ sił oddziaływujący na oponę w wyniku jej kontaktu z podłożem. Jest on zlokalizowany w centrum śladu opony. Oś z tego układu jest zawsze osią pionową (przy założeniu, że koło porusza się po idealnie płaskiej powierzchni), a osie x i y znajdują się na płaszczyźnie poziomej, na której znajduje się punkt styku koła z podłożem. Należy zauważyć, że układ (x, y, z) ma charakter lokalny i jest niezależny od globalnego układu odniesienia, w którym oznaczenia x , y służą do opisu położenia punktu charakterystycznego pojazdu.



Rys. 1.13. Układ sił i momentów działających na oponę (opracowano na podstawie [100])

W przypadku wystąpienia pochylenia koła oś z pozostaje w kierunku pionowym. Oś x reprezentuje kierunek wzdłużny koła, natomiast oś y reprezentuje kierunek poprzeczny (boczny) koła, który jest równoległy do osi koła. W związku z powyższym interakcja opony z podłożem generuje trójwymiarowy układ sił, obejmujący trzy siły i trzy momenty:

- siła normalna F_z – siła pionowa działająca prostopadle do powierzchni drogi; wynika z pionowego obciążenia koła, czyli ciężaru pojazdu oraz dynamicznych efektów związanych z przyspieszaniem, hamowaniem i pokonywaniem nierówności;
- siła wzdłużna F_x – działa wzdłuż osi x i odpowiada za przyspieszanie i hamowanie;
- siła poprzeczna F_y – działa stycznie do nawierzchni i ortogonalnie względem F_x oraz F_z ; odpowiada za stabilność boczną, szczególnie w zakrętach;
- moment przechyłu (ang. *roll moment*) M_x – działa wokół osi x i powoduje przechylanie opony w bok;
- moment skłonu (ang. *pitch moment*) M_y – wpływa na hamowanie i przyspieszanie; jego składowa jest wynikiem działania oporów toczenia;
- moment skrętu (ang. *yaw moment*) M_z – działa względem osi z i wpływa na zmianę kierunku ruchu pojazdu [100, 101].

1.7.2 Modelowanie oporów toczenia

Opór toczenia jest jednym z kluczowych czynników wpływających na dynamikę pojazdów. Jest to siła oporu, która powstaje w wyniku deformacji opony, co jest następstwem działania pionowej siły nacisku podczas toczenia się koła. Toczącą się pod obciążeniem pionowym oponę na płaskim podłożu charakteryzuje promień efektywny R_ω :

$$R_\omega = \frac{V_x}{\omega}, \quad (1.16)$$

gdzie: V_x jest prędkością liniową środka koła, a ω jest prędkością kątową koła. Wartość tego promienia mieści się w zakresie pomiędzy geometrycznym promieniem: nieobciążonej opony R_g i obciążonej opony R_h :

$$R_h < R_\omega < R_g. \quad (1.17)$$

W przybliżeniu wartość tego promienia może być określona w następujący sposób:

$$R_\omega \approx R_g - \frac{R_g - R_h}{3}. \quad (1.18)$$

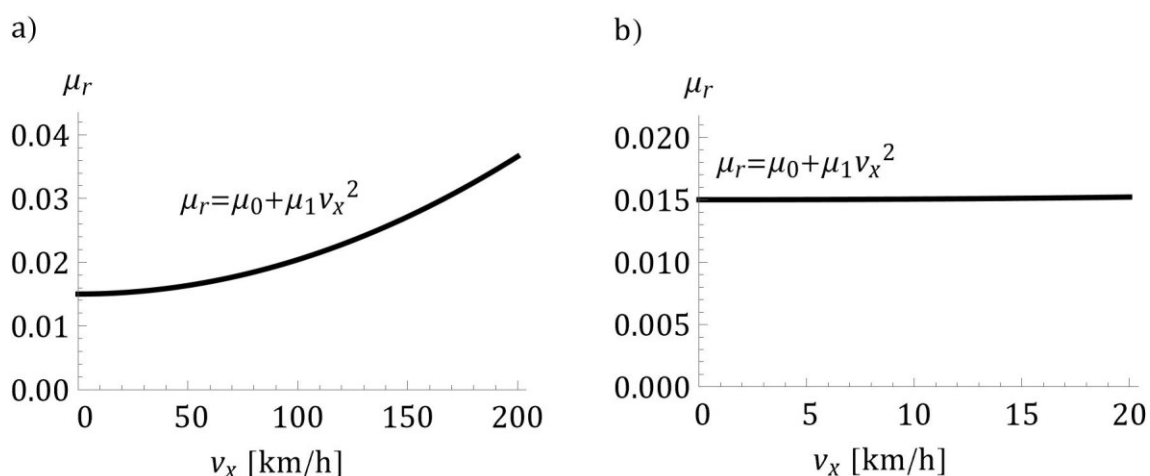
Obracająca się opona na podłożu generuje siłę wzdłużną zwaną oporem toczenia. Siła ta działa przeciwnie do kierunku ruchu toczącego się koła i jest proporcjonalna do siły normalnej F_z oddziałującej na oponę:

$$F_r = \mu_r F_z, \quad (1.19)$$

gdzie: μ_r – współczynnik tarcia tocznego. μ_r nie jest wielkością stałą - zależy on głównie od prędkości opony, ciśnienia powietrza (w przypadku opon pneumatycznych), znoszenia bocznego i kątów pochylenia kół. Jest on zależny również od właściwości mechanicznych, zużycia opony, temperatury, obciążenia, rozmiaru, siły napędowej/hamowania oraz stanu drogi. Wpływ prędkości na współczynnik tarcia tocznego może być uwzględniony w następujący sposób:

$$\mu_r = \mu_0 + \mu_1 v_x^2, \quad (1.20)$$

gdzie: współczynniki μ_0, μ_1 powinny być wyznaczone eksperymentalnie dla każdej opony [100]. Na rysunku 1.14 przedstawiono wpływ prędkości na współczynnik tarcia tocznego dla przykładowej opony przeznaczonej dla samochodów osobowych. W przypadku małych prędkości np. do 20 km/h można założyć, że współczynnik ten jest proporcjonalny do siły nacisku [100, 139]. Siła wynikająca z oporów toczenia jest niewielka w porównaniu z innymi siłami działającymi w obszarze styku opony z podłożem. Wartość siły oporu toczenia może się zmieniać nawet o 30% względem swojej średniej wartości w trakcie jednego pełnego obrotu koła. To zjawisko znacznie utrudnia wykonanie dokładnych pomiarów tej siły [139].



Rys. 1.14. Współczynnik tarcia tocznego dla przykładowej opony samochodu osobowego $\mu_0 = 0.015$ i $\mu_1 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2/\text{m}^2$: a) zakres prędkości 0-200 km/h; b) zakres prędkości 0-20 km/h

1.7.3 Modelowanie tarcia wzdłużnego

Modelowanie siły tarcia wzdłużnego F_x działającej na oponę odgrywa istotną rolę w określeniu dynamiki pojazdu. Jest to wyjątkowo trudne zadanie, dlatego stosuje się różne modele o różnych właściwościach. Nazywanie tej siły wzdłużną siłą tarcia może być mylące, ponieważ nie zależy ona tylko od samego tarcia, ale także od innych czynników, takich jak np. deformacja. W modelach opon zakłada się, że siła normalna F_z , oddziałująca na oponę, jest znana, np. w wyniku oszacowania lub pomiaru. Wtedy, jeśli opisana jest

funkcja współczynnika tarcia wzdłużnego $\mu_x(s)$ to siła tarcia wzdłużnego może być obliczona. W większości modeli współczynnik ten jest funkcją następujących czynników [100, 101]:

- siły normalnej F_z ,
- właściwości materiałów opony i podłoża oraz ich wzajemnego oddziaływania,
- prędkości pojazdu V_x oraz prędkości obrotowej koła ω .

Siła tarcia wzdłużnego F_x jest proporcjonalna do siły normalnej F_z :

$$F_x = \mu_x(s) \cdot F_z, \quad (1.21)$$

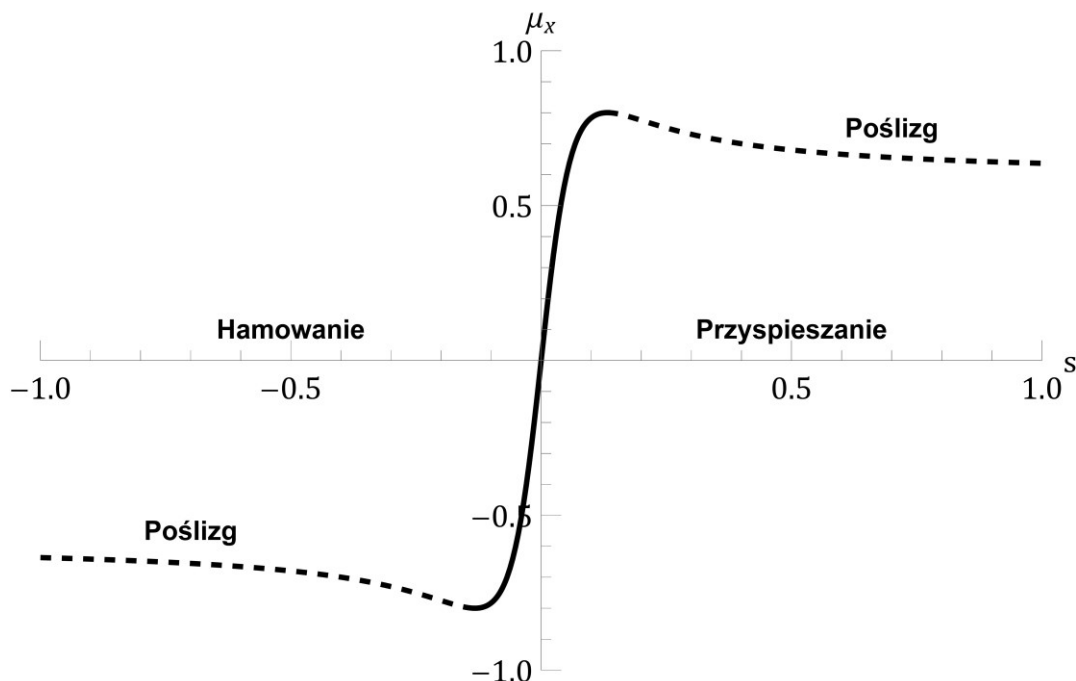
gdzie $\mu_x(s)$ jest współczynnikiem tarcia wzdłużnego będącym funkcją współczynnika poślizgu s (ang. *slip ratio*), jak przedstawiono na rysunku 1.15 [100, 101]. W przypadku hamowania i przyspieszania może wystąpić poślizg koła względem podłoża. Podczas toczenia bez poślizgu dla koła idealnego prędkość liniowa koła w punkcie styku koła z podłożem V_x jest równa iloczynowi promienia koła r i prędkości kątowej koła ω . Jeśli występuje poślizg to ta równość nie jest zachowana [139]. Współczynnik tarcia wzdłużnego μ_x może przyjmować wartości z przedziału od -1 do 1 . Współczynnik ten definiuje jest inaczej w przypadku hamowania i inaczej w przypadku przyspieszania:

$$s = \begin{cases} \frac{r \cdot \omega - V_x}{r \cdot \omega} & \text{Przyspieszanie: } r \cdot \omega > V_x \\ \frac{r \cdot \omega - V_x}{V_x} & \text{Hamowanie: } r \cdot \omega < V_x \end{cases}. \quad (1.22)$$

Jeśli wartość współczynnika poślizgu s jest równa 0 to oznacza to, że koło toczy się swobodnie i ma pełny kontakt z nawierzchnią. Jeśli natomiast jest równa -1 to koło jest całkowicie zablokowane i ślizga się po podłożu. Wartość 1 oznacza, że koło się obraca, mimo, że pojazd jest zatrzymany [142–144].

W najprostszych modelach opona jest modelowana tak, jakby w ogóle nie ulegała deformacji podczas hamowania. W tych modelach, zwanych statycznymi, efektywny współczynnik siły tarcia wzdłużnego μ_x zależy wyłącznie od aktualnych wartości F_z , V_x i ω . Jeśli tarcie wzdłużne pomiędzy podłożem a oponą jest modelowane dokładniej, deformacja nie może być już pomijana. Ponieważ opona jest wykonana z gumy, siła działająca na oponę od nawierzchni drogi powoduje jej deformację, co sprawia, że działa ona jak sprężyna. Fizycznie dodaje to do procesu dodatkowy stan deformacji opony, co sprawia, że μ_x nie może być określany wyłącznie na podstawie aktualnych zmierzonych wartości. Poprzez modelowanie lub oszacowanie stanu deformacji opony,

rzeczywistą wzdłużną siłę tarcia można obliczyć na podstawie tych samych parametrów, które są użyte w modelach statycznych [145].



Rys. 1.15. Współczynnik tarcia wzdłużnego w funkcji współczynnika poślizgu s , podczas przyspieszania i hamowania

Istnieje wiele modeli opon pozwalających wyznaczyć siłę wzdłużną działającą na oponę w zależności od wartości współczynnika poślizgu. Większość z tych modeli jest zbyt skomplikowana, by mogła mieć zastosowanie w modelowaniu dynamicznym pojazdu. Jest jednak kilka z nich wystarczająco prostych i dokładnych, których aplikacja w modelach dynamicznych pojazdów jest sensowna. Wybór konkretnego modelu zależy od priorytetów i wymagań jakie stawiane są co do dokładności i maksymalnego czasu obliczeń. Stosowane modele w dynamice pojazdów można podzielić na dwie grupy: modele empiryczne i teoretyczne (analityczne). Teoretyczne skupiają się na dokładnym odwzorowaniu zachowania się opony na podstawie praw fizyki. Empiryczne natomiast bazują danych eksperymentalnych przeprowadzonych w warunkach laboratoryjnych. Podczas testów wyznaczana jest krzywa określająca zależność siły wzdłużnej od pozostałych parametrów wejściowych. Następnie dobierane są wartości parametrów dla funkcji siły wzdłużnej w taki sposób, by kształt krzywej uzyskanej z funkcji pokrył się z krzywą uzyskaną podczas eksperymentu. Najbardziej powszechnie stosowanym

modelem empirycznym jest model Pacejki (ang. *Magic Formula*), w którym siła wzdłużna działająca na oponę jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$F_x(s) = c_{1x} \sin(c_{2x} \arctan(c_{3x} \cdot s - c_{4x}(c_{3x} \cdot s - \arctan(c_{3x} \cdot s))))), \quad (1.23)$$

gdzie: $c_{1x} - c_{4x}$ są stałymi zależnymi od właściwości opony, s – poślizg wzdłużny opony [146]. Kolejnym przykładem modelu empirycznego jest model Burckhardta uwzględniający wpływ prędkości v_x :

$$F_x(s) = (c_{1x}(1 - e^{-c_{2x} \cdot s}) - c_{3x} \cdot s)e^{-c_{4x} \cdot v_x}, \quad (1.24)$$

oraz jego alternatywna wersja bazująca na trzech parametrach opony z pominięciem wpływu prędkości:

$$F_x(s) = c_{1x}(1 - e^{-c_{2x} \cdot s}) - c_{3x} \cdot s. \quad (1.25)$$

Kiencke i Daiss również opracowali model opony niezależny od prędkości, w którym zastosowano aproksymację funkcji wykładniczej:

$$F_x(s) = k_s \frac{s}{c_{1x}s^2 + c_{2x}s + 1}, \quad (1.26)$$

gdzie:

$$k_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x(s)}{\Delta s}. \quad (1.27)$$

Bezpośrednie użycie bardziej rozbudowanych modeli empirycznych pociąga za sobą wiele wad, czy też trudności, które sprawiają, że coraz częściej stosowane są modele uproszczone. Duże skomplikowanie nieliniowością oraz konieczność posiadania wartości dla wielu parametrów wiąże się z wykonaniem wielu badań eksperymentalnych, co jest sporą wadą tych modeli [144]. Jednym z przykładów modeli uproszczonych jest model de Wita z 2002 roku [100, 145]:

$$F_x(s) = c_{1x}\sqrt{s} - c_{2x} \cdot s. \quad (1.28)$$

Użyte stałe c_{ix} w modelach, które opisano równaniami 1.23, 1.24, 1.25, 1.26 oraz 1.28 tak naprawdę nie są niezmiennie. Są one silnie zależne od charakterystyki opony (np. mieszanki/materiału, kształtu opony, rodzaju bieżnika, głębokości bieżnika, ciśnienia powietrza, temperatury), od warunków drogowych (np. rodzaj nawierzchni) oraz warunków eksploatacji pojazdu (prędkość, obciążenie) [145].

Modele empiryczne są odpowiednie, gdy mamy do czynienia ze stanami ustalonymi dla prędkości liniowych i kątowych. W rzeczywistości dane eksperymentalne używane do walidacji krzywych tarcie-poślizg są uzyskiwane przy użyciu specjalistycznego sprzętu, który umożliwia niezależną modulację prędkości liniowej i kątowej, aby pokryć cały zakres poślizgu. Taka sytuacja rzadko ma miejsce w rzeczywistości, zwłaszcza gdy

pojazd przechodzi przez kolejne fazy przyspieszania i hamowania. Alternatywą dla tych modeli są modele dynamiczne opony o charakterze analitycznym, które próbują uchwycić przejściowe zachowanie sił kontaktowych opony z nawierzchnią przy zmiennych w czasie prędkościach. Modele te można ogólnie podzielić na modele skupione (ang. *lumped models*) lub rozłożone (ang. *distributed models*). Skupiony model tarcia zakłada punktowy kontakt tarcia opony z nawierzchnią. W rezultacie, matematyczny opis takiego modelu jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, które można łatwo rozwiązać przez całkowanie w czasie. Z kolei rozłożone modele tarcia zakładają istnienie obszaru kontaktu między oponą a nawierzchnią, z przypisanym rozkładem ciśnienia normalnego. Wynikiem tego jest równanie różniczkowe cząstkowe, które należy rozwiązać zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. W modelach tych kluczowe jest zjawisko relaksacji opony w którym siły tarcia nie osiągają natychmiastowo wartości wynikających z poślizgu, ale potrzebują pewnego czasu na osiągnięcie stanu równowagi. Jest to związane z odkształceniem materiału opony i jego powolnym powrotem do stanu równowagi po wprowadzeniu zmiany warunków jezdnych [145]. Przykładem modelu analitycznego jest model *LuGre*, który zakłada, że obszar kontaktu składa się z dużej liczby oddzielonych punktów kontaktowych, z których każdy działa jak sprężyna. Tarcie jest modelowane jako średnia siła odchylenia tych sprężyn, a punkty kontaktowe zaczynają się ślizgać, gdy odchylenie jest wystarczająco duże [147].

W przypadku pojazdów poruszających się wewnątrz budynków zazwyczaj stosuje się koła przemysłowe, które przeważnie nie są pneumatyczne i posiadają gładki bieżnik. W tym przypadku sensowne jest stosowanie uproszczonych modeli opon. Takie modele mogą wystarczyć do opisu zachowania opony na bardziej jednolitych powierzchniach, gdzie złożoność interakcji jest znacznie mniejsza. Przykładem modelu uproszczonego może być model proporcjonalnego nasycenia lub model bazujący na funkcji tangensa hiperbolicznego. W takich modelach zazwyczaj występują tylko dwa parametry: jeden sterujący nasyceniem, który odpowiada za stromość wzrostu siły, oraz drugi skalujący wartość maksymalną siły. Dzięki temu możliwe jest odwzorowanie charakterystyki siły zbliżonej do tej uzyskanej podczas eksperymentu, przy zachowaniu prostoty i niskiego kosztu obliczeniowego [100, 101, 144].

Niezależnie od typu modelu, jednym z największych wyzwań jest odzwierciedlenie realnych warunków, takich jak zużycie opony i niejednorodność nawierzchni, co może znacząco wpływać na zachowanie pojazdu. Zużycie opony zmienia jej właściwości, jak

przyczepność czy sztywność, a zróżnicowana tekstura nawierzchni sprawia, że modelowanie staje się jeszcze bardziej skomplikowane. Ujęcie tych zmiennych w symulacji stanowi duże wyzwanie, jako że rzeczywistość dynamiczna pojazdu może się znacząco różnić od zachowania modelowanego na podstawie statycznych lub nieaktualnych danych. Aby symulacje pozostały wiarygodne i precyzyjne, modele wymagają regularnej kalibracji i aktualizacji [144].

1.7.4 Modelowanie tarcia poprzecznego

Tarcie poprzeczne odgrywa kluczową rolę w dynamice pojazdów, szczególnie w kontekście sterowalności i stabilności. W przeciwieństwie do tarcia wzdłużnego, które odnosi się do interakcji między oponą a nawierzchnią w kierunku ruchu pojazdu, tarcie poprzeczne odnosi się do sił działających prostopadle do tego kierunku. Zrozumienie i modelowanie tarcia poprzecznego ma kluczowe znaczenie dla analizy zachowania pojazdu podczas zakrętów i dynamicznych manewrów.

Jeśli na toczące się koło działa siła boczna oraz kierunek płaszczyzny koła jest stały (w wyniku działania momentu) to pod wpływem siły bocznej wektor prędkości środka koła odchyli się w kierunku działania siły o kąt znoszenia bocznego, nazywany również kątem poślizgu (ang. *slip angle* lub *sideslip angle*). Kąt ten jest jednym z kluczowych parametrów opisujących zachowanie opony w kontekście tarcia poprzecznego. Jest to kąt między kierunkiem rzeczywistego ruchu koła, a kierunkiem, w którym koło jest skierowane. Kąt znoszenia bocznego wynika z deformacji opony pod wpływem sił bocznych i jest miarą stopnia poślizgu bocznego opony:

$$\alpha = \arctan (V_y/V_x), \quad (1.29)$$

gdzie: V_x – prędkość wzdłużna koła, V_y – prędkość boczna koła. Siła poprzeczna oddziałująca na koło w wyniku tarcia jest liniowa dla małych kątów poślizgu (zakres liniowy), jednak tempo wzrostu F_y maleje dla wyższych wartości tego kąta (zakres przejściowy), co zostało przedstawione na rysunku 1.16. Następnie siła boczna pozostaje stała lub nieznacznie spada, gdy kąt poślizgu osiąga wartość krytyczną, przy której opona ślizga się po drodze (zakres tarciový) [148]. Powszechnie zakłada się, że poprzeczna siła tarcia F_y jest proporcjonalna do kąta poślizgu α dla małych wartości tego kąta [100, 101]:

$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha, \quad (1.30)$$

gdzie: C_α jest współczynnikiem bocznego znoszenia opony:

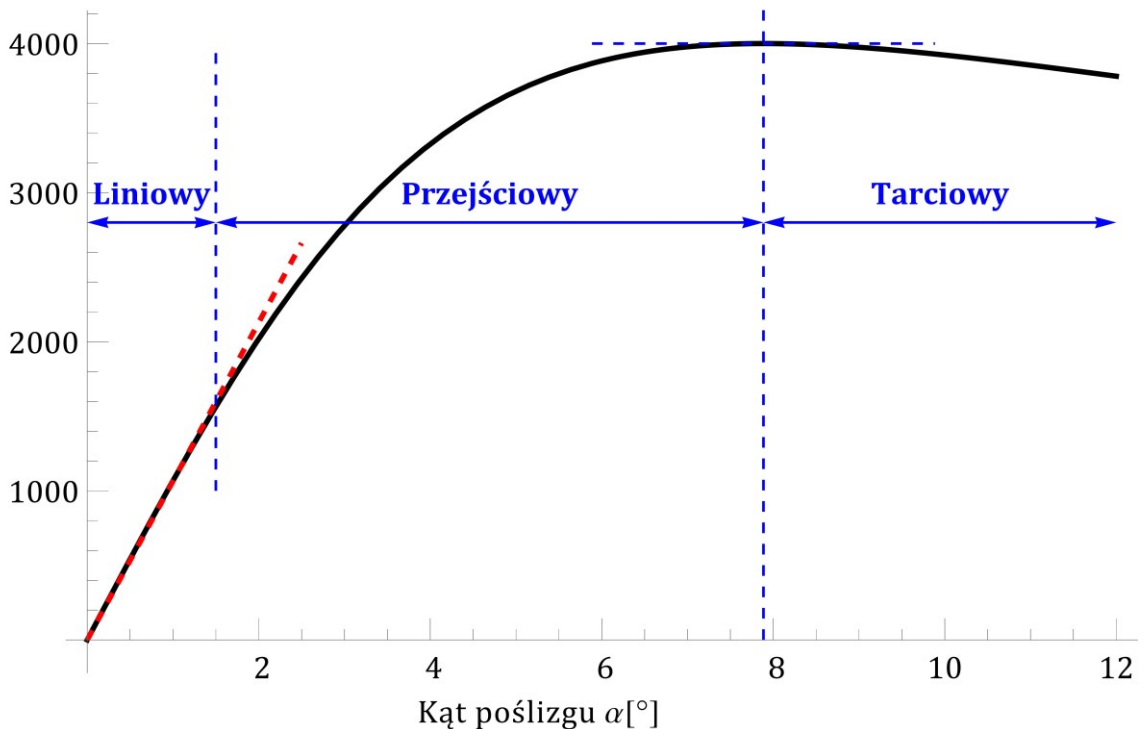
$$C_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial(F_y)}{\partial \alpha}. \quad (1.31)$$

Znak siły poprzecznej F_y wynika z przyjętej orientacji lokalnego układu odniesienia przy kole. W pracy zakłada się, że dodatni kąt poślizgu skutkuje siłą dodatnią względem osi y . Jeśli kąt znoszenia bocznego α nie jest mały, liniowa aproksymacja nie może być zastosowana do wyznaczenia siły poprzecznej. Wtedy można zastosować model proporcjonalnego nasycenia bazujący na funkcji odcinkowej składającej się z dwóch przedziałów, który zakłada, że siła poprzeczna tarcia rośnie liniowo w określonym przedziale kąta poślizgu, a po osiągnięciu maksymalnej wartości siły poprzecznej F_{yM} pozostaje stała:

$$F_y = \begin{cases} F_z \cdot C_\alpha \cdot \alpha & -\alpha_s \leq \alpha \leq \alpha_s \\ F_{yM} = F_z \cdot C_\alpha \cdot \alpha_s = F_z \cdot \mu_y & \alpha > \alpha_s \text{ lub } \alpha < -\alpha_s \end{cases} \quad (1.32)$$

gdzie: μ_y jest poprzecznym współczynnikiem tarcia opony, α_s jest wartością kąta poślizgu określającą nasycenie funkcji [100, 101].

Siła poprzeczna F_y [N]



Rys. 1.16. Przykładowa charakterystyka siły poprzecznej w zależności od kąta poślizgu (opracowanie własne na podstawie [148])

W celu wyeliminowania ostrego przejścia pomiędzy zakresem liniowym, a wartością stałą siły stosuje się nieliniowy model nasycenia, który zapewnia też lepsze odzwierciedlenie charakterystyki dla siły poprzecznej tarcia. W takich modelach stosuje się funkcję sigmoidalną, sinusoidalną, tangensa hiperbolicznego lub funkcję odwrotną tangensa

[25, 101]. Wielu badaczy [100, 101] wprowadziło różne matematyczne i przybliżone funkcje do modelowania siły poprzecznej F_y , opony jako funkcję kąta znoszenia bocznego α i siły nacisku F_z . Jednak żadna z tych funkcji nie jest w stanie dokładnie odzwierciedlić wszystkich zjawisk opony w każdych warunkach. Jest tak dlatego, że siła ta zależy od wielu innych parametrów, takich jak rozmiar i typ opony, prędkość pojazdu, obciążenie opony, ciśnienie w oponie, rodzaj i stan nawierzchni, temperatura otoczenia, wilgotność itp. W rezultacie, nawet przy utrzymaniu wszystkich parametrów stałych, tylko fizyczny pomiar może dokładnie wyrazić zależność siły tarcia poprzecznego od kąta poślizgu. Jednakże takie dane nie mogą być ponownie wykorzystane w innym eksperymencie, ponieważ praktycznie niemożliwe jest odtworzenie tych samych warunków. Najprostszą funkcją do celów kontrolnych są przybliżenia liniowe i proporcjonalne z nasyceniem, które są wystarczająco dokładne dla większości normalnych warunków jazdy [101]. W stosunku do modelu proporcjonalnego nasycenia dokładniejsze przybliżenie można uzyskać stosując model trójliniowy:

$$F_y = \begin{cases} F_z \cdot C_\alpha \cdot \alpha & \alpha \leq \alpha_1 \\ \frac{F_z \cdot C_\alpha \cdot \alpha_1 - F_{yM}}{\alpha_1 - \alpha_s} (\alpha - \alpha_1) + F_z \cdot C_\alpha \cdot \alpha_1 & -\alpha_1 < \alpha \leq \alpha_s, \\ F_{yM} & \alpha_s < \alpha \end{cases} \quad (1.33)$$

gdzie α_1 reprezentuje wartość kąta poślizgu, dla którego zmienia się współczynnik proporcjonalności [100, 101]. Jednym z modeli uproszczonych, który może zostać zastosowany do odwzorowania siły tarcia poprzecznego opony jest *cubic model*. Bazuje on na parabolicznym rozkładzie naprężeń normalnych na odcisku opony, co można zapisać w formie funkcji trzeciego stopnia [101]:

$$F_y = F_z \cdot C_\alpha \cdot \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_s} + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha_s} \right)^2 \right), \quad \text{dla } 0 < \alpha < \alpha_s. \quad (1.34)$$

Analogicznie jak w przypadku siły wzdłużnej, siłę poprzeczną można również wyznaczyć na podstawie modelu empirycznego Pacejki:

$$F_y = c_{1y} \sin \left(c_{2y} \arctan \left(c_{3y} \cdot \alpha - c_{4y} (c_{3y} \cdot \alpha - \arctan(c_{3y} \cdot \alpha)) \right) \right), \quad (1.35)$$

gdzie parametry c_{iy} są zależne od właściwości zastosowanej opony oraz warunków pracy, takich jak siła nacisku, rodzaj nawierzchni, prędkości i innych czynników eksploatacyjnych [146].

W przypadku opon pneumatycznych, wpływ na siłę poprzeczną działającą na oponę ma też kąt pochylenia koła γ (ang. *camber angle*). Jest on definiowany jako kąt pomiędzy

płaszczyzną symetrii koła, a pionem. W zależności od strony pochylenia może być dodatni lub ujemny. Siła poprzeczna wynikająca z pochylenia opony jest proporcjonalna do kąta pochylenia opony dla małych wartości tego kąta i zależy bezpośrednio od obciążenia koła. Uwzględniając kąt pochylenia koła γ siła poprzeczna oddziałująca na koło jest sumą: siły wynikającej z pochylenia opony oraz siły wynikającej z kąta znoszenia bocznego opony [100, 101]. Należy jednak zaznaczyć, że w przypadku kół przemysłowych wpływ kąta pochylenia jest pomijalny. Koła tego typu cechują się wysoką sztywnością, niskim profilem i niewielką podatnością na boczne odkształcenia, dlatego ten efekt nie jest uwzględniany w modelach ich tarcia bocznego. Ponadto, w przeciwieństwie do kół pojazdów z zawieszeniem, w rozwiązaniach przemysłowych koła są zazwyczaj montowane pionowo i nie posiadają kąta pochylenia wynikającego z geometrii konstrukcyjnej [139, 149].

W przypadku kół przemysłowych wykonanych z pełnej gumy lub poliuretanu, które wykazują mniejszą podatność na odkształcenia niż opony pneumatyczne, zastosowanie modeli uproszczonych jest w pełni uzasadnione. Modele bazujące na funkcjach nieliniowych, takich jak tangens hiperboliczny, funkcja sigmoidalna czy funkcje odwrotne tangensa, pozwalają na wystarczająco dokładne odwzorowanie charakterystyki siły bocznej w typowych warunkach jazdy. Przykłady takich podejść można znaleźć m.in. w [101, 149]. Rozwiązania te cechują się prostotą implementacyjną oraz niskim kosztem obliczeniowym, co czyni je szczególnie przydatnymi w zastosowaniach przemysłowych, np. dla pojazdów poruszających się wewnątrz hal produkcyjnych. W rezultacie, dla pojazdów z kołami przemysłowymi o gładkim bieżniku i dużej sztywności, modele oparte na prostych funkcjach nieliniowych stanowią praktyczny i wystarczający kompromis pomiędzy dokładnością a złożonością obliczeniową.

1.7.5 Tarcie w warunkach jednoczesnego poślizgu wzdłużnego i poprzecznego

Jeśli na oponę oddziałuje jednocześnie poślizg wzdłużny, kąt znoszenia bocznego α oraz ewentualnie kąt pochylenia γ , to powstające siły określa się mianem sił złożonych. Wśród nich istotna jest tzw. siła ścinająca, wynikająca z interakcji obu typów poślizgu. W warunkach małych wartości poślizgu i kąta znoszenia (zakres liniowy), siły wzdłużne i boczne można oszacować niezależnie, stosując zasadę superpozycji. Jednak w bardziej realistycznych warunkach, gdy pojazd porusza się dynamicznie, konieczne jest uwzględnienie efektu interakcji między poślizgiem wzdłużnym i poprzecznym, który

prowadzi do wzajemnego ograniczenia obu komponentów siły stycznej. W takich przypadkach stosuje się modele złożonego poślizgu, które ograniczają łączną wartość siły stycznej. Przykładem takiego modelu jest model eliptyczny:

$$\left(\frac{F_x}{F_{xM}}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_{yM}}\right)^2 = 1, \quad (1.36)$$

gdzie F_{xM} , F_{yM} to maksymalne wartości sił możliwe do osiągnięcia przy danym nacisku. Powyższe równanie opisuje graniczną krzywą, poza którą opona nie jest w stanie wygenerować większej siły kontaktowej. Jest to analogiczne do elipsy przyjmowanej jako ograniczenie możliwych sił kontaktowych. Model ten może być zastosowany do modyfikacji dowolnych sił bocznych i wzdłużnych, np. w nieliniowych modelach nasycenia [100, 101]. Do innych modeli umożliwiających opis sił tarcia przy poślizgu złożonym należą modele: Pacejki [146], TMeasy [150], rozszerzony LuGre [151] i Dugoff [152].

Zastosowanie odpowiedniego modelu zależy od wymagań dokładności, dostępności danych eksperymentalnych oraz obciążenia obliczeniowego. W przypadku modeli uproszczonych do sterowania lub szybkiej symulacji, model eliptyczny lub ograniczone wersje modelu Pacejki są często wystarczające [100, 101, 139].

1.7.6 Statyczny moment oporu skrętu

Stacyjny moment oporu skrętu (ang. *static steering torque*) odnosi się do momentu siły działającego na koło w stanie spoczynku lub przy bardzo małych prędkościach, kiedy nie występuje znaczące dynamiczne oddziaływanie związane z ruchem pojazdu. Moment ten jest generowany przez siłę styczną w punkcie kontaktu opony z podłożem podczas skręcania koła i prowadzi do powstawania oporu obrotu wokół osi pionowej [139, 153]. Zjawisko to występuje szczególnie wyraźnie w pojazdach z kołami skrętnymi bez przesunięcia geometrycznego (ang. *offset*), gdzie oś obrotu koła (pozioma) przecina się z osią skrętu (pionową). Wysoki opór skrętu może znacząco wpływać na wymagany moment obrotowy w układach kierowniczych. W pociągach logistycznych koła tego typu spotykane są m.in. w konstrukcjach z układem skrętnym podwójnego Ackermanna oraz w pojazdach z pojedynczym sterowanym skrętnym kołem z przodu [25, 154].

W dynamice pojazdów statyczny moment skręcający rzadko jest rozważany w modelach służących do wyznaczania ich trajektorii. Moment ten natomiast ma zastosowanie w analizie stabilności, projektowaniu układów kierowniczych

oraz w zaawansowanych systemach wspomagania kierowcy [139, 153]. Niektóre modele empiryczne umożliwiają oszacowanie statycznego momentu skrętu, jednak nie uwzględniają złożonych zjawisk, takich jak nieliniowy wzrost momentu przy dużych kątach skrętu. W [153] przedstawiono model fizyczny umożliwiający dokładniejsze wyznaczenie statycznego momentu skręcającego.

Rodzaj materiału opony oraz jej kształt ma kluczowy wpływ na wartość statycznego momentu skręcającego, co zostało pokazane w badaniu eksperymentalnym, w którym przetestowano dziewięć różnych kół przemysłowych w kontakcie z trzema różnymi podłożami. W stosunku do opon wykonanych z poliuretanu, opona gumowa generowała największe opory podczas skręcania [154].

1.8 Układy sterowania wielocłonowych pojazdów przegubowych

1.8.1 Modele i metody sterowania wielocłonowych pojazdów przegubowych

Wielocłonowe pojazdy przegubowe, które są szeroko stosowane w transporcie przemysłowym ze względu na dużą pojemność oraz elastyczność manewrową, stanowią jednocześnie duże wyzwanie w sterowaniu ze względu na ich nieliniową i częściowo niekontrolowaną dynamikę. Takie pojazdy, składające się z ciągnika i jednej lub więcej przyczep, wymagają zaawansowanych metod kontroli ruchu i trajektorii, aby zapewnić bezpieczny i efektywny transport. Z uwagi na złożoną dynamikę układu oraz brak bezpośredniego sterowania jednostkami holowanymi, nawet doświadczeni operatorzy mają trudności w przewidywaniu zachowania tylnych jednostek pojazdu, co wymusza uwzględnienie większego obszaru wymaganego do bezkolizyjnego poruszania się całego zestawu. W odpowiedzi na te ograniczenia opracowywane są autonomiczne systemy sterowania, których możliwości często przewyższają zdolności człowieka [155]. Badania nad systemami składającymi się z ciągnika holującego przyczepy rozciągają się na szeroki wachlarz dziedzin, obejmujących opracowywanie modeli kinematycznych i dynamicznych, analizę ich stabilności, a także doskonalenie precyzji mechanizmów kontroli śledzenia trajektorii. Te obszary badań są niezbędne do pełnego wykorzystania możliwości przegubowych pojazdów wielocłonowych oraz ich skutecznego wdrażania w wyznaczonych obszarach zastosowań [49, 109, 125, 155–157].

W teorii sterowania nadrzędnym celem jest zarządzanie ruchem systemów dynamicznych, co zwykle sprowadza się do dwóch głównych zadań: kontroli stabilizacji [49, 109] oraz kontroli śledzenia [158–162]. Kontrola stabilizacji koncentruje się

na zdolności systemu do osiągnięcia i utrzymania stanu równowagi. Celem jest zaprojektowanie praw sterowania, które zapewnią zbieżność stanów systemu do punktów równowagi, pomimo wszelkich zakłóceń lub nieodłącznych fluktuacji systemu. Ten rodzaj sterowania jest niezbędny w systemach, w których utrzymanie stanu ustalonego ma zasadnicze znaczenie dla stabilności operacyjnej i bezpieczeństwa [49, 109, 155]. Kontrola śledzenia natomiast dotyczy zdolności systemu do podążania za wcześniej zdefiniowaną trajektorią w czasie. Trajektoria ta reprezentuje pożądaną ścieżkę lub zestaw stanów, które system powinien osiągnąć w trakcie swojego działania [155].

By możliwe było śledzenie trajektorii, w pierwszej kolejności musi ona zostać zdefiniowana. W związku z tym system kontroli śledzenia pojazdu można podzielić na trzy etapy: planowanie trasy, generowanie trajektorii oraz śledzenie trajektorii [163]. Planowanie trasy jest procesem projektowania optymalnej ścieżki, którą pojazd powinien przejechać, aby dotrzeć z punktu startowego do punktu docelowego. Najistotniejszą informacją, jaka musi być znana przed planowaniem trasy jest położenie końcowe, do którego ma pojazd dojechać. Realizacja tego zadania może być wykonana poprzez: ruch z punktu do punktu, śledzenie ścieżki oraz śledzenie trajektorii [164, 165]. Ruch z punktu do punktu stosuje się, gdy celem jest osiągnięcie określonego punktu końcowego bez wyznaczania konkretnej trasy. W bardziej złożonych obszarach, poza samym celem, wprowadza się punkty pośrednie, które częściowo narzucają przebieg trasy [166]. W przypadku ruchu po zadanej trasie stosuje się śledzenie ścieżki, gdzie istotny jest jedynie tor ruchu, a nie pozycja pojazdu w czasie [167]. Jeśli pojazd ma podążać za określoną ścieżką z pozycją zależną od czasu, stosuje się śledzenie trajektorii [168]. W przypadku pojazdów z wieloma przyczepami trudno jest przewidzieć kolizję między przyczepami a otoczeniem, co wynika z trudności w oszacowaniu ich trajektorii. Przekłada się to na duże wyzwanie związane z planowaniem trasy takiego pojazdu [43, 169]. Określenie idealnej trajektorii ciągnika poprzez przeprowadzenie serii symulacji jest czasochłonne, a uzyskane wyniki nie zawsze są satysfakcjonujące [11, 12]. Dla systemów z wieloma przyczepami konieczne jest zaprojektowanie bardziej zaawansowanego systemu kontroli. Przykładem takiego rozwiązania jest algorytm sterowania, który minimalizuje odchylenie każdej przyczepy od zaplanowanej trajektorii, zapewniając lepszą kontrolę nad całym zestawem [13, 91, 170]. Aby znaleźć najlepszą trajektorię, można zastosować algorytm optymalizacyjny, który uwzględnia środowisko

składające się z korytarza transportowego, przeszkód drogowych i innych pojazdów [19, 171]. W systemach ciągnik-przyczepa przeznaczonych do jazdy wstecz kluczowe znaczenie ma sterowanie ostatnią przyczepą, co ułatwia poruszanie się takiego pojazdu przez wąskie korytarze i parkingi [131]. Jednym z podejść wspomagających tego typu manewry jest koncepcja pasywnego systemu asysty sterowania zaprezentowana w [172]. System ten, przeznaczony dla zestawów z dowolną liczbą przyczep, generuje sugestie dla kierowcy za pomocą prostego interfejsu graficznego, bez ingerencji w mechanizmy sterowania pojazdu. Na bieżąco wyznacza zalecaną trajektorię cofania i wskazuje kierowcy odpowiednie manewry kierownicą. Rozwiązanie to umożliwia efektywne wspomaganie trudnych manewrów parkingowych bez konieczności stosowania zaawansowanych układów wykonawczych. Algorytmy podejmowania decyzji dla zautomatyzowanych pojazdów wieloczęłonowych przegubowych są również badane w rzeczywistych sytuacjach ruchu drogowego [14, 48, 173, 174].

Jednym z nowoczesnych rozwiązań opracowanych z myślą o poprawie precyzji sterowania wieloczęłonowymi pojazdami przegubowymi jest podejście zaprezentowane w [83], w którym przedstawiono dynamiczny model ciągnika z uwzględnieniem rzeczywistych sił generowanych przez przyczepy. Siły te mierzone są za pomocą dwuosioowego czujnika siły zainstalowanego na połączeniu między ciągnikiem a pierwszą przyczepą. Na tej podstawie opracowano regulator śledzenia trajektorii, który kompensuje siły ciągnące i pchające w czasie rzeczywistym. Dodatkowo, model siły napędowej bazuje na aproksymacji za pomocą wielomianu piątego stopnia, którego parametry wyznaczono eksperymentalnie. Proponowane podejście nie wymaga znajomości parametrów dynamicznych przyczep ani ich aktualnych stanów. Skuteczność opracowanego rozwiązania potwierdzono w testach przeprowadzonych na pełnowymiarowym zestawie typu ciągnik z przyczepami w warunkach rzeczywistych, przy różnych liczbach i masach przyczep.

1.8.2 Metody sztucznej inteligencji w sterowaniu wieloczęłonowymi pojazdami przegubowymi

Metody sztucznej inteligencji, takie jak sztuczne sieci neuronowe (ANN) oraz algorytmy ewolucyjne, w tym genetyczne, znajdują szerokie zastosowanie w systemach sterowania pojazdów autonomicznych. Stosuje się je do realizacji złożonych zadań, takich jak nawigacja, planowanie ruchu, generowanie optymalnych trajektorii

czy unikanie kolizji z przeszkodami [175]. W systemach zawierających sztuczne sieci neuronowe pojazd uczy się strukturyzować przestrzeń wokół siebie, przetwarzając dane wejściowe pochodzące z czujników na sygnały sterujące układami napędowymi, w tym na momenty obrotowe lub prędkości kątowe kół. Testy takich systemów są prowadzone zarówno na rzeczywistych pojazdach, jak i na modelach kinematycznych lub dynamicznych w środowisku symulacyjnym [175, 176]. Metody sztucznej inteligencji znajdują również zastosowanie w zadaniach estymacji współczynnika poślizgu wzdłużnego opony (ang. *slip ratio*) [143] oraz autonomicznego utrzymania pojazdu w stanie kontrolowanego poślizgu [177, 178].

Układ sterowania pojazdem mobilnym, bazujący na sztucznej sieci neuronowej, umożliwiający realizację ruchu po optymalnej trajektorii opracowano w [175]. Metody te są stosowane nie tylko w prostych układach jednoczłonowych, ale również w pojazdach wieloczłonowych typu ciągnik z przyczepami. W pracy [176] zaproponowano adaptacyjne sterowanie zespołem pojazdów typu ciągnik z przyczepami z wykorzystaniem sztucznej sieci neuronowej, zapewniające skuteczne śledzenie trajektorii pojazdu lidera i kompensację niepewności modelu dynamicznego. Problem planowania trajektorii w środowiskach o ograniczonej przestrzeni podjęto w [179], gdzie opracowano metodę opartą na generatywnej sieci przeciwstawnej (GAN), umożliwiającą szybkie i dokładne wyznaczanie tras dla układu typu ciągnik–przyczepa w warunkach dużego zagęszczenia przeszkód. System planowania trajektorii dla zestawu składającego się z ciągnika i trzech przyczep, bazujący na algorytmie sztucznej sieci neuronowej, opracowano w [180], co umożliwiło efektywne generowanie tras z uwzględnieniem ograniczeń układu i przeszkód, przy zachowaniu wysokiej jakości ścieżek. Z kolei w pracy [181] zaprezentowano podejście do planowania trajektorii dla zespołu ciągnik–przyczepa oparte na uczeniu półnadzorowanym, ukierunkowane na minimalizowanie odchylenia od wyznaczonej trajektorii oraz unikanie kolizji w środowisku o ograniczonej przestrzeni.

W ostatnich latach szczególną uwagę poświęcono metodom, w których sztuczne sieci neuronowe są trenowane lub optymalizowane z wykorzystaniem algorytmów ewolucyjnych. Takie podejście określane jako neuroewolucja umożliwia automatyczne dostrajanie parametrów sieci na podstawie procesu selekcji i mutacji populacji rozwiązań w kolejnych pokoleniach. W pracy [182] przedstawiono przykład użycia algorytmu genetycznego do optymalizacji wag sieci neuronowej sterującej pojazdem w środowisku

tunelowym. Podobne podejścia stosowano również w zadaniach unikania przeszkód w czasie rzeczywistym [183]. W niniejszej rozprawie doktorskiej rozwinięto tę koncepcję, opracowując układ sterowania pociągiem logistycznym w środowisku symulacyjnym na mapie tunelowej, w którym parametry sieci neuronowej były optymalizowane za pomocą algorytmu ewolucyjnego. Wybrane wyniki tych badań, przedstawione również w publikacji [184], zostaną omówione w dalszej części pracy, w rozdziałach 5.2 i 6.5.

2. Geneza, cel i zakres pracy

2.1 Geneza podjęcia tematu pracy

Geneza podjęcia tematu niniejszej rozprawy doktorskiej wiąże się bezpośrednio z pracą magisterską autora, w której opracowano iteracyjny model kinematyczny pociągu logistycznego. Dotyczył on dwóch układów skrętnych przyczep: układu stałego dyszla oraz podwójnego Ackermanna. Wybrane wyniki tych badań zostały opublikowane w formie artykułu naukowego [12].

Temat pracy doktorskiej stanowi bezpośrednie rozwinięcie tej tematyki. W opracowanym wcześniej modelu kinematycznym występowały istotne ograniczenia w zakresie sterowania, wynikające z faktu, że opierał się on na położeniach, a nie prędkościach. W ramach niniejszej rozprawy opracowano wersję modelu bazującą na prędkościach, dostosowaną do potrzeb projektowania i testowania algorytmów sterowania, w tym regulatorów typu PID, służących do śledzenia zadanej trajektorii. Takie rozwiązanie jest lepiej przystosowane do zastosowań autonomicznych i symulacyjnych.

Inspirację do rozwinięcia zagadnień związanych z układami skrętnymi i automatyzacją sterowania stanowiły również prace badawczo-rozwojowe realizowane w ramach projektów: „Opracowanie nowego typu wózka logistycznego oraz metody bezkolizyjnej i bezblokadowej realizacji procesów intralogistyki” oraz „Opracowanie inteligentnego, zrobotyzowanego, samowyladowczego wózka logistycznego dla autonomicznego pociągu logistycznego”, prowadzonych w jednostce, do której należy autor.

Zainteresowanie tematem zostało dodatkowo wzmocnione doświadczeniem zawodowym autora w branży związanej z wdrażaniem pociągów logistycznych w transporcie wewnątrzzakładowym. W ramach realizowanych obowiązków autor analizował możliwość przejazdu pociągów logistycznych przez zadane korytarze transportowe w sposób bezkolizyjny. Symulacje kinematyczne pozwalały oszacować, czy dany układ geometryczny i liczba przyczep umożliwiają bezpieczne pokonanie trasy. W przypadkach, gdy przejazd okazywał się niemożliwy, rozważano modyfikacje liczby przyczep, zastosowanego układu skrętnego lub parametrów geometrycznych pojazdu.

Praktyka przemysłowa ujawniła również trudność zapewnienia powtarzalności skrajni ruchu pociągu logistycznego w przypadku ręcznego prowadzenia zestawu. Nawet niewielkie różnice w sposobie sterowania ciągnikiem prowadzą do znacznych odchylen toru ruchu ostatniej przyczepy. Im więcej przyczep w zestawie, tym większe są odchylenia

trajektorii. Zidentyfikowane problemy stały się podstawą do opracowania koncepcji neuroewolucyjnego algorytmu sterowania, bazującego na sztucznych sieciach neuronowych z globalną optymalizacją wag za pomocą algorytmu ewolucyjnego. Celem tego rozwiązania jest nauczanie sieci neuronowej sterowania pociągiem logistycznym w taki sposób, aby pojazd był w stanie samodzielnie poruszać się bezkolizyjnie w zamkniętym korytarzu transportowym, wyłącznie na podstawie danych z czujnika LiDAR zamontowanego na jednostce prowadzącej.

Dalszy rozwój modelu obejmował rozszerzenie o wybrane aspekty dynamiki ruchu. Szczególną uwagę poświęcono modelowaniu poślizgu poprzecznego, który może mieć istotne znaczenie przy jeździe z większą prędkością, zwłaszcza w przypadku przyczep nieobciążonych. Chociaż obecnie automatyczne pociągi logistyczne poruszają się z niewielkimi prędkościami, można oczekiwać, że wraz z postępującą automatyzacją systemów transportu wewnętrznego naturalnym kierunkiem rozwoju jest dążenie do zwiększania prędkości przejazdu.

Wkład własny autora obejmuje m.in. opracowanie modelu dynamicznego pociągu logistycznego z dowolną liczbą przyczep wyposażonych w układ skrętny podwójnego Ackermanna w wariancie ze stałymi osiami i skrętnymi kołami oraz, w przypadku układu z dyszlem stałym, uwzględnienie kół swobodnie skrętnych w zespołach z wieloma przyczepami, co dotychczas było pomijane w wielu modelach wielocłonowych pojazdów przegubowych. Ponadto zaprojektowano neuroewolucyjny algorytm sterowania pociągiem logistycznym w środowisku symulacyjnym, oparty na sztucznych sieciach neuronowych z globalną optymalizacją wag za pomocą algorytmu ewolucyjnego. Opracowano również alternatywną metodę wyznaczania macierzy transformacji prędkości, która, mimo większej złożoności formalnej, pozwala na znaczące skrócenie czasu obliczeń w porównaniu do podejścia konwencjonalnego.

2.2 Cel i zakres pracy

Celem rozprawy doktorskiej jest opracowanie wiarygodnego, potwierdzonego wynikami badań eksperymentalnych modelu matematycznego pociągu logistycznego uwzględniającego zjawiska dynamiczne występujące podczas jazdy.

Celem pracy jest również opracowanie algorytmu sterowania, który zapewnia bezkolizyjny przejazd pociągu logistycznego przez zamknięty korytarz transportowy,

przy wykorzystaniu wyłącznie danych pomiarowych ze skanera typu LiDAR zamontowanego na jednostce prowadzącej.

Celem utylitarnym pracy jest zastąpienie manualnego sterowania pociągiem logistycznym systemem sterowania umożliwiającym jego automatyczną jazdę w korytarzach transportowych.

Zakres rozprawy doktorskiej obejmuje:

- przegląd aktualnego stanu wiedzy dotyczącego modelowania kinematycznego, dynamicznego oraz sterowania wielocłonowych pojazdów przegubowych,
- opracowanie modelu kinematycznego pociągu logistycznego,
- opracowanie modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi pociągu logistycznego,
- opracowanie modelu dynamicznego uwzględniającego poślizg poprzeczny pociągu logistycznego,
- opracowanie rozszerzonego modelu dynamicznego pociągu logistycznego uwzględniającego poślizg poprzeczny, poślizg wzdłużny oraz opory toczenia,
- opracowanie algorytmu śledzenia trajektorii holownika pociągu logistycznego, przeznaczonego do realizacji przejazdów po zadanej trasie w środowisku symulacyjnym,
- opracowanie neuroewolucyjnego algorytmu sterowania pociągiem logistycznym w środowisku symulacyjnym, wykorzystującego sztuczne sieci neuronowe z globalną optymalizacją wag za pomocą algorytmu ewolucyjnego, umożliwiającego bezkolizyjny przejazd przez tunelowy korytarz transportowy,
- wykonanie badań symulacyjnych modelu kinematycznego porównujących przejazdy pociągu logistycznego z przyczepami z układem stałego dyszla oraz podwójnego Ackermanna,
- wykonanie badań symulacyjnych ukazujących wpływ kół swobodnie skrętnych na uzyskiwaną trajektorię,
- przeprowadzenie badań symulacyjnych ukazujących wpływ poślizgu poprzecznego w zależności od zastosowanego układu skrętnego przyczep, obciążenia przyczep, maksymalnego współczynnika tarcia poprzecznego,
- wykonanie badań symulacyjnych neuroewolucyjnego algorytmu sterowania EANN, mających na celu wytrenowanie sieci neuronowej sterującej pociągiem logistycznym do bezkolizyjnego przejazdu przez zamknięty korytarz

transportowy, na podstawie danych z czujnika LiDAR w środowisku symulacyjnym,

- przeprowadzenie badań eksperymentalnych pełnowymiarowego pociągu logistycznego wyposażonego w przyczepy z układem stałego dyszla (zarówno dyszel z przodu, jak i odwrócony dyszel), mających na celu walidację opracowanych modeli matematycznych pojazdu,
- sformułowanie wniosków na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych i eksperymentalnych.

Opracowanie modelu kinematycznego i każdego wariantu modelu dynamicznego obejmuje następujące warianty układów skrętnych holownika i przyczep:

- holownik z różnicowo napędzaną tylną osią (DDT), układ skrętny przyczep: stały dyszel (DFSS),
- holownik z różnicowo napędzaną tylną osią (DDT), układ skrętny przyczep: podwójny Ackermann w wariacie ze stałymi osiami i skrętnymi kołami (DASS),
- holownik ze sterowanym, napędzanym przednim kołem skrętnym (TTFS), układ skrętny przyczep: stały dyszel (FDSS),
- holownik ze sterowanym, napędzanym przednim kołem skrętnym (TTFS), układ skrętny przyczep: podwójny Ackermann w wariacie ze stałymi osiami i skrętnymi kołami (DASS).

Neuroewolucyjny algorytm sterowania pociągiem logistycznym, został opracowany dla modelu dynamicznego uwzględniającego poślizg poprzeczny. Konfiguracja pojazdu obejmuje holownik z różnicowo napędzaną tylną osią oraz cztery przyczepy z układem skrętnym stałego dyszla.

Przedstawiony zakres pracy odpowiada głównym celom rozprawy i stanowi podstawę przeprowadzonych badań symulacyjnych oraz eksperymentalnych.

3. Model kinematyczny pociągu logistycznego

3.1 Wprowadzenie do modelowania kinematycznego

Niniejszy rozdział poświęcony jest opracowaniu modelu kinematycznego N -wymiarowego układu mechanicznego z k ograniczeniami kinematycznymi reprezentowanego przez pociąg logistyczny składający się z ciągnika oraz liczby n przyczep. Zgodnie z przedstawionym zakresem pracy w podrozdziale 2.2, opisano model pociągu logistycznego w czterech wariantach: dla dwóch różnych układów skrętnych ciągnika (DDT – układ z napędzanymi różnicowo kołami tylnej osi oraz TTFS – układ trójkołowy z napędzanym i sterowanym przednim kołem) i dwóch różnych układów skrętnych przyczep (FDSS – przyczepa z układem ze stałym dyszlem oraz DASS – przyczepa z układem podwójnego Ackermanna w wariacie ze stałymi osiami i skrętnymi kołami). FDSS może reprezentować zarówno układ dyszla z przodu, jak i układ odwróconego dyszla. Zależy to od wartości parametrów geometrycznych przyczepy d_i oraz d_{fi} . Celem modelu jest umożliwienie przeprowadzenia symulacji ruchu pociągu logistycznego w środowisku wirtualnym. Analiza kinematyczna umożliwia wyznaczenie trajektorii wybranych punktów układu oraz dobór odpowiednich parametrów geometrycznych pociągu logistycznego spełniających określone założenia.

Opisywane w niniejszej pracy modele matematyczne bazują na dwuwymiarowym układzie współrzędnym, w którym kąty dodatnie odmierzone są od poziomu w kierunku zgodnym do ruchu wskazówek zegara, co przedstawiono na rysunku 3.1. Położenia i prędkości poszczególnych punktów opisywane są za pomocą macierzy obrotu, zdefiniowanej w następujący sposób:

$$\mathbf{R}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

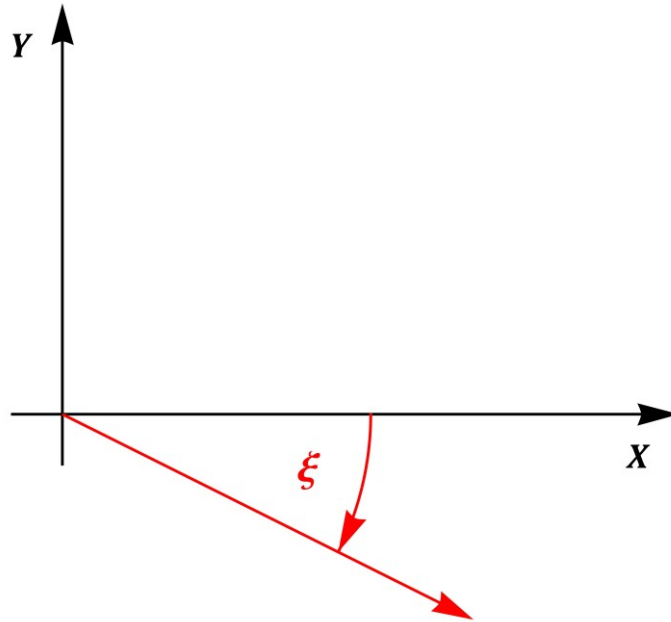
gdzie ξ oznacza kąt obrotu. Wektor współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}$ składa się z N współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]^T. \quad (3.2)$$

Podczas modelowania przyjęto następujące założenia:

- każdy komponent układu jest traktowany jako bryła sztywna,
- koła pojazdu są modelowane jako cienkie, sztywne dyski mające pojedynczy punkt kontaktu z powierzchnią ruchu,
- ruch pojazdu odbywa się w płaskim środowisku,
- koła pojazdu nie ulegają poślizgowi poprzecznemu,

- koła pojazdu toczą się bez poślizgu wzdłużnego,
- efekty dynamiczne, takie jak masa, moment bezwładności i siły oporów, nie są w tym etapie uwzględniane.



Rys. 3.1. Obrót wektora początkowo równoległego do osi x o kąt ξ zgodnie z kierunkiem obrotu wskazówek zegara

Opracowany model kinematyczny bazuje na głównym równaniu prędkości:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (3.3)$$

gdzie: $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ jest macierzą transformacji prędkości, a $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^K$ jest wektorem prędkości wejściowych, gdzie $K = N - k$. Macierz transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć w oparciu o zależność między współrzędnymi uogólnionymi holownika a prędkościami wejściowymi, a następnie uzupełnić na podstawie własności ortogonalnego dopełnienia przestrzeni ograniczeń nieholonomicznych:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.4)$$

gdzie $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ jest macierzą ograniczeń systemu. Ograniczenia nieholonomiczne można zapisać w formie wektora $\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k$, którego relacja względem macierzy ograniczeń nieholonomicznych prezentuje się następująco:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (3.5)$$

Macierz ograniczeń nieholonomicznych $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ można zatem zapisać jako:

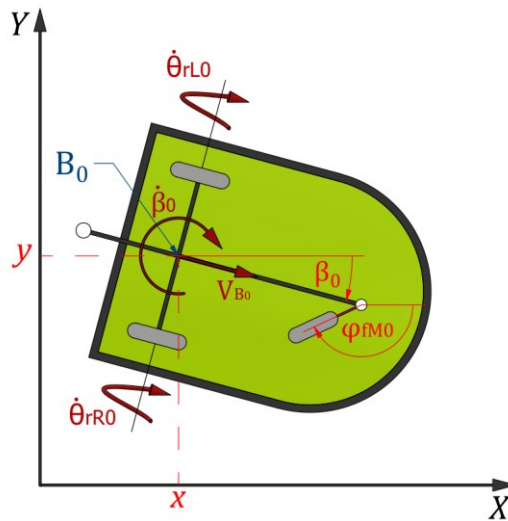
$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{z_1}}{\partial q_1} & \frac{\partial A_{z_1}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial A_{z_1}}{\partial q_N} \\ \frac{\partial A_{z_2}}{\partial q_1} & \frac{\partial A_{z_2}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial A_{z_2}}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{z_k}}{\partial q_1} & \frac{\partial A_{z_k}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial A_{z_k}}{\partial q_N} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

3.2 Model kinematyczny ciągnika

3.2.1 Ciągnik z napędzanymi różnicowo kołami tylnej osi (DDT)

Współzrędnymi uogólnionymi pozwalającymi opisać pozycję ciągnika są x i y , które opisują położenie punktu B_0 oraz kąt β_0 określający odchylenie ciągnika od osi x . Dodatkową współzrędną jest kąt skrętu przedniego koła swobodnie skrętnego φ_{fM0} . Ten kąt w niniejszym modelu traktowany jest jako współzrędną uogólnioną, ponieważ opisuje konfigurację układu, a jego wartość wynika z ograniczeń kinematycznych. Współzrędnne uogólnione zostały przedstawione na rysunku 3.2. W związku z tym wektor współzrędnych przyjmuje postać:

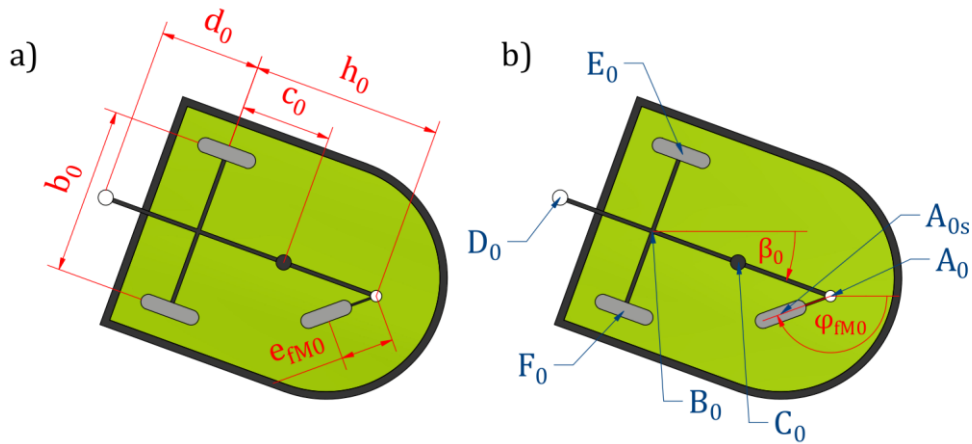
$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \beta_0 \quad \varphi_{fM0}]^T. \quad (3.7)$$



Rys. 3.2. Ciągnik (DDT) z oznaczonymi współzrędnymi uogólnionymi

Parametry geometryczne oraz punkty charakterystyczne DDT zostały przedstawione na rysunku 3.3. Położenia punktów charakterystycznych ciągnika można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{B_0} \\ y_{B_0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{D_0} \\ y_{D_0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_0) \begin{bmatrix} -d_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{A_0} \\ y_{A_0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{C_0} \\ y_{C_0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_0) \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{E_0} \\ y_{E_0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_0) \begin{bmatrix} 0 \\ b_0/2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{F_0} \\ y_{F_0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_0) \begin{bmatrix} 0 \\ -b_0/2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{A_{0s}} \\ y_{A_{0s}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{A_0} \\ y_{A_0} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\varphi_{fM0}) \begin{bmatrix} e_{fM0} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.8)$$



Rys. 3.3. Schemat kinematyczny holownika (DDT): a) parametry geometryczne; b) punkty charakterystyczne wraz oznaczeniem kątów

Wektor prędkości wejściowych $\mathbf{u}$ składa się z prędkości liniowej punktu B_0 wzdłuż osi ciągnika V_{B_0} oraz prędkości kątowej $\dot{\beta}_0$:

$$\mathbf{u} = [V_{B_0} \quad \dot{\beta}_0]^T. \quad (3.9)$$

Prędkości te zostały przedstawione na rysunku 3.2. W przypadku gdy danymi wejściowymi są prędkości kątowe kół osi tylnej to elementy wektora prędkości wejściowych należy wyznaczyć ze wzorów:

$$V_{B_0} = \frac{r_{r0}(\dot{\theta}_{rR0} + \dot{\theta}_{rL0})}{2}, \quad (3.10)$$

$$\dot{\beta}_0 = \frac{r_{r0}(\dot{\theta}_{rR0} - \dot{\theta}_{rL0})}{b_0}, \quad (3.11)$$

gdzie $\dot{\theta}_{rL0}$, $\dot{\theta}_{rR0}$ są prędkościami kątowymi kół ciągnika, r_{r0} jest promieniem tylnych kół ciągnika. Prędkości uogólnione $\dot{x}$, $\dot{y}$ można wyrazić przy pomocy prędkości liniowej V_{B_0} :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= V_{B_0} \cos(\beta_0) \\
 \dot{y} &= -V_{B_0} \sin(\beta_0)
 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ograniczenia systemu można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \sin(\beta_0) + \dot{y} \cos(\beta_0) \\ \dot{x}_{A_{0s}} \sin(\varphi_{fM0}) + \dot{y}_{A_{0s}} \cos(\varphi_{fM0}) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Zgodnie z równaniem 3.6 macierz ograniczeń systemu $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ można zapisać jako:

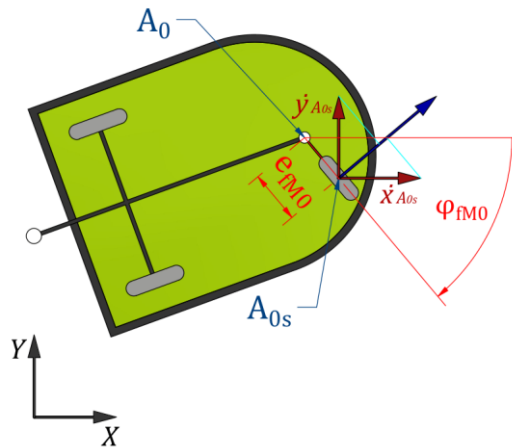
$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\beta_0) & \cos(\beta_0) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi_{fM0}) & \cos(\varphi_{fM0}) & -h_0 \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) & -e_{fM0} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Elementy macierzy transformacji prędkości można wyznaczyć z równań: 3.12 i 3.4 lub w sposób bezpośredni zapisać jako:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) & 0 \\ -\sin(\beta_0) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{fM0}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\varphi}_{fM0}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\varphi}_{fM0}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

gdzie $\dot{\varphi}_{fM0}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ jest funkcją prędkości kątowej $\dot{\varphi}_{fM0}$ wyznaczoną na podstawie rysunku 3.4. Funkcja ta jest wyznaczona na podstawie prędkości punktu A_{0s} . Składowa pozioma i pionowa prędkości tego punktu rzutowane są na kierunek prostopadły do odcinka $|A_0 A_{0s}|$. Zrzucona prędkość liniowa tworzy prędkość kątową $\dot{\varphi}_{fM0}$ na ramieniu e_{fM0} , którą można zapisać jako funkcję prędkości uogólnionych $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$:

$$\dot{\varphi}_{fM0}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) = - \frac{\frac{\partial x_{A_{0s}}}{\partial t} \sin(\varphi_{fM0}) + \frac{\partial y_{A_{0s}}}{\partial t} \cos(\varphi_{fM0})}{e_{fM0}}. \quad (3.16)$$



Rys. 3.4. Rzutowanie prędkości punktu A_{0s} na kierunek prostopadły względem odcinka $|A_0 A_{0s}|$

Po podstawieniu i uproszczeniu macierz transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ przyjmuje postać:

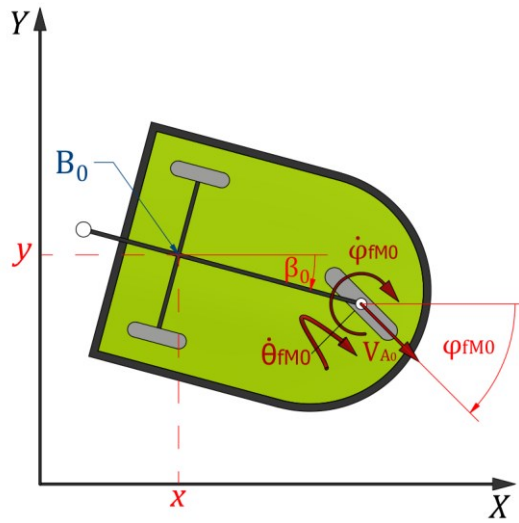
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) & 0 \\ -\sin(\beta_0) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{e_{fM0}} & -\frac{h_0 \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{e_{fM0}} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

3.2.2 Ciągnik z napędzanym i sterowanym skrętnym przednim kołem (TTFS)

Wektor współrzędnych przyjmuje taką samą postać, jak w przypadku DDT:

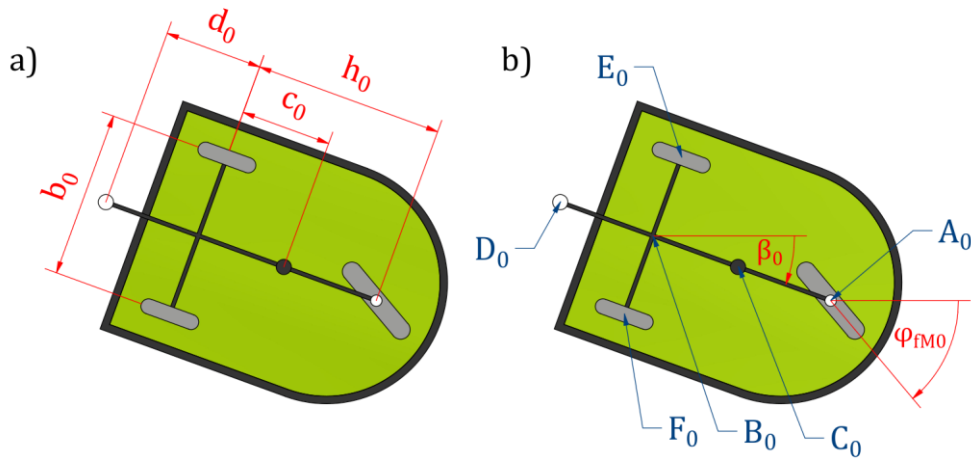
$$\mathbf{q} = [x \ y \ \beta_0 \ \varphi_{fM0}]^T. \quad (3.18)$$

Współrzędne uogólnione zostały przedstawione na rysunku 3.5.



Rys. 3.5. Ciągnik (TTFS) z oznaczonymi współrzędnymi uogólnionymi

Parametry geometryczne oraz punkty charakterystyczne dla TTFS zostały przedstawione na rysunku 3.6. Położenia punktów charakterystycznych TTFS zawarte są w równaniu 3.8, które przedstawia położenia punktów charakterystycznych DDT.



Rys. 3.6. Schemat kinematyczny holownika (TTFS): a) parametry geometryczne; b) punkty charakterystyczne wraz oznaczeniem kątów

Wektor prędkości wejściowych $\mathbf{u}$ składa się z prędkości liniowej punktu A_0 w kierunku wzdłużnym względem koła przedniego V_{A_0} oraz prędkości kątowej skrętu przedniego koła $\dot{\varphi}_{fM0}$:

$$\mathbf{u} = [V_{A_0} \quad \dot{\varphi}_{fM0}]^T. \quad (3.19)$$

Jeśli zadawana jest prędkość kątowa przedniego koła to:

$$V_{A_0} = r_{f0} \cdot \dot{\theta}_{fM0}, \quad (3.20)$$

gdzie: r_{f0} jest promieniem koła przedniego ciągnika, $\dot{\theta}_{fM0}$ jest prędkością kątową przedniego koła ciągnika. Prędkości uogólnione x, y, β_0 można wyrazić w zależności od prędkości wejściowych:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) \\ \dot{y} &= -V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) \\ \dot{\beta}_0 &= \frac{V_{A_0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ograniczenia systemu można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \sin(\beta_0) + \dot{y} \cos(\beta_0) \\ \dot{x}_{A_0} \sin(\varphi_{fM0}) + \dot{y}_{A_0} \cos(\varphi_{fM0}) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Zgodnie z równaniem 3.6 macierz ograniczeń systemu $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ można zapisać jako:

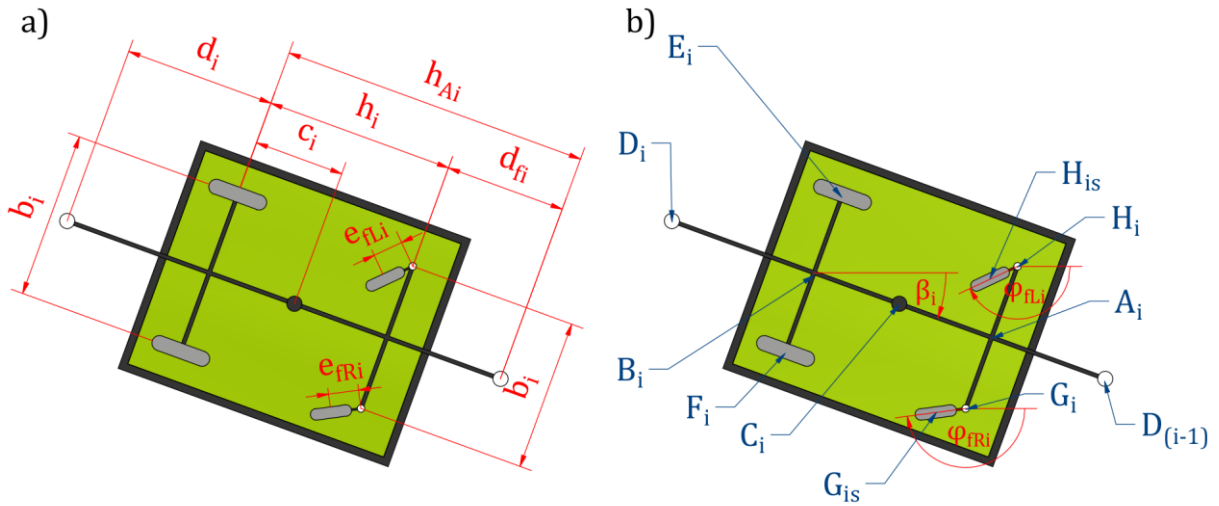
$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\beta_0) & \cos(\beta_0) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi_{fM0}) & \cos(\varphi_{fM0}) & -h_0 \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Elementy macierzy transformacji prędkości można wyznaczyć z równań: 3.21 i 3.4 lub w sposób bezpośredni zapisać jako:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) & 0 \\ -\cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) & 0 \\ \frac{\sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

3.3 Wariant z przyczepami z układem stałego dyszla (FDSS)

W niniejszym podrozdziale opracowano model kinematyczny pociągu logistycznego wyposażonego w przyczepy z układem stałego dyszla (FDSS). Parametry geometryczne, punkty charakterystyczne i współrzędne uogólnione i -tej przyczepy (FDSS) zostały przedstawione na rysunku 3.7.



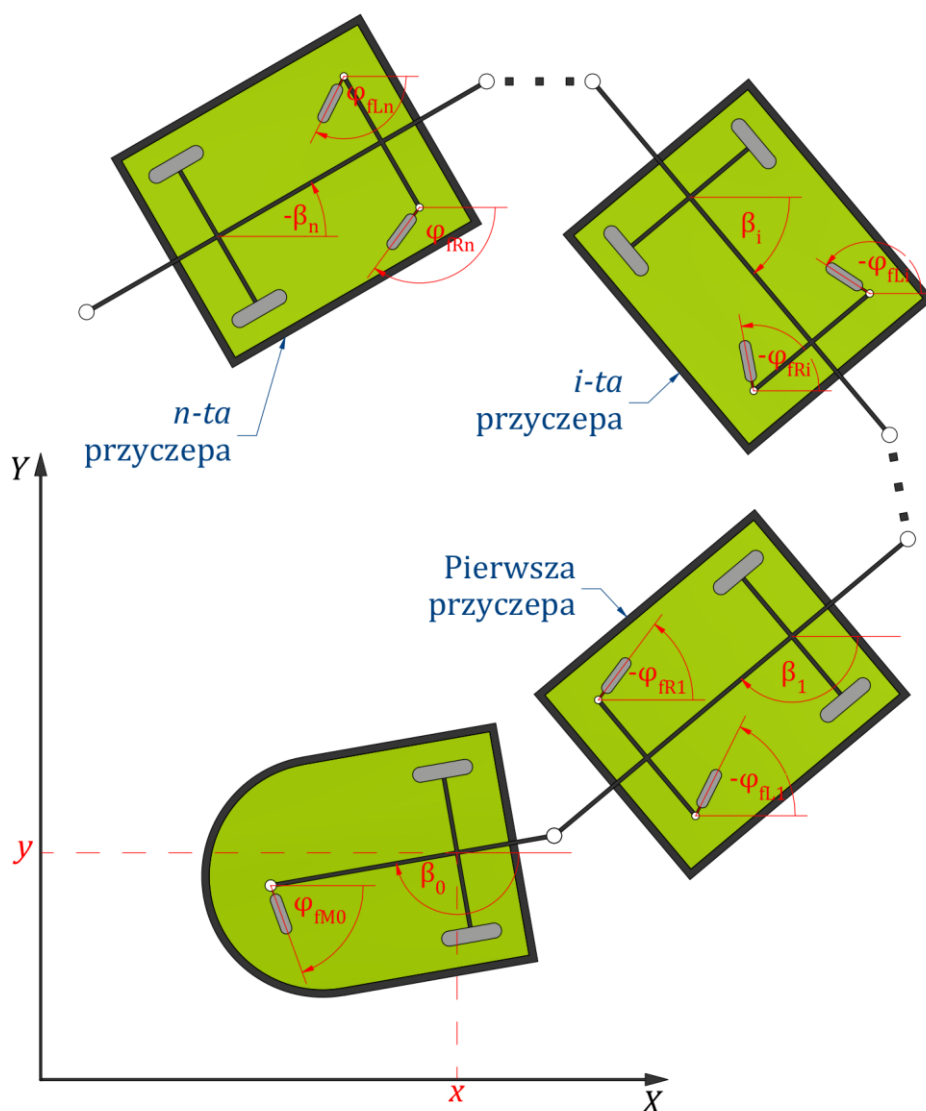
Rys. 3.7. Schemat kinematyczny przyczepy z układem skrętnym stałego dyszla: a) parametry geometryczne; b) punkty charakterystyczne wraz oznaczeniem kątów

Położenia punktów charakterystycznych i -tej przyczepy można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^i \mathbf{R}(\beta_{j-1}) \begin{bmatrix} -d_{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^i \mathbf{R}(\beta_j) \begin{bmatrix} -h_{Aj} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{D_i} \\ y_{D_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} -d_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} h_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} c_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{E_i} \\ y_{E_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} 0 \\ b_i/2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{F_i} \\ y_{F_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} 0 \\ -b_i/2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{G_i} \\ y_{G_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} h_i \\ -b_i/2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_i) \begin{bmatrix} h_i \\ b_i/2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{G_{is}} \\ y_{G_{is}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{G_i} \\ y_{G_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\varphi_{fRi}) \begin{bmatrix} e_{fRi} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{H_{is}} \\ y_{H_{is}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\varphi_{fLi}) \begin{bmatrix} e_{fLi} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

W systemie składającym się z ciągnika i n przyczep (FDSS) współzrzednymi uogólnionymi są współzrzedne uogólnione holownika oraz kąty odchylenia: każdej przyczepy i wszystkich kół swobodnie skrętnych przyczep, co zostało przedstawione na rysunku 3.8 (ciągnik w wariantcie DDT). Wektor współzrzednych uogólnionych można opisać następująco:

$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \beta_0 \quad \varphi_{fM0} \quad \beta_1 \quad \varphi_{fL1} \quad \varphi_{fR1} \quad \cdots \quad \beta_n \quad \varphi_{fLn} \quad \varphi_{fRn}]^T. \tag{3.24}$$

Rys. 3.8. Układ składający się z ciągnika (wariant DDT) i liczby n przyczep (FDSS)

Ograniczenia systemu dla układu z liczbą n przyczep można zapisać w następujący sposób:

- dla zestawu z DDT:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \sin(\beta_0) + \dot{y} \cos(\beta_0) \\ \dot{x}_{A_{0s}} \sin(\varphi_{fM0}) + \dot{y}_{A_{0s}} \cos(\varphi_{fM0}) \\ \dot{x}_{B_1} \sin(\beta_1) + \dot{y}_{B_1} \cos(\beta_1) \\ \dot{x}_{H_{1s}} \sin(\varphi_{fL1}) + \dot{y}_{H_{1s}} \cos(\varphi_{fL1}) \\ \dot{x}_{G_{1s}} \sin(\varphi_{fR1}) + \dot{y}_{G_{1s}} \cos(\varphi_{fR1}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{B_n} \sin(\beta_n) + \dot{y}_{B_n} \cos(\beta_n) \\ \dot{x}_{H_{ns}} \sin(\varphi_{fLn}) + \dot{y}_{H_{ns}} \cos(\varphi_{fLn}) \\ \dot{x}_{G_{ns}} \sin(\varphi_{fRn}) + \dot{y}_{G_{ns}} \cos(\varphi_{fRn}) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

- dla zestawu z TTFS:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \sin(\beta_0) + \dot{y} \cos(\beta_0) \\ \dot{x}_{A_0} \sin(\varphi_{fM0}) + \dot{y}_{A_0} \cos(\varphi_{fM0}) \\ \dot{x}_{B_1} \sin(\beta_1) + \dot{y}_{B_1} \cos(\beta_1) \\ \dot{x}_{H_{1s}} \sin(\varphi_{fL1}) + \dot{y}_{H_{1s}} \cos(\varphi_{fL1}) \\ \dot{x}_{G_{1s}} \sin(\varphi_{fR1}) + \dot{y}_{G_{1s}} \cos(\varphi_{fR1}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{B_n} \sin(\beta_n) + \dot{y}_{B_n} \cos(\beta_n) \\ \dot{x}_{H_{ns}} \sin(\varphi_{fLn}) + \dot{y}_{H_{ns}} \cos(\varphi_{fLn}) \\ \dot{x}_{G_{ns}} \sin(\varphi_{fRn}) + \dot{y}_{G_{ns}} \cos(\varphi_{fRn}) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Macierz ograniczeń systemu $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć z równania 3.6. Elementy macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć z równań: 3.4 oraz w zależności od układu skrętnego ciągnika: 3.12 lub 3.21. Macierz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, tak jak w przypadku samego ciągnika można wyznaczyć bezpośrednio. W tym celu należy wyznaczyć dla każdej prędkości uogólnionej przyczepy zależność względem podstawowych prędkości uogólnionych ciągnika $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$. Wyznaczenie tych zależności opiera się na strukturze łańcuchowej wynikającej z geometrycznych połączeń kolejnych członów zestawu. W przypadku orientacji i -tej przyczepy prędkość kątowa $\dot{\beta}_i$ może być wyznaczona na podstawie prędkości punktu D_{i-1} . Prędkość tego punktu jest rzutowana na kierunek prostopadły względem odcinka $|B_i D_{i-1}|$ (rys. 3.9). Zrzutowana prędkość liniowa tworzy prędkość kątową $\dot{\beta}_i$ na ramieniu h_{Ai} , którą można zapisać jako:

- dla $i > 1$:

$$\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{i-1}) = - \frac{\frac{\partial x_{D_{i-1}}}{\partial t} \sin(\beta_i) + \frac{\partial y_{D_{i-1}}}{\partial t} \cos(\beta_i)}{h_{Ai}}, \quad (3.27)$$

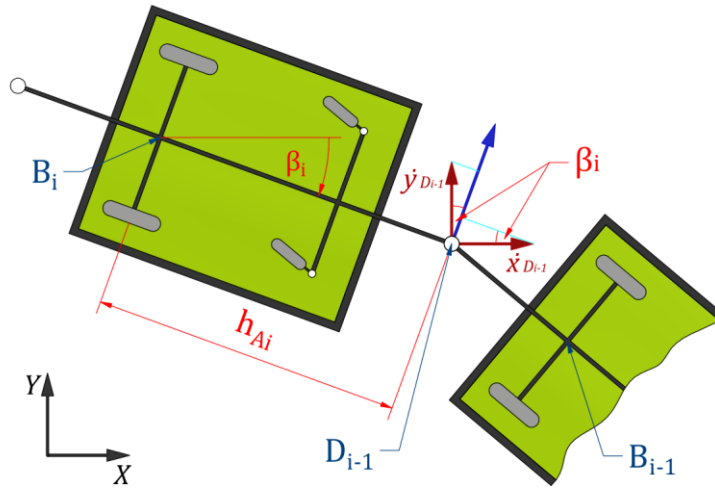
- dla $i = 1$:

$$\dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) = - \frac{\frac{\partial x_{D_0}}{\partial t} \sin(\beta_1) + \frac{\partial y_{D_0}}{\partial t} \cos(\beta_1)}{h_{A1}}. \quad (3.28)$$

W kolejnych obliczeniach z równań wyznaczających prędkości uogólnione $\dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_n$ należy wyznaczyć pochodne cząstkowe względem $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$ lub $V_{A_0}, \dot{\varphi}_{fM0}$ w zależności od zastosowanego układu skrętnego ciągnika. Każda zależność opisująca prędkość uogólnioną może zawierać jedynie $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$ spośród wszystkich prędkości uogólnionych. W przypadku TTFS, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$ są zależne od V_{A_0} zgodnie z równaniem 3.21. Dla $i = 1$ prędkość uogólniona $\dot{\beta}_1$ zależy wyłącznie od $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$, więc w tym przypadku nie jest konieczne dodatkowe podstawienie. Dla $i > 1$ prędkość uogólniona $\dot{\beta}_i$ zależy od

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{i-1}$, co oznacza, że muszą być wykonane podstawienia dla wcześniejszych prędkości uogólnionych. Dla systemu składającego się z liczby przyczep $n > 1$ po wyznaczeniu $\dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ z równania 3.28 i $\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{i-1})$ z równania 3.27 dla kolejnych prędkości uogólnionych, należy wykonać podstawienie dla kolejnych prędkości uogólnionych $\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{i-1})$ uzyskując $\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ w kolejności: $i = 2, \dots, i = n$:

$$\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) = \dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{i-1})|_{\dot{\beta}_{i-1}=\dot{\beta}_{i-1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{i-2}=\dot{\beta}_{i-2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dots, \dot{\beta}_1=\dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}. \quad (3.29)$$



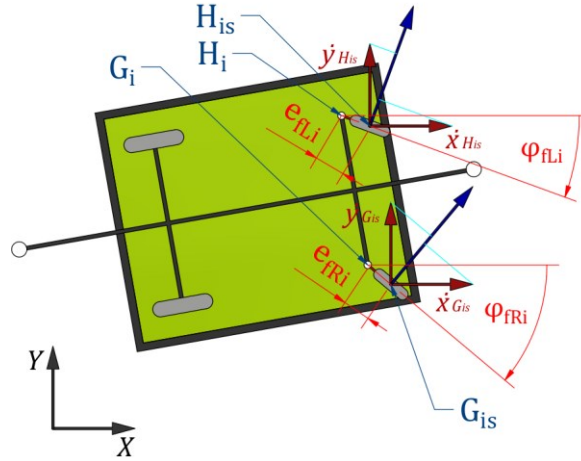
Rys. 3.9. Rzutowanie prędkości punktu D_{i-1} na kierunek prostopadły względem odcinka $|B_i D_{i-1}|$

Dla i -tej przyczepy prędkości kątowne skrętu kół przednich $\dot{\phi}_{fLi}, \dot{\phi}_{fRi}$ mogą być wyznaczone na podstawie prędkości punktów: H_{is}, G_{is} . Prędkości tych punktów są rzutowane odpowiednio na kierunki prostopadłe względem odcinków: $|H_i H_{is}|$ i $|G_i G_{is}|$ (rys. 3.10). Zrutowane prędkości liniowe tworzą prędkości kątowne na ramionach odpowiednio: e_{fLi}, e_{fRi} które można zapisać jako funkcje:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{fLi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_i) &= \frac{\frac{\partial x_{H_{is}}}{\partial t} \sin(\varphi_{fLi}) + \frac{\partial y_{H_{is}}}{\partial t} \cos(\varphi_{fLi})}{e_{fLi}} \\ \dot{\phi}_{fRi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_i) &= \frac{\frac{\partial x_{G_{is}}}{\partial t} \sin(\varphi_{fRi}) + \frac{\partial y_{G_{is}}}{\partial t} \cos(\varphi_{fRi})}{e_{fRi}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Istotne jest by powyższe wyrażenia były funkcjami prędkości uogólnionych $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$. W związku z tym, dla systemu składającego się z n przyczep należy wykonać podstawienie dla $i = 1, \dots, n$, by powyższe funkcje zredukować do postaci $\dot{\phi}_{fLi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ i $\dot{\phi}_{fRi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{fLi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) &= \dot{\phi}_{fLi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_i)|_{\dot{\beta}_i=\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{i-1}=\dot{\beta}_{i-1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dots, \dot{\beta}_1=\dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)} \\ \dot{\phi}_{fRi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) &= \dot{\phi}_{fRi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_i)|_{\dot{\beta}_i=\dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{i-1}=\dot{\beta}_{i-1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dots, \dot{\beta}_1=\dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)} \end{aligned} \quad (3.31)$$



Rys. 3.10. Rzutowanie prędkości punktów G_{is} , H_{is} na kierunku prostopadły odpowiednio względem odcinków $|G_i G_{is}|$ i $|H_i H_{is}|$

W związku z tym macierz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ dla zestawu z DDT można przedstawić następująco:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) & 0 \\ -\sin(\beta_0) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{e_{fM0}} & -\frac{h_0 \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{e_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\beta}_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{fL1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\varphi}_{fL1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\varphi}_{fL1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{fR1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\varphi}_{fR1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\varphi}_{fR1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{\beta}_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\beta}_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\beta}_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{fLn}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\varphi}_{fLn}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\varphi}_{fLn}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{fRn}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\varphi}_{fRn}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\varphi}_{fRn}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \end{bmatrix} \cdot (3.32)$$

W przypadku zestawu z TTFS należy wykonać podstawienie zgodnie z równaniem 3.21, by funkcje prędkości uogólnionych $\dot{\beta}_i$, $\dot{\varphi}_{fLi}$, $\dot{\varphi}_{fRi}$ dla $i = 1, \dots, n$ były zależne od V_{A_0} .

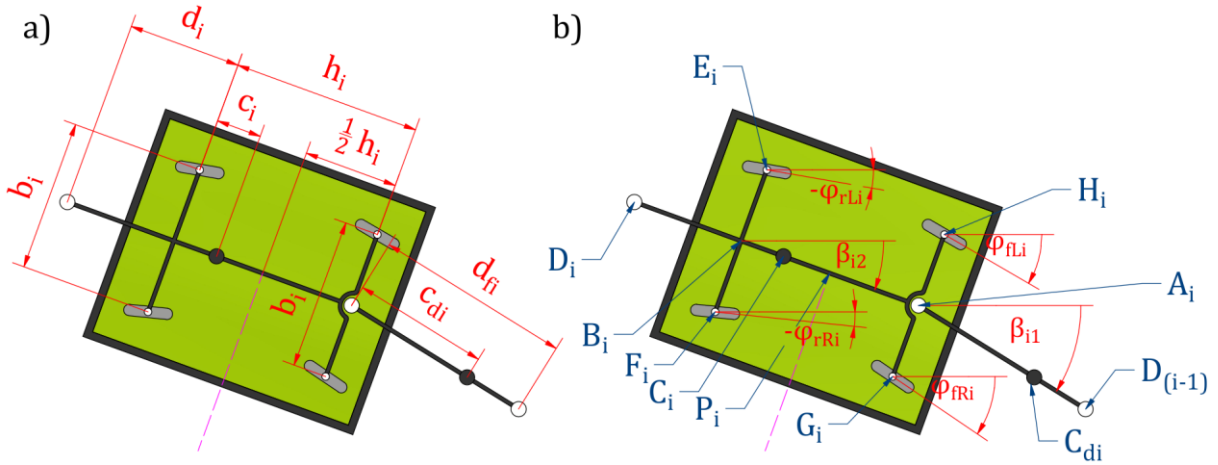
$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_i(V_{A_0}) &= \dot{\beta}_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \left| \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) \\ -V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) \\ \frac{V_{A_0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} \end{bmatrix} \right. \\
\dot{\phi}_{fLi}(V_{A_0}) &= \dot{\phi}_{fLi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \left| \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) \\ -V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) \\ \frac{V_{A_0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} \end{bmatrix} \right. \\
\dot{\phi}_{fRi}(V_{A_0}) &= \dot{\phi}_{fRi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \left| \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) \\ -V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) \\ \frac{V_{A_0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} \end{bmatrix} \right.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

W związku z tym macierz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ dla zestawu z TTFS można przedstawić następująco:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) & 0 \\ -\cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) & 0 \\ \frac{\sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \dot{\beta}_1(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\beta}_1(V_{A_0})}{\partial \dot{\phi}_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\phi}_{fL1}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\phi}_{fL1}(V_{A_0})}{\partial \dot{\phi}_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\phi}_{fR1}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\phi}_{fR1}(V_{A_0})}{\partial \dot{\phi}_{fM0}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{\beta}_n(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\beta}_n(V_{A_0})}{\partial \dot{\phi}_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\phi}_{fLn}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\phi}_{fLn}(V_{A_0})}{\partial \dot{\phi}_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\phi}_{fRn}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\phi}_{fRn}(V_{A_0})}{\partial \dot{\phi}_{fM0}} \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

3.4 Wariant z przyczepami z układem podwójnego Ackermanna (DASS)

W niniejszym podrozdziale opracowano model kinematyczny pociągu logistycznego wyposażonego w przyczepy z układem podwójnego Ackermanna (DASS). Parametry geometryczne oraz punkty charakterystyczne i -tej przyczepy zostały przedstawione na rysunku 3.11. W niniejszym modelu przyjęto, że β_{i1} oznacza kąt odchylenia przedniego dyszla i -tej przyczepy względem poziomu, natomiast β_{i2} oznacza orientację ramy tej przyczepy. Punkt P_i znajduje się w środku geometrycznym wózka.



Rys. 3.11. Schemat kinematyczny przyczepy z układem skrętnym podwójnego Ackermanna: a) parametry geometryczne; b) punkty charakterystyczne wraz oznaczeniem kątów

W systemie składającym się z ciągnika i n przyczep (DASS) współzrzednymi uogólnionymi są współzrzedne holownika oraz kąty odchylenia korpusu przyczep i odpowiadających im przednich dyszli, co zostało przedstawione na rysunku 3.12 (ciągnik w wariacie DDT).

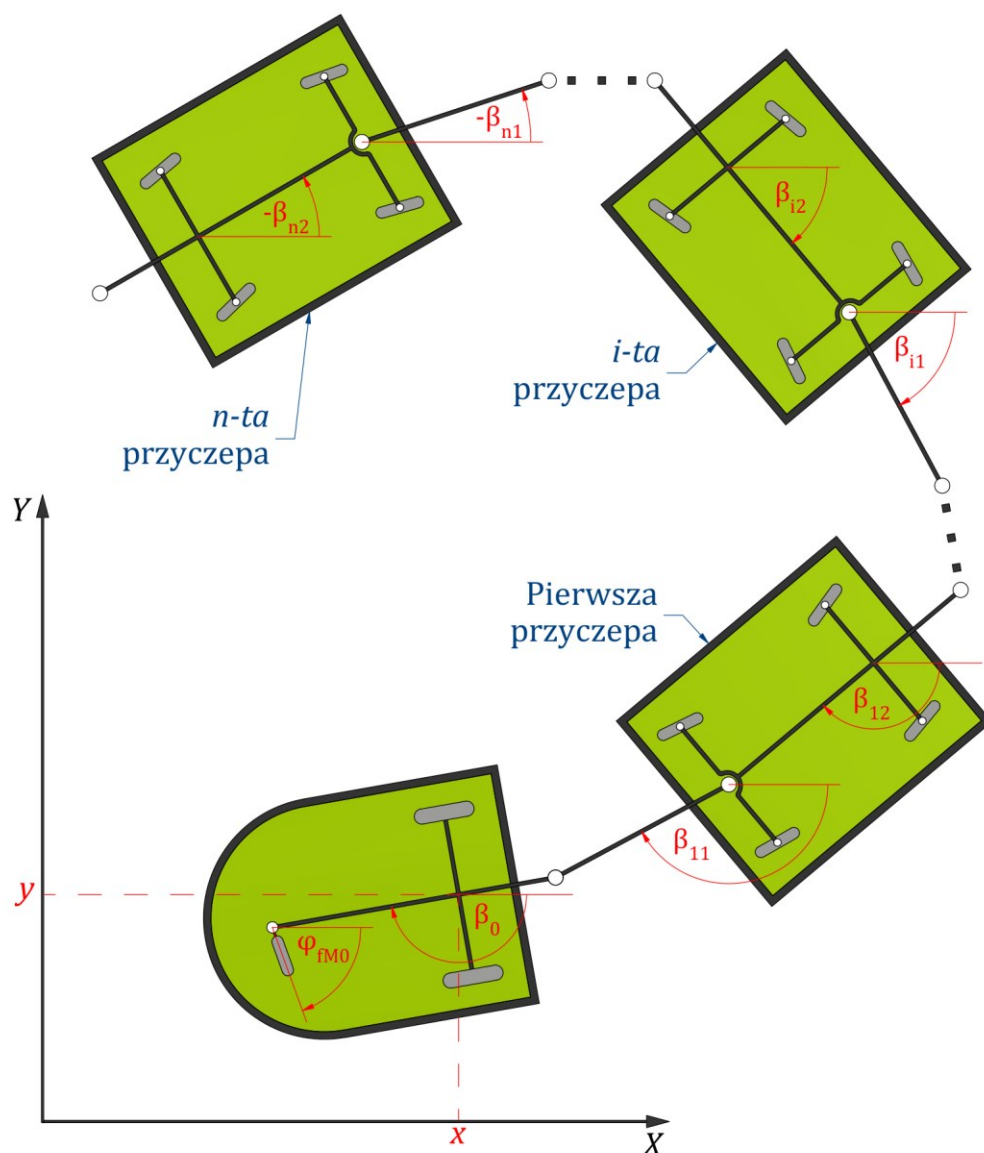
Wektor współzrzednych uogólnionych można opisać następująco:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \beta_0 \ \varphi_{fM0} \ \beta_{11} \ \beta_{12} \ \cdots \ \beta_{n1} \ \beta_{n2}]^T. \quad (3.35)$$

Położenia punktów charakterystycznych n -tej przyczepy można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_0) \begin{bmatrix} -d_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=2}^i \mathbf{R}(\beta_{(j-1)2}) \begin{bmatrix} -d_{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^i \mathbf{R}(\beta_{j1}) \begin{bmatrix} -d_{fj} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^i \mathbf{R}(\beta_{j2}) \begin{bmatrix} -h_j \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{D_i} \\ y_{D_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} -d_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} h_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} c_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{P_i} \\ y_{P_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} h_i/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{E_i} \\ y_{E_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} 0 \\ b_i/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{F_i} \\ y_{F_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} 0 \\ -b_i/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{G_i} \\ y_{G_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} h_i \\ -b_i/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\beta_{i2}) \begin{bmatrix} h_i \\ b_i/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

gdzie w wyrażeniu $(j-1)2$ symbol „2” nie oznacza mnożenia, lecz stanowi część zapisu indeksu.

Rys. 3.12. Układ składający się z ciągnika (wariant DDT) i liczby n przyczep (DASS)

Ograniczenia systemu dla układu z n przyczepami można zapisać w następujący sposób:

- dla zestawu z DDT:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \sin(\beta_0) + \dot{y} \cos(\beta_0) \\ \dot{x}_{A_{0s}} \sin(\varphi_{FM0}) + \dot{y}_{A_{0s}} \cos(\varphi_{FM0}) \\ \dot{x}_{A_1} \sin(\beta_{11}) + \dot{y}_{A_1} \cos(\beta_{11}) \\ \dot{x}_{P_1} \sin(\beta_{12}) + \dot{y}_{P_1} \cos(\beta_{12}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{A_n} \sin(\beta_{n1}) + \dot{y}_{A_n} \cos(\beta_{n1}) \\ \dot{x}_{P_n} \sin(\beta_{n2}) + \dot{y}_{P_n} \cos(\beta_{n2}) \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

- dla zestawu z TTFS:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \sin(\beta_0) + \dot{y} \cos(\beta_0) \\ \dot{x}_{A_0} \sin(\varphi_{fM0}) + \dot{y}_{A_0} \cos(\varphi_{fM0}) \\ \dot{x}_{A_1} \sin(\beta_{11}) + \dot{y}_{A_1} \cos(\beta_{11}) \\ \dot{x}_{P_1} \sin(\beta_{12}) + \dot{y}_{P_1} \cos(\beta_{12}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{A_n} \sin(\beta_{n1}) + \dot{y}_{A_n} \cos(\beta_{n1}) \\ \dot{x}_{P_n} \sin(\beta_{n2}) + \dot{y}_{P_n} \cos(\beta_{n2}) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Macierz ograniczeń systemu $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć z równania 3.6. Elementy macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć z równań: 3.4 oraz w zależności od układu skrętnego ciągnika: 3.12 lub 3.21. Macierz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, tak jak w poprzednich przypadkach można też wyznaczyć bezpośrednio. W tym celu należy wyznaczyć dla każdej prędkości uogólnionej dotyczącej orientacji: przyczepy i dyszla przyczepy zależność względem podstawowych prędkości uogólnionych ciągnika $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$. W przypadku orientacji dyszla i -tej przyczepy, prędkość kątowna $\dot{\beta}_{i1}$ może być wyznaczona na podstawie prędkości punktu D_{i-1} . Prędkość tego punktu jest rzutowana na kierunek prostopadły względem odcinka $|A_i D_{i-1}|$ (rys. 3.13). Zrzutowana prędkość liniowa tworzy prędkość kątowną $\dot{\beta}_{i1}$ na ramieniu d_{fi} , którą można zapisać jako:

- dla $i > 1$:

$$\dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)1}, \dot{\beta}_{(i-1)2}) = - \frac{\frac{\partial x_{D_{i-1}}}{\partial t} \sin(\beta_{i1}) + \frac{\partial y_{D_{i-1}}}{\partial t} \cos(\beta_{i1})}{d_{fi}}, \quad (3.39)$$

- dla $i = 1$:

$$\dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) = - \frac{\frac{\partial x_{D_0}}{\partial t} \sin(\beta_{11}) + \frac{\partial y_{D_0}}{\partial t} \cos(\beta_{11})}{d_{f1}}. \quad (3.40)$$

W przypadku orientacji i -tej przyczepy, prędkość kątowna $\dot{\beta}_{i2}$ może być wyznaczona na podstawie prędkości punktu A_i . Prędkość tego punktu jest rzutowana na kierunek prostopadły względem odcinka $|A_i B_i|$ (rys. 3.13). Zrzutowana prędkość liniowa tworzy prędkość kątowną $\dot{\beta}_{i2}$ na ramieniu h_i , którą można zapisać jako:

- dla $i > 1$:

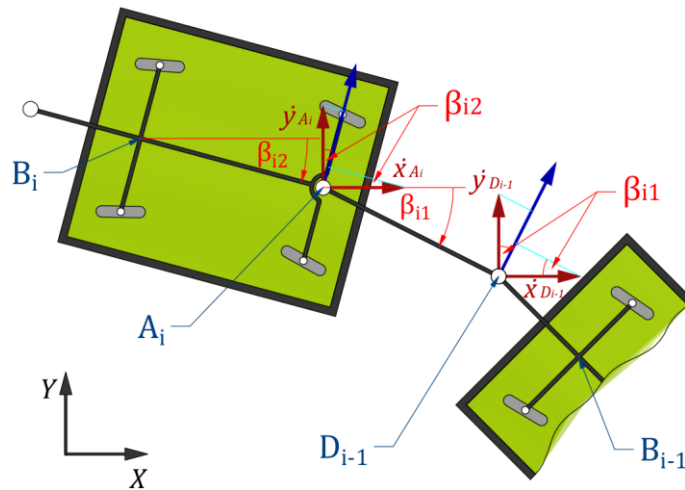
$$\dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11}, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)2}, \dot{\beta}_{i1}) = - \frac{\frac{\partial x_{A_i}}{\partial t} \sin(\beta_{i2}) + \frac{\partial y_{A_i}}{\partial t} \cos(\beta_{i2})}{h_i}, \quad (3.41)$$

- dla $i = 1$:

$$\dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11}) = - \frac{\frac{\partial x_{A_1}}{\partial t} \sin(\beta_{12}) + \frac{\partial y_{A_1}}{\partial t} \cos(\beta_{12})}{h_1}. \quad (3.42)$$

Analogicznie, jak w układzie ze stałym dyszlem, w kolejnych obliczeniach z równań wyznaczających prędkości uogólnione $\dot{\beta}_{11}, \dot{\beta}_{12}, \dots, \dot{\beta}_{n1}, \dot{\beta}_{n2}$ należy wyznaczyć pochodne cząstkowe względem $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$ lub $V_{A_0}, \dot{\phi}_{fM0}$ w zależności od zastosowanego układu skrętnego ciągnika. Każda zależność opisująca prędkość uogólnioną może zawierać jedynie $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$ spośród wszystkich prędkości uogólnionych. W przypadku ciągnika z napędzanym skrętnym sterowanym przednim kołem $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$ są zależne od V_{A_0} zgodnie z równaniem 3.21. Dla $i = 1$ prędkość uogólniona $\dot{\beta}_{11}$ zależy wyłącznie od $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$, więc w tym przypadku nie jest konieczne dodatkowe podstawienie. Prędkość uogólniona $\dot{\beta}_{12}$ poza $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0$, zależy również od $\dot{\beta}_{11}$. W związku z tym konieczne jest podstawienie funkcji tej prędkości uzyskanej z równania 3.40. W przypadku $i > 1$ prędkość uogólniona $\dot{\beta}_{i1}$ zależy od $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)1}, \dot{\beta}_{(i-1)2}$, a prędkość uogólniona $\dot{\beta}_{i2}$ od $\dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11}, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)2}, \dot{\beta}_{i1})$. Oznacza to, że muszą być wykonane podstawienia dla wcześniejszych prędkości uogólnionych. Dla systemu składającego się z liczby przyczep $n \geq 1$ po wyznaczeniu funkcji prędkości uogólnionych: $\dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ z równania 3.40 i $\dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11})$ z równania 3.42 należy wykonać podstawienie:

$$\dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) = \dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11})|_{\dot{\beta}_{11}=\dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}. \quad (3.43)$$



Rys. 3.13. Rzutowanie prędkości punktu D_{i-1} na kierunku prostopadły względem odcinka $|A_i D_{i-1}|$ oraz rzutowanie prędkości punktu A_i na kierunku prostopadły względem odcinka $|B_i A_i|$

Jeśli $n > 1$, to dla kolejnych prędkości uogólnionych należy wykonać podstawienia prędkości uogólnionych $\dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)1}, \dot{\beta}_{(i-1)2})$ i $\dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11}, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)2}, \dot{\beta}_{i1})$ uzyskując $\dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ i $\dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)$ w kolejności: $i = 2, \dots, i = n$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) &= \dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)1}, \dot{\beta}_{(i-1)2}) | \quad \begin{matrix} \dot{\beta}_{11}=\dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{12}=\dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{(i-1)1}=\dot{\beta}_{(i-1)1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{(i-1)2}=\dot{\beta}_{(i-1)2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \end{matrix} \\
 \dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) &= \dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{11}, \dots, \dot{\beta}_{(i-1)2}, \dot{\beta}_{i1}) | \quad \begin{matrix} \dot{\beta}_{11}=\dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{12}=\dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{(i-1)2}=\dot{\beta}_{(i-1)2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0), \dot{\beta}_{i1}=\dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) \end{matrix}
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Macierz transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ dla zestawu z DDT, można przedstawić następująco:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) & 0 \\ -\sin(\beta_0) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{e_{fM0}} & -\frac{h_0 \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{e_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\beta}_{11}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\beta}_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{n1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\beta}_{n1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\beta}_{n1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{n2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{x}} \cos(\beta_0) - \frac{\partial \dot{\beta}_{n2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{y}} \sin(\beta_0) & \frac{\partial \dot{\beta}_{n2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0)}{\partial \dot{\beta}_0} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

W przypadku TTFS należy wykonać podstawienie zgodnie z równaniem 3.21, by funkcje prędkości uogólnionych $\dot{\beta}_{i1}, \dot{\beta}_{i2}$ dla $i = 1, \dots, n$ były zależne od V_{A_0} .

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_{i1}(V_{A_0}) &= \dot{\beta}_{i1}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) | \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) \\ -V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) \\ \frac{V_{A_0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} \end{bmatrix} \\
 \dot{\beta}_{i2}(V_{A_0}) &= \dot{\beta}_{i2}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_0) | \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) \\ -V_{A_0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) \\ \frac{V_{A_0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Macierz transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ dla zestawu z TTFS można przedstawić następująco:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \cos(\beta_0) & 0 \\ -\cos(\varphi_{fM0} - \beta_0) \sin(\beta_0) & 0 \\ \frac{\sin(\varphi_{fM0} - \beta_0)}{h_0} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{11}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\beta}_{11}(V_{A_0})}{\partial \dot{\varphi}_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{12}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\beta}_{12}(V_{A_0})}{\partial \dot{\varphi}_{fM0}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{n1}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\beta}_{n1}(V_{A_0})}{\partial \dot{\varphi}_{fM0}} \\ \frac{\partial \dot{\beta}_{n2}(V_{A_0})}{\partial V_{A_0}} & \frac{\partial \dot{\beta}_{n2}(V_{A_0})}{\partial \dot{\varphi}_{fM0}} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

W układzie podwójnego Ackermanna kąty skręcenia kół są kinematycznie zależne od kąta skręcenia dyszla. Na podstawie rysunku 3.14 można wyznaczyć te kąty. Kąty lokalne, czyli odmierzane względem głównej osi jednostki (ciągnika lub przyczepy) są oznaczone dużą literą L umieszczoną w indeksie górnym przy symbolu kąta. W układzie i -tej przyczepy kąt skręcenia dyszla względem przyczepy można zapisać jako:

$$\beta_{i1}^L = \beta_{i1} - \beta_{i2}. \quad (3.48)$$

Kąty skręcenia kół względem przyczepy można zapisać w następujących sposób:

$$\begin{aligned} \varphi_{fLi}^L &= \varphi_{fLi} - \beta_{i2} \\ \varphi_{fRi}^L &= \varphi_{fRi} - \beta_{i2} \\ \varphi_{rLi}^L &= \varphi_{rLi} - \beta_{i2} \\ \varphi_{rRi}^L &= \varphi_{rRi} - \beta_{i2} \end{aligned}. \quad (3.49)$$

Promień skrętu i -tej przyczepy R_i można zapisać jako:

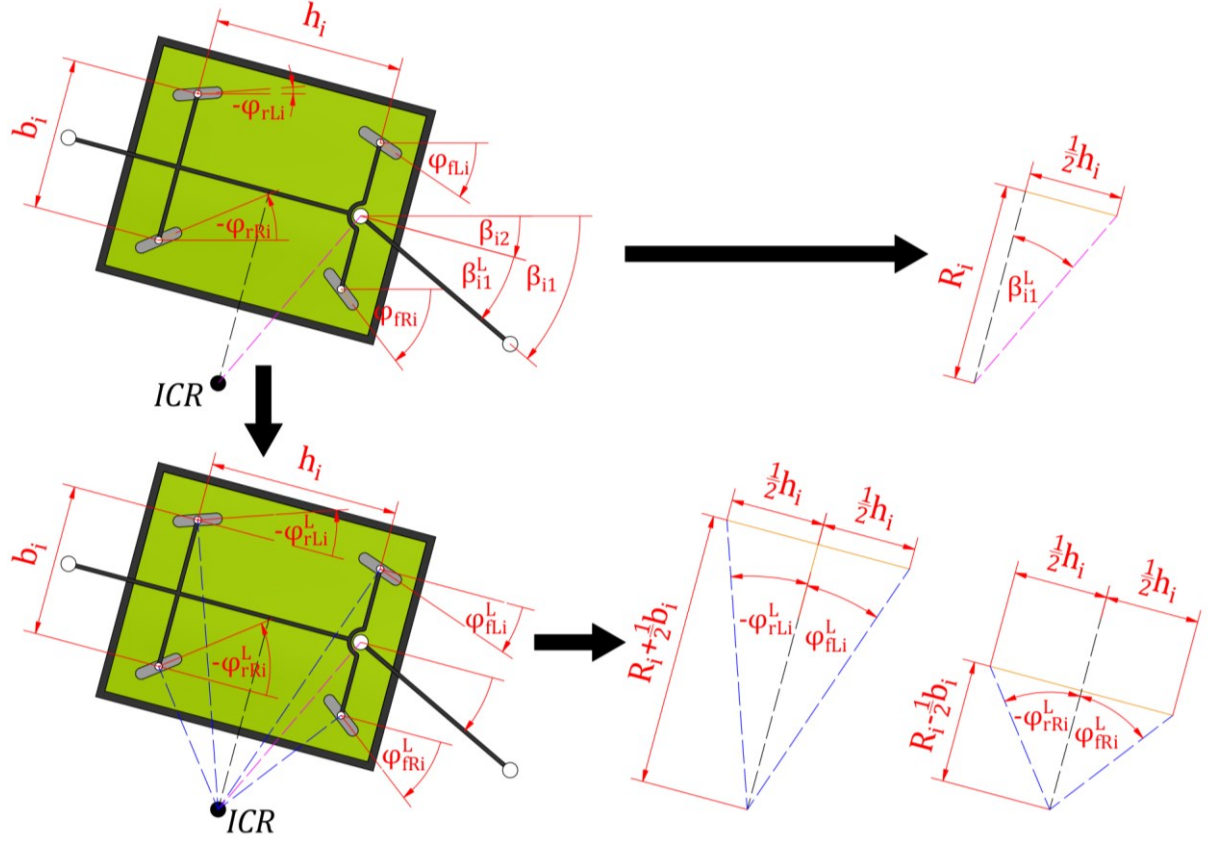
$$R_i = \frac{h_i}{2 \tan(\beta_{i1}^L)} \quad (3.50)$$

Kąty skręcenia kół i -tej przyczepy względem jej lokalnego układu odniesienia można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \varphi_{fLi}^L &= \arctan\left(\frac{h_i}{2R_i + b_i}\right) \\ \varphi_{fRi}^L &= \arctan\left(\frac{h_i}{2R_i - b_i}\right) \\ \varphi_{rLi}^L &= -\arctan\left(\frac{h_i}{2R_i + b_i}\right) \\ \varphi_{rRi}^L &= -\arctan\left(\frac{h_i}{2R_i - b_i}\right) \end{aligned}. \quad (3.51)$$

Kąty skręcenia kół i -tej przyczepy względem układu globalnego:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{fLi} &= \arctan\left(\frac{h_i}{b_i + h_i/\tan(\beta_{i1} - \beta_{i2})}\right) + \beta_{i2} \\
 \varphi_{fRi} &= \arctan\left(\frac{h_i}{-b_i + h_i/\tan(\beta_{i1} - \beta_{i2})}\right) + \beta_{i2} \\
 \varphi_{rLi} &= -\arctan\left(\frac{h_i}{b_i + h_i/\tan(\beta_{i1} - \beta_{i2})}\right) - \beta_{i2} \\
 \varphi_{rRi} &= -\arctan\left(\frac{h_i}{-b_i + h_i/\tan(\beta_{i1} - \beta_{i2})}\right) - \beta_{i2}
 \end{aligned} \quad (3.52)$$



Rys. 3.14. Kąty skręcenia kół i dyszla dla DASS. ICR oznacza chwilowy środek obrotu

4. Model dynamiczny pociągu logistycznego

4.1 Wprowadzenie do modelowania dynamicznego

Niniejszy rozdział poświęcony jest modelowaniu dynamicznemu pociągu logistycznego. W ramach opisywanej pracy opracowano model dynamiczny z więzami nieholonomicznymi (DM-NHC), model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia poprzecznego (DM-LF) i w formie dodatku, rozszerzony model dynamiczny uwzględniający tarcie poprzeczne, wzdłużne oraz opory toczenia (DM-EXT). Każdy z tych modeli został opracowany dla dwóch różnych układów skrętnych przyczep (FDSS i DASS) oraz dwóch układów skrętnych ciągnika (DDT i TTFS). Łącznie opracowano 12 modeli dynamicznych: 4 typu DM-NHC, 4 DM-LF oraz 4 DM-EXT. Warianty opracowanych modeli przedstawiono w tabeli 4.1. W wielu zastosowaniach nie ma potrzeby uwzględniania tarcia wzdłużnego, dlatego zaproponowano dwa warianty modelu interakcji koła z podłożem (DM-LF i DM-EXT), umożliwiające dostosowanie stopnia złożoności do konkretnych potrzeb. Uwzględnienie tarcia wzdłużnego powoduje istotny wzrost liczby współrzędnych uogólnionych, co wprost (w proporcji 1:1) przekłada się na zwiększenie liczby równań dynamicznych, a w efekcie wydłuża czas obliczeń.

Tab. 4.1. Warianty modelu dynamicznego

Lp.	Model	Układ skrętny ciągnika	Układ skrętny przyczepy
1.	DM-NHC	DDT	FDSS
2.			DASS
3.		TTFS	FDSS
4.			DASS
5.	DM-LF	DDT	FDSS
6.			DASS
7.		TTFS	FDSS
8.			DASS
9.	DM-EXT	DDT	FDSS
10.			DASS
11.		TTFS	FDSS
12.			DASS

Przyjęto, że momenty bezwładności $I_0, I_{fM0}, I_i, I_{rLi}, I_{rRi}, I_{fLi}, I_{fRi}, I_{di}$ odnoszą się do głównych momentów bezwładności względem osi pionowej (prostopadłej do płaszczyzny ruchu), przechodzącej przez środek masy danego ciała.

4.2 Model dynamiczny z więzami nieholonomicznymi (DM-NHC)

4.2.1 Struktura modelu

W niniejszym podrozdziale przedstawiony został model dynamiczny N -wymiarowego układu mechanicznego z liczbą k ograniczeń nieholonomicznych, opracowany przy użyciu formalizmu Lagrange’a. Tak jak w modelu kinematycznym, rozpatrywany układ stanowi pociąg logistyczny składający się z ciągnika oraz n przyczep. Liczba współrzędnych uogólnionych układu zależy od rodzaju zastosowanych układów skrętnych w poszczególnych jednostkach zestawu. Wektor współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}$ ma postać:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]^T. \quad (4.1)$$

Podczas modelowania dynamicznego z więzami nieholonomicznymi (DM-NHC) przyjęto następujące założenia:

- każdy komponent układu jest traktowany jako bryła sztywna,
- koła pojazdu są modelowane jako cienkie, sztywne dyski mające pojedynczy punkt kontaktu z powierzchnią ruchu,
- ruch pojazdu odbywa się w płaskim środowisku,
- interakcja koła z podłożem ogranicza się do więzów nieholonomicznych; siły tarcia oraz opory toczenia nie są uwzględniane,
- koła pojazdu nie ulegają poślizgowi poprzecznemu,
- koła pojazdu toczą się bez poślizgu wzdłużnego,
- energia kinetyczna wynikająca z toczenia się kół jest pomijana,
- każde koło posiada własną masę, nieuwjętą w masie jednostki, do której jest przymocowane,
- środek ciężkości każdej jednostki znajduje się na jej osi podłużnej,
- środek masy każdego koła skrętnego znajduje się na pionowej osi przechodzącej przez punkt styku tego koła z podłożem (czyli w płaszczyźnie ruchu przyjmuje się, że punkt styku i środek masy pokrywają się w rzucie 2D).
- w układzie podwójnego Ackermanna dyszel przedni przyczepy jest traktowany jako osobny element z własną masą.

Podstawowym równaniem modelu dynamicznego jest sformalizowane równanie Lagrange’a z mnożnikami Lagrange’a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (4.2)$$

gdzie: $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – lagranżian, $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times K}$ – macierz transformacji sił i momentów wejściowych, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^K$ – wektor sił i momentów wejściowych, $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times N}$ – macierz ograniczeń nieholonomicznych, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ – wektor mnożników Lagrange’a, przy czym $K = N - k$. Lagrangian $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ stanowi różnicę między energią kinetyczną $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, a energią potencjalną $U(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}), \quad (4.3)$$

gdzie $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ jest macierzą bezwładności układu. Energię kinetyczną i potencjalną układu można zapisać w następujący sposób:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.4)$$

$$U(\mathbf{q}) = 0$$

gdzie $T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jest całkowitą energią kinetyczną ciągnika, a $T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jest całkowitą energią kinetyczną i -tej przyczepy. Macierz bezwładności układu $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć następujący sposób:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_N} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_N^2} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

gdzie $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$ są elementami wektora prędkości uogólnionych $\dot{\mathbf{q}}$. DM-NHC ma postać:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

gdzie $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem sił Coriolisa i sił odśrodkowych, wyznaczanym jako:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T + \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (4.8)$$

Ograniczenia nieholonomiczne można zapisać w formie wektora $\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k$, którego zależność względem macierzy ograniczeń nieholonomicznych ma postać:

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_{z_1} \\ A_{z_2} \\ \vdots \\ A_{z_k} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (4.9)$$

Macierz ograniczeń nieholonomicznych $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ można zatem wyrazić jako macierz pochodnych cząstkowych kolejnych więzów względem współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{z_1}}{\partial q_1} & \frac{\partial A_{z_1}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial A_{z_1}}{\partial q_N} \\ \frac{\partial A_{z_2}}{\partial q_1} & \frac{\partial A_{z_2}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial A_{z_2}}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{z_k}}{\partial q_1} & \frac{\partial A_{z_k}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial A_{z_k}}{\partial q_N} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Macierz transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ stanowi bazę przestrzeni zerowej macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, zatem spełnia zależność:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a, obie strony równania 4.6 mnoży się przez $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$, co prowadzi do postaci zredukowanej modelu:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})(\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}. \quad (4.12)$$

Zakładając, że wyznacznik $\det \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}$, można połączyć to równanie z równaniem prędkości modelu kinematycznego 3.3:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}_z^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}_z\boldsymbol{\tau} - \mathbf{M}_z^{-1}\mathbf{C}_z \end{cases} \quad (4.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_z &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{C}_z &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \\ \mathbf{B}_z &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Model ten składa się z dwóch części: kinematycznej i dynamicznej, co przedstawia wyrażenie 4.13. Część kinematyczna, tj. równanie $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{u}$, jest identyczna jak w przypadku modelu kinematycznego przedstawionego w rozdziale 3 dla odpowiednich wariantów układów skrętnych ciągnika i przyczep. W związku z tym w niniejszym rozdziale nie przytacza się ponownie tych zależności. Zamiast tego stosowane będą odniesienia do wcześniej podanych wzorów.

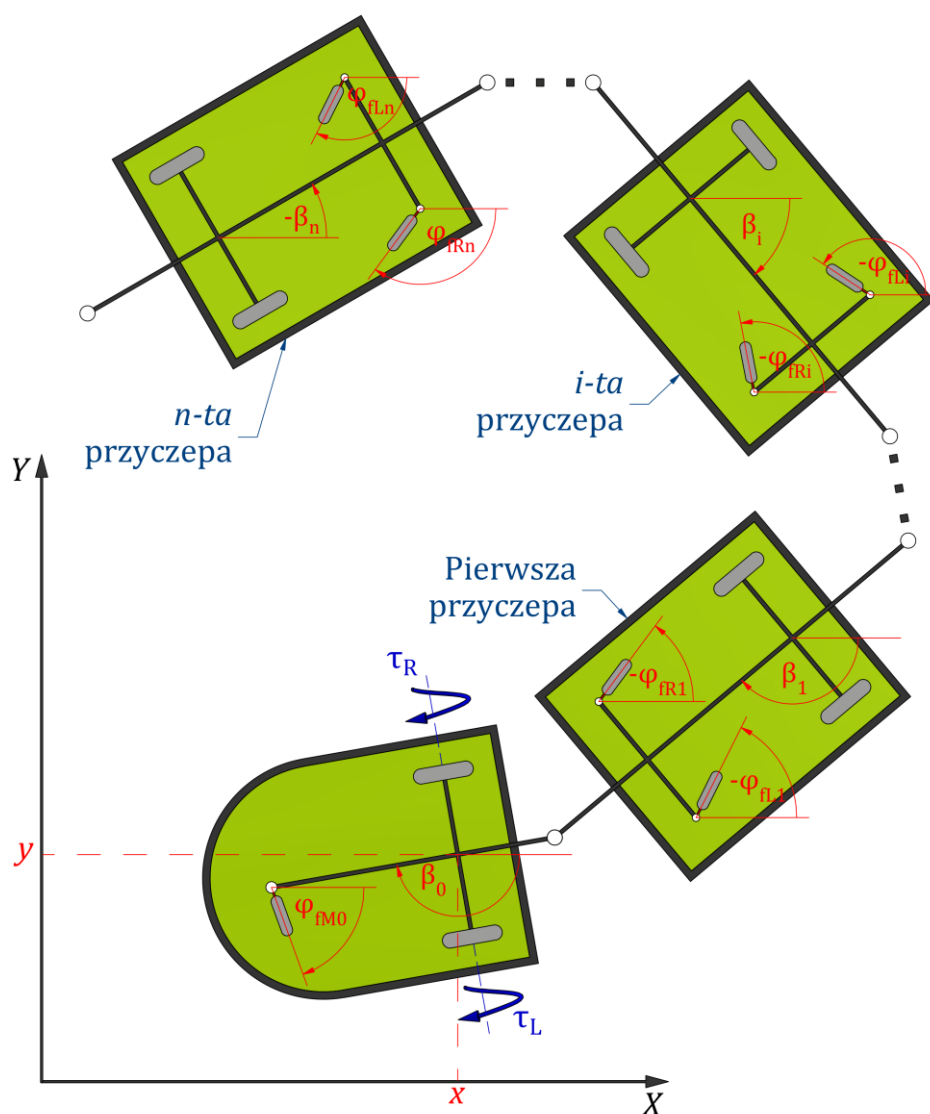
4.2.2 Wariant z przyczepami z układem stałego dyszla (FDSS)

4.2.2.1 Układ z ciągnikiem z różnicowo napędzanymi kołami tylnej osi (DDT)

W tej sekcji przedstawiono DM-NHC dla układu składającego się z ciągnika typu DDT oraz n przyczep wyposażonych w układ stałego dyszla (FDSS). Konfigurację tę przedstawiono na rysunku 4.1. Wektor współrzędnych uogólnionych składa się z N elementów, gdzie $N = 3n + 4$, i ma postać:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \beta_0 \ \varphi_{fM0} \ \beta_1 \ \varphi_{fL1} \ \varphi_{fR1} \ \cdots \ \beta_n \ \varphi_{fLn} \ \varphi_{fRn}]^T. \quad (4.15)$$

Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunkach: 3.3 – dla ciągnika i 3.7 – dla i -tej przyczepy. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniach: 3.8 – dla ciągnika i 3.23 – dla i -tej przyczepy. Dwuelementowy wektor prędkości wejściowych składa się z prędkości punktu B_0 w kierunku wzdłużnym względem ciągnika oraz prędkości kątowej ciągnika względem punktu B_0 , co przedstawiono w równaniu 3.9. Wektor więzów nieholonomicznych układu $\mathbf{A}_z(\mathbf{q})$ przedstawiono w równaniu 3.25. Procedura wyznaczania macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ została przedstawiona w podrozdziale 3.3, a jej ostateczna postać znajduje się w równaniu 3.32.



Rys. 4.1. Układ składający się z ciągnika (wariant DDT) i liczby n przyczep (FDSS)

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika można zapisać jako:

$$T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.16)$$

gdzie: $T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu ciągnika (bez kół), $T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna lewego tylnego koła ciągnika, $T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna prawego tylnego koła ciągnika, $T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna przedniego koła ciągnika. Energia kinetyczna korpusu ciągnika może zostać zapisana jako:

$$T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(m_0(\dot{x}_{C_0}^2 + \dot{y}_{C_0}^2) + I_0\dot{\beta}_0^2), \quad (4.17)$$

gdzie: m_0 i I_0 oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu ciągnika, x_{C_0}, y_{C_0} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół ciągnika można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}(m_{rL0}(\dot{x}_{E_0}^2 + \dot{y}_{E_0}^2) + I_{rL0}\dot{\beta}_0^2) \\ T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}(m_{rR0}(\dot{x}_{F_0}^2 + \dot{y}_{F_0}^2) + I_{rR0}\dot{\beta}_0^2) \quad , \\ T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}(m_{fM0}(\dot{x}_{A_{0s}}^2 + \dot{y}_{A_{0s}}^2) + I_{fM0}\dot{\phi}_{fM0}^2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdzie: $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rL0}, I_{rR0}, I_{fM0}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_0}, y_{E_0}), (x_{F_0}, y_{F_0}), (x_{A_{0s}}, y_{A_{0s}})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego oraz przedniego koła ciągnika. Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.19)$$

gdzie $T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy (bez kół), $T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energie kinetyczne lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy może zostać zapisana jako:

$$T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(m_i(\dot{x}_{C_i}^2 + \dot{y}_{C_i}^2) + I_i\dot{\beta}_i^2), \quad (4.20)$$

gdzie: m_i i I_i oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu i -tej przyczepy, x_{C_i}, y_{C_i} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rLi}(\dot{x}_{E_i}^2 + \dot{y}_{E_i}^2) + I_{rLi}\dot{\beta}_i^2) \\
T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rRi}(\dot{x}_{F_i}^2 + \dot{y}_{F_i}^2) + I_{rRi}\dot{\beta}_i^2) \\
T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fLi}(\dot{x}_{H_{is}}^2 + \dot{y}_{H_{is}}^2) + I_{fLi}\dot{\phi}_{fLi}^2) \\
T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fRi}(\dot{x}_{G_{is}}^2 + \dot{y}_{G_{is}}^2) + I_{fRi}\dot{\phi}_{fRi}^2)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

gdzie: $m_{rLi}, m_{rRi}, m_{fLi}, m_{fRi}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rLi}, I_{rRi}, I_{fLi}, I_{fRi}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_i}, y_{E_i}), (x_{F_i}, y_{F_i}), (x_{H_{is}}, y_{H_{is}}), (x_{G_{is}}, y_{G_{is}})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy.

Danymi wejściowymi w modelu są momenty obrotowe zadawane na tylne koła ciągnika: na koło lewe τ_L , na koło prawe τ_R . Momenty te są elementami wektora sił i momentów wejściowych $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_L \quad \tau_R]^T. \tag{4.22}$$

Macierz transformacji sił i momentów wejściowych $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ można wyrazić jako:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r_{r0}} \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) & -\sin(\beta_0) & \frac{b_0}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cos(\beta_0) & -\sin(\beta_0) & -\frac{b_0}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{4.23}$$

gdzie r_{r0} jest promieniem tylnych napędowych kół ciągnika, a b_0 jest ich rozstawem.

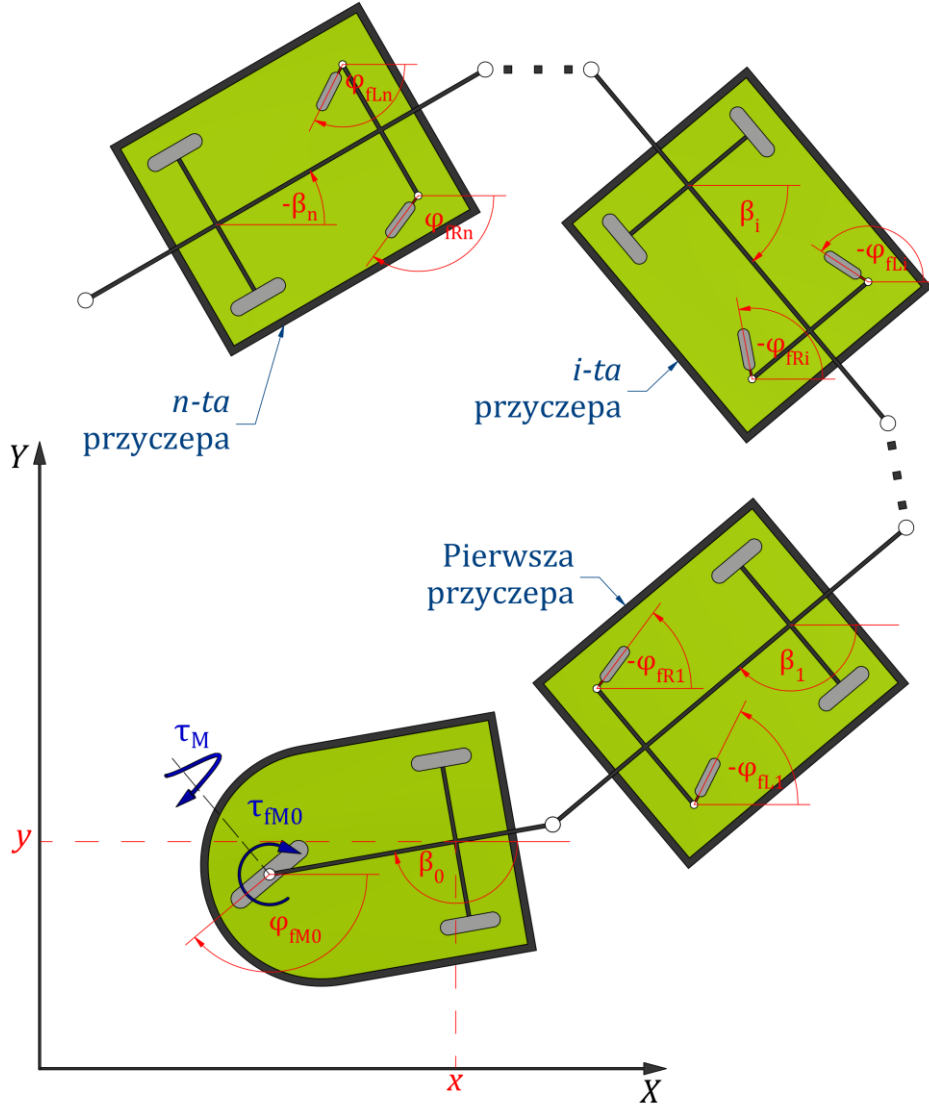
4.2.2.2 Układ z ciągnikiem z napędzanym i sterowanym przednim kołem (TTFS)

W tej sekcji przedstawiono DM-NHC dla układu składającego się z ciągnika typu TTFS oraz n przyczep wyposażonych w układ stałego dyszla (FDSS). Konfigurację tę przedstawiono na rysunku 4.2. Wektor współrzędnych uogólnionych składa się z N elementów, gdzie $N = 3n + 4$, i ma postać:

$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \beta_0 \quad \varphi_{fM0} \quad \beta_1 \quad \varphi_{fL1} \quad \varphi_{fR1} \quad \dots \quad \beta_n \quad \varphi_{fLn} \quad \varphi_{fRn}]^T. \tag{4.24}$$

Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunkach: 3.6 – dla ciągnika i 3.7 – dla i -tej przyczepy. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniach: 3.8 – dla ciągnika i 3.23 – dla i -tej przyczepy. Dwuelementowy wektor prędkości wejściowych składa się z prędkości liniowej punktu A_0 w kierunku wzdłużnym względem koła przedniego V_{A_0} oraz prędkości kątowej skrętu przedniego koła $\dot{\phi}_{fM0}$, co przedstawiono w równaniu 3.19. Wektor więzów nieholonomicznych układu $\mathbf{A}_z(\mathbf{q})$ przedstawiono w równaniu 3.26. Procedura

wyznaczania macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ została przedstawiona w podrozdziale 3.3, a jej ostateczna postać znajduje się w równaniu 3.34.



Rys. 4.2. Układ składający się z ciągnika (wariant TTFS) i liczby n przyczep (FDSS)

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika można zapisać jako:

$$T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.25)$$

gdzie: $T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu ciągnika (bez kół), $T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna lewego tylnego koła ciągnika, $T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna prawego tylnego koła ciągnika, $T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna przedniego koła ciągnika. Energia kinetyczna korpusu ciągnika może zostać zapisana jako:

$$T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_0(\dot{x}_{C_0}^2 + \dot{y}_{C_0}^2) + I_0 \dot{\beta}_0^2), \quad (4.26)$$

gdzie: m_0 i I_0 oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu ciągnika, x_{C_0}, y_{C_0} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół ciągnika można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rL0}(\dot{x}_{E_0}^2 + \dot{y}_{E_0}^2) + I_{rL0}\dot{\beta}_0^2) \\ T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rR0}(\dot{x}_{F_0}^2 + \dot{y}_{F_0}^2) + I_{rR0}\dot{\beta}_0^2) , \\ T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fM0}(\dot{x}_{A_0}^2 + \dot{y}_{A_0}^2) + I_{fM0}\dot{\phi}_{fM0}^2) \end{aligned} \quad (4.27)$$

gdzie: $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rL0}, I_{rR0}, I_{fM0}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_0}, y_{E_0}), (x_{F_0}, y_{F_0}), (x_{A_0}, y_{A_0})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego oraz przedniego koła ciągnika. Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy $T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ oraz jej składowych wyznaczono w sekcji 4.2.2.1 i zapisano w równaniach: 4.19–4.21.

Danymi wejściowymi w modelu są: moment napędowy przedniego koła ciągnika τ_M oraz moment skrętu tego koła τ_{fM0} . Oba momenty stanowią elementy wektora sił i momentów wejściowych $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_M \quad \tau_{fM0}]^T. \quad (4.28)$$

Macierz transformacji sił i momentów wejściowych $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ można wyrazić jako:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r_{f0}} \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) \cos(\varphi_{fM0}) & 0 \\ -\sin(\beta_0) \cos(\varphi_{fM0}) & 0 \\ h_0 \sin(\beta_0) \cos(\varphi_{fM0}) & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

gdzie r_{f0} jest promieniem przedniego koła ciągnika.

4.2.3 Wariant z przyczepami z układem podwójnego Ackermanna (DASS)

4.2.3.1 Układ z ciągnikiem z różnicowo napędzanymi kołami tylnej osi (DDT)

W tej sekcji przedstawiono DM-NHC dla układu składającego się z ciągnika typu DDT oraz n przyczep wyposażonych w układ podwójnego Ackermanna (DASS). Konfigurację tę przedstawiono na rysunku 4.3. Wektor współrzędnych uogólnionych składa się z N elementów, gdzie $N = 2n + 4$, i ma postać:

$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \beta_0 \quad \varphi_{fM0} \quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \cdots \quad \beta_{n1} \quad \beta_{n2}]^T. \quad (4.30)$$

Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunkach: 3.3 – dla ciągnika i 3.11 – dla i -tej przyczepy. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniach: 3.8 – dla ciągnika i 3.36 – dla i -tej przyczepy. Dwuelementowy wektor prędkości wejściowych składa się z prędkości punktu B_0 w kierunku wzdłużnym względem ciągnika oraz prędkości kątowej ciągnika względem punktu B_0 , co przedstawiono w równaniu 3.9. Wektor więzów nieholonomicznych układu $\mathbf{A}_z(\mathbf{q})$ przedstawiono w równaniu 3.37. Procedura wyznaczania macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ została przedstawiona w podrozdziale 3.4, a jej ostateczna postać znajduje się w równaniu 3.45.

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika $T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ opisano w równaniach 4.16–4.18. Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.31)$$

gdzie $T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy (bez kół i bez przedniego dyszla) oraz energia kinetyczna jej dyszla przedniego, $T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energie kinetyczne lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy może zostać zapisana jako:

$$T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_i (\dot{x}_{Ci}^2 + \dot{y}_{Ci}^2) + I_i \dot{\beta}_{i2}^2), \quad (4.32)$$

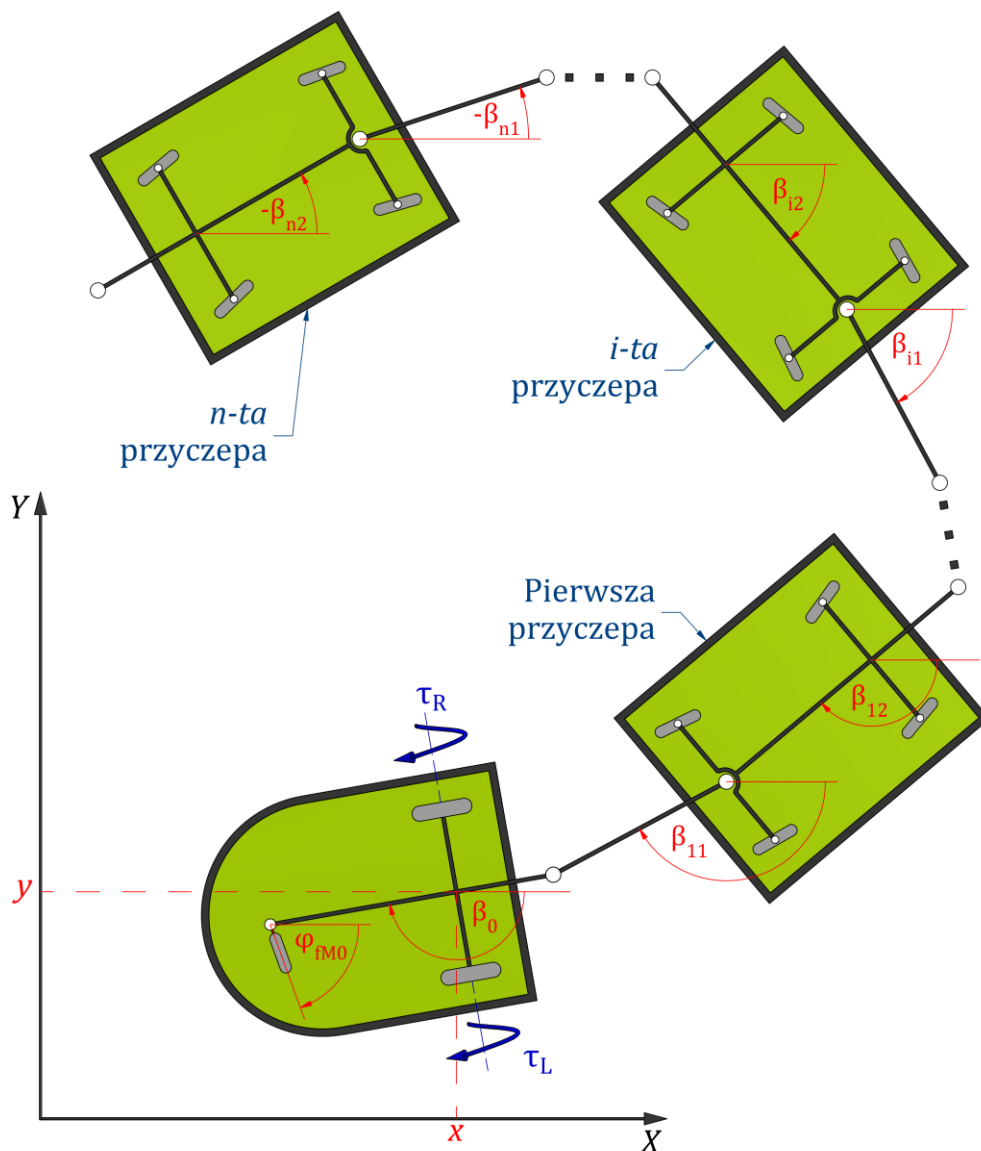
gdzie: m_i oraz I_i oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu i -tej przyczepy, x_{Ci} , y_{Ci} to współrzędne jego środka masy. Energia kinetyczna przedniego dyszla i -tej przyczepy może być wyrażona jako:

$$T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_{di} (\dot{x}_{Cdi}^2 + \dot{y}_{Cdi}^2) + I_{di} \dot{\beta}_{i1}^2), \quad (4.33)$$

gdzie: m_{di} oraz I_{di} – oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności przedniego dyszla i -tej przyczepy, x_{Cdi} , y_{Cdi} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rLi} (\dot{x}_{Ei}^2 + \dot{y}_{Ei}^2) + I_{rLi} \dot{\phi}_{rLi}^2) \\ T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rRi} (\dot{x}_{Fi}^2 + \dot{y}_{Fi}^2) + I_{rRi} \dot{\phi}_{rRi}^2) \\ T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fLi} (\dot{x}_{Hi}^2 + \dot{y}_{Hi}^2) + I_{fLi} \dot{\phi}_{fLi}^2) \\ T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fRi} (\dot{x}_{Gi}^2 + \dot{y}_{Gi}^2) + I_{fRi} \dot{\phi}_{fRi}^2) \end{aligned}, \quad (4.34)$$

gdzie: $m_{rLi}, m_{rRi}, m_{fLi}, m_{fRi}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rLi}, I_{rRi}, I_{fLi}, I_{fRi}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_i}, y_{E_i}), (x_{F_i}, y_{F_i}), (x_{H_i}, y_{H_i}), (x_{G_i}, y_{G_i})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Kąty $\varphi_{rLi}, \varphi_{rRi}, \varphi_{fLi}, \varphi_{fRi}$ wyznaczono w podrozdziale 3.4 (równanie 3.52).



Rys. 4.3. Układ składający się z ciągnika (wariant DDT) i liczby n przyczep (DASS)

Danymi wejściowymi w modelu są momenty obrotowe zadawane na tylne koła ciągnika: na koło lewe τ_L , na koło prawe τ_R . Momenty te są elementami wektora sił i momentów wejściowych τ :

$$\tau = [\tau_L \quad \tau_R]^T. \quad (4.35)$$

Macierz transformacji sił i momentów wejściowych $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ można wyrazić jako:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r_{r0}} \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) & -\sin(\beta_0) & \frac{b_0}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos(\beta_0) & -\sin(\beta_0) & -\frac{b_0}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.36)$$

gdzie r_{r0} jest promieniem tylnych napędowych kół ciągnika, a b_0 jest ich rozstawem.

4.2.3.2 Układ z ciągnikiem z napędzanym i sterowanym przednim kołem (TTFS)

W tej sekcji przedstawiono DM-NHC dla układu składającego się z ciągnika typu TTFS oraz n przyczep wyposażonych w układ podwójnego Ackermanna (DASS). Konfigurację tę przedstawiono na rysunku 4.4. Wektor współrzędnych uogólnionych składa się z N elementów, gdzie $N = 2n + 4$, i ma postać:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \beta_0 \ \varphi_{fM0} \ \beta_{11} \ \beta_{12} \ \cdots \ \beta_{n1} \ \beta_{n2}]^T. \quad (4.37)$$

Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunkach: 3.6 – dla ciągnika i 3.11 – dla i -tej przyczepy. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniach: 3.8 – dla ciągnika i 3.36 – dla i -tej przyczepy. Dwuelementowy wektor prędkości wejściowych składa się z prędkości liniowej punktu A_0 w kierunku wzdłużnym względem koła przedniego V_{A_0} oraz prędkości kątowej skrętu przedniego koła $\dot{\varphi}_{fM0}$, co przedstawiono w równaniu 3.19. Wektor więzów nieholonomicznych układu $\mathbf{A}_z(\mathbf{q})$ przedstawiono w równaniu 3.38. Procedura wyznaczania macierzy transformacji prędkości $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ została przedstawiona w podrozdziale 3.4, a jej ostateczna postać znajduje się w równaniu 3.47.

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika $T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, opisano w równaniach 4.25–4.27.

Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy $T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ opisano w równaniach 4.31–4.34.

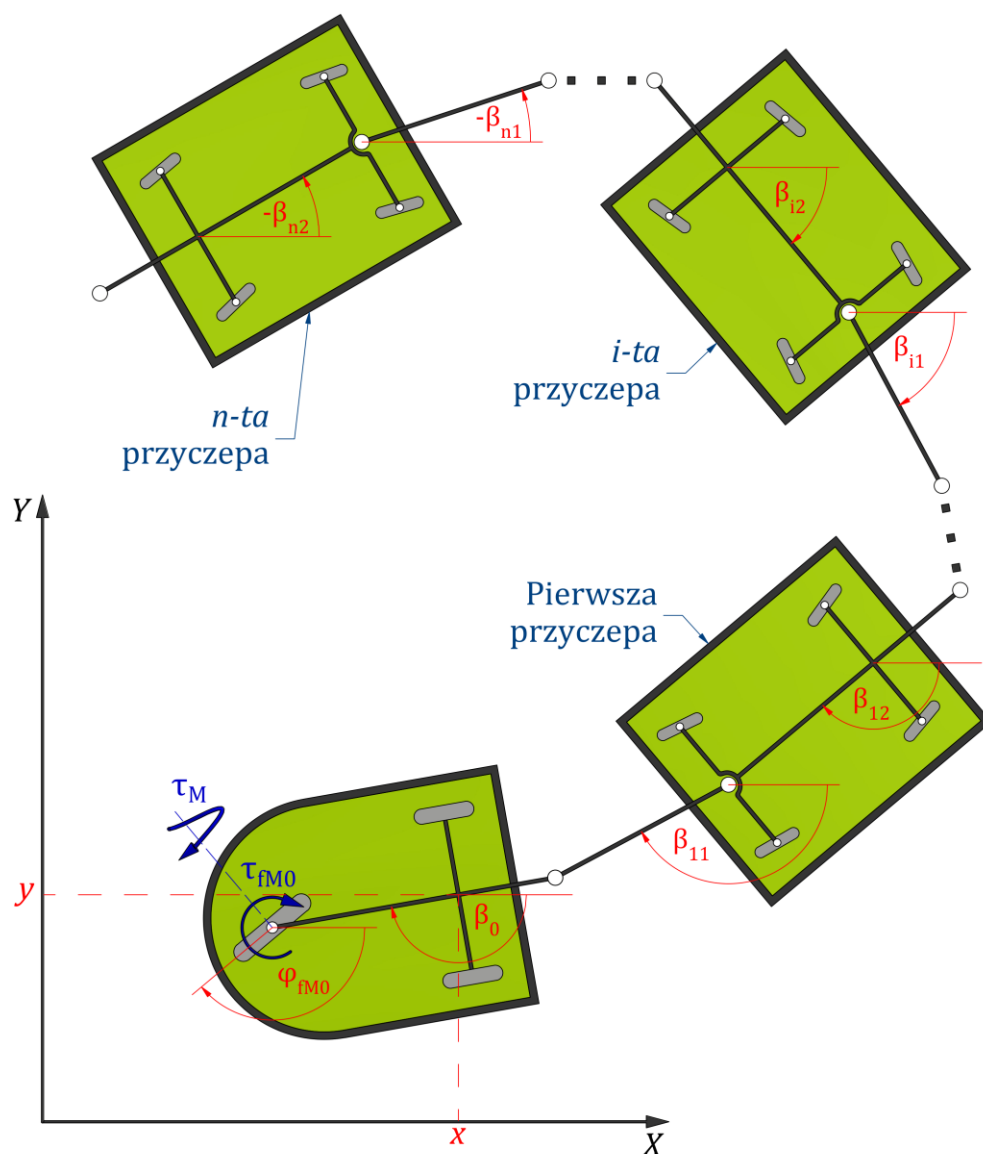
Danymi wejściowymi w modelu są: moment napędowy przedniego koła ciągnika τ_M oraz moment skrętu tego koła τ_{fM0} . Oba momenty stanowią elementy wektora sił i momentów wejściowych $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_M \ \tau_{fM0}]^T. \quad (4.38)$$

Macierz transformacji sił i momentów wejściowych $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ można wyrazić jako:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r_{f0}} \begin{bmatrix} \cos(\beta_0) \cos(\varphi_{fM0}) & 0 \\ -\sin(\beta_0) \cos(\varphi_{fM0}) & 0 \\ h_0 \sin(\beta_0) \cos(\varphi_{fM0}) & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

gdzie r_{f0} jest promieniem przedniego koła ciągnika.



Rys. 4.4. Układ składający się z ciągnika (wariant TTFS) i liczby n przyczep (DASS)

4.3 Model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia

4.3.1 Struktura modelu

W niniejszym podrozdziale przedstawiony został model dynamiczny N -wymiarowego układu mechanicznego uwzględniający tarcie pomiędzy kołami pojazdu a podłożem. Zgodnie z opisem zawartym w podrozdziale 4.1, model ten opracowano w dwóch wariantach: jako model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia poprzecznego (DM-LF) oraz jako rozszerzony model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia poprzecznego, wzdłużnego i oporów toczenia (DM-EXT). Rozpatrywany układ stanowi pociąg logistyczny składający się z ciągnika oraz n przyczep. Przyjęte założenia dotyczące budowy modelu

dynamicznego z uwzględnieniem tarcia przedstawiono odpowiednio w podrozdziałach: 4.3.2 (dla DM-LF) i 4.3.3 (dla DM-EXT).

Analizowany układ jest N -wymiarowy, dlatego wektor współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]^T. \quad (4.40)$$

Opracowany modelu dynamiczny uwzględniający tarcie bazuje na równaniu Lagrange'a II rodzaju, które można zapisać jako:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad (4.41)$$

gdzie: $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = [Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_N]^T$ jest wektorem sił uogólnionych, a lagranżian $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jest różnicą pomiędzy energią kinetyczną $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, a energią potencjalną $U(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}), \quad (4.42)$$

gdzie $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ jest macierzą bezwładności układu. Energię kinetyczną i potencjalną układu można zapisać w następujący sposób:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.43)$$

$$U(\mathbf{q}) = 0$$

gdzie $T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jest całkowitą energią kinetyczną ciągnika, a $T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jest całkowitą energią kinetyczną i -tej przyczepy. Macierz bezwładności układu $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ można wyznaczyć następujący sposób:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_N} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_N^2} \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Równanie 4.38 można również zapisać w postaci:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad (4.45)$$

gdzie $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem sił odśrodkowych i Coriolisa, który można zapisać jako:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T + \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (4.46)$$

Wektor sił uogólnionych $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ zawiera składowe siły, które wpływają na ruch układu mechanicznego w kierunkach określonych przez współrzędne uogólnione q_i . Każdy

element Q_i tego wektora reprezentuje sumaryczny wpływ wszystkich sił rzeczywistych działających na układ, zredukowany do kierunku odpowiadającego danej współrzędnej uogólnionej. Poszczególne elementy wektora sił uogólnionych można zatem zapisać jako:

$$Q_i = \sum_j \hat{\mathbf{F}}_j \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_j}{\partial q_i}, \quad (4.47)$$

gdzie: $\hat{\mathbf{F}}_j$ jest wektorem siły rzeczywistej działającej na układ, wyrażonej względem współrzędnych kartezjańskich, $\hat{\mathbf{r}}_j$ jest wektorem położenia punktu, w którym działa siła $\hat{\mathbf{F}}_j$.

Ze względu na liczbę wariantów oraz złożoność zależności występujących w modelu dynamicznym uwzględniającym tarcie, model pociągu logistycznego został podzielony na segmenty, z których każdy opisuje oddzielnie jedną jednostkę zestawu. Oznacza to, że niezależnie opracowano model ciągnika oraz model pojedynczej, i -tej przyczepy, który następnie powielany jest dla $i = 1, \dots, n$, co pozwala zbudować model całego układu poprzez ich złożenie. Finalny model całego układu uzyskuje się poprzez konkatencję odpowiednich macierzy i wektorów poszczególnych jednostek. Wektor współrzędnych uogólnionych całego układu można wówczas zapisać jako:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_0^T | \mathbf{q}_1^T | \dots | \mathbf{q}_n^T]^T, \quad (4.48)$$

gdzie: $\mathbf{q}_0$ jest wektorem współrzędnych uogólnionych ciągnika, a $\mathbf{q}_i$ dla $i = 1, \dots, n$ to wektor współrzędnych uogólnionych i -tej przyczepy. Macierz sił rzeczywistych działających na układ $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_f \times 2}$ zawiera wszystkie siły zapisane względem globalnego układu współrzędnych, tj.:

- pierwsza kolumna zawiera składowe sił w kierunku osi X ,
- druga kolumna zawiera składowe sił w kierunku osi Y .

Liczba n_f oznacza łączną liczbę punktów przyłożenia sił kontaktowych w układzie. Każda siła zapisana jest jako dwuskładowy wektor (X, Y) , co odpowiada jednej pozycji (wierszowi) w macierzy. Macierz $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q})$ jest wynikiem konkatencji pionowej macierzy sił przyłożonych do poszczególnych jednostek układu:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{q}) \\ \hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

gdzie: $\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{q})$ jest macierzą sił działających na ciągnik, a $\hat{\mathbf{F}}_i(\mathbf{q})$ jest macierzą sił działających na i -tą przyczepę dla $i = 1, \dots, n$. Analogicznie, macierz położeń punktów przyłożenia sił $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_f \times 2}$ jest zdefiniowana jako:

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}) \\ \hat{\mathbf{r}}_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

gdzie: $\hat{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q})$ jest macierzą położeń punktów przyłożenia sił do ciągnika, $\hat{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q})$ jest macierzą położeń punktów przyłożenia sił do i -tej przyczepy dla $i = 1, \dots, n$. W macierzy $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q})$, kolumny mają to samo znaczenie jak w $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q})$: kolumna pierwsza odpowiada współrzędnej X , kolumna druga – współrzędnej Y . W przypadku momentów zewnętrznych przyłożonych bezpośrednio do współrzędnych kątowych układu, wprowadzono dodatkowo wektor momentów zewnętrznych $\hat{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{n_m}$, gdzie n_m oznacza liczbę zadanych momentów. Wektor można przedstawić jako wynik konkatenacji wektorów momentów zadanych na poszczególne jednostki układu:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_0 \\ \hat{\mathbf{M}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

gdzie: $\hat{\mathbf{M}}_0$ jest wektorem momentów zewnętrznych działających na ciągnik, a $\hat{\mathbf{M}}_i$ jest wektorem momentów zewnętrznych działających na i -tą przyczepę dla $i = 1, \dots, n$. Analogicznie, wektor współrzędnych kątowych $\boldsymbol{\varpi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_m}$, odpowiadającym momentom zewnętrznym, jest zdefiniowany jako:

$$\boldsymbol{\varpi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varpi}_0(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\varpi}_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varpi}_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

gdzie: $\boldsymbol{\varpi}_0(\mathbf{q})$ jest wektorem współrzędnych kątowych, odpowiadającym momentom zewnętrznym działającym na ciągnik, $\boldsymbol{\varpi}_i(\mathbf{q})$ jest wektorem współrzędnych kątowych, odpowiadającym momentom zewnętrznym działającym na i -tą przyczepę dla $i = 1, \dots, n$. Na tej podstawie wektor sił uogólnionych można zapisać jako:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^2 \hat{F}_{i,j} \circ \frac{\partial \hat{r}_{i,j}}{\partial q_1} + \sum_{\kappa=1}^{n_m} \hat{M}_{\kappa} \frac{\partial \varpi_{\kappa}}{\partial q_1} \\ \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^2 \hat{F}_{i,j} \circ \frac{\partial \hat{r}_{i,j}}{\partial q_2} + \sum_{\kappa=1}^{n_m} \hat{M}_{\kappa} \frac{\partial \varpi_{\kappa}}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^2 \hat{F}_{i,j} \circ \frac{\partial \hat{r}_{i,j}}{\partial q_N} + \sum_{\kappa=1}^{n_m} \hat{M}_{\kappa} \frac{\partial \varpi_{\kappa}}{\partial q_N} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

gdzie: $\hat{F}_{i,j}$ oznacza wartość j -tej składowej ($j = 1$ dla X , $j = 2$ dla Y) wektora i -tej siły, a $\hat{r}_{i,j}$ to wartość j -tej współrzędnej i -tej siły, symbol $\circ$ oznacza iloczyn Hadamarda (iloczyn elementów o tych samych indeksach).

4.3.2 Model dynamiczny z uwzględnieniem tarcia poprzecznego (DM-LF)

4.3.2.1 Założenia modelowe

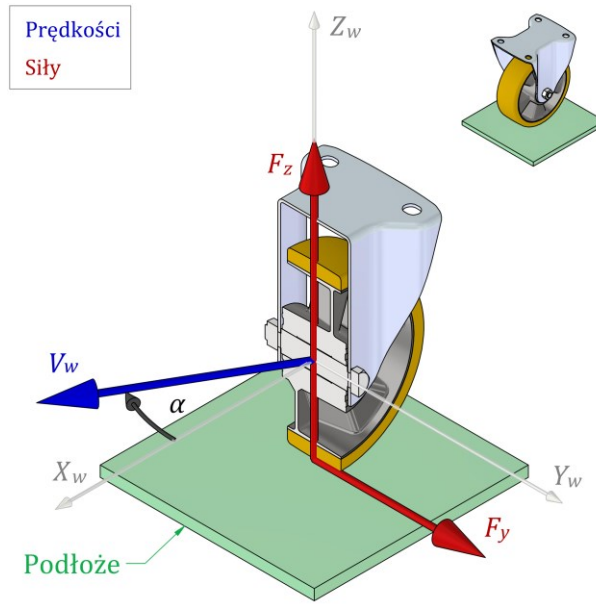
Niniejszy rozdział poświęcony jest modelowi dynamicznemu uwzględniającemu tarcie poprzeczne kół (DM-LF). Podczas budowania DM-LF przyjęto następujące założenia:

- każdy komponent układu jest traktowany jako bryła sztywna,
- ruch pojazdu odbywa się w płaskim, dwuwymiarowym środowisku,
- dynamika w kierunku pionowym nie jest uwzględniana, a wszystkie koła pozostają w stałym kontakcie z podłożem,
- siły reakcji podłoża w kierunku pionowym (siły normalne) są wyznaczone na podstawie wyrażen wynikających ze statycznej równowagi danej jednostki,
- koła pojazdu toczą się bez poślizgu wzdłużnego,
- energia kinetyczna wynikająca z toczenia się kół jest pomijana,
- każde koło posiada własną masę, nieujęta w masie jednostki, do której jest przymocowane,
- środek ciężkości każdej jednostki znajduje się na jej osi podłużnej,
- środek masy każdego koła skrętnego znajduje się na pionowej osi przechodzącej przez punkt styku tego koła z podłożem (czyli w płaszczyźnie ruchu przyjmuje się, że punkt styku i środek masy pokrywają się w rzucie 2D).
- w układzie podwójnego Ackermanna dyszel przedni przyczepy jest traktowany jako osobny element posiadający własną masę.

Do wyznaczenia sił tarcia poprzecznego między kołem a podłożem zastosowano model funkcji sigmoidalnej opisany funkcją:

$$F_y(\alpha, F_z, \mu_{y,max}, C_y) = F_z \mu_{y,max} \left(\frac{2}{1 + e^{-2 C_y \sin(\alpha)}} - 1 \right), \quad (4.54)$$

gdzie argumenty funkcji $\alpha, F_z, \mu_{y,max}, C_y$ reprezentują kolejno: kąt znoszenia bocznego (kąt poślizgu), siłę nacisku działającą na koło, maksymalny współczynnik tarcia poprzecznego i sztywność poprzeczną koła. Schemat ideowy poprzecznej siły tarcia działającej na koło przedstawiono na rysunku 4.5.

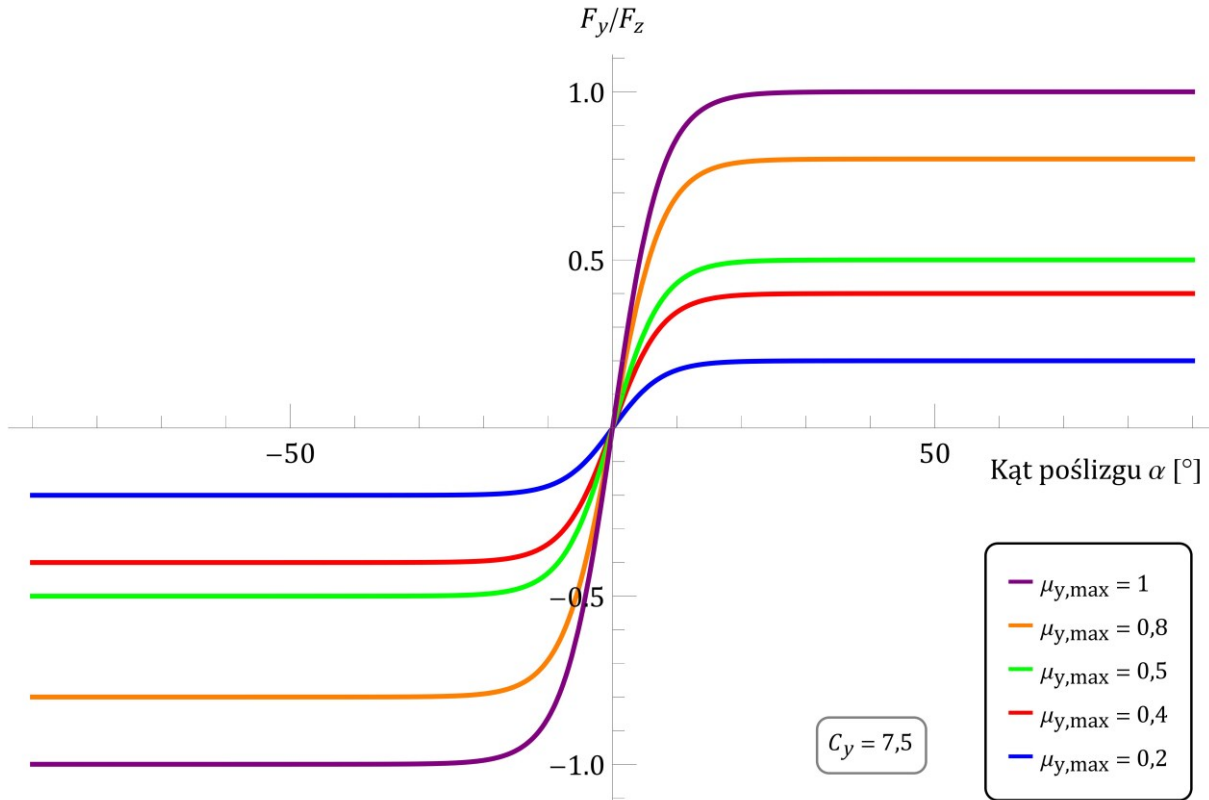


Rys. 4.5. Schemat ideowy poprzecznej siły tarcia działającej na koło; X_w, Y_w, Z_w – współrzędne lokalnego układu współrzędnych koła; V_w – wypadkowa prędkość koła;

Parametry $\mu_{y,max}, C_y$ sterują kształtem funkcji opisującej siłę tarcia poprzecznego. $\mu_{y,max}$ określa wartość maksymalną, jaką może osiągnąć ta siła, natomiast C_y odpowiada za nachylenie (stromość) krzywej w punkcie $\alpha = 0$, czyli za czułość siły tarcia na małe wartości kąta poślizgu. Na rysunku 4.6 przedstawiono przykładowe krzywe zależności F_y/F_z dla różnych wartości maksymalnego współczynnika tarcia poprzecznego $\mu_{y,max}$, przy stałej wartości sztywności poprzecznej koła C_y . Poprzeczna siła tarcia jest wynikiem poślizgu bocznego opony, który może być opisany przez kąt znoszenia bocznego α (rys. 4.5). Kąt ten opisuje odchylenie wektora prędkości punktu kontaktu koła względem kierunku orientacji samego koła i można go wyrazić w postaci funkcji:

$$\alpha(V_{x_w}, V_{y_w}, \varphi_{ref}) = -\arctan2(V_{y_w}, V_{x_w}) - \varphi_{ref}, \quad (4.55)$$

gdzie: V_{x_w}, V_{y_w} są prędkościami środka lokalnego układu współrzędnych koła odpowiednio w kierunku wzdłużnym i poprzecznym, φ_{ref} jest kątem orientacji koła względem globalnego układu współrzędnych.



Rys. 4.6. Krzywe F_y/F_z uzyskane na podstawie modelu sigmoidalnego tarcia poprzecznego

4.3.2.2 Model dynamiczny ciągnika

4.3.2.2.1 Ciągnik z różnicowo napędzanymi kołami tylnej osi (DDT)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-LF ciągnika typu DDT. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.3. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.8. W tym przypadku wektor współrzędnych uogólnionych składa się z 4 współrzędnych uogólnionych (rys. 4.7), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_0 = [x \quad y \quad \beta_0 \quad \varphi_{fM0}]^T. \quad (4.56)$$

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika można zapisać jako:

$$T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.57)$$

gdzie: $T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu ciągnika (bez kół), $T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna lewego tylnego koła ciągnika, $T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna prawego

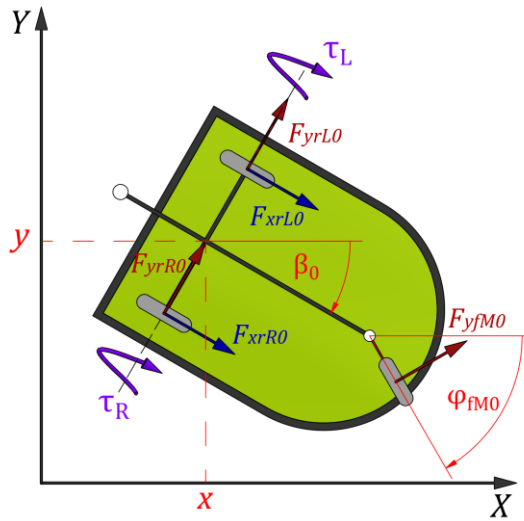
tylnego koła ciągnika, $T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna przedniego koła ciągnika. Energia kinetyczna korpusu ciągnika może zostać zapisana jako:

$$T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_0(\dot{x}_{C_0}^2 + \dot{y}_{C_0}^2) + I_0 \dot{\beta}_0^2), \quad (4.58)$$

gdzie: m_0 i I_0 oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu ciągnika, x_{C_0}, y_{C_0} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół ciągnika można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rL0}(\dot{x}_{E_0}^2 + \dot{y}_{E_0}^2) + I_{rL0} \dot{\beta}_0^2) \\ T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rR0}(\dot{x}_{F_0}^2 + \dot{y}_{F_0}^2) + I_{rR0} \dot{\beta}_0^2) \quad , \\ T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fM0}(\dot{x}_{A_{0s}}^2 + \dot{y}_{A_{0s}}^2) + I_{fM0} \dot{\varphi}_{fM0}^2) \end{aligned} \quad (4.59)$$

gdzie: $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rL0}, I_{rR0}, I_{fM0}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_0}, y_{E_0}), (x_{F_0}, y_{F_0}), (x_{A_{0s}}, y_{A_{0s}})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego oraz przedniego koła ciągnika. Siły działające na ciągnik zostały przedstawione na rysunku 4.7.



Rys. 4.7. Siły działające na DDT (siły poprzeczne względem kół oznaczono kolorem czerwonym, a siły wzdłużne – kolorem niebieskim)

Macierz sił działających na ciągnik można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_{yrL0} \sin(\beta_0) & F_{yrL0} \cos(\beta_0) \\ F_{xrL0} \cos(\beta_0) & -F_{xrL0} \sin(\beta_0) \\ F_{yrR0} \sin(\beta_0) & F_{yrR0} \cos(\beta_0) \\ F_{xrR0} \cos(\beta_0) & -F_{xrR0} \sin(\beta_0) \\ F_{yfM0} \sin(\varphi_{fM0}) & F_{yfM0} \cos(\varphi_{fM0}) \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

gdzie: $F_{yrL0}, F_{yrR0}, F_{yfM0}$ to siły tarcia poprzecznego, a F_{xrL0} i F_{xrR0} to siły napędowe wynikające z zadanych momentów napędowych, które można zapisać jako:

$$\begin{cases} F_{xrL0} = \frac{\tau_L}{r_{r0}} \\ F_{xrR0} = \frac{\tau_R}{r_{r0}} \end{cases} \quad (4.61)$$

gdzie: τ_L, τ_R to momenty napędowe zadane odpowiednio na lewe i prawe tylne koło, a r_{r0} to promień kół tylnych ciągnika. Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{A_{0s}} & y_{A_{0s}} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Ze względu na brak momentów zewnętrznych, przyjmuje się, że wektor momentów zewnętrznych oraz odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych mają rozmiar zerowy: $\hat{\mathbf{M}}_0 \in \mathbb{R}^0$ i $\boldsymbol{\varpi}_0(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^0$. Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \alpha_{rL0} &= \alpha(\dot{x}_{E_0}, \dot{y}_{E_0}, \beta_0) \\ \alpha_{rR0} &= \alpha(\dot{x}_{F_0}, \dot{y}_{F_0}, \beta_0) \\ \alpha_{fM0} &= \alpha(\dot{x}_{A_{0s}}, \dot{y}_{A_{0s}}, \varphi_{fM0}) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Siły pionowe wynikające z nacisku i reakcji podłoża zostały przedstawione na rysunku 4.8. Siły te można zapisać za pomocą równań statyki układu:

$$\begin{aligned} \sum M_{X_0} = 0: & F_{NrL0} \frac{b_0}{2} - F_{NrR0} \frac{b_0}{2} - F_{NfM0} e_{fM0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0) = 0 \\ \sum M_{Y_0} = 0: & F_{gc0} c_0 - F_{NfM0} (h_0 + e_{fM0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0)) = 0 \\ \sum F_{Z_0} = 0: & F_{zrL0} + F_{zrR0} + F_{zfM0} - F_{gc0} - F_{grR0} - F_{grL0} - F_{gfM0} = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

gdzie:

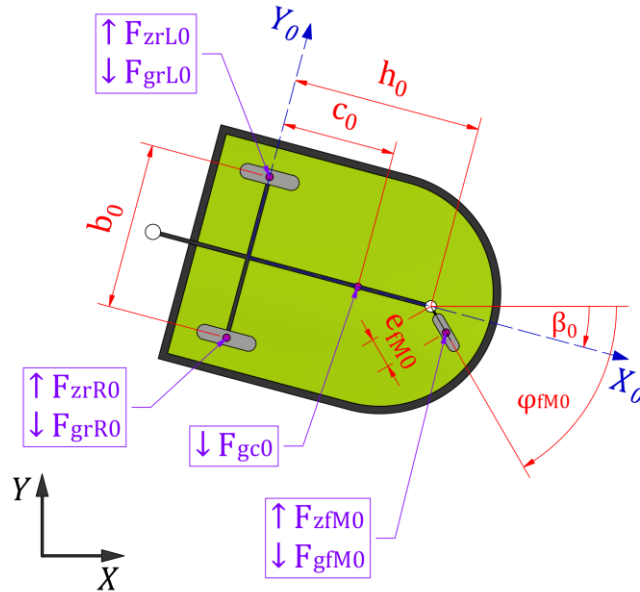
$$\begin{aligned} F_{NrL0} &= F_{zrL0} - F_{grL0} \\ F_{NrR0} &= F_{zrR0} - F_{grR0} , \\ F_{NfM0} &= F_{zfM0} - F_{gfM0} \end{aligned} \quad (4.65)$$

a $F_{gc0}, F_{grL0}, F_{grR0}, F_{gfM0}$ to siły ciężkości ciągnika i poszczególnych kół, które można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
 F_{gc0} &= m_0 g \\
 F_{grL0} &= m_{rL0} g \\
 F_{grR0} &= m_{rR0} g' \\
 F_{gfM0} &= m_{fM0} g
 \end{aligned}
 \tag{4.66}$$

gdzie: g to przyspieszenie ziemskie, m_0 to masa korpusu ciągnika (bez kół), $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to masy kół kolejno: tylnego lewego, tylnego prawego i przedniego. Rozwiązanie układu równań 4.64 pozwala wyznaczyć siły reakcji podłoża:

$$\begin{aligned}
 F_{zfM0} &= F_{gfM0} + \frac{F_{gc0} c_0}{h_0 + e_{fM0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0)} \\
 F_{zrL0} &= \frac{1}{2} \left(F_{gc0} + 2F_{grL0} - \frac{F_{gc0} c_0 (b_0 - 2e_{fM0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0))}{b_0 (h_0 + e_{fM0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0))} \right) \\
 F_{zrR0} &= \frac{1}{2} \left(F_{gc0} + 2F_{grR0} - \frac{F_{gc0} c_0 (b_0 + 2e_{fM0} \sin(\varphi_{fM0} - \beta_0))}{b_0 (h_0 + e_{fM0} \cos(\varphi_{fM0} - \beta_0))} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$



Rys. 4.8. Siły pionowe działające na DDT; ↓ - siła nacisku skierowana przeciwnie do zwrotu osi Z; ↑ - siła reakcji podłoża skierowana zgodnie ze zwrotem osi Z;

Siły tarcia poprzecznego działające na ciągnik można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 F_{yrL0} &= F_y(\alpha_{rL0}, F_{zrL0}, \mu_{yrL0}, C_{yrL0}) \\
 F_{yrR0} &= F_y(\alpha_{rR0}, F_{zrR0}, \mu_{yrR0}, C_{yrR0}) , \\
 F_{yfM0} &= F_y(\alpha_{fM0}, F_{zfM0}, \mu_{yfM0}, C_{yfM0})
 \end{aligned}
 \tag{4.68}$$

gdzie: $\mu_{yrL0}, \mu_{yrR0}, \mu_{yfM0}$ to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrL0}, C_{yrR0}, C_{yfM0}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

4.3.2.2.2 Ciągnik z napędzanym skrętnym sterowanym przednim kołem (TTFS)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-LF ciągnika typu TTFS. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.6. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.8. W tym przypadku wektor współrzędnych uogólnionych składa się z 4 współrzędnych uogólnionych (rys. 4.9), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_0 = [x \quad y \quad \beta_0 \quad \varphi_{fM0}]^T. \quad (4.69)$$

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika można zapisać jako:

$$T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.70)$$

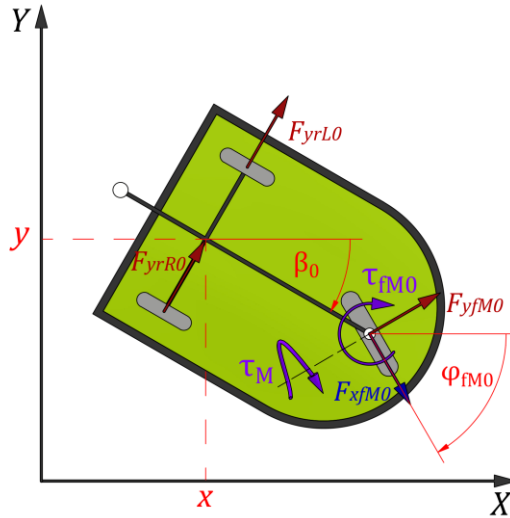
gdzie: $T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu ciągnika (bez kół), $T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna lewego tylnego koła ciągnika, $T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna prawego tylnego koła ciągnika, $T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna przedniego koła ciągnika. Energia kinetyczna korpusu ciągnika może zostać zapisana jako:

$$T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_0(\dot{x}_{C_0}^2 + \dot{y}_{C_0}^2) + I_0\dot{\beta}_0^2), \quad (4.71)$$

gdzie: m_0 i I_0 oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu ciągnika, x_{C_0}, y_{C_0} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół ciągnika można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rL0}(\dot{x}_{E_0}^2 + \dot{y}_{E_0}^2) + I_{rL0}\dot{\beta}_0^2) \\ T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rR0}(\dot{x}_{F_0}^2 + \dot{y}_{F_0}^2) + I_{rR0}\dot{\beta}_0^2) , \\ T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fM0}(\dot{x}_{A_0}^2 + \dot{y}_{A_0}^2) + I_{fM0}\dot{\varphi}_{fM0}^2) \end{aligned} \quad (4.72)$$

gdzie: $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rL0}, I_{rR0}, I_{fM0}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_0}, y_{E_0}), (x_{F_0}, y_{F_0}), (x_{A_0}, y_{A_0})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego oraz przedniego koła ciągnika. Siły działające na ciągnik zostały przedstawione na rysunku 4.9.



Rys. 4.9. Siły działające na TTFS (siły poprzeczne względem kół oznaczono kolorem czerwonym, a siły wzdłużne – kolorem niebieskim)

Macierz sił działających na ciągnik można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_{yrL0} \sin(\beta_0) & F_{yrL0} \cos(\beta_0) \\ F_{yrR0} \sin(\beta_0) & F_{yrR0} \cos(\beta_0) \\ F_{yfM0} \sin(\varphi_{fM0}) & F_{yfM0} \cos(\varphi_{fM0}) \\ F_{xfM0} \cos(\varphi_{fM0}) & -F_{xfM0} \sin(\varphi_{fM0}) \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

gdzie: F_{yrL0} , F_{yrR0} , F_{yfM0} to siły tarcia poprzecznego, a F_{xfM0} to siła napędowa wynikająca z zadanego momentu napędowego na przednie koło ciągnika:

$$F_{xfM0} = \frac{\tau_M}{r_{f0}}, \quad (4.74)$$

gdzie: τ_M to moment napędowy zadany na przednie koło, a r_{f0} to promień koła przedniego ciągnika. Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{A_0} & y_{A_0} \\ x_{A_0} & y_{A_0} \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Na przednie koło ciągnika zadany jest moment zewnętrzny inicjujący skręt tego koła τ_{fM0} .

W związku z tym wektor momentów zewnętrznych można zapisać jako:

$$\hat{\mathbf{M}}_0 = [\tau_{fM0}]. \quad (4.76)$$

Odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varpi}_0(\mathbf{q}) = [\varphi_{fM0}]. \quad (4.77)$$

Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\alpha_{rL0} &= \alpha(\dot{x}_{E_0}, \dot{y}_{E_0}, \beta_0) \\
\alpha_{rR0} &= \alpha(\dot{x}_{F_0}, \dot{y}_{F_0}, \beta_0) \quad . \\
\alpha_{fM0} &= \alpha(\dot{x}_{A_0}, \dot{y}_{A_0}, \varphi_{fM0})
\end{aligned}
\tag{4.78}$$

Siły pionowe wynikające z nacisku i reakcji podłoża zostały przedstawione na rysunku

4.8. Siły te można zapisać za pomocą równań statyki układu:

$$\begin{aligned}
\sum M_{X_0} = 0: F_{NrL0} \frac{b_0}{2} - F_{NrR0} \frac{b_0}{2} &= 0 \\
\sum M_{Y_0} = 0: F_{gc0} c_0 - F_{NfM0} h_0 &= 0 \\
\sum F_{Z_0} = 0: F_{zrL0} + F_{zrR0} + F_{zfM0} - F_{gc0} - F_{grR0} - F_{grL0} - F_{gfM0} &= 0
\end{aligned}
\tag{4.79}$$

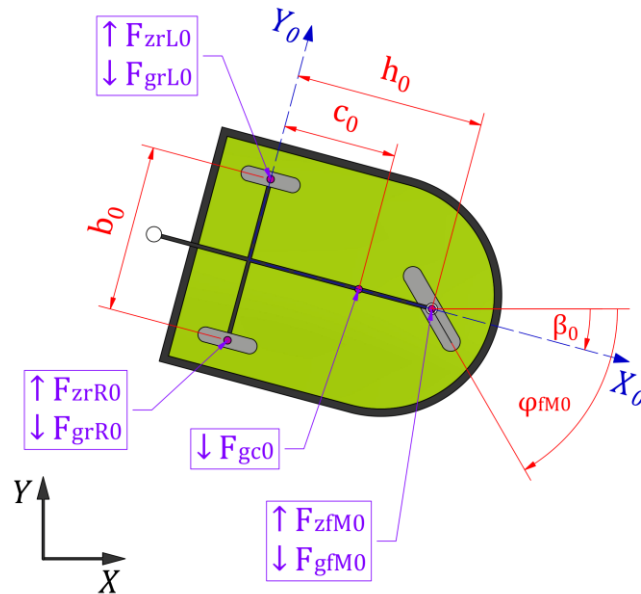
gdzie:

$$\begin{aligned}
F_{NrL0} &= F_{zrL0} - F_{grL0} \\
F_{NrR0} &= F_{zrR0} - F_{grR0} \quad , \\
F_{NfM0} &= F_{zfM0} - F_{gfM0}
\end{aligned}
\tag{4.80}$$

a $F_{gc0}, F_{grL0}, F_{grR0}, F_{gfM0}$ to siły ciężkości ciągnika i poszczególnych kół, które można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
F_{gc0} &= m_0 g \\
F_{grL0} &= m_{rL0} g \\
F_{grR0} &= m_{rR0} g \quad , \\
F_{gfM0} &= m_{fM0} g
\end{aligned}
\tag{4.81}$$

gdzie: g to przyspieszenie ziemskie, m_0 to masa korpusu ciągnika (bez kół), $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to masy kół kolejno: tylnego lewego, tylnego prawego i przedniego.



Rys. 4.10. Siły pionowe działające na DDT; ↓ - siła nacisku skierowana przeciwnie do zwrotu osi Z; ↑ - siła reakcji podłoża skierowana zgodne ze zwrotem osi Z;

Rozwiązanie układu równań 4.79 pozwala wyznaczyć siły reakcji podłoża:

$$\begin{aligned}
F_{zfM0} &= F_{gfM0} + \frac{F_{gc0}c_0}{h_0} \\
F_{zrL0} &= F_{grL0} + \frac{F_{gc0}(h_0 - c_0)}{h_0} \\
F_{zrR0} &= F_{grR0} + \frac{F_{gc0}(h_0 - c_0)}{h_0}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Siły tarcia poprzecznego działające na ciągnik można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
F_{yrL0} &= F_y(\alpha_{rL0}, F_{zrL0}, \mu_{yrL0}, C_{yrL0}) \\
F_{yrR0} &= F_y(\alpha_{rR0}, F_{zrR0}, \mu_{yrR0}, C_{yrR0}) , \\
F_{yfM0} &= F_y(\alpha_{fM0}, F_{zfM0}, \mu_{yfM0}, C_{yfM0})
\end{aligned} \tag{4.83}$$

gdzie: $\mu_{yrL0}, \mu_{yrR0}, \mu_{yfM0}$ to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrL0}, C_{yrR0}, C_{yfM0}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

4.3.2.3 Model dynamiczny i-tej przyczepy

4.3.2.3.1 Przyczepa z układem stałego dyszla (FDSS)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-LF i -tej przyczepy typu FDSS. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.7. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.23. Wektor współrzędnych uogólnionych i -tej przyczepy z układem stałego dyszla składa się z 3 współrzędnych uogólnionych (rys. 4.11), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_i = [\beta_i \quad \varphi_{fLi} \quad \varphi_{fRi}]^T. \tag{4.84}$$

Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{4.85}$$

gdzie $T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy (bez kół), $T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energie kinetyczne lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy może zostać zapisana jako:

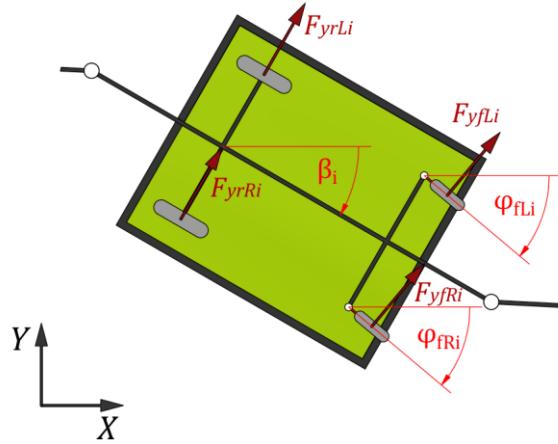
$$T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_i(\dot{x}_{Ci}^2 + \dot{y}_{Ci}^2) + I_i \dot{\beta}_i^2), \tag{4.86}$$

gdzie: m_i i I_i oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu i -tej przyczepy, x_{Ci} , y_{Ci} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rLi}(\dot{x}_{E_i}^2 + \dot{y}_{E_i}^2) + I_{rLi}\dot{\beta}_i^2) \\
T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rRi}(\dot{x}_{F_i}^2 + \dot{y}_{F_i}^2) + I_{rRi}\dot{\beta}_i^2) \\
T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fLi}(\dot{x}_{H_{is}}^2 + \dot{y}_{H_{is}}^2) + I_{fLi}\dot{\phi}_{fLi}^2) \\
T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fRi}(\dot{x}_{G_{is}}^2 + \dot{y}_{G_{is}}^2) + I_{fRi}\dot{\phi}_{fRi}^2)
\end{aligned} \tag{4.87}$$

gdzie: $m_{rLi}, m_{rRi}, m_{fLi}, m_{fRi}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rLi}, I_{rRi}, I_{fLi}, I_{fRi}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. $(x_{E_i}, y_{E_i}), (x_{F_i}, y_{F_i}), (x_{H_{is}}, y_{H_{is}}), (x_{G_{is}}, y_{G_{is}})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy.

Siły działające na i -tą przyczepę zostały przedstawione na rysunku 4.11.



Rys. 4.11. Siły działające na i -tą przyczepę (FDSS)

Macierz sił działających na i -tą przyczepę można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_{yrLi} \sin(\beta_i) & F_{yrLi} \cos(\beta_i) \\ F_{yrRi} \sin(\beta_i) & F_{yrRi} \cos(\beta_i) \\ F_{yfLi} \sin(\phi_{fLi}) & F_{yfLi} \cos(\phi_{fLi}) \\ F_{yfRi} \sin(\phi_{fRi}) & F_{yfRi} \cos(\phi_{fRi}) \end{bmatrix}, \tag{4.88}$$

gdzie: $F_{yrLi}, F_{yrRi}, F_{yfLi}, F_{yfRi}$ to siły tarcia poprzecznego działające na poszczególne koła.

Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{E_i} & y_{E_i} \\ x_{F_i} & y_{F_i} \\ x_{H_{is}} & y_{H_{is}} \\ x_{G_{is}} & y_{G_{is}} \end{bmatrix}. \tag{4.89}$$

Ze względu na brak momentów zewnętrznych, przyjmuje się, że wektor momentów zewnętrznych oraz odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych mają rozmiar

zerowy: $\hat{\mathbf{M}}_i \in \mathbb{R}^0$ i $\mathbf{\varpi}_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^0$. Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\alpha_{rLi} &= \alpha(\dot{x}_{Ei}, \dot{y}_{Ei}, \beta_i) \\ \alpha_{rRi} &= \alpha(\dot{x}_{Fi}, \dot{y}_{Fi}, \beta_i) \\ \alpha_{fLi} &= \alpha(\dot{x}_{His}, \dot{y}_{His}, \varphi_{fLi}) \\ \alpha_{fRi} &= \alpha(\dot{x}_{Gis}, \dot{y}_{Gis}, \varphi_{fRi})\end{aligned}\quad (4.90)$$

Siły pionowe wynikające z nacisku i reakcji podłoża zostały przedstawione na rysunku 4.12. W przypadku pojazdów czterokołowych, układ równań statyki dostarcza trzech równań dla czterech niewiadomych. Aby zamknąć układ, konieczne jest wprowadzenie czwartego równania, które w tym przypadku zakłada, że suma sił reakcji działających po jednej przekątnej jest równa sumie sił reakcji po przekątnej przeciwnej:

$$\begin{aligned}\sum M_{X_i} = 0: & F_{NrLi} \frac{b_i}{2} + F_{NfLi} \left(\frac{b_i}{2} - e_{YfLi} \right) - F_{NrRi} \frac{b_i}{2} - F_{NfRi} \left(\frac{b_i}{2} + e_{YfRi} \right) = 0 \\ \sum M_{Y_i} = 0: & F_{gci} c_i - F_{NfLi} (h_i + e_{XfLi}) - F_{NfRi} (h_i + e_{XfRi}) = 0 \\ \sum F_{Z_i} = 0: & F_{zrLi} + F_{zrRi} + F_{zfLi} + F_{zfRi} - F_{gci} - F_{grRi} - F_{grLi} - F_{gfRi} - F_{gfLi} = 0 \\ & F_{zrLi} + F_{zfRi} = F_{zrRi} + F_{zfLi}\end{aligned}\quad (4.91)$$

gdzie:

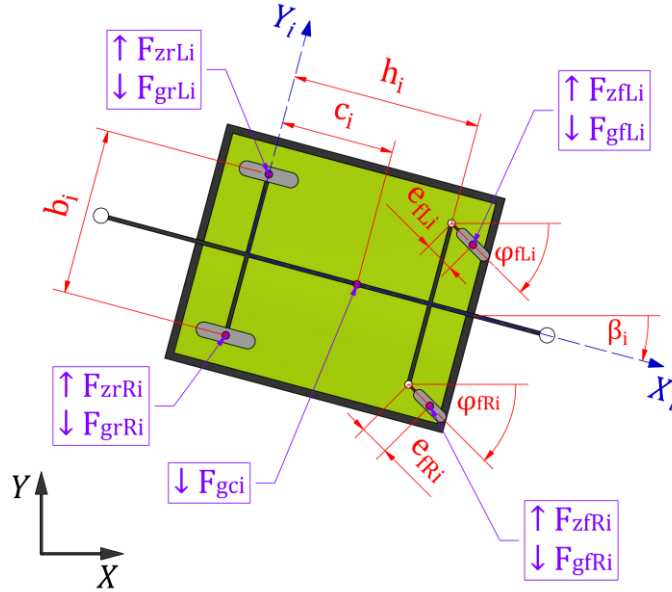
$$\begin{aligned}F_{NrLi} &= F_{zrLi} - F_{grLi} \\ F_{NrRi} &= F_{zrRi} - F_{grRi} \\ F_{NfLi} &= F_{zfLi} - F_{gfLi} \\ F_{NfRi} &= F_{zfRi} - F_{gfRi} \\ e_{XfLi} &= e_{fLi} \cos(\varphi_{fLi} - \beta_i), \\ e_{YfLi} &= e_{fLi} \sin(\varphi_{fLi} - \beta_i) \\ e_{XfRi} &= e_{fRi} \cos(\varphi_{fRi} - \beta_i) \\ e_{YfRi} &= e_{fRi} \sin(\varphi_{fRi} - \beta_i)\end{aligned}\quad (4.92)$$

a $F_{gci}, F_{grLi}, F_{grRi}, F_{gfLi}, F_{gfRi}$ to siły ciężkości i -tej przyczepy i poszczególnych kół, które można zapisać jako:

$$\begin{aligned}F_{gci} &= m_i g \\ F_{grLi} &= m_{rLi} g \\ F_{grRi} &= m_{rRi} g, \\ F_{gfLi} &= m_{fLi} g \\ F_{gfRi} &= m_{fRi} g\end{aligned}\quad (4.93)$$

gdzie: g to przyspieszenie ziemskie, m_i to masa korpusu i -tej przyczepy (bez kół), $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fL0}, m_{fR0}$ to masy kół kolejno: tylnego lewego, tylnego prawego, przedniego

lewego oraz przedniego prawego. Rozwiązanie układu równań 4.91 pozwala wyznaczyć siły reakcji podłoża.



Rys. 4.12. Siły pionowe działające na FDSS; ↓ - siła nacisku skierowana przeciwnie do zwrotu osi Z; ↑ - siła reakcji podłoża skierowana zgodnie ze zwrotem osi Z;

Siły tarcia poprzecznego działające na i -tą przyczepę można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} F_{yrLi} &= F_y(\alpha_{rLi}, F_{zrLi}, \mu_{yrLi}, C_{yrLi}) \\ F_{yrRi} &= F_y(\alpha_{rRi}, F_{zrRi}, \mu_{yrRi}, C_{yrRi}) \\ F_{yfLi} &= F_y(\alpha_{fLi}, F_{zfLi}, \mu_{yfLi}, C_{yfLi}) \\ F_{yfRi} &= F_y(\alpha_{fRi}, F_{zfRi}, \mu_{yfRi}, C_{yfRi}) \end{aligned} \quad (4.94)$$

gdzie: $\mu_{yrLi}, \mu_{yrRi}, \mu_{yfLi}, \mu_{yfRi}$ to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrLi}, C_{yrRi}, C_{yfLi}, C_{yfRi}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

4.3.2.3.2 Przyczepa z układem podwójnego Ackermanna (DASS)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-LF i -tej przyczepy typu DASS. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.11. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.36. Wektor współrzędnych uogólnionych i -tej przyczepy z układem podwójnego Ackermanna składa się z 2 współrzędnych uogólnionych (rys. 4.13), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_i = [\beta_{i1} \quad \beta_{i2}]^T. \quad (4.95)$$

Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.31)$$

gdzie $T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy (bez kół i bez przedniego dyszla) oraz energia kinetyczna jej dyszla przedniego, $T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energie kinetyczne lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy może zostać zapisana jako:

$$T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_i (\dot{x}_{Ci}^2 + \dot{y}_{Ci}^2) + I_i \dot{\beta}_{i2}^2), \quad (4.96)$$

gdzie: m_i i I_i oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu i -tej przyczepy, x_{Ci} , y_{Ci} to współrzędne jego środka masy. Energia kinetyczna przedniego dyszla i -tej przyczepy może być wyrażona jako:

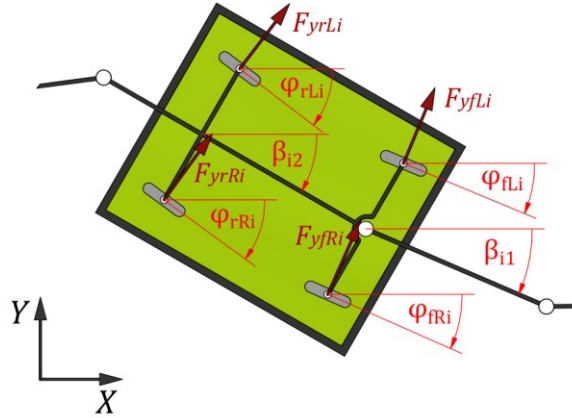
$$T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_{di} (\dot{x}_{Cdi}^2 + \dot{y}_{Cdi}^2) + I_{di} \dot{\beta}_{i1}^2), \quad (4.97)$$

gdzie: m_{di} i I_{di} – oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności przedniego dyszla i -tej przyczepy, x_{Cdi} , y_{Cdi} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rLi} (\dot{x}_{Ei}^2 + \dot{y}_{Ei}^2) + I_{rLi} \dot{\phi}_{rLi}^2) \\ T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rRi} (\dot{x}_{Fi}^2 + \dot{y}_{Fi}^2) + I_{rRi} \dot{\phi}_{rRi}^2) \\ T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fLi} (\dot{x}_{Hi}^2 + \dot{y}_{Hi}^2) + I_{fLi} \dot{\phi}_{fLi}^2) \\ T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fRi} (\dot{x}_{Gi}^2 + \dot{y}_{Gi}^2) + I_{fRi} \dot{\phi}_{fRi}^2) \end{aligned} \quad (4.98)$$

gdzie: m_{rLi} , m_{rRi} , m_{fLi} , m_{fRi} to odpowiednio masy poszczególnych kół, a I_{rLi} , I_{rRi} , I_{fLi} , I_{fRi} to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła. (x_{Ei}, y_{Ei}) , (x_{Fi}, y_{Fi}) , (x_{Hi}, y_{Hi}) , (x_{Gi}, y_{Gi}) to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Kąty orientacji kół ϕ_{rLi} , ϕ_{rRi} , ϕ_{fLi} , ϕ_{fRi} wyznaczono w podrozdziale 3.4 (równanie 3.52).

Siły działające na i -tą przyczepę zostały przedstawione na rysunku 4.13.

Rys. 4.13. Siły działające na i -tą przyczepę (DASS)

Macierz sił działających na i -tą przyczepę można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}_i = \begin{bmatrix} F_{yrLi} \sin(\varphi_{rLi}) & F_{yrLi} \cos(\varphi_{rLi}) \\ F_{yrRi} \sin(\varphi_{rRi}) & F_{yrRi} \cos(\varphi_{rRi}) \\ F_{yfLi} \sin(\varphi_{fLi}) & F_{yfLi} \cos(\varphi_{fLi}) \\ F_{yfRi} \sin(\varphi_{fRi}) & F_{yfRi} \cos(\varphi_{fRi}) \end{bmatrix}, \quad (4.99)$$

gdzie: $F_{yrLi}, F_{yrRi}, F_{yfLi}, F_{yfRi}$ to siły tarcia poprzecznego działające na poszczególne koła.

Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \begin{bmatrix} x_{Ei} & y_{Ei} \\ x_{Fi} & y_{Fi} \\ x_{Hi} & y_{Hi} \\ x_{Gi} & y_{Gi} \end{bmatrix}. \quad (4.100)$$

Ze względu na brak momentów zewnętrznych, przyjmuje się, że wektor momentów zewnętrznych oraz odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych mają rozmiar zerowy: $\hat{\mathbf{M}}_i \in \mathbb{R}^0$ i $\hat{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^0$. Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \alpha_{rLi} &= \alpha(\dot{x}_{Ei}, \dot{y}_{Ei}, \varphi_{rLi}) \\ \alpha_{rRi} &= \alpha(\dot{x}_{Fi}, \dot{y}_{Fi}, \varphi_{rRi}) \\ \alpha_{fLi} &= \alpha(\dot{x}_{Hi}, \dot{y}_{Hi}, \varphi_{fLi}) \\ \alpha_{fRi} &= \alpha(\dot{x}_{Gi}, \dot{y}_{Gi}, \varphi_{fRi}) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Siły pionowe wynikające z nacisku i reakcji podłoża zostały przedstawione na rysunku 4.14. W przypadku pojazdów czterokołowych, układ równań statyki dostarcza trzech równań dla czterech niewiadomych. Aby zamknąć układ, konieczne jest wprowadzenie czwartego równania, które w tym przypadku zakłada, że suma sił reakcji działających po jednej przekątnej jest równa sumie sił reakcji po przekątnej przeciwnej:

$$\begin{aligned}
\sum M_{X_i} = 0: & (F_{NrLi} + F_{NfLi} - F_{NrRi} - F_{NfRi}) \frac{b_i}{2} + F_{gdi} c_{di} \sin(\beta_{i1} - \beta_{i2}) = 0 \\
\sum M_{Y_i} = 0: & F_{gci} c_i - (F_{NfLi} + F_{NfRi}) h_i + F_{gdi} (h_i + c_{di} \cos(\beta_{i1} - \beta_{i2})) = 0, \\
\sum F_{Z_i} = 0: & F_{NrLi} + F_{NrRi} + F_{NfLi} + F_{NfRi} - F_{gci} - F_{gdi} = 0 \\
& F_{zrLi} + F_{zfLi} = F_{zrRi} + F_{zfRi}
\end{aligned} \quad (4.102)$$

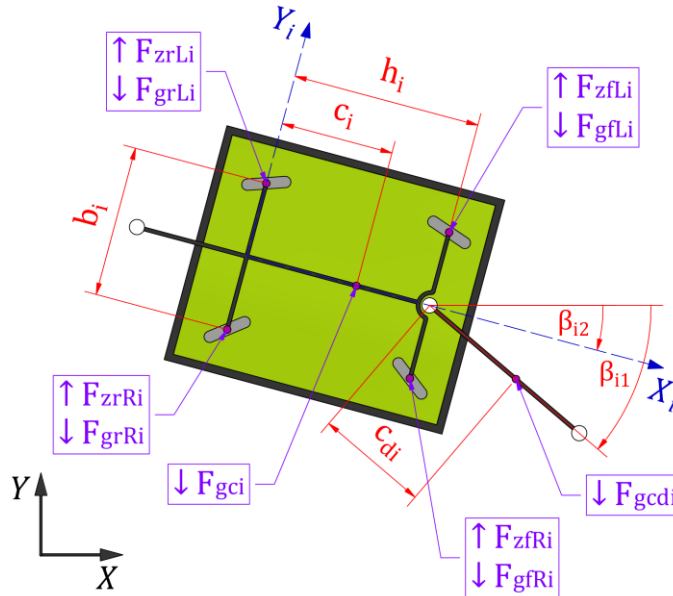
gdzie:

$$\begin{aligned}
F_{NrLi} &= F_{zrLi} - F_{grLi} \\
F_{NrRi} &= F_{zrRi} - F_{grRi} \\
F_{NfLi} &= F_{zfLi} - F_{gfLi}' \\
F_{NfRi} &= F_{zfRi} - F_{gfRi}
\end{aligned} \quad (4.103)$$

a $F_{gci}, F_{gdi}, F_{grLi}, F_{grRi}, F_{gfLi}, F_{gfRi}$ to siły ciężkości i -tej przyczepy, jej przedniego dyszla oraz poszczególnych kół, które można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
F_{gci} &= m_i g \\
F_{gdi} &= m_{di} g \\
F_{grLi} &= m_{rLi} g \\
F_{grRi} &= m_{rRi} g' \\
F_{gfLi} &= m_{fLi} g \\
F_{gfRi} &= m_{fRi} g
\end{aligned} \quad (4.104)$$

gdzie: g to przyspieszenie ziemskie, m_i, m_{di} to odpowiednio masa korpusu i -tej przyczepy (bez kół), masa jej przedniego dyszla, $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fL0}, m_{fR0}$ to masy kół kolejno: tylnego lewego, tylnego prawego, przedniego lewego oraz przedniego prawego. Rozwiązanie układu równań 4.102 pozwala wyznaczyć siły reakcji podłoża.



Rys. 4.14. Siły pionowe działające na FDSS; ↓ - siła nacisku skierowana przeciwnie do zwrotu osi Z; ↑ - siła reakcji podłoża skierowana zgodnie ze zwrotem osi Z;

Siły tarcia poprzecznego działające na i -tą przyczepę można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}F_{yrLi} &= F_y(\alpha_{rLi}, F_{zrLi}, \mu_{yrLi}, C_{yrLi}) \\F_{yrRi} &= F_y(\alpha_{rRi}, F_{zrRi}, \mu_{yrRi}, C_{yrRi}) \\F_{yfLi} &= F_y(\alpha_{fLi}, F_{zfLi}, \mu_{yfLi}, C_{yfLi})' \\F_{yfRi} &= F_y(\alpha_{fRi}, F_{zfRi}, \mu_{yfRi}, C_{yfRi})\end{aligned}\tag{4.105}$$

gdzie: $\mu_{yrLi}, \mu_{yrRi}, \mu_{yfLi}, \mu_{yfRi}$, to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrLi}, C_{yrRi}, C_{yfLi}, C_{yfRi}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

4.3.3 Rozszerzony model dynamiczny (DM-EXT)

Rozszerzony model dynamiczny (DM-EXT), który uwzględnia siły tarcia poprzecznego, wzdłużnego oraz opory toczenia, został opisany jako model dodatkowy w Załączniku A. W większości przypadków związanych z modelowaniem pociągów logistycznych uwzględnienie wyłącznie tarcia poprzecznego (model DM-LF) jest w pełni wystarczające do poprawnego odwzorowania zachowania układu. Model rozszerzony stanowi jednak uzupełnienie podstawowego opisu i może być przydatny w analizach wymagających większej dokładności lub szczególnego uwzględnienia wpływu poślizgu wzdłużnego oraz oporów toczenia.

Model DM-EXT został opracowany dla tych samych wariantów układów skrętnych, co model dynamiczny uwzględniający jedynie tarcie poprzeczne (DM-LF), a więc:

- holownik z różnicowo napędzaną tylną osią (DDT); przyczepy z układem stałego dyszla (FDSS),
- holownik z różnicowo napędzaną tylną osią (DDT); przyczepy z układem podwójnego Ackermanna (DASS),
- holownik z napędzanym, sterowanym, skrętnym przednim kołem (TTFS); przyczepy z układem stałego dyszla (FDSS),
- holownik z napędzanym, sterowanym, skrętnym przednim kołem (TTFS); przyczepy z układem podwójnego Ackermanna (DASS).

5. Algorytmy sterowania pociągiem logistycznym

5.1 Algorytm śledzenia trajektorii przez holownik pociągu logistycznego

5.1.1 Założenia algorytmu sterowania

W ramach pracy zaproponowano autorski algorytm sterowania umożliwiający śledzenie zadanej trajektorii przez ciągnik pociągu logistycznego. Jego głównym zadaniem jest generowanie wartości sterujących dla ciągnika w taki sposób, aby podążał on za punktem odniesienia w środowisku symulacyjnym. Danymi wejściowymi algorytmu sterowania są współrzędne punktu referencyjnego zadane jako funkcja czasu: $x_d(t)$, $y_d(t)$. Orientacja pojazdu nie jest zadawana bezpośrednio, lecz wynika z jego aktualnej i docelowej pozycji. Sterowanie odbywa się w taki sposób, aby ciągnik dążył do zadanego punktu ruchem możliwie zbliżonym do linii prostej.

Spośród opracowanych modeli matematycznych można wyróżnić model kinematyczny oraz modele dynamiczne. W modelu kinematycznym ruch pojazdu inicjowany jest przez zadane prędkości kątowe kół, natomiast w modelach dynamicznych, niezależnie od ich typu, ruch inicjowany jest przez przyłożone momenty napędowe do holownika. Sterowanie modelem kinematycznym jest zatem prostsze, ponieważ nie jest konieczne przekształcanie danych wejściowych z postaci prędkości do postaci momentów. W związku z tym dla modelu kinematycznego opracowano inny układ sterowania niż dla modeli dynamicznych. Algorytm sterowania w wersji dla modelu dynamicznego może zostać zastosowany w modelach: DM-NC i DM-LF.

5.1.2 Rozwiązywanie równań różniczkowych modeli matematycznych

Przed zastosowaniem algorytmu sterowania należy określić sposób rozwiązywania równań modelu matematycznego. Model kinematyczny, modele dynamiczne oraz algorytm śledzenia trajektorii zostały przygotowane w środowisku *Wolfram Mathematica 14.0*.

Do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zastosowano funkcję *ParametricNDSolveValue* lub *NDSolveValue* [185]. Pierwsza z tych funkcji umożliwia uzyskanie rozwiązań parametrycznych zawierających parametry o niezdefiniowanych wartościach, które mogą zostać uzupełnione na późniejszym etapie, aby uzyskać konkretne rozwiązanie w formie funkcji interpolowanych. *NDSolveValue* służy natomiast do uzyskania konkretnego rozwiązania równań różniczkowych. W pracy przyjęto konwencję używania nazw *NDSolve* i *ParametricNDSolve* także w odniesieniu do funkcji

NDSolveValue i *ParametricNDSolveValue*, które były faktycznie stosowane w obliczeniach. Różnice między tymi funkcjami ograniczają się do formy zwracanych wyników.

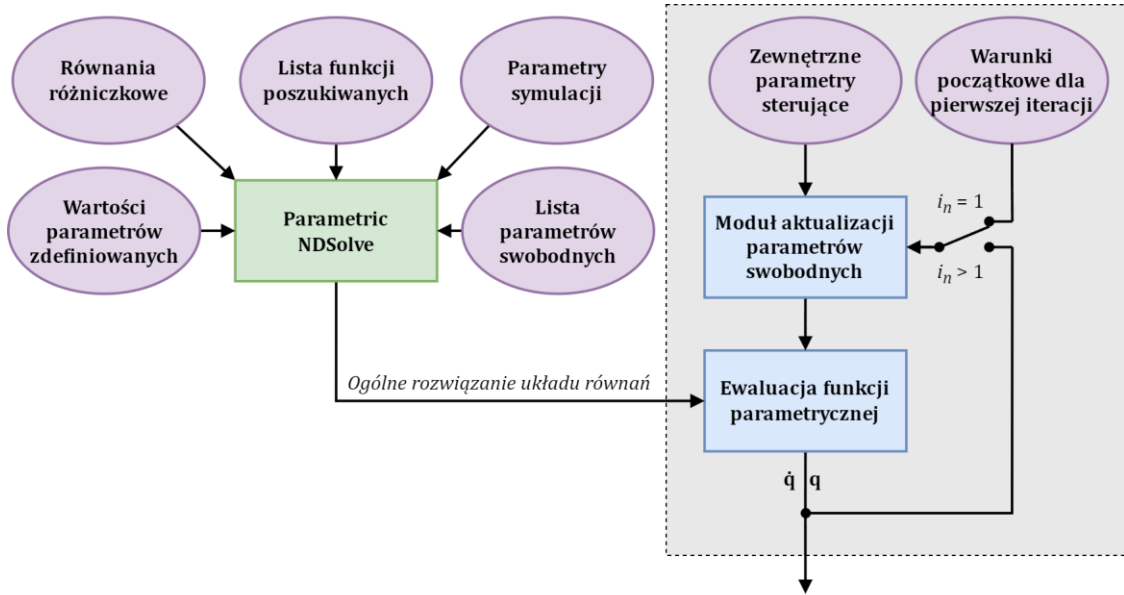
Do rozwiązywania układu równań różniczkowych zastosowano metodę IDA (ang. *Implicit Differential-Algebraic system solver*), przeznaczoną do układów równań różniczkowo-algebraicznych (DAE – ang. *differential-algebraic equations*). Metoda ta opiera się na niejawnych formułach różniczkowania wstecznego (BDF – ang. *implicit backward differentiation formulas*).

W trakcie rozwiązywania równań zastosowano opcję *EquationSimplification* ustawioną na *Residual*, która upraszcza równania przed rozwiązaniem numerycznym poprzez minimalizację wartości reszt. Ułatwia to stabilną i dokładną integrację numeryczną. Danymi wejściowymi dla funkcji *NDSolve* są:

- równanie lub układ równań różniczkowych,
- warunki początkowe i/lub brzegowe,
- parametry symulacji (w tym czas symulacji),
- lista funkcji poszukiwanych.

W przypadku *ParametricNDSolve*, oprócz danych wejściowych takich jak w *NDSolve*, należy dodatkowo podać listę parametrów o niezdefiniowanych początkowo wartościach, które zostaną uzupełnione na późniejszym etapie obliczeń.

Ze względu na czas obliczeń *ParametricNDSolve* jest bardziej wydajny niż *NDSolve* w sytuacjach, gdy konieczne jest wielokrotne rozwiązywanie równań dla różnych zestawów parametrów, np. podczas symulacji iteracyjnych. Symulacja iteracyjna polega na rozwiązywaniu układu równań różniczkowych dla krótkiego przedziału czasu, a następnie użyciu uzyskanych wyników jako warunków początkowych dla kolejnej iteracji. W rozważanym przypadku warunki początkowe obejmują współrzędne i prędkości uogólnione, określające aktualną pozycję i prędkość każdego z członów pociągu logistycznego. Takie podejście pozwala uwzględniać bardziej złożone warunki między iteracjami, co byłoby trudne do osiągnięcia w przypadku pojedynczej symulacji obejmującej cały przedział czasowy. W takim przypadku warunki te musiałyby być zaimplementowane bezpośrednio w modelu, co mogłoby utrudnić uzyskanie rozwiązania numerycznego. Schemat blokowy ilustrujący ten proces iteracyjnego rozwiązywania równań modelu matematycznego przedstawiono na rysunku 5.1. Lista parametrów swobodnych zawiera parametry o niezdefiniowanych wartościach, w tym również te, które służą do określenia warunków początkowych symulacji.



Rys. 5.1. Schemat blokowy iteracyjnego rozwiązywania równań modelu matematycznego, gdzie i_n reprezentuje numer bieżącej iteracji

5.1.3 Sterowanie w modelu kinematycznym

W modelu kinematycznym sterowanie pojazdem następuje poprzez zadanie prędkości kątowych. Pozwala to na zastosowanie regulatora PD (proporcjonalno-różniczkującego) wbudowanego bezpośrednio w model kinematyczny. Dzięki temu nie jest konieczne iteracyjne rozwiązywanie równań, jak ma to miejsce w przypadku modeli dynamicznych, co omówiono w podrozdziale 5.1.2.

Układ regulacji bazuje na uchybach położenia i orientacji. W przypadku ciągnika typu DDT w układzie regulacji minimalizowany jest uchyb położenia punktu B_0 oznaczony jako e_p , oraz uchyb kąta orientacji ciągnika e_β , co przedstawiono na rysunku 5.2. Można to zapisać jako:

$$\begin{cases} e_p = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \\ e_\beta = \text{atan2}(-e_y, e_x) - \beta_0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

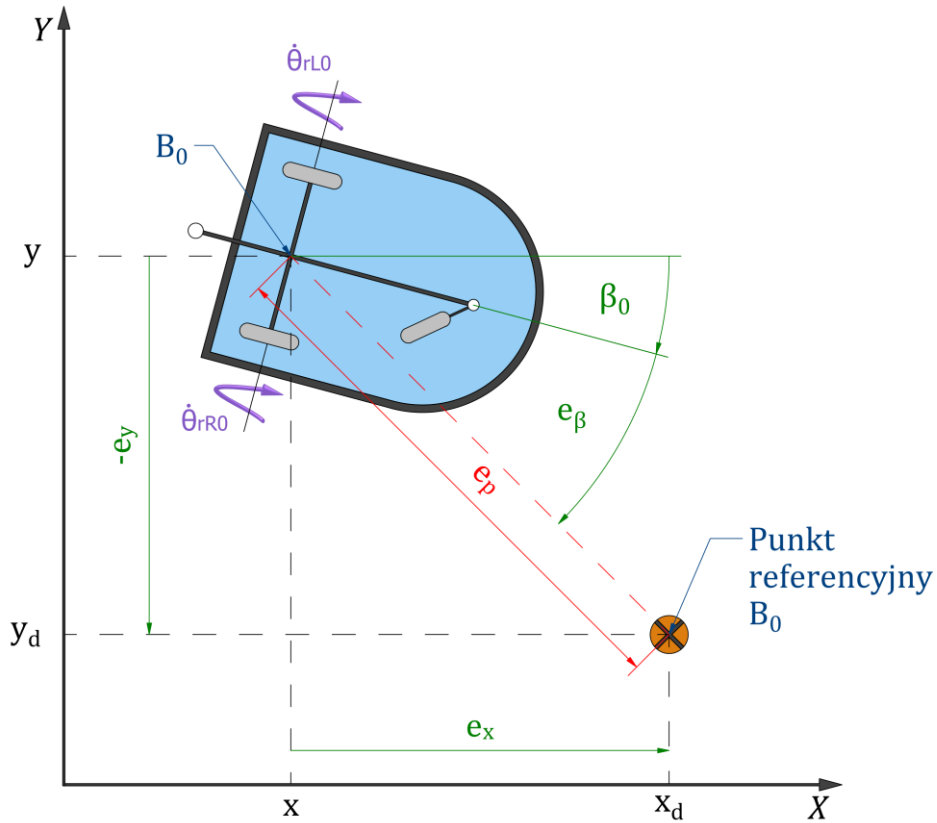
gdzie:

$$\begin{cases} e_x = x_d - x \\ e_y = y_d - y \end{cases}. \quad (5.2)$$

Zadawane w modelu prędkości kątowe można zapisać jako:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{rL0} = K_{Pp}e_p + K_{Dp}\dot{e}_p + K_{P\beta}e_\beta + K_{D\beta}\dot{e}_\beta \\ \dot{\theta}_{rR0} = K_{Pp}e_p + K_{Dp}\dot{e}_p - K_{P\beta}e_\beta - K_{D\beta}\dot{e}_\beta \end{cases}, \quad (5.3)$$

gdzie: $\dot{\theta}_{rL0}, \dot{\theta}_{rR0}$ to prędkości kątowe kół ciągnika, a $K_{Pp}, K_{Dp}, K_{P\beta}, K_{D\beta}$ to nastawy regulatora PD.

Rys. 5.2. Błąd położenia ciągnika (DDT) e_p oraz jego błąd orientacji e_β

W przypadku ciągnika TTFS minimalizowany jest uchyb położenia punktu A_0 oznaczony jako e_p oraz uchyb kąta orientacji koła przedniego ciągnika e_φ , co przedstawiono na rysunku 5.3. Można to zapisać jako:

$$\begin{cases} e_p = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \\ e_\varphi = \text{atan2}(-e_y, e_x) - \varphi_{fM0} \end{cases}, \quad (5.4)$$

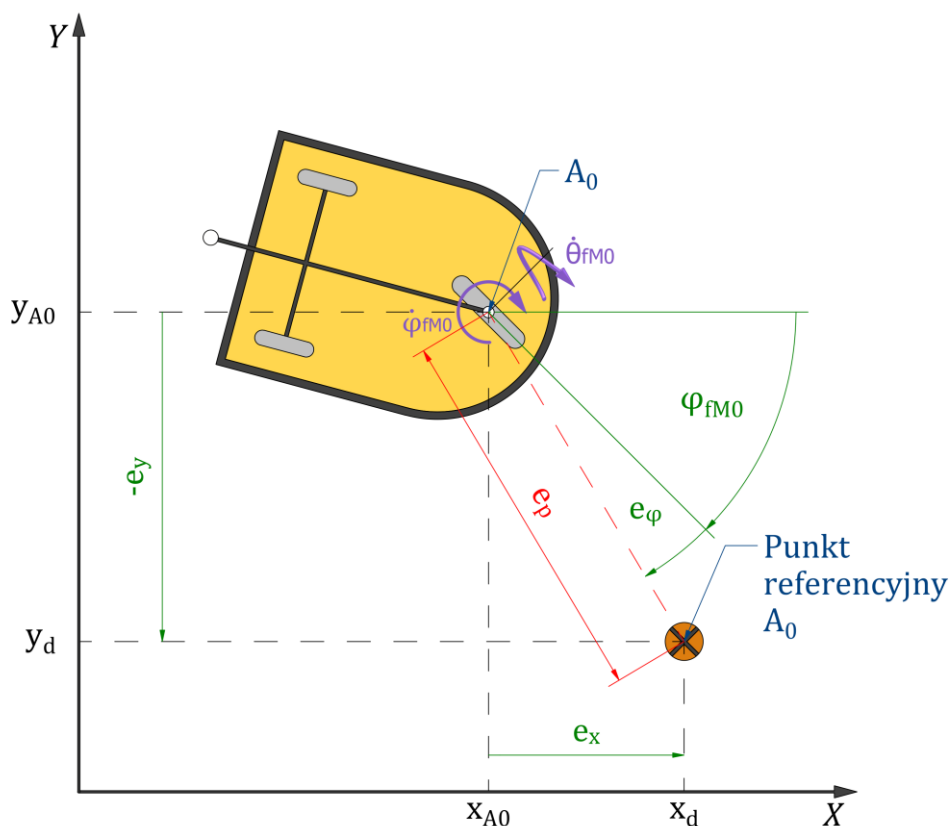
gdzie:

$$\begin{cases} e_x = x_d - x_{A_0} \\ e_y = y_d - y_{A_0} \end{cases}, \quad (5.5)$$

gdzie współrzędne x_{A_0}, y_{A_0} zostały opisane w równaniu 3.8. Zadawane w modelu prędkości kątowe można zapisać jako:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{fM0} = K_{Pp} e_p + K_{Dp} \dot{e}_p \\ \dot{\varphi}_{fM0} = K_{P\varphi} e_\varphi + K_{D\varphi} \dot{e}_\varphi \end{cases}, \quad (5.6)$$

gdzie $K_{P\varphi}, K_{D\varphi}$ są nastawami regulatora PD.



Rys. 5.3. Błąd położenia przedniego koła ciągnika (TTFS) e_p oraz jego błąd orientacji e_φ

5.1.4 Sterowanie w modelu dynamicznym

5.1.4.1 Opis algorytmu

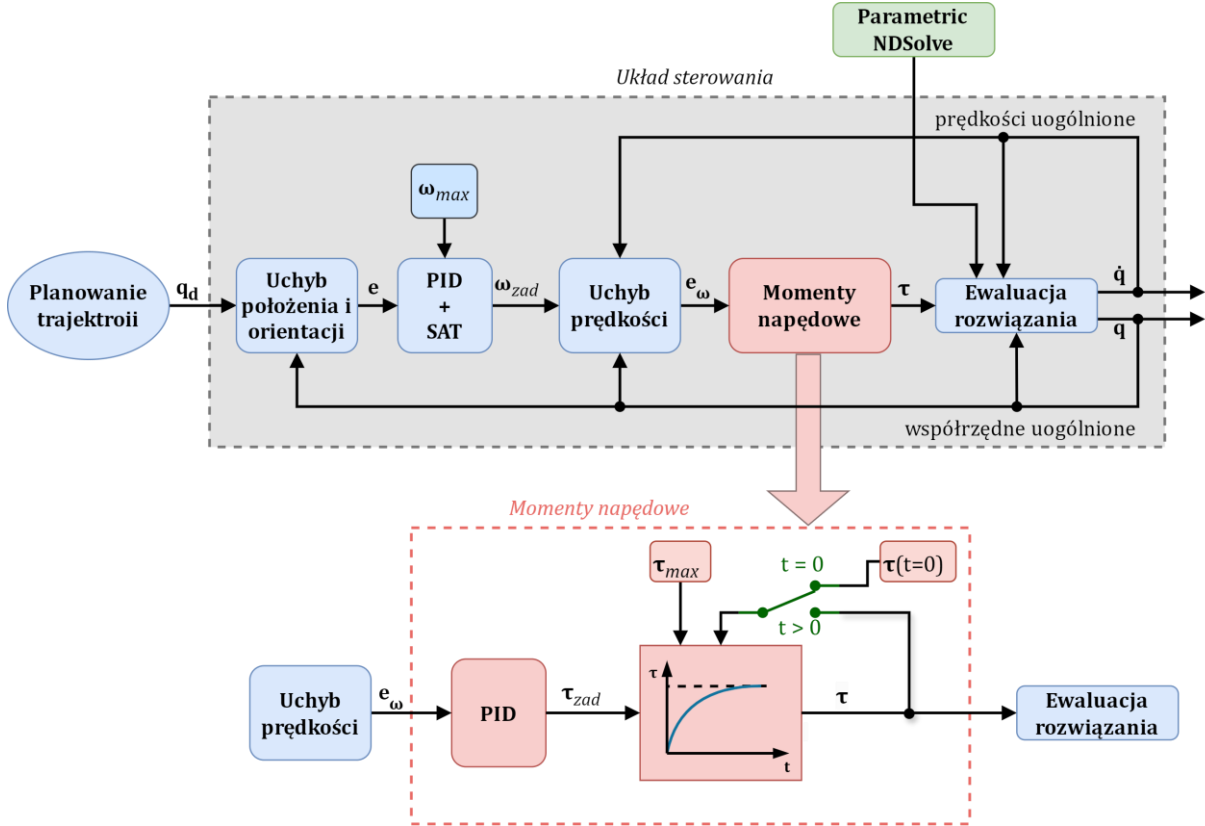
W przypadku modeli dynamicznych algorytm śledzenia trajektorii opracowano na podstawie dwustopniowego regulatora PID (proporcjonalno-całkująco-różniczkującego) w ujemnej pętli sprzężenia zwrotnego. W modelu dynamicznym, niezależnie od wybranego wariantu, danymi wejściowymi są momenty napędowe. W związku z tym konieczne jest inne podejście niż to zastosowane w przypadku modelu kinematycznego. Schemat blokowy zaproponowanego układu sterowania przedstawiono na rysunku 5.4. Układ równań modelu dynamicznego rozwiązywany jest iteracyjnie, tak jak pokazano na rysunku 5.1 w podrozdziale 5.1.2.

Opracowany dwustopniowy układ regulacji składa się z regulatora PID położenia i orientacji z ograniczeniem (PID + SAT) oraz regulatora PID prędkości. Przedstawiony schemat blokowy układu regulacji jest adekwatny zarówno do ciągnika DDT, jak i do ciągnika TTFS.

Różnice dotyczą sposobu obliczania błędów położenia i orientacji (rys. 5.2 i rys. 5.3), oraz rodzaju regulowanych prędkości. W przypadku DDT regulowane są prędkości kątowe kół na tylnej osi ciągnika ($\dot{\theta}_{rLO}, \dot{\theta}_{rRO}$). W przypadku TTFS regulowana jest

prędkość kątowna obrotu koła $\dot{\theta}_{fM0}$ oraz prędkość kątowna skrętu koła $\dot{\phi}_{fM0}$. W algorytmie stosowana jest funkcja ograniczająca wartość argumentu fMM , którą można zapisać jako:

$$fMM(\theta, \theta_{max}) = \max(\min(\theta, \theta_{max}), -\theta_{max}). \quad (5.7)$$



Rys. 5.4. Schemat blokowy algorytmu śledzenia trajektorii przez holownik pociągu logistycznego w modelu dynamicznym

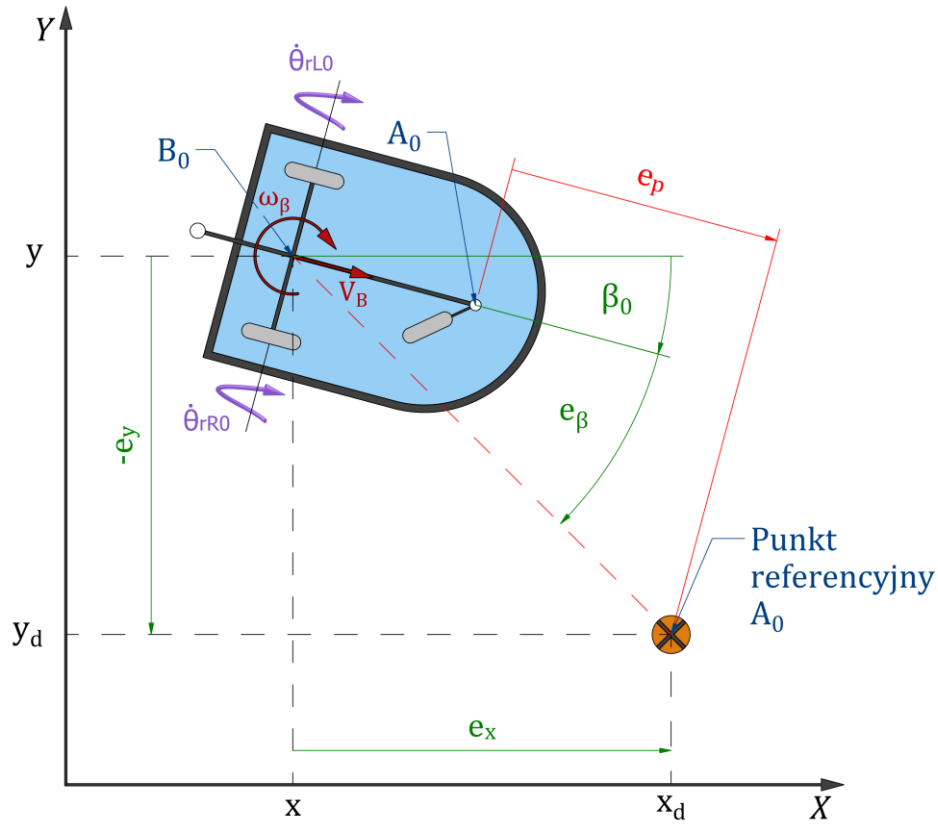
5.1.4.2 Układ z ciągnikiem z różnicowo napędzanymi kołami tylnej osi (DDT)

Tak jak w przypadku modelu kinematycznego, wejście do układu sterowania stanowią współrzędne punktu referencyjnego x_d, y_d . W bloku *uchyb położenia i orientacji* wyznaczane są uchyby e_p i e_β jako:

$$\begin{cases} e_p = (x_d - x_{A_0}) \cos \beta_0 - (y_d - y_{A_0}) \sin \beta_0 \\ e_\beta = \text{atan2}(-e_y, e_x) - \beta_0 \end{cases}, \quad (5.8)$$

gdzie:

$$\begin{cases} e_x = x_d - x \\ e_y = y_d - y \end{cases}. \quad (5.9)$$


 Rys. 5.5. Błąd położenia e_p punktu A_0 oraz błąd orientacji e_β ciągnika

Blok ($PID + SAT$) składa się z dwóch części: regulatora PID oraz ograniczenia prędkości zadanych za pomocą $\omega_{\theta max}$. Dla układu z DDT, prędkości zadane są wyznaczane jako:

$$\omega_{zad} \begin{cases} \begin{bmatrix} \omega_{Lzad} \\ \omega_{Rzad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fMM\left(\frac{b_0 \omega_\beta}{2 r_{r0}}, \omega_{\theta max}\right) \\ fMM\left(\frac{-b_0 \omega_\beta}{2 r_{r0}}, \omega_{\theta max}\right) \end{bmatrix} & |e_\beta| \geq \delta_\beta \\ \begin{bmatrix} \omega_{Lzad} \\ \omega_{Rzad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fMM\left(\frac{2V_B + b_0 \omega_\beta}{2 r_{r0}}, \omega_{\theta max}\right) \\ fMM\left(\frac{2V_B - b_0 \omega_\beta}{2 r_{r0}}, \omega_{\theta max}\right) \end{bmatrix} & |e_\beta| < \delta_\beta \end{cases}, \quad (5.10)$$

gdzie: ω_{Lzad} , ω_{Rzad} są prędkościami zadanymi na tylne koła ciągnika (L – lewe, R – prawe), r_{r0} promieniem tylnych kół ciągnika, δ_β to kąt progowy, który określa, czy regulowana jest tylko orientacja, czy także położenie, V_B oraz ω_β to odpowiednio zadana prędkość liniowa punktu B_0 w kierunku wzdłużnym względem ciągnika oraz zadana prędkość kątowa ciągnika względem punktu B_0 :

$$\begin{cases} V_B = K_{Pp} e_p + K_{Ip} \int e_p dt + K_{Dp} \dot{e}_p \\ \omega_\beta = K_{P\beta} e_\beta + K_{I\beta} \int e_\beta dt + K_{D\beta} \dot{e}_\beta \end{cases}, \quad (5.11)$$

gdzie: $K_{Pp}, K_{Ip}, K_{Dp}, K_{P\beta}, K_{I\beta}, K_{D\beta}$ są nastawami regulatora PID. W bloku *uchyby prędkości* zadane prędkości kątowe $\omega_{Lzad}, \omega_{Rzad}$ są porównywane z wartościami rzeczywistymi, co prowadzi do zależności:

$$e_{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{Lzad} \\ \omega_{Rzad} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{rL0} \\ \dot{\theta}_{rR0} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{rL0} \\ \dot{\theta}_{rR0} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{r0}} \begin{bmatrix} \dot{x}_{E0} \cos(\beta_0) - \dot{y}_{E0} \sin(\beta_0) \\ \dot{x}_{F0} \cos(\beta_0) - \dot{y}_{F0} \sin(\beta_0) \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

gdzie: współrzędne x_{E0}, y_{E0} oraz x_{F0}, y_{F0} zostały opisane w równaniu 3.8. W bloku *momentów napędowych* z uchybów prędkości e_{ω} wyznaczane są momenty zadane na koła τ_{zad} , co można przedstawić jako:

$$\tau_{zad} = \begin{bmatrix} \tau_{Lzad} \\ \tau_{Rzad} \end{bmatrix} = K_{P\theta} e_{\theta} + K_{I\theta} \int e_{\theta} dt + K_{D\theta} \dot{e}_{\theta}, \quad (5.14)$$

gdzie $K_{P\theta}, K_{I\theta}, K_{D\theta}$ są nastawami regulatora prędkości PID. Następnie w bloku inercji za pomocą funkcji $\tau_{fun}(t_{step}, \tau_{zad}, \tau_p, \tau_{max})$ wyznaczane są momenty wejściowe dla modelu dynamicznego. Funkcja ta modeluje dynamiczną zmianę momentu w zależności od wartości kroku czasowego symulacji t_{step} , stałej czasowej T_s , wzmocnienia członu inercyjnego K_{iner} , momentu zadanego τ_{zad} , aktualnej wartości momentu τ_p , który może być również postrzegany jako moment wejściowy wyznaczony w poprzedniej iteracji oraz wartości ograniczającej maksymalny moment zadany τ_{max} . Funkcja ta zawiera ograniczenia na maksymalną wartość momentu τ_{max} . Funkcję tę można zapisać jako:

$$\tau_{fun}(t_{step}, \tau_{zad}, \tau_p, \tau_{max}) = \tau_p + (K_{iner} fMM(\tau_{zad}, \tau_{max}) - \tau_p) \left(1 - e^{-\frac{t_{step}}{T_s}}\right), \quad (5.15)$$

Dla DDT powyższa funkcja jest zaaplikowana w następujący sposób:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{fun}(t_{step}, \tau_{Lzad}, \tau_L, \tau_{\theta max}) \\ \tau_{fun}(t_{step}, \tau_{Rzad}, \tau_R, \tau_{\theta max}) \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

gdzie $\tau_{\theta max}$ jest maksymalną wartością momentu zadawanego na koła ciągnika.

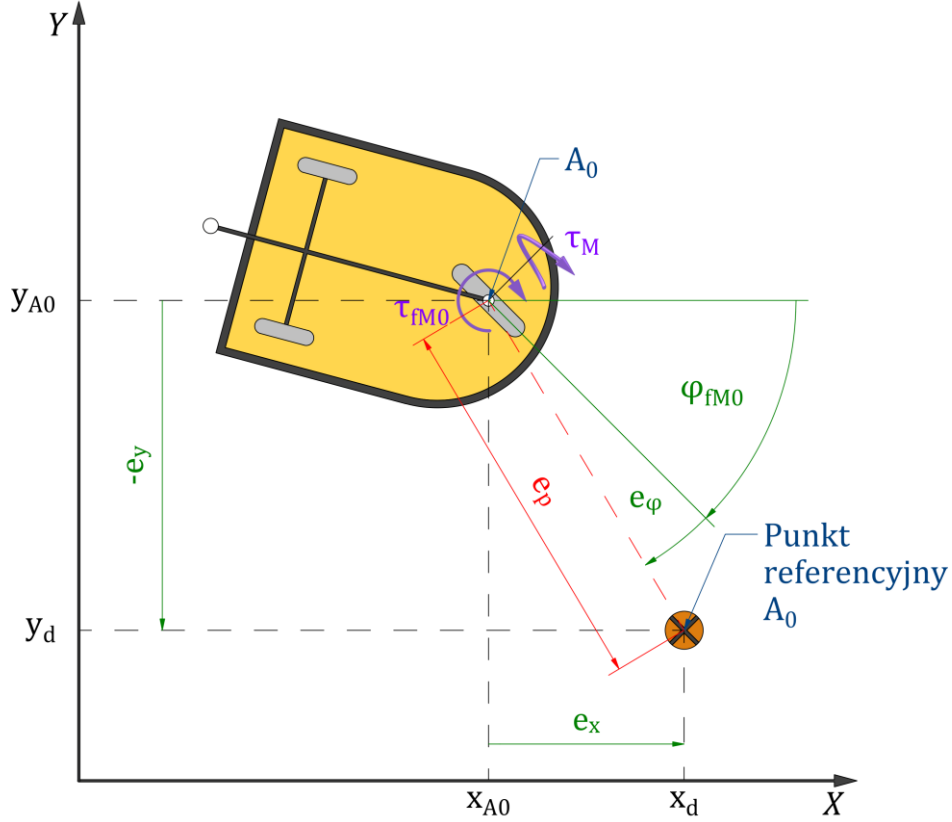
5.1.4.3 Układ z ciągnikiem z napędzanym i sterowanym skrętnym przednim kołem (TTFS)

W przypadku TTFS minimalizowany jest uchyb położenia punktu A_0 , oznaczony jako e_p oraz uchyb kąta orientacji koła przedniego ciągnika e_{φ} , co przedstawiono na rysunku 5.6. Zależności te można to zapisać w postaci:

$$\begin{cases} e_p = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \\ e_\varphi = \text{atan2}(-e_y, e_x) - \varphi_{fM0} \end{cases}, \quad (5.17)$$

gdzie:

$$\begin{cases} e_x = x_d - x_{A_0} \\ e_y = y_d - y_{A_0} \end{cases}. \quad (5.18)$$



Rys. 5.6. Błąd położenia e_p ciągnika oraz błąd orientacji e_φ koła przedniego ciągnika

Dla ciągnika TTFS prędkości zadane przyjmują postać:

$$\omega_{zad} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \omega_{\theta zad} \\ \omega_{\varphi zad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ fMM \left(K_{P\varphi} e_\varphi + K_{I\varphi} \int e_\varphi dt + K_{D\varphi} \dot{e}_\varphi, \omega_{\varphi max} \right) \end{bmatrix} & |e_\varphi| \geq \delta_\varphi \\ \begin{bmatrix} \omega_{\theta zad} \\ \omega_{\varphi zad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fMM \left(K_{Pp} e_p + K_{Ip} \int e_p dt + K_{Dp} \dot{e}_p, \omega_{\theta max} \right) \\ fMM \left(K_{P\varphi} e_\varphi + K_{I\varphi} \int e_\varphi dt + K_{D\varphi} \dot{e}_\varphi, \omega_{\varphi max} \right) \end{bmatrix} & |e_\varphi| < \delta_\varphi \end{cases}, \quad (5.19)$$

gdzie: δ_φ jest bardzo małą wartością kątową, a $K_{P\varphi}, K_{I\varphi}, K_{D\varphi}$ są nastawami regulatora PID, $\omega_{\theta max}, \omega_{\varphi max}$ są granicznymi prędkościami zadanymi. W bloku *uchyb prędkości* zadane prędkości kątowe $\omega_{\theta zad}, \omega_{\varphi zad}$ są porównywane z wartościami rzeczywistymi, co można zapisać jako:

$$e_\omega = \begin{bmatrix} e_{\theta f} \\ e_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\theta zad} \\ \omega_{\varphi zad} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{fM0} \\ \dot{\varphi}_{fM0} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

gdzie:

$$\dot{\theta}_{fM0} = \frac{1}{r_{f0}} (\dot{x}_{A0} \cos(\varphi_{fM0}) - \dot{y}_{A0} \sin(\varphi_{fM0})), \quad (5.21)$$

$\dot{\varphi}_{fM0}$ stanowi współrzędną uogólnioną w modelu dynamicznym, dlatego jego wartość jest wyznaczana bezpośrednio w wyniku rozwiązania układu równań ruchu i nie wymaga osobnego opisu analitycznego. W bloku *momentów napędowych* z uchybów prędkości e_ω wyznaczane są momenty zadane τ_{zad} , co można przedstawić jako:

$$\tau_{zad} = \begin{bmatrix} \tau_{Mzad} \\ \tau_{\varphi zad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{P\theta} e_{\theta f} + K_{I\theta} \int e_{\theta f} dt + K_{D\theta} \dot{e}_{\theta f} \\ K_{P\varphi} e_{\varphi} + K_{I\varphi} \int e_{\varphi} dt + K_{D\varphi} \dot{e}_{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

gdzie $K_{P\theta}, K_{I\theta}, K_{D\theta}, K_{P\varphi}, K_{I\varphi}, K_{D\varphi}$ są nastawami regulatora prędkości PID. Następnie w bloku inercji za pomocą funkcji $\tau_{fun}(t_{step}, \tau_{zad}, \tau_p, \tau_{max})$ opisanej w równaniu wyznaczane są momenty wejściowe dla modelu dynamicznego:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_M \\ \tau_{fM0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{fun}(t_{step}, \tau_{\theta f zad}, \tau_{\theta f}, \tau_{\theta max}) \\ \tau_{fun}(t_{step}, \tau_{\varphi zad}, \tau_{\varphi}, \tau_{\varphi max}) \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

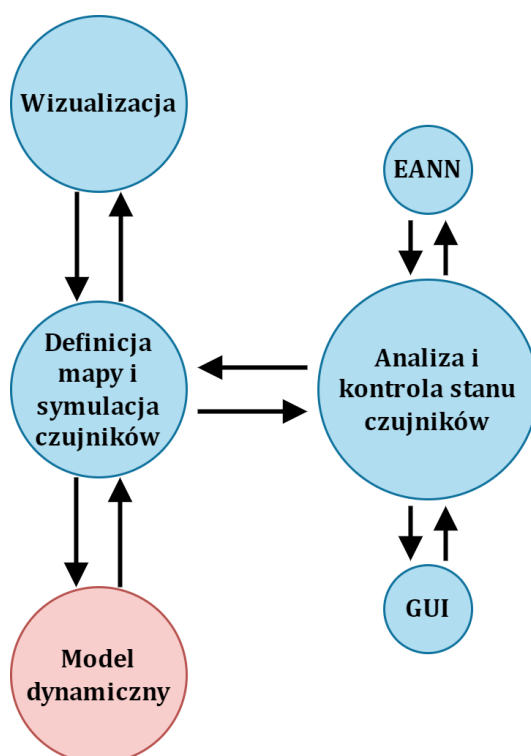
gdzie: $\tau_{\varphi max}$ jest maksymalną zadaną wartością momentu skręcającego koło ciągnika.

5.2 Neuroewolucyjny algorytm sterowania pociągu logistycznego (EANN)

5.2.1 Struktura neuroewolucyjnego algorytmu sterowania (EANN)

Neuroewolucyjny algorytm sterowania opisany w tym podrozdziale opiera się na algorytmie hybrydowym EANN (ang. *Evolution Algorithm-Neural Network*), w którym wagi sztucznej sieci neuronowej są globalnie optymalizowane za pomocą algorytmu ewolucyjnego. Algorytm ten, opracowany przez autora i szczegółowo opisany w [184], stanowi podstawę rozważań zawartych w niniejszym podrozdziale. Celem algorytmu jest sterowanie wieloczołowym pojazdem przegubowym w taki sposób, aby mógł on dotrzeć do wyznaczonego celu bezkolizyjnie oraz zapewnić jak najwyższą jakość przejazdu. Algorytm przeznaczony jest do sterowania pojazdem w zamkniętym korytarzu, co w symulacji jest odzwierciedlone przez mapę typu tunelowego. Algorytm ten jest połączeniem dwóch różnych środowisk programowych: języka *Python* w którym opracowano algorytm sterujący, oraz środowiska *Wolfram Mathematica*, które obsługuje model dynamiczny wraz z regulatorem prędkości kół PID. Ogólny schemat układu sterowania przedstawiono na rysunku 5.7, gdzie kolorem czerwonym oznaczono bloki realizowane w środowisku *Wolfram Mathematica*, a kolorem niebieskim bloki

realizowane w środowisku *Python*. Układ sterowania został zaprojektowany dla pociągu logistycznego składającego się z ciągnika z różnicowo napędzaną tylną osią (DDT) oraz n przyczep z układem skrętnym stałego dyszla (FDSS). W jednej iteracji symulowanych jest wiele pociągów logistycznych, natomiast liczba aktualnie symulowanych pociągów zmniejsza się dla kolejnych iteracji w ramach jednej populacji, co wynika z zakończenia symulacji dla części z nich.



Rys. 5.7. Struktura układu sterowania

W modelu EANN sztuczna sieć neuronowa pełni rolę nieliniowego odwzorowania stanu układu wejścia-wyjścia. Na podstawie aktualnych informacji o stanie pojazdu generuje sygnały sterujące. Globalna optymalizacja wag za pomocą algorytmu ewolucyjnego pozwala uniknąć problemu lokalnych minimów, co jest typowe dla klasycznego treningu sieci neuronowych. W każdej generacji algorytmu ewolucyjnego symulowana jest populacja pociągów logistycznych, z których każdy wyposażony jest w sieć neuronową o indywidualnym zestawie wag, przez co traktowany jest jako pojedynczy osobnik. Populacja początkowa jest generowana losowo. Każdy osobnik (czyli zestaw sterujący pociągiem logistycznym) przechodzi symulację przejazdu przez korytarz transportowy, a jego efektywność oceniana jest na podstawie zestawu kryteriów opisanych w dalszej części pracy. Na podstawie tych ocen wybierane są najlepiej przystosowane osobniki, które przechodzą do kolejnej generacji. Nowa populacja tworzona jest z ich udziałem przy użyciu klasycznych operatorów genetycznych:

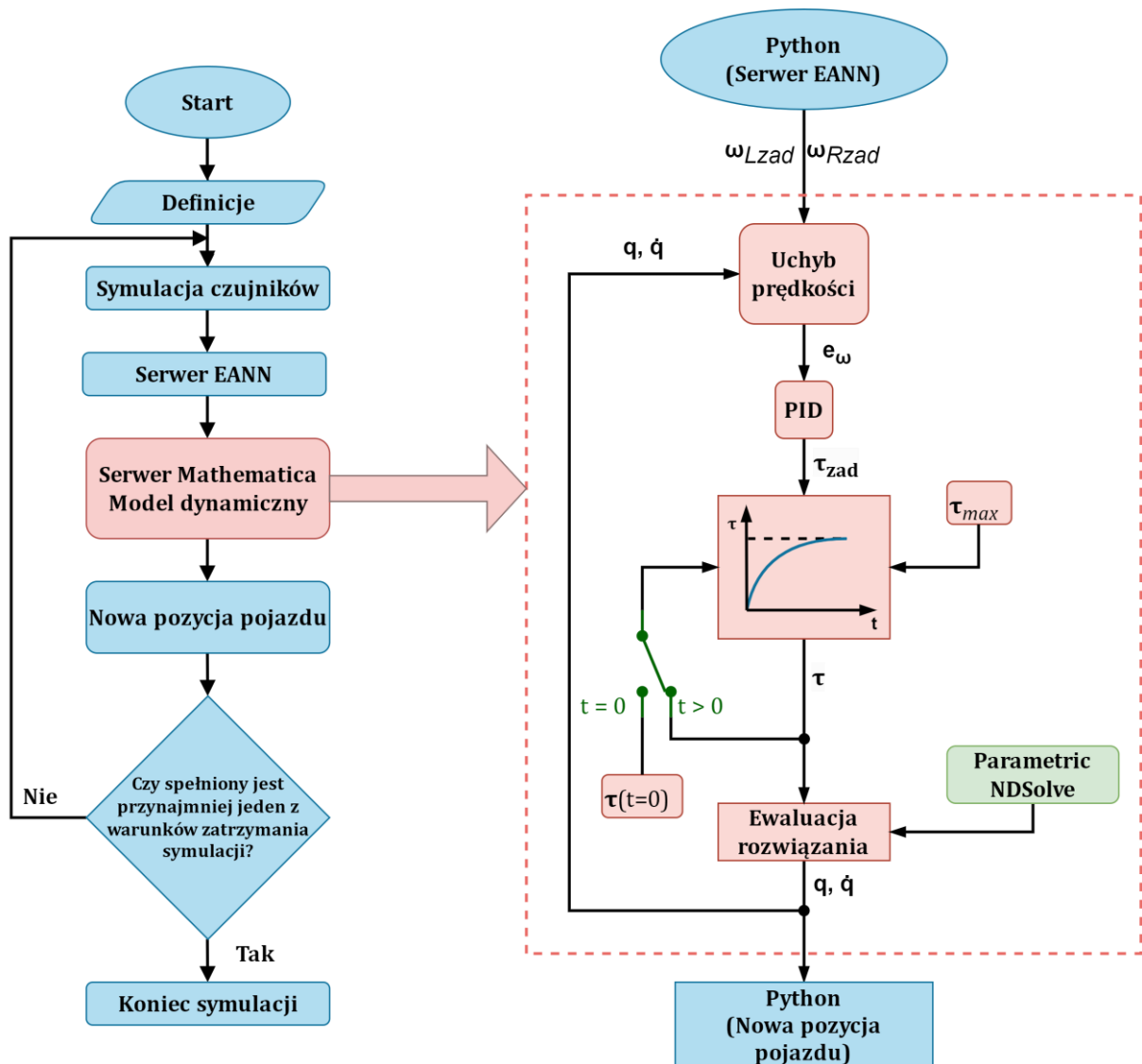
krzyżowania (ang. *crossover*) i mutacji. Taki sposób sterowania umożliwia automatyczne uczenie się strategii manewrowania bez potrzeby definiowania reguł sterowania w sposób jawny. System może znaleźć efektywne rozwiązania także w sytuacjach, które są trudne do opisanania analitycznie.

Struktura zastosowanej sieci neuronowej obejmuje 16 wejść w warstwie wejściowej, 2 wyjścia w warstwie wyjściowej oraz dwie warstwy ukryte, złożone po 10 neuronów każda. We wszystkich neuronach wykorzystano klasyczną sigmoidalną funkcję aktywacji, która dobrze sprawdza się w zadaniach klasyfikacyjnych i sterujących o ograniczonym zakresie wartości. Symulacja mapy oraz stanów czujników odbywa się na podstawie danych uzyskanych z modelu dynamicznego. Informacje te są analizowane przez moduł EANN i stanowią podstawę do wygenerowania decyzji sterujących. Interfejs graficzny systemu umożliwia dostrajanie parametrów symulacji w czasie rzeczywistym, co pozwala na testowanie różnych wariantów konfiguracji oraz wizualizację wyników. Warstwa prezentacyjna została zrealizowana w środowisku *Pygame* (*Python*), co umożliwia dynamiczne odwzorowanie sytuacji w korytarzu transportowym oraz wizualizację ruchu pojazdu w czasie rzeczywistym.

Schemat blokowy algorytmu oraz struktura modelu dynamicznego zostały przedstawione na rysunku 5.8. Pierwszym etapem działania systemu, określanym jako „Definicje”, jest zadanie parametrów konfiguracyjnych całego układu. Obejmuje to m.in. definicję mapy środowiska, liczbę i rozmieszczenie czujników, parametry sieci neuronowej oraz parametry modelu dynamicznego pojazdu wielocłonowego. Na podstawie aktualnej lokalizacji ciągnika i informacji o otoczeniu generowane są symulowane odczyty czujników, które stanowią dane wejściowe dla algorytmu EANN. Na ich podstawie sieć neuronowa generuje dwa sygnały prędkości dla silników ciągnika w zakresie od -1 (pełna prędkość wstecz) do 1 (pełna prędkość naprzód). Sygnały te są przekształcane na prędkości kątowe kół napędowych, które służą jako dane wejściowe do serwera modelu dynamicznego. Ten z kolei zwraca aktualne położenie ciągnika i przyczep, które służy do wygenerowania kolejnych odczytów czujników. Następnie algorytm sprawdza, czy spełniony jest przynajmniej jeden warunek zatrzymania symulacji. Jeśli tak, to następuje koniec symulacji dla tego pojazdu. Jeśli nie, to cykl zostaje powtórzony, aż do momentu spełnienia któregoś z warunków zatrzymania.

Danymi wejściowymi serwera dynamicznego są zadane prędkości kątowe kół ciągnika. Ponieważ model dynamiczny wymaga podania momentów obrotowych

działających na tylne koła, są one wyznaczone za pomocą regulatora prędkości PID oraz bloku inercji. Regulator przetwarza różnicę między zadaną a rzeczywistą prędkością kątową z poprzedniej iteracji. Na podstawie zadanych momentów oraz wartości początkowych (pozycje i prędkości uogólnione), rozwiązywany jest układ równań różniczkowych opisujących dynamikę układu. Wartości początkowe są uzyskiwane na podstawie wyników symulacji modelu dynamicznego poprzedniej iteracji lub w przypadku pierwszej iteracji, na podstawie pozycji początkowej wygenerowanej przez blok definicji. Blok uchybu prędkości, PID oraz bloku inercji zostały opisane w podrozdziale 5.1.4.2 w równaniach 5.12-5.16.



Rys. 5.8. Schemat blokowy algorytmu sterowania w pętli zamkniętej oraz struktura serwera modelu dynamicznego

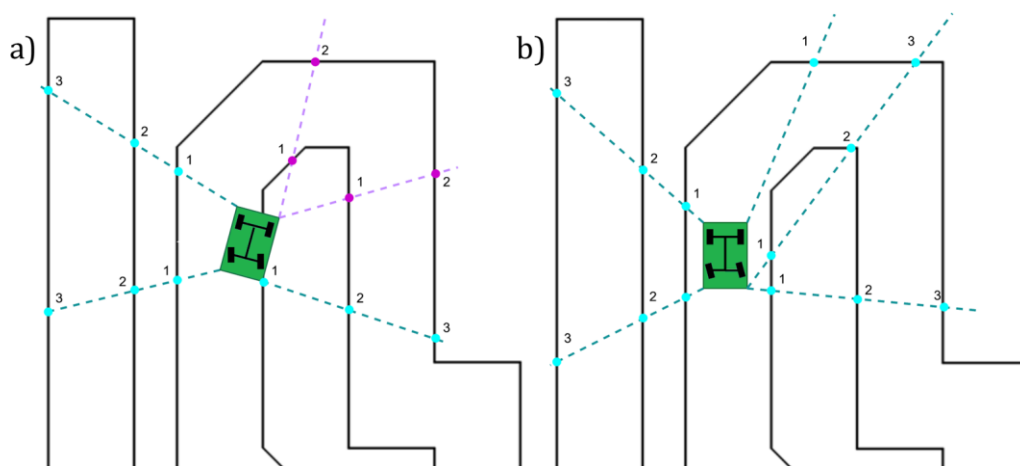
Zastosowanie rozwiązania parametrycznego przy użyciu funkcji *ParametricNDSolveValue* (Wolfram Mathematica) pozwala na szybkie rozwiązywanie układu równań różniczkowych w każdej iteracji, przy zadanych momentach i warunkach

początkowych. Pozwala to znacząco skrócić czas obliczeń i umożliwia integrację modelu dynamicznego z systemem sterowania w czasie rzeczywistym. Wszystkie dane przekazywane są do środowiska *Python*, gdzie znajduje się logika sterowania oraz system sztucznej inteligencji. Po przesłaniu nowych wartości prędkości kół z serwera, cały proces zostaje powtórzony.

Zastosowanie architektury klient-serwer ma na celu optymalizację obciążeń obliczeniowych oraz efektywne rozdzielenie zadań. Środowisko *Wolfram Mathematica* odpowiada za wydajne rozwiązywanie układów równań różniczkowych, natomiast *Python* stanowi elastyczne środowisko do implementacji algorytmów sztucznej inteligencji, przetwarzania danych i wizualizacji wyników.

5.2.2 System wykrywania kolizji

Wykrywanie kolizji prowadzone jest osobno dla każdej jednostki składowej pociągu logistycznego. Detekcja kolizji z otoczeniem opiera się na analizie geometrii obiektu oraz otaczającej go mapy przeszkód. Graficzną interpretację kolizji przedstawiono na rysunku 5.9. Algorytm wykrywania kolizji z otoczeniem stosuje metodę testowania przecięć. Z każdego narożnika obrysu jednostki prowadzona jest prosta promieniowa w ustalonym kierunku. Następnie zliczane są punkty przecięcia tej prostej z konturami przeszkód. Jeśli liczba przecięć dla danego narożnika jest nieparzysta, oznacza to, że znajduje się on wewnątrz zamkniętego obszaru (czyli przeszkody). Jeżeli dla przynajmniej jednego narożnika spełniony jest ten warunek, kolizja zostaje wykryta.



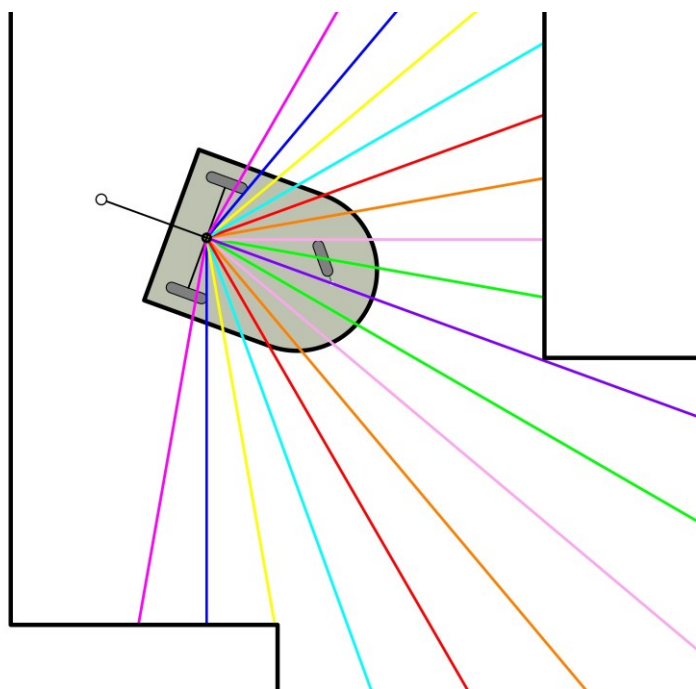
Rys. 5.9. Idea wykrywania kolizji pomiędzy daną jednostką, a korytarzem: a) kolizja wykryta, b) brak kolizji

Wykrywanie kolizji pomiędzy jednostkami układu opiera się na analizie kąta między sąsiadującymi jednostkami (segmentami) pociągu. Kolizja zostaje uznana za występującą, gdy ten kąt przekroczy wartość progową $\pm 90^\circ$. Wykrycie dowolnego typu kolizji, zarówno

z otoczeniem, jak i wewnątrz układu, skutkuje natychmiastowym przerwaniem symulacji danego przejazdu, co ma na celu eliminację nieefektywnych osobników w procesie optymalizacji.

5.2.3 Symulacja czujników LiDAR

Symulacja działania czujnika LiDAR obejmuje generowanie 16 sygnałów wejściowych przekazywanych do sieci neuronowej, z których każdy odpowiada za pomiar odległości do najbliższej przeszkody w zadanym kierunku. Schemat rozmieszczenia wiązek pomiarowych został przedstawiony na rysunku 5.10. Czujnik zlokalizowany jest w centralnym punkcie tylnej osi ciągnika. Emituje on wiązki w przestrzeni 2D, pokrywając sektor o zadanym kącie względem osi podłużnej pojazdu. Wiązki rozchodzą się symetrycznie względem głównej osi ciągnika, obejmując zarówno obszar z przodu, jak i po bokach pojazdu. Jedna z wiązek skierowana jest wzdłuż osi podłużnej ciągnika. Zasymulowane odległości przesyłane są jako dane wejściowe do sieci neuronowej i stanowią podstawę do podjęcia decyzji sterujących. Pomiar odległości do przeszkód realizowany jest wyłącznie dla ciągnika, co oznacza, że pozycje przyczep oceniane są tylko na podstawie wystąpienia kolizji.



Rys. 5.10. Symulacja czujników LiDAR

5.2.4 Ewaluacja przejazdu i warunki zatrzymania poszczególnej symulacji

Aby możliwe było porównywanie skuteczności różnych osobników w procesie nauki, każdy przejazd w symulacji podlega ocenie na podstawie zestawu kryteriów opisujących

jego jakość. Celem tych kryteriów jest promowanie płynności, symetrii i efektywności ruchu. Przejazdy oceniane są na podstawie:

- długości trasy pokonanej przez ciągnik,
- średniej prędkości ciągnika,
- zmienności prędkości ciągnika,
- asymetryczności toru jazdy,
- zmienności kierunku ruchu.

Najlepiej oceniane są przejazdy, w których ciągnik pokonał najdłuższą trasę, co zazwyczaj oznacza, że zbliżył się do celu i nie doszło do przedwczesnego zatrzymania symulacji w wyniku słabej jakości jazdy. Im większa jest średnia prędkość ciągnika, tym ocena jest wyższa, co ma zapewnić płynność przejazdu. Wartość oceny obniżają natomiast: częste zmiany prędkości, duża zmienność kierunku jazdy oraz wyraźna asymetryczność toru ruchu, co wskazuje na nieoptymalne zachowanie układu sterowania.

W celu zwiększenia efektywności obliczeniowej procesu uczonego, symulacja dla każdego pociągu w populacji może zostać zakończona wcześniej, jeśli zostanie spełniony jeden z określonych warunków zatrzymania. Pozwala to ograniczyć niepotrzebne obciążenie obliczeniowe, ponieważ pociągi, które już „odpadły”, nie są dalej symulowane w ramach danej populacji. Symulacja zostaje przerwana w przypadku:

- osiągnięcia pozycji docelowej przez pojazd,
- kolizji między jednostkami pociągu,
- kolizji z otoczeniem (ściany korytarza itp.),
- nadmiernego odchylenia orientacji ciągnika (przekroczenie maksymalnego kąta),
- zbyt niskiej prędkości (np. zatrzymanie się w martwym punkcie),
- przekroczenie maksymalnego dozwolonego czasu przejazdu.

6. Badania symulacyjne pociągu logistycznego

6.1 Wstęp do badań symulacyjnych

Niniejszy rozdział poświęcono badaniom symulacyjnym opracowanych modeli i algorytmów sterowania pociągiem logistycznym. W celu umożliwienia dostępu do kodów źródłowych programów wykorzystanych w rozprawie doktorskiej przygotowano repozytorium plików dostępne online. Folder został udostępniony publicznie z dostępem tylko do odczytu. Dostęp do materiałów jest możliwy zarówno poprzez kod QR zamieszczony na rysunku 6.1, jak i poprzez skrócony adres internetowy podany w podpisie rysunku lub pełny adres podany w przypisie [186].



Rys. 6.1. Link do repozytorium zamieszczonego w usłudze OneDrive:
<https://tinyurl.com/PHD-Repozytorium>

W ramach tego rozdziału przeprowadzono szereg badań symulacyjnych, których celem była weryfikacja działania opracowanych modeli. Do realizacji przejazdu po zadanej trasie wykorzystano opracowany algorytm śledzenia trajektorii, który umożliwia zadanie trajektorii punktu referencyjnego bez konieczności bezpośredniego definiowania przebiegów prędkości lub momentów zadanych na koła pojazdu. Dotyczy to zarówno zadawania prędkości i momentów napędowych kół w przypadku ciągnika typu DDT, jak i prędkości oraz skrętu kół w przypadku ciągnika typu TTFS.

Wszystkie symulacje z wyjątkiem badań symulacyjnych EANN (podrozdział 6.5) zostały przeprowadzone w środowisku symulacyjnym *Wolfram Mathematica 14.0* na komputerze stacjonarnym z 64-bitowym systemem Windows 10, wyposażonym w procesor AMD Ryzen 5 3600, 16 GB pamięci RAM oraz kartę graficzną AMD Radeon RX 5600 XT.

6.2 Badania symulacyjne modelu kinematycznego

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki badań symulacyjnych dla modelu kinematycznego pociągu logistycznego, składającego się z holownika oraz czterech

przyczep. Celem badań było porównanie wpływu różnych układów skrętnych przyczep na trajektorie środków geometrycznych tych jednostek.

W warunkach rzeczywistego wdrożenia pociągu logistycznego kluczowym ograniczeniem jest dostępna szerokość korytarza transportowego. Wraz ze wzrostem długości zestawu rośnie zapotrzebowanie na przestrzeń manewrową, dlatego szczególnie pożądane jest stosowanie układów skrętnych, które zapewniają możliwie dużą powtarzalność trajektorii między kolejnymi przyczepami. Taki efekt sprzyja także łatwiejszemu manualnemu sterowaniu całym zestawem.

Badania objęły analizę dwóch konfiguracji układów skrętnych przyczep: z układem stałego dyszla (FDSS) oraz z układem podwójnego Ackermanna (DASS). Ocena dotyczyła wpływu przyjętej konfiguracji przyczep na kształt i powtarzalność trajektorii środków geometrycznych poszczególnych jednostek. Pierwszy scenariusz symulacyjny obejmował jazdę po torze okrężnym, zadanym w postaci trajektorii punktu referencyjnego zmiennego w czasie. W tym wariancie zastosowano holownik typu DDT. Drugi scenariusz dotyczył przejazdu po ścieżce w kształcie ósemki i realizowany był z wykorzystaniem holownika typu TTFS. Parametry geometryczne symulowanych wariantów pociągu logistycznego przedstawiono w tabeli 6.1. Zostały one dobrane w taki sposób, aby długość zestawu w obu wariantach była identyczna, a środki geometryczne poszczególnych przyczep pokrywały się w początkowym położeniu symulacji.

Tab. 6.1. Parametry geometryczne pociągu logistycznego (dla $i = 1, \dots, 4$)

DDT/TTFS+FDSS		DDT/TTFS+DASS	
Parametr	Wartości [m]	Parametr	Wartości [m]
h_0	0,823	h_0	0,823
b_0	0,748	b_0	0,748
d_0	0,25	d_0	0,25
$r_{r0} = r_{f0}$	0,1	$r_{r0} = r_{f0}$	0,1
e_{fM0}	0,05	e_{fM0}	0,05
h_i	1	h_i	1
b_i	0,7	b_i	0,7
d_i	0,25	d_i	0,25
d_{fi}	1	d_{fi}	1
e_{fLi}	0,05		
e_{fRi}	0,05		

W obu wariantach zastosowano algorytm śledzenia trajektorii opisany w podrozdziale 5.1. Zastosowane nastawy regulatora PD dobrano eksperymentalnie w taki sposób, aby zapewnić wysoką jakość śledzenia trajektorii przez ciągnik. Wartości

tych nastaw przedstawiono w tabeli 6.2. Czas trwania symulacji był równy 20 sekund. Trajektoria referencyjna została zadana w postaci punktu $(x_d(t), y_d(t))$, którego współrzędne zmieniają się w czasie.

Tab. 6.2. Nastawy regulatora PD

Parametr	Wartość
K_{pp}	50 000
K_{Dp}	1 100
$K_{P\beta} = K_{P\varphi}$	10 000
$K_{D\beta} = K_{D\varphi}$	500

Scenariusz nr 1

Trajektoria zadana dla scenariusza pierwszego została opisana jako:

$$x_d(t) = 8 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right), y_d(t) = 8 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right). \quad (6.1)$$

Symulacje zestawu z FDSS przeprowadzono dla wartości początkowych odniesionych do wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q}(0) = [x^P \ y^P \ \beta_0^P \ \varphi_{fM0}^P \ \beta_1^P \ \varphi_{fL1}^P \ \varphi_{fR1}^P \ \cdots \ \beta_4^P \ \varphi_{fL4}^P \ \varphi_{fR4}^P], \quad (6.2)$$

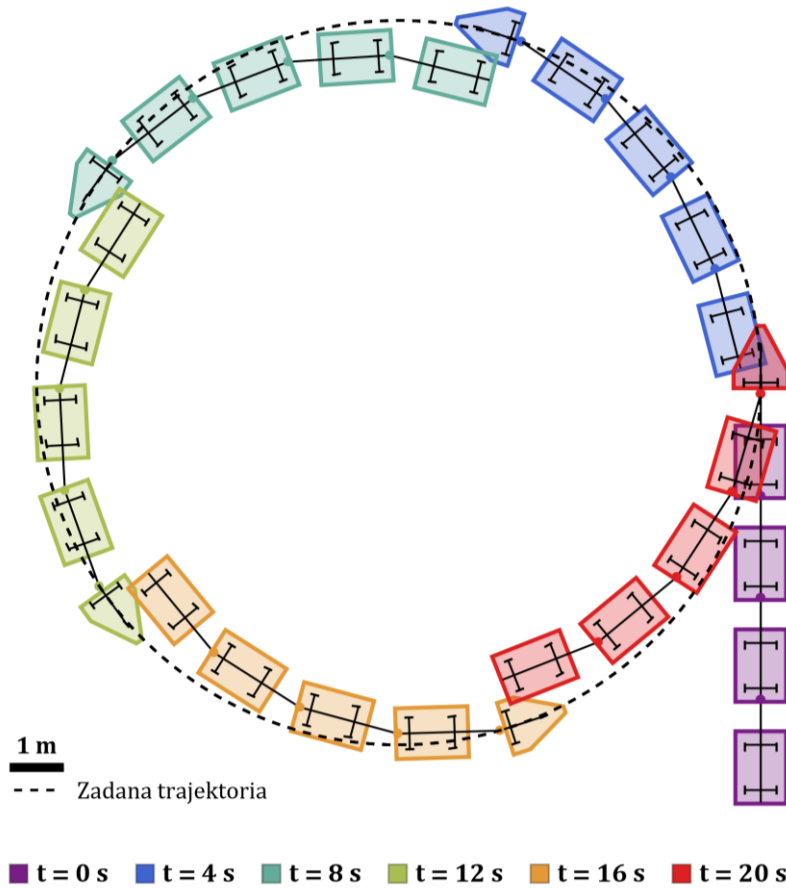
gdzie symbol P w indeksie górnym nie oznacza potęgowania, lecz został przyjęty jako oznaczenie wartości początkowych zmiennych układu. Wartości te wynoszą:

$$\begin{aligned} x^P &= 8 \text{ m} \\ y^P &= -0,0001 \text{ m} \\ \beta_i^P &= -\pi/2 \text{ rad} && \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\ \varphi_{fM0}^P &= \varphi_{fL1}^P = \varphi_{fR1}^P = \pi/2 \text{ rad} && \text{dla } i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (6.3)$$

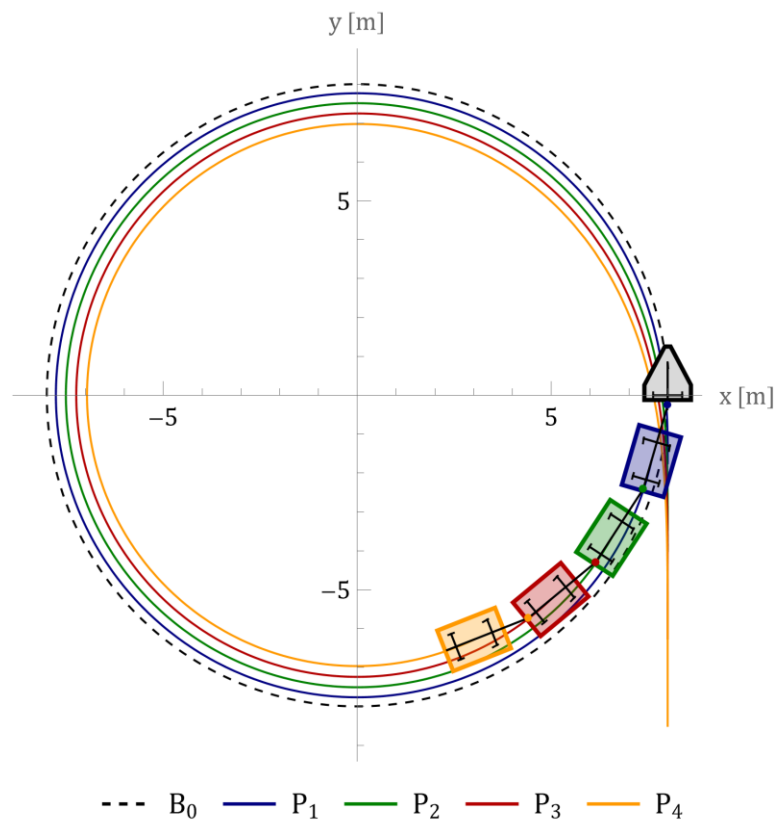
Na rysunku 6.2 przedstawiono pozycje pociągu logistycznego z przyczepami typu FDSS w różnych chwilach czasowych. Można zauważyć, że położenie kolejnych przyczep coraz bardziej odbiega od zadanej trajektorii $(x_d(t), y_d(t))$. Na rysunku 6.3 przedstawiono trajektorie środków geometrycznych poszczególnych przyczep (FDSS) podczas przejazdu oraz końcowe położenie pociągu logistycznego. Zauważyć można, że wraz z kolejną przyczepą, promień uzyskanej trajektorii okrężnej, wyznaczonej przez środek geometryczny danej przyczepy, systematycznie się zmniejsza.

Dla zestawu z DASS, wartości początkowe zostały również odniesione do wektora współrzędnych uogólnionych, co można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{q}(0) = [x^P \ y^P \ \beta_0^P \ \varphi_{fM0}^P \ \beta_{11}^P \ \beta_{12}^P \ \cdots \ \beta_{41}^P \ \beta_{42}^P]. \quad (6.4)$$



Rys. 6.2. Pozycje pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – FDSS) w różnych chwilach czasowych



Rys. 6.3. Pozycja pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – FDSS) w położeniu końcowym i trajektorie środków geometrycznych przyczep

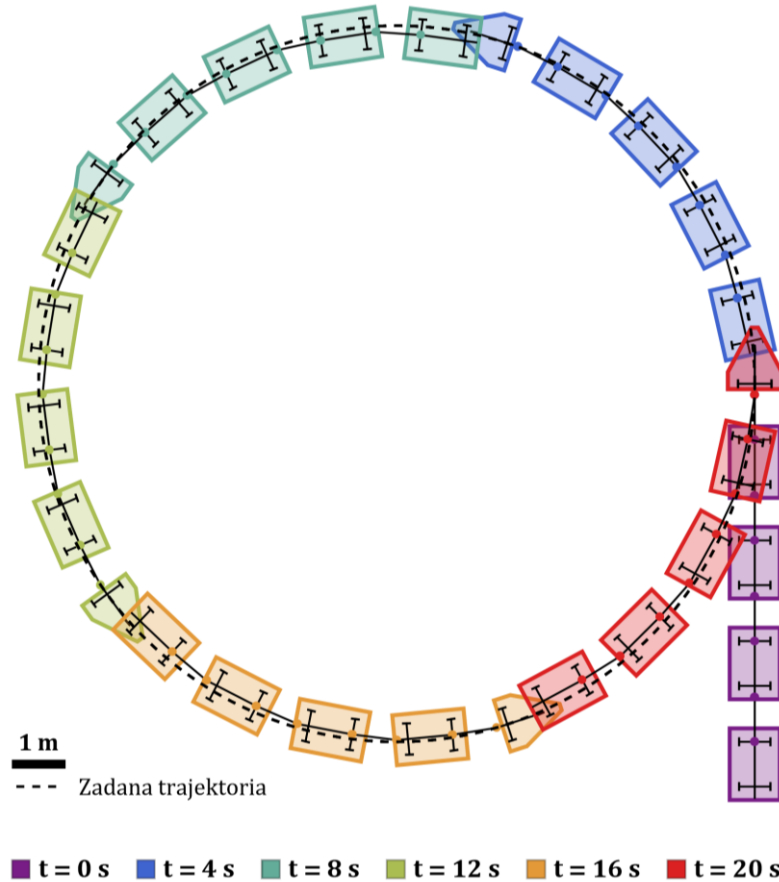
Wartości współrzędnych uogólnionych w pozycji początkowej wynoszą:

$$\begin{aligned} x^P &= 8 \text{ m} \\ y^P &= -0,0001 \text{ m} \\ \beta_0^P &= \beta_{i1}^P = \beta_{i2}^P = -\pi/2 \text{ rad} & \text{dla } i = 1, \dots, 4 \\ \varphi_{fM0}^P &= \pi/2 \text{ rad} \end{aligned} \quad (6.5)$$

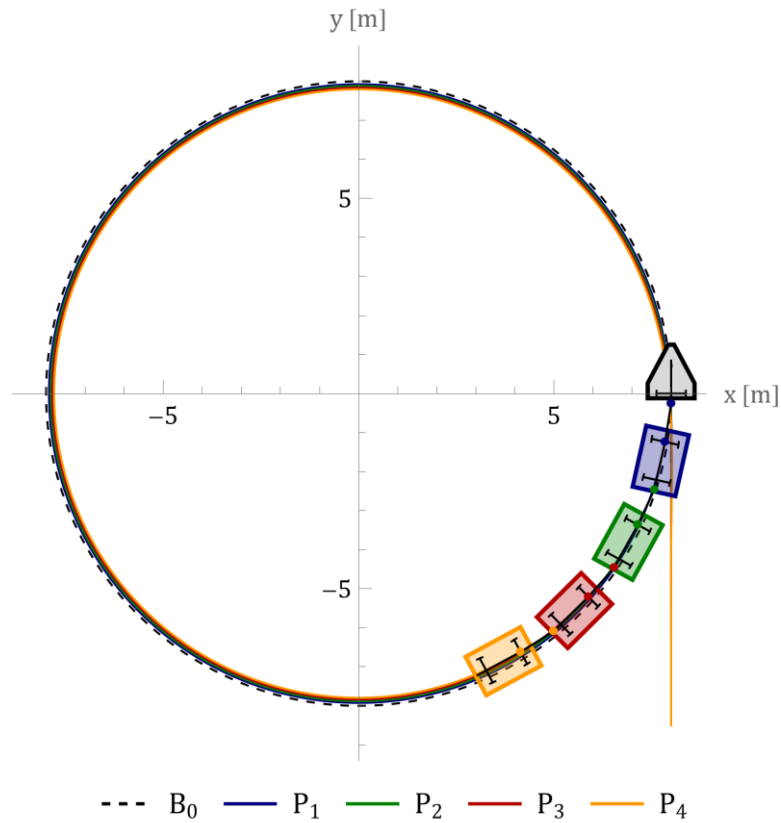
Na rysunku 6.4 przedstawiono pozycje pociągu logistycznego z przyczepami typu DASS w różnych chwilach czasowych. Natomiast rysunek 6.5 przedstawia trajektorie środków geometrycznych poszczególnych przyczep oraz końcowe położenie tego zestawu. W przypadku przyczep z układem podwójnego Ackermanna można zaobserwować znacznie większą zbieżność trajektorii kolejnych jednostek w porównaniu do zestawu z przyczepami typu FDSS. Na rysunku 6.6 przedstawiono różnice odległości środków geometrycznych przyczep P_i (dla $i = 2,3,4$) względem środka geometrycznego przyczepy pierwszej P_1 , obliczone względem początku układu współrzędnych jako:

$$\Delta P_i = \sqrt{x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2} - \sqrt{x_{P_1}^2 + y_{P_1}^2}. \quad (6.6)$$

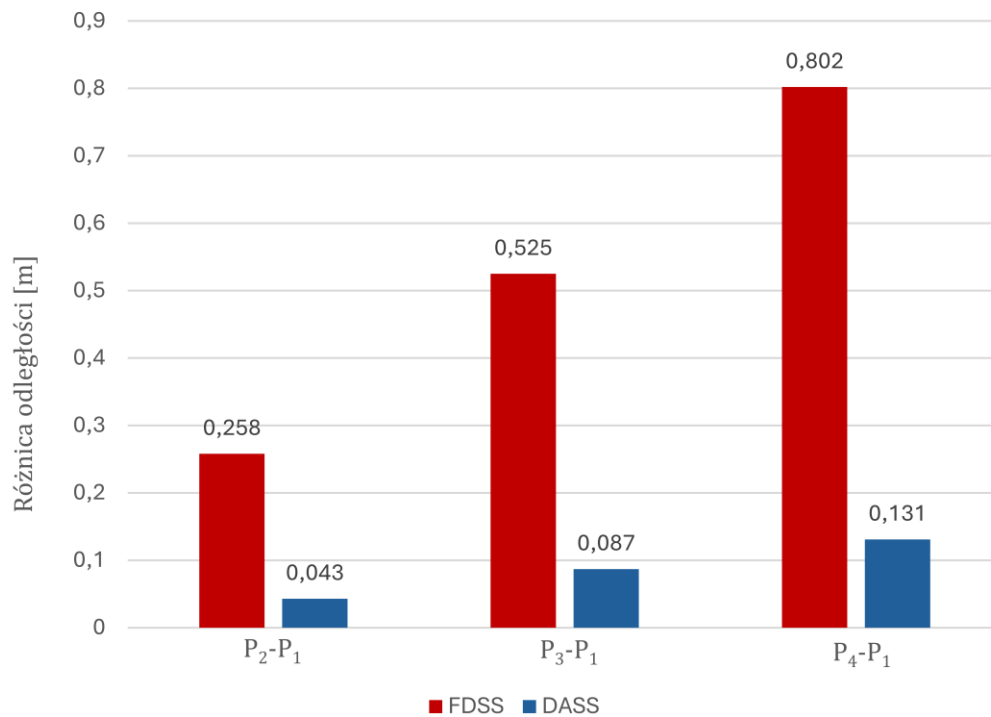
Wartości te wyznaczono dla chwili $t = 20 \text{ s}$.



Rys. 6.4. Pozycje pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – DASS) w różnych chwilach czasowych



Rys. 6.5. Pozycja pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – DASS) w położeniu końcowym i trajektorie środków geometrycznych przyczep



Rys. 6.6. Różnica odległości środków geometrycznych przyczep

Scenariusz nr 2

Trajektoria zadana dla scenariusza drugiego została opisana jako:

$$x_d(t) = 8 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right), y_d(t) = 5 \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right). \quad (6.7)$$

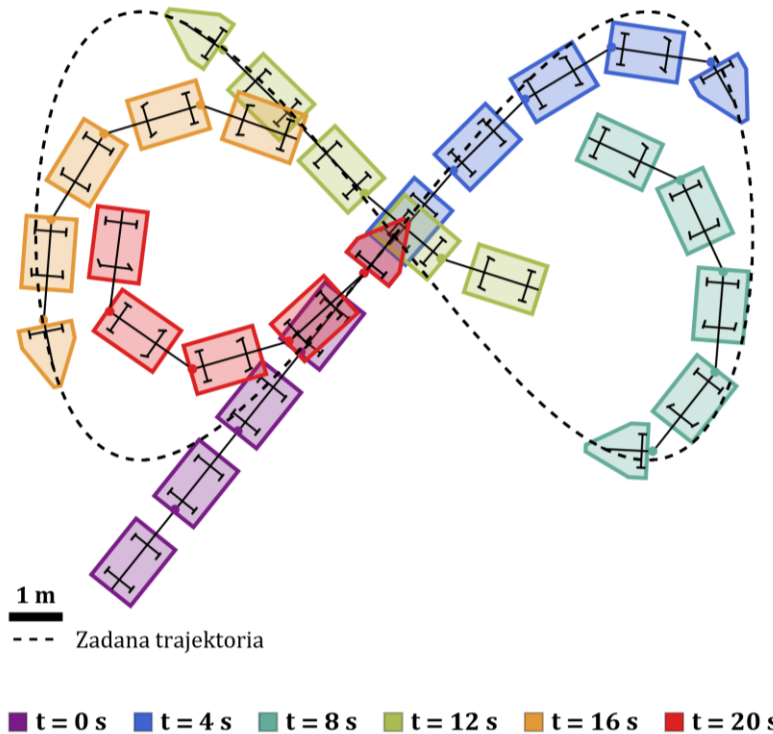
Wartości początkowych wartości współrzędnych uogólnionych dla zestawu z FDSS wynoszą:

$$\begin{aligned} x^P &= -0,52 \text{ m} \\ y^P &= -0,64 \text{ m} \\ \beta_i^P &= -0,9 \text{ rad} & \text{dla } i = 0, \dots, 4' \\ \varphi_{fM0}^P &= \varphi_{fLi}^P = \varphi_{fRi}^P = 2,25 \text{ rad} & \text{dla } i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (6.8)$$

a dla pociągu wyposażonego w przyczepy typu DASS:

$$\begin{aligned} x^P &= -0,52 \text{ m} \\ y^P &= -0,64 \text{ m} \\ \beta_0^P &= \beta_{i1}^P = \beta_{i2}^P = -0,9 \text{ rad} & \text{dla } i = 1, \dots, 4' \\ \varphi_{fM0}^P &= 2,25 \text{ rad} \end{aligned} \quad (6.9)$$

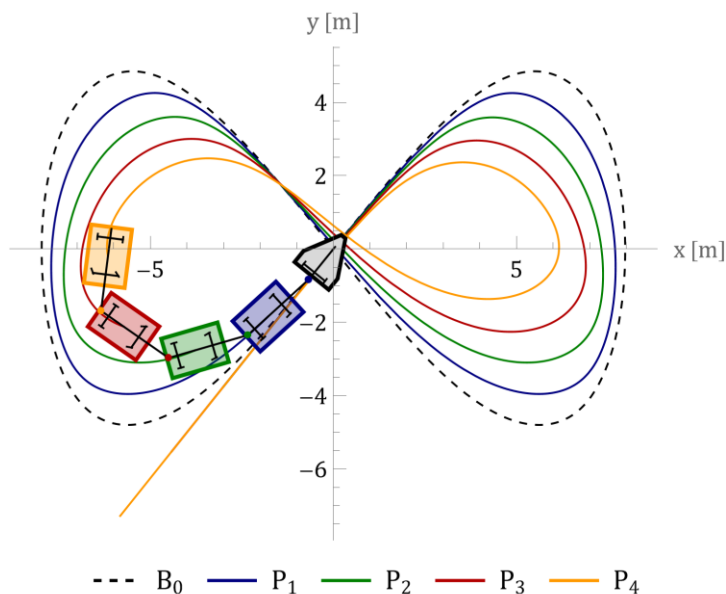
Na rysunku 6.7 przedstawiono pozycje pociągu logistycznego (ciągnik – TTFS, przyczepy – FDSS) w różnych chwilach czasowych. Na rysunku 6.8 przedstawiono trajektorie środków geometrycznych poszczególnych przyczep podczas przejazdu układu po torze w kształcie ósemki dla tego zestawu.



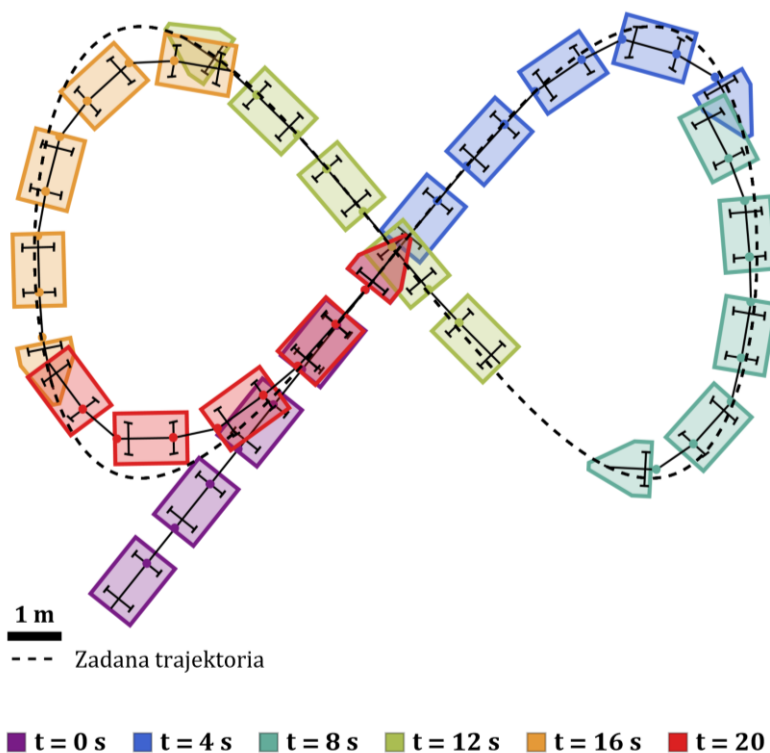
Rys. 6.7. Pozycje pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – FDSS) w różnych chwilach czasowych

Na rysunku 6.9 przedstawiono pozycje pociągu logistycznego (ciągnik – TTFS, przyczepy – DASS) w wybranych chwilach czasowych. Natomiast rysunek 6.10 przedstawia trajektorie środków geometrycznych poszczególnych przyczep podczas

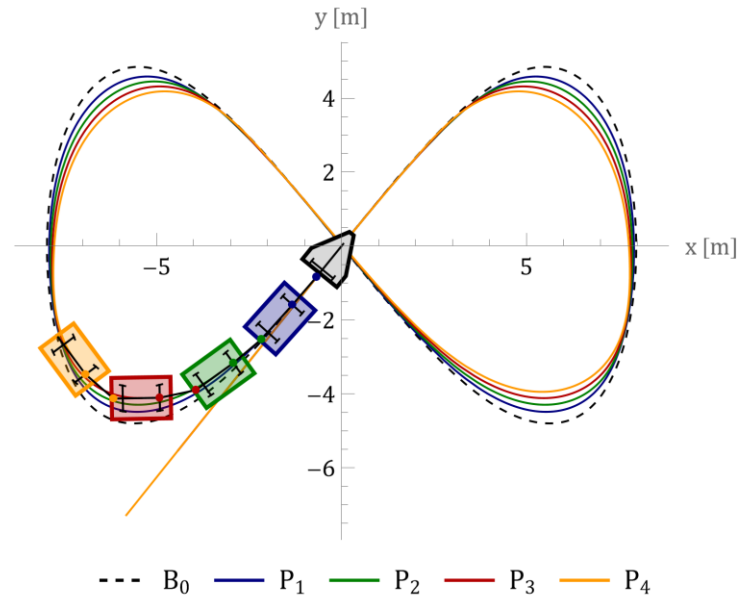
przejazdu układu dla scenariusza nr 2 (ciągnik – DDT, przyczepy – DASS). Na podstawie przeprowadzonej wizualizacji można stwierdzić, że również dla ścieżki w kształcie ósemki utrzymuje się ta sama tendencja: trajektorie kolejnych przyczep są wyraźnie bardziej zbliżone do siebie w przypadku zastosowania układu podwójnego Ackermanna.



Rys. 6.8. Pozycja pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – FDSS) w położeniu końcowym i trajektorie środków geometrycznych przyczep



Rys. 6.9. Pozycje pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – DASS) w różnych chwilach czasowych



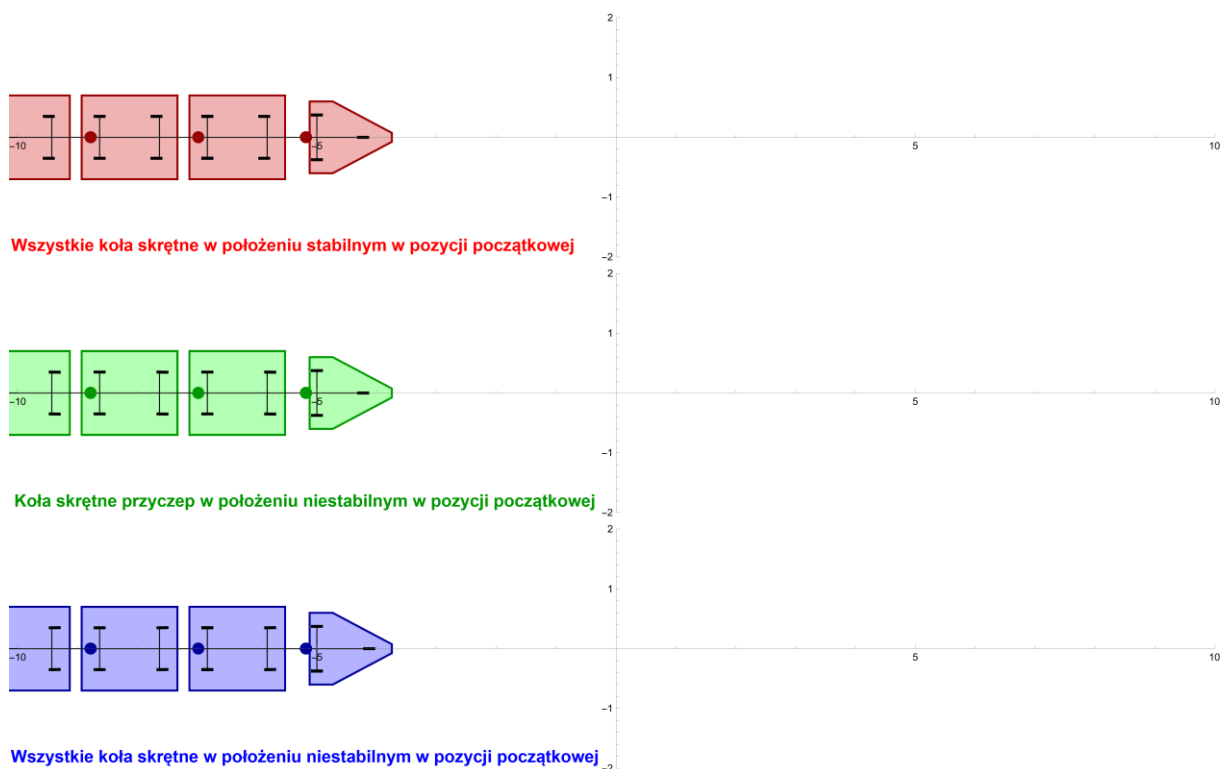
Rys. 6.10. Pozycja pociągu logistycznego (ciągnik – DDT, przyczepy – DASS) w położeniu końcowym i trajektorie środków geometrycznych przyczep

Podsumowując, przeprowadzone badania symulacyjne modelu kinematycznego wykazały, że układ DASS zapewnia istotnie lepszą powtarzalność trajektorii środków geometrycznych wózków w zestawie w porównaniu z układem stałego dyszla (FDSS). Wniosek ten został potwierdzony w dwóch niezależnych scenariuszach, opartych na różnych kształtach trajektorii zadanej, co świadczy o jego powtarzalności i niezależności od geometrii toru ruchu.

6.3 Badania symulacyjne wpływu kół swobodnie skrętnych

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki badań symulacyjnych, których celem było określenie wpływu kół swobodnie skrętnych w przyczepach oraz w holowniku na zachowanie całego zestawu logistycznego. Analizie poddano stabilność trajektorii jazdy, wartości kątów skrętu poszczególnych jednostek oraz ich końcowe położenie. Symulacje DM-LF przeprowadzono dla trzech wariantów przejazdu pociągu logistycznego, w których za każdym razem zastosowano holownik typu DDT oraz przyczepy z układem skrętnym stałego dyszla (FDSS). Zestaw składał się z czterech przyczep. Danymi wejściowymi do modelu były momenty napędowe zadawane na tylne koła holownika τ_L i τ_R . W związku z tym, że celem było uzyskanie jazdy po linii prostej, momenty te miały jednakowe wartości dla obu kół i wynosiły $20 \text{ N} \cdot \text{m}$. Pozycja początkowa holownika w każdym przypadku była zdefiniowana następująco: $[x(0) \ y(0) \ \beta_0(0)]^T = [-5 \ 0 \ 0]^T$. Początkowa orientacja każdej z przyczep wynosiła $\beta_i(0) = 0 \text{ rad}$, dla $i = 1, \dots, 4$. Położenie początkowe pociągu logistycznego

w trzech wariantach przedstawiono na rysunku 6.11. We wszystkich analizowanych wariantach wartości początkowe wszystkich elementów wektora prędkości uogólnionych były równe zero.



Rys. 6.11. Pozycja początkowa wszystkich trzech wariantów

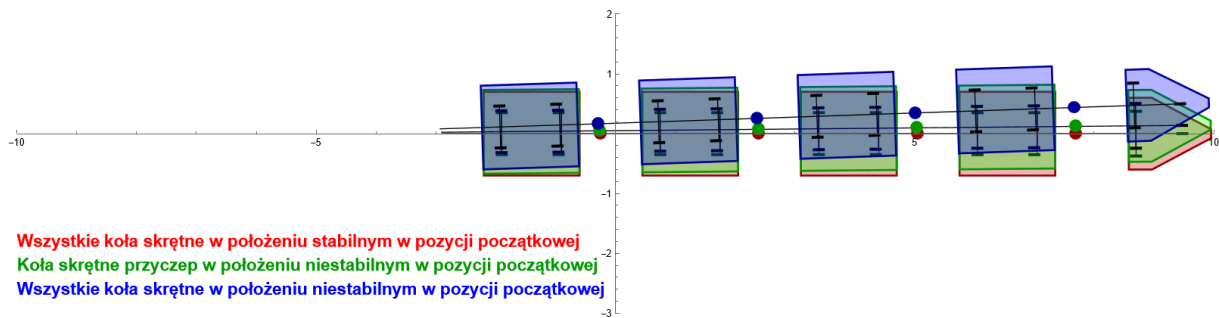
W pierwszym wariantcie przejazdu pociągu, w pozycji początkowej wszystkie koła swobodnie skrętne były ustawione w położeniu stabilnym, czyli: $\varphi_{fLi}(0), \varphi_{fRi}(0), \varphi_{fM0}(0)$ dla $i = 1, \dots, 4$ wynosiły π rad. W drugim wariantcie przejazdu, tylko koła skrętne przyczep w pozycji początkowej były ustawione w położeniu niestabilnym, czyli $\varphi_{fLi}(0), \varphi_{fRi}(0)$ dla $i = 1, \dots, 4$ wynosiły 0 rad. Przednie koło skrętne ciągnika w pozycji początkowej, było ustawione w położeniu stabilnym, czyli $\varphi_{fM0}(0) = \pi$ rad. W trzecim wariantcie przejazdu pociągu, w pozycji początkowej wszystkie koła swobodnie skrętne były ustawione w położeniu niestabilnym, czyli $\varphi_{fLi}(0), \varphi_{fRi}(0), \varphi_{fM0}(0)$ dla $i = 1, \dots, 4$ wynosiły 0 rad. W tabeli 6.3 przedstawiono parametry modelu pociągu logistycznego, które zastosowane zostały w badaniach symulacyjnych poślizgu poprzecznego.

Na rysunku 6.12 przedstawiono pozycję pociągu dla $t = 10$ s dla trzech wariantów. Widoczny efekt jest zgodny z oczekiwaniami, czyli wariant ze wszystkimi kołami swobodnie skrętnymi w położeniu niestabilnym uzyskał największą odchyłkę względem wartości $y = 0$. Dla większego zakresu czasu jest to bardziej zauważalne,

co przedstawiono na rysunku 6.13, gdzie oś y została przeskalowana, by lepiej zwizualizować porównanie położenia punktu B_0 .

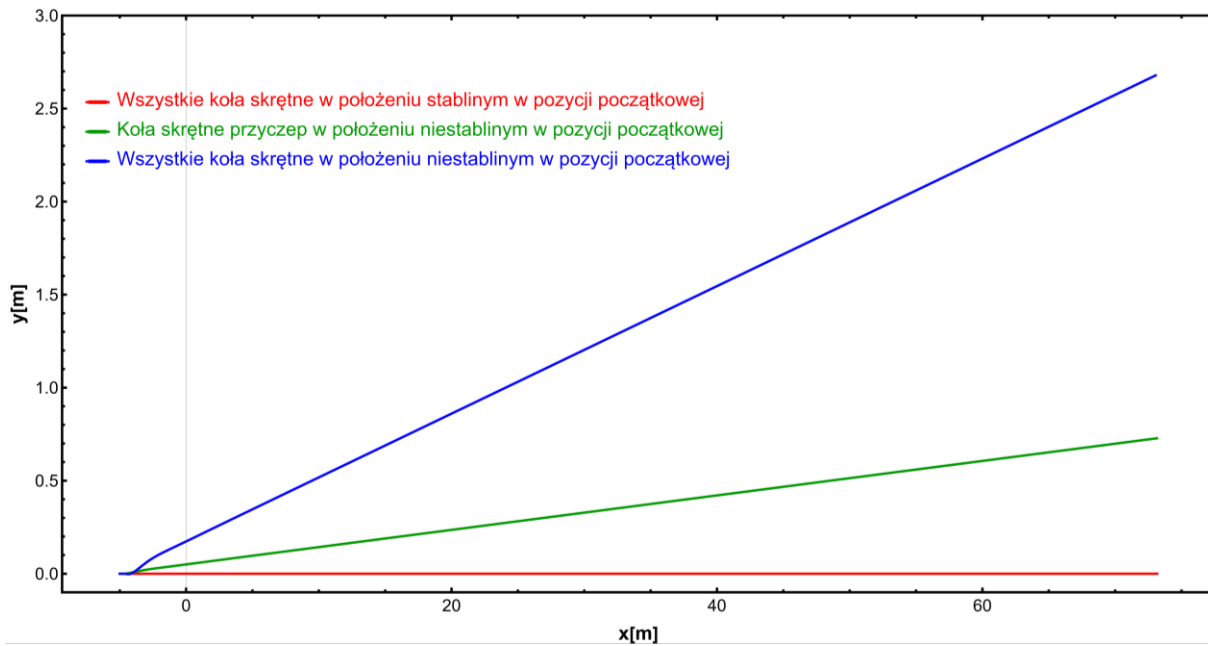
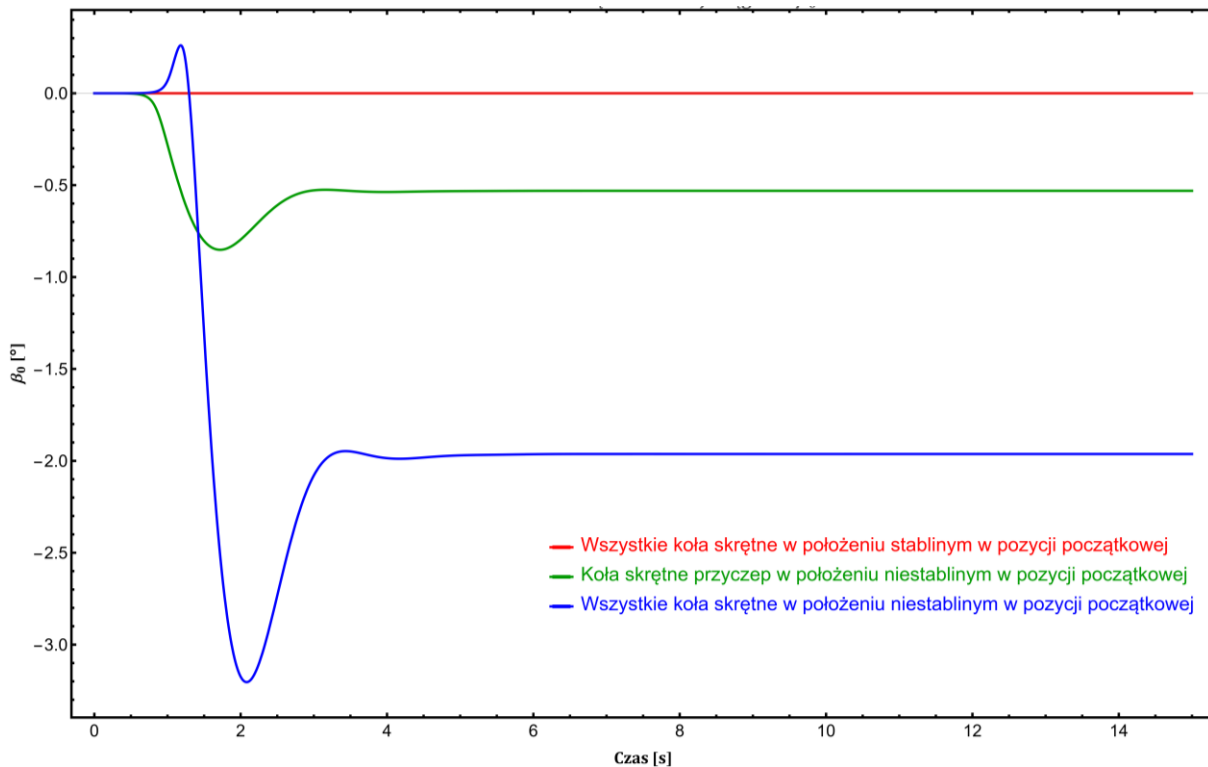
Tab. 6.3. Parametry modelu dynamicznego pociągu logistycznego (dla $i = 1, \dots, 4$)

Parametry geometryczne		Pozostałe parametry	
Parametr	Wartości [m]	Parametr	Wartości
h_0	0,823	m_0	800 kg
b_0	0,748	m_{rL0}	0 kg
d_0	1	m_{rR0}	0 kg
c_0	0,305	m_{fM0}	2,63 kg
r_{r0}	0,1	I_0	60 kg · m ²
e_{fM0}	0,05	I_{rL0}	0,006 kg · m ²
h_i	1	I_{rR0}	0,006 kg · m ²
b_i	0,7	I_{fM0}	0,006 kg · m ²
d_i	1	m_i	238 kg
c_i	0,49	$m_{rLi} = m_{rRi}$	2,63 kg
d_{fi}	0,65	$m_{fLi} = m_{fRi}$	2,63 kg
e_{fLi}	0,05	I_i	54,479 kg · m ²
e_{fRi}	0,05	$I_{rLi} = I_{rRi}$	0,006 kg · m ²
		$I_{fLi} = I_{fRi}$	0,006 kg · m ²
		μ_y	1
		C_y	7
		g	9,81 N/s ²



Rys. 6.12. Porównanie wszystkich trzech wariantów dla $t = 10$ s

Efekt w postaci wartości współrzędnej y dla punktu B_0 wynika ze zmiany kąta orientacji ciągnika β_0 w początkowej fazie symulacji w wyniku położenia niestabilnego kół swobodnie skrętnych. W związku z tym kąt orientacji ciągnika β_0 dobrze odzwierciedla wpływ kół swobodnie skrętnych na układ, co przedstawiono na rysunku 6.14.

Rys. 6.13. Porównanie położenia punktu B_0 ciągnikaRys. 6.14. Porównanie kąta orientacji ciągnika β_0

6.4 Badania symulacyjne poślizgu poprzecznego

Podrozdział ten poświęcono analizie symulacyjnej wpływu poślizgu poprzecznego kół na trajektorię pociągu logistycznego w dynamicznych warunkach ruchu. Badania przeprowadzono z wykorzystaniem modelu dynamicznego uwzględniającego siły tarcia poprzecznego (DM-LF). Badania te wykonano w trzech scenariuszach.

Scenariusz nr 1

W scenariuszu nr 1 szczególną uwagę poświęcono wpływowi masy przyczep na stabilność toru jazdy zestawu wieloczołowego w warunkach pokonywania zakrętu. Symulacje przejazdu wykonano w układzie korytarza transportowego o kształcie przypominającym literę „S”, obejmującym dwa przeciwległe zakręty o kącie 90° . W badaniach symulacyjnych trajektoria zadana ciągnika $(x_d(t), y_d(t))$ została określona na podstawie funkcji odcinkowej, w której uwzględniono odcinki ruchu prostoliniowego i krzywoliniowego (łukowego). Ze względu na złożoność tej funkcji, jej dokładna implementacja została udostępniona w repozytorium [186]. W początkowym stanie układ nie znajdował się w spoczynku. Ciągnik był rozpędzony i poruszał się z ustaloną prędkością początkową. Dzięki temu możliwe było uwzględnienie pełnych efektów dynamicznych, w tym bezwładności i opóźnień reakcji układu. Czas symulacji wynosił 14 sekund.

Badania przeprowadzono dla dwóch wariantów: z przyczepami obciążonymi oraz nieobciążonymi. W obu przypadkach zastosowano ciągnik typu DDT z czterema przyczepami (DFSS). W tabeli 6.4 przedstawiono wartości parametrów algorytmu śledzenia trajektorii ciągnika.

Tab. 6.4. Parametry algorytmu śledzenia trajektorii ciągnika

Parametr	Wartość
K_{pp}	200
K_{Ip}	4
K_{Dp}	20
$K_{P\beta}$	500
$K_{I\beta}$	200
$K_{D\beta}$	250
T_s	0,01 s
K_{iner}	0,2
$\tau_{\theta max}$	1500 N · m
$\omega_{\theta max}$	200 rad/s
δ_β	$2\pi/18$

W tabeli 6.5 przedstawiono parametry geometryczne oraz pozostałe parametry zastosowane w modelu dynamicznym pociągu logistycznego w obu symulacjach. W wariantcie z przyczepami obciążonymi: $c_i = 0,490$ m, $m_i = 1200$ kg, $I_i = 170$ kg · m², a w wariantcie z nieobciążonymi: $c_i = 0,514$ m, $m_i = 20$ kg, $I_i = 10$ kg · m². Dla każdego

z kół zastosowano taki sam maksymalny współczynnik tarcia poprzecznego oraz taką samą sztywność poprzeczną kół C_y :

$$\begin{aligned}\mu_{yfM0} &= \mu_{yrL0} = \mu_{yrR0} = \mu_{yfLi} = \mu_{yfri} = \mu_{yrLi} = \mu_{yrLi} = \mu_y \\ C_{yfM0} &= C_{yrL0} = C_{yrR0} = C_{yfLi} = C_{yfri} = C_{yrLi} = C_{yrLi} = C_y,\end{aligned}\quad (6.10)$$

dla $i = 1, \dots, 4$.

Tab. 6.5. Parametry geometryczne pociągu logistycznego i pozostałe parametry modelu dynamicznego pociągu logistycznego (dla $i = 1, \dots, 4$)

Parametry geometryczne		Pozostałe parametry	
Parametr	Wartości [m]	Parametr	Wartości
h_0	0,823	m_0	800 kg
b_0	0,748	m_{rL0}	2,63 kg
d_0	1	m_{rR0}	2,63 kg
c_0	0,305	m_{fM0}	2,63 kg
r_{r0}	0,1	I_0	60 kg · m ²
e_{fM0}	0,05	I_{rL0}	0,006 kg · m ²
h_i	1	I_{rR0}	0,006 kg · m ²
b_i	0,7	I_{fM0}	0,006 kg · m ²
d_i	1	$m_{rLi} = m_{rRi}$	2,63 kg
d_{fi}	0,65	$m_{fLi} = m_{fri}$	2,63 kg
e_{fLi}	0,05	$I_{rLi} = I_{rRi}$	0,006 kg · m ²
e_{fRi}	0,05	$I_{fLi} = I_{fri}$	0,006 kg · m ²
		μ_y	0,45
		C_y	7
		g	9,81 N/s ²

Symulacje przeprowadzono dla wartości położeń początkowych zostały odniesione do wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q}(0) = [x^P \ y^P \ \beta_0^P \ \varphi_{fM0}^P \ \beta_1^P \ \varphi_{fL1}^P \ \varphi_{fR1}^P \ \dots \ \beta_4^P \ \varphi_{fL4}^P \ \varphi_{fR4}^P], \quad (6.11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}x^P &= 5,823 \text{ m} \\ y^P &= 5 \text{ m} \\ \beta_i^P &= \pi \text{ rad} && \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\ \varphi_{fM0}^P &= \varphi_{fLi}^P = \varphi_{fRi}^P = 0 \text{ rad} && \text{dla } i = 1, \dots, 4\end{aligned}\quad (6.12)$$

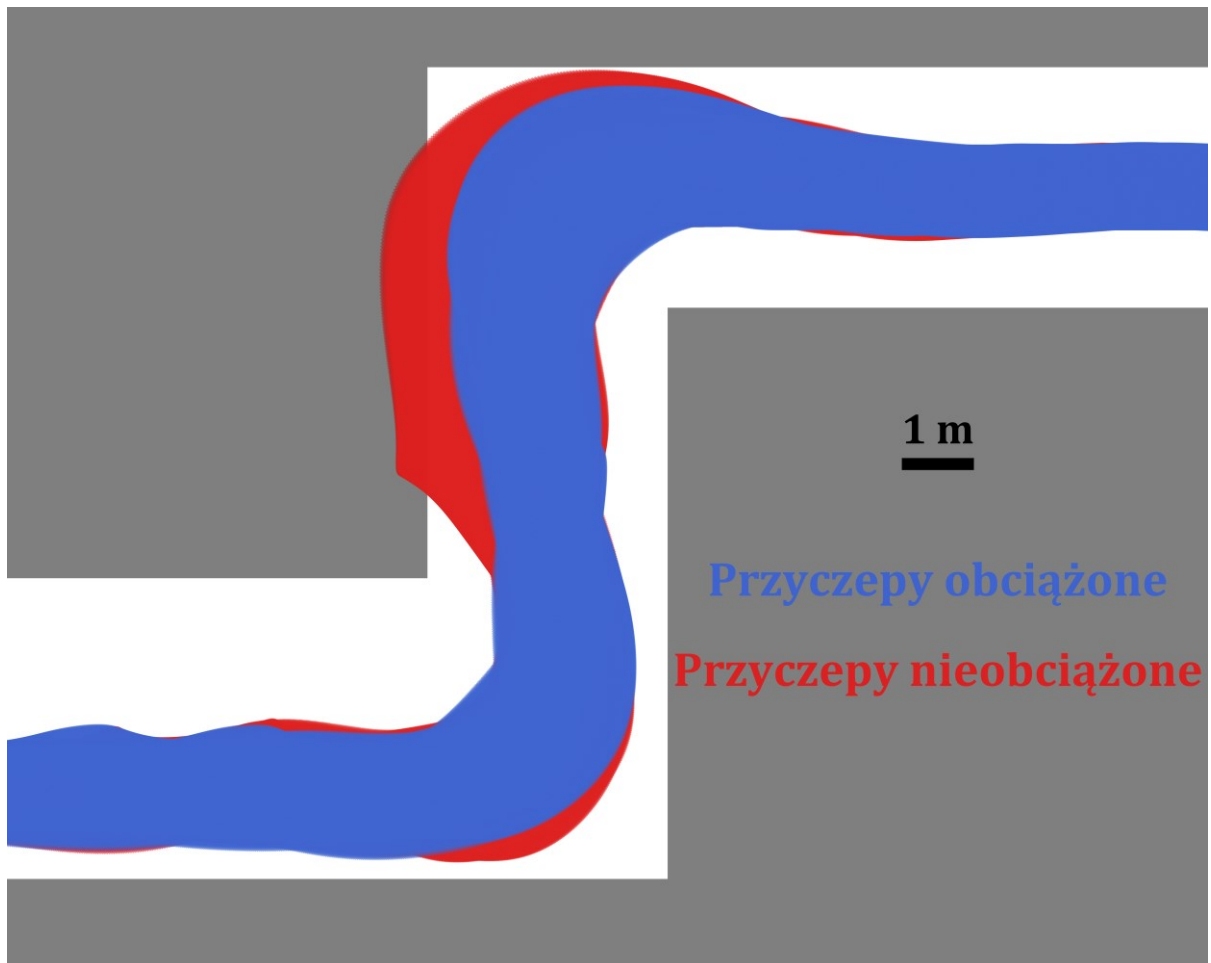
Analogicznie wartości początkowe prędkości uogólnionych odniesiono do ich wektora:

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = [\dot{x}^P \ \dot{y}^P \ \dot{\beta}_0^P \ \dot{\varphi}_{fM0}^P \ \dot{\beta}_1^P \ \dot{\varphi}_{fL1}^P \ \dot{\varphi}_{fR1}^P \ \dots \ \dot{\beta}_4^P \ \dot{\varphi}_{fL4}^P \ \dot{\varphi}_{fR4}^P], \quad (6.13)$$

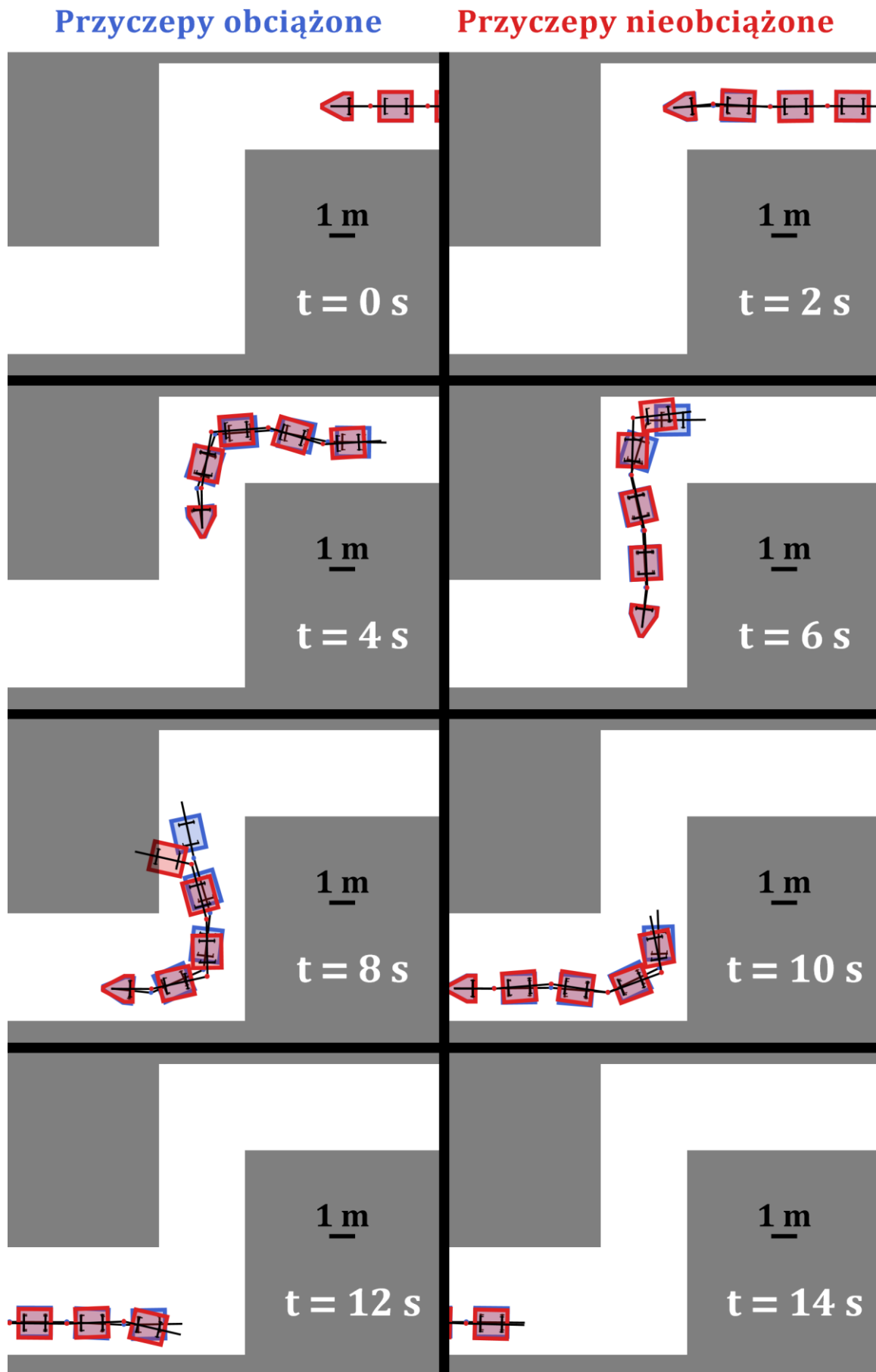
gdzie:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^P &= -2,305 \text{ m/s} \\
\dot{y}^P &= 0 \text{ m/s} \\
\dot{\beta}_i^P &= 0 \text{ rad/s} & \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\
\dot{\phi}_{fM0}^P = \dot{\phi}_{fLi}^P = \dot{\phi}_{fRi}^P &= 0 \text{ rad/s} & \text{dla } i = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Rysunek 6.15 przedstawia porównanie skrajni ruchu dla obu przypadków. Na rysunku 6.16 przedstawiono pozycje pociągów logistycznych z obciążonymi i nieobciążonymi przyczepami w różnych chwilach czasowych. Zauważyć można, że w przypadku przyczep obciążonych tor ruchu jest stabilniejszy i pozbawiony znacznych poślizgów poprzecznych na zakrętach. Z kolei przyczepy nieobciążone wykazują wyraźną tendencję do utraty przyczepności, co skutkuje ich wykraczaniem poza wyznaczony korytarz transportowy. Obciążenie przyczep istotnie ogranicza poślizg poprzeczny i poprawia stabilność trajektorii przejazdu, szczególnie w obszarze zakrętów. Dla układów nieobciążonych skuteczność manewrowania jest ograniczona, co może prowadzić do utraty kontroli nad zestawem w wąskich korytarzach.



Rys. 6.15. Skrajnia ruchu pociągu logistycznego z przyczepami: obciążonymi i nieobciążonymi



Rys. 6.16. Przejazd przez korytarz transportowy pociągu logistycznego

Wariant z przyczepami nieobciążonymi wykazywał znacznie większą podatność na poślizg poprzeczny, szczególnie w obszarach zakrętów. Prowadziło to do wyraźnego wychodzenia poza korytarz transportowy i destabilizacji układu. W przypadku przyczep obciążonych efekt poślizgu był znacznie ograniczony, a cały zestaw lepiej utrzymywał tor ruchu. Wnioski te potwierdzają istotną rolę tarcia poprzecznego w modelowaniu rzeczywistego zachowania pociągów logistycznych oraz uzasadniają konieczność uwzględniania masy przewożonego ładunku przy projektowaniu tras i algorytmów sterowania.

Scenariusz nr 2

W scenariuszu nr 2 szczególną uwagę poświęcono wpływowi maksymalnego współczynnika tarcia poprzecznego na stabilność toru jazdy zestawu wieloczlónowego w warunkach pokonywania zakrętu. W tym celu trajektoria zadana obejmowała odcinek prostoliniowy, następnie zakręt o 100° , po którym pojazd kontynuował ruch po linii prostej, co umożliwiało ocenę zachowania zestawu w warunkach nagłej zmiany kierunku jazdy. Trajektoria zadana ciągnika $(x_d(t), y_d(t))$ została określona na podstawie funkcji odcinkowej, w której uwzględniono odcinki ruchu prostoliniowego i krzywoliniowego (łukowego). Ze względu na złożoność tej funkcji, jej dokładna implementacja została udostępniona w repozytorium [186]. W początkowym stanie układ nie znajdował się w spoczynku. Ciągnik był rozpędzony i poruszał się z ustaloną prędkością początkową. Dzięki temu możliwe było uwzględnienie pełnych efektów dynamicznych, w tym bezwładności i opóźnień reakcji układu. Czas symulacji wynosił 10 sekund.

Badania przeprowadzono dla sześciu wariantów, w których inną wartość przyjmował maksymalny współczynnik tarcia poprzecznego $\mu_{y,max} = 1; 0,8; 0,6; 0,5; 0,45; 0,4$. W każdym przypadku zastosowano ciągnik typu DDT z czterema przyczepami (DFSS). Wartości parametrów algorytmu śledzenia trajektorii ciągnika były takie same jak w scenariuszu nr 1 (tab. 6.4). W tabeli 6.5 przedstawiono parametry geometryczne oraz pozostałe parametry zastosowane w modelu dynamicznym pociągu logistycznego wspólne we wszystkich symulacjach tego scenariusza.

Symulacje przeprowadzono dla wartości położenia początkowych zostały odniesione do wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q}(0) = [x^P \quad y^P \quad \beta_0^P \quad \varphi_{fM0}^P \quad \beta_1^P \quad \varphi_{fL1}^P \quad \varphi_{fR1}^P \quad \cdots \quad \beta_4^P \quad \varphi_{fL4}^P \quad \varphi_{fR4}^P], \quad (6.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
x^P &= -1 \text{ m} \\
y^P &= -3,823 \text{ m} \\
\beta_i^P &= -\pi/2 \text{ rad} & \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\
\varphi_{fM0}^P &= \varphi_{fLi}^P = \varphi_{fRi}^P = \pi/2 \text{ rad} & \text{dla } i = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Analogicznie wartości początkowe prędkości uogólnionych odniesiono do ich wektora:

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = [\dot{x}^P \quad \dot{y}^P \quad \dot{\beta}_0^P \quad \dot{\varphi}_{fM0}^P \quad \dot{\beta}_1^P \quad \dot{\varphi}_{fL1}^P \quad \dot{\varphi}_{fR1}^P \quad \dots \quad \dot{\beta}_4^P \quad \dot{\varphi}_{fL4}^P \quad \dot{\varphi}_{fR4}^P], \tag{6.17}$$

gdzie:

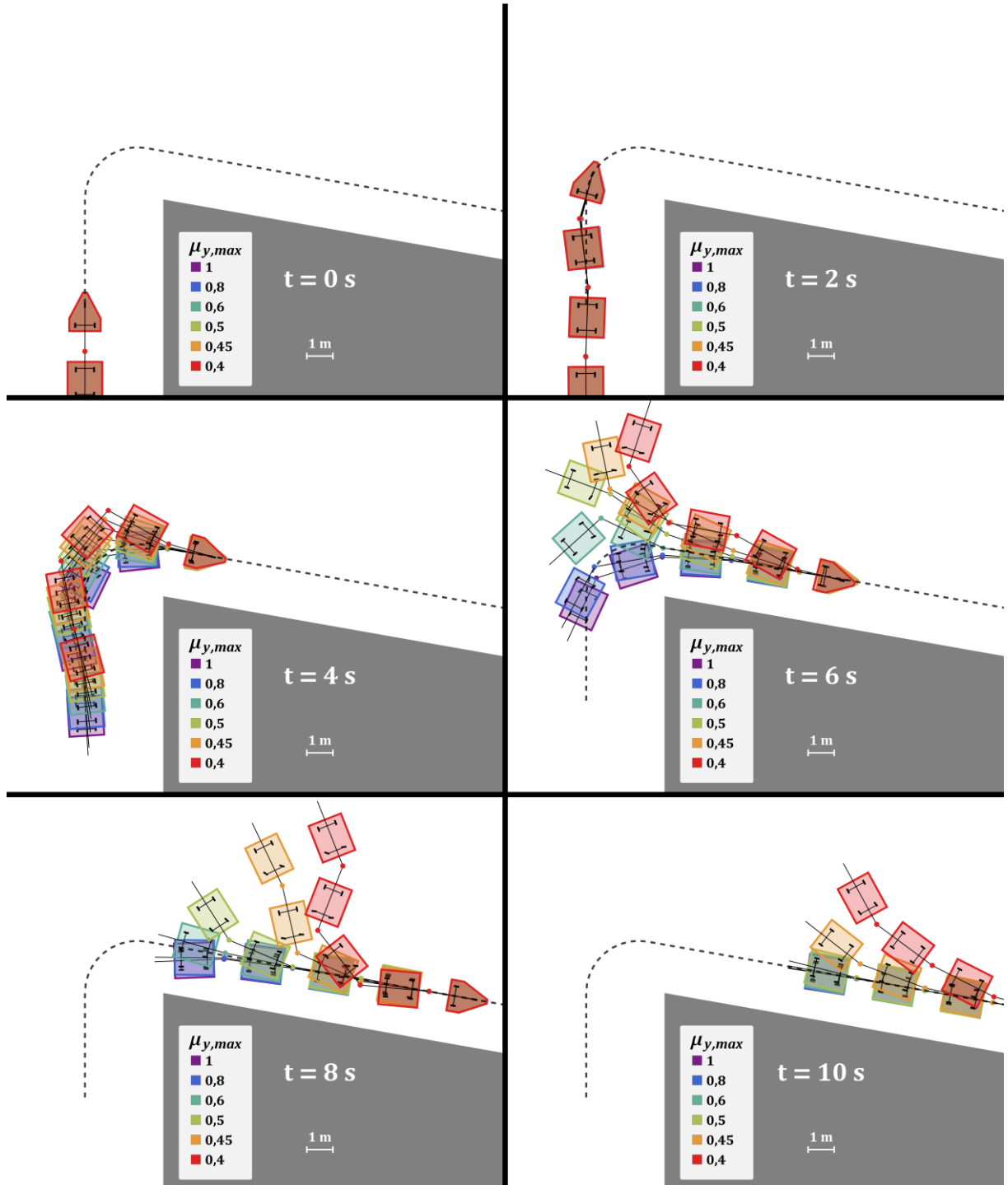
$$\begin{aligned}
\dot{x}^P &= -2,305 \text{ m/s} \\
\dot{y}^P &= 0 \text{ m/s} \\
\dot{\beta}_i^P &= 0 \text{ rad/s} & \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\
\dot{\varphi}_{fM0}^P &= \dot{\varphi}_{fLi}^P = \dot{\varphi}_{fRi}^P = 0 \text{ rad/s} & \text{dla } i = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Tab. 6.6. Parametry modelu dynamicznego pociągu logistycznego (dla $i = 1, \dots, 4$)

Parametry geometryczne		Pozostałe parametry	
Parametr	Wartości [m]	Parametr	Wartości
h_0	0,823	m_0	800 kg
b_0	0,748	m_{rL0}	2,63 kg
d_0	1	m_{rR0}	2,63 kg
c_0	0,305	m_{fM0}	2,63 kg
r_{r0}	0,1	I_0	60 kg · m ²
e_{fM0}	0,05	I_{rL0}	0,006 kg · m ²
h_i	1	I_{rR0}	0,006 kg · m ²
b_i	0,7	I_{fM0}	0,006 kg · m ²
d_i	0,65	m_i	238 kg
c_i	0,49	$m_{rLi} = m_{rRi}$	2,63 kg
d_{fi}	0,65	$m_{fLi} = m_{fRi}$	2,63 kg
e_{fLi}	0,05	I_i	55 kg · m ²
e_{fRi}	0,05	$I_{rLi} = I_{rRi}$	55 kg · m ²
		$I_{fLi} = I_{fRi}$	0,006 kg · m ²
		C_y	7
		g	9,81 N/s ²

Wyniki przedstawiono w postaci pozycji pociągu logistycznego w wybranych chwilach czasowych (rys. 6.17). Dla niższych wartości współczynnika tarcia wyraźnie widoczne było zjawisko poślizgu bocznego przyczep. Ich orientacje i położenia coraz bardziej odbiegały od trajektorii oczekiwanej. Holownik natomiast utrzymywał tor ruchu z dużą dokładnością, niezależnie od wartości współczynnika tarcia. Taki efekt wynikał z przyjętych założeń symulacyjnych: holownik wyposażono w regulator PID o bardzo dużej wartości momentu maksymalnego oraz nadano mu większą masę niż przyczepom. W warunkach rzeczywistych uzyskanie tak dużego momentu byłoby trudne, a w modelu

dynamicznym uwzględniającym poślizg wzdłużny doprowadziłoby do jego wystąpienia w przypadku kół tylnych holownika. W rozważanym modelu uproszczonym celowo przyjęto takie założenia. Umożliwiło to obiektywną ocenę wpływu tarcia poprzecznego wyłącznie na zachowanie przyczep, bez zakłóceń wynikających z niestabilności ruchu holownika.



Rys. 6.17. Pozycje pociągu logistycznego z przyczepami typu FDSS w różnych chwilach czasowych podczas przejazdu

Scenariusz nr 3

W scenariuszu nr 2 szczególną uwagę również poświęcono wpływowi maksymalnego współczynnika tarcia poprzecznego, tylko tym razem dla zestawu wyposażonego w przyczepy z układem podwójnego Ackermanna (DASS). W tym celu trajektoria referencyjna została zadana w formie ścieżki przedstawiającej kształt ósemki, który opisano równaniem:

$$x_d(t) = 8 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right), y_d(t) = 4 \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right). \quad (6.19)$$

W początkowym stanie układ nie znajdował się w spoczynku. Ciągnik był rozpędzony i poruszał się z ustaloną prędkością początkową. Dzięki temu możliwe było uwzględnienie pełnych efektów dynamicznych, w tym bezwładności i opóźnień reakcji układu. Czas symulacji wynosił 20 sekund. Badania przeprowadzono dla sześciu wariantów, w których inną wartość przyjmował maksymalny współczynnik tarcia poprzecznego $\mu_{y,max} = 1; 0,6; 0,5; 0,45; 0,4; 0,35$. W każdym przypadku zastosowano ciągnik typu DDT z czterema przyczepami (DASS). Wartości parametrów algorytmu śledzenia trajektorii ciągnika były takie same jak w scenariuszu nr 1 (tab. 6.4). W tabeli 6.7 przedstawiono parametry geometryczne oraz pozostałe parametry zastosowane w modelu dynamicznym pociągu logistycznego wspólne we wszystkich symulacjach tego scenariusza. Symulacje przeprowadzono dla wartości położeń początkowych zostały odniesione do wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q}(0) = [x^P \quad y^P \quad \beta_0^P \quad \varphi_{fM0}^P \quad \beta_{11}^P \quad \beta_{12}^P \quad \cdots \quad \beta_{41}^P \quad \beta_{42}^P]. \quad (6.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x^P &= -0,582 \text{ m} \\ y^P &= -0,582 \text{ m} \\ \beta_0^P &= \beta_{i1}^P = \beta_{i2}^P = -\pi/4 \text{ rad} & \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\ \varphi_{fM0}^P &= 3\pi/4 \text{ rad} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Analogicznie wartości początkowe prędkości uogólnionych odniesiono do ich wektora:

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = [\dot{x}^P \quad \dot{y}^P \quad \dot{\beta}_0^P \quad \dot{\varphi}_{fM0}^P \quad \dot{\beta}_{11}^P \quad \dot{\beta}_{12}^P \quad \cdots \quad \dot{\beta}_{41}^P \quad \dot{\beta}_{42}^P]. \quad (6.22)$$

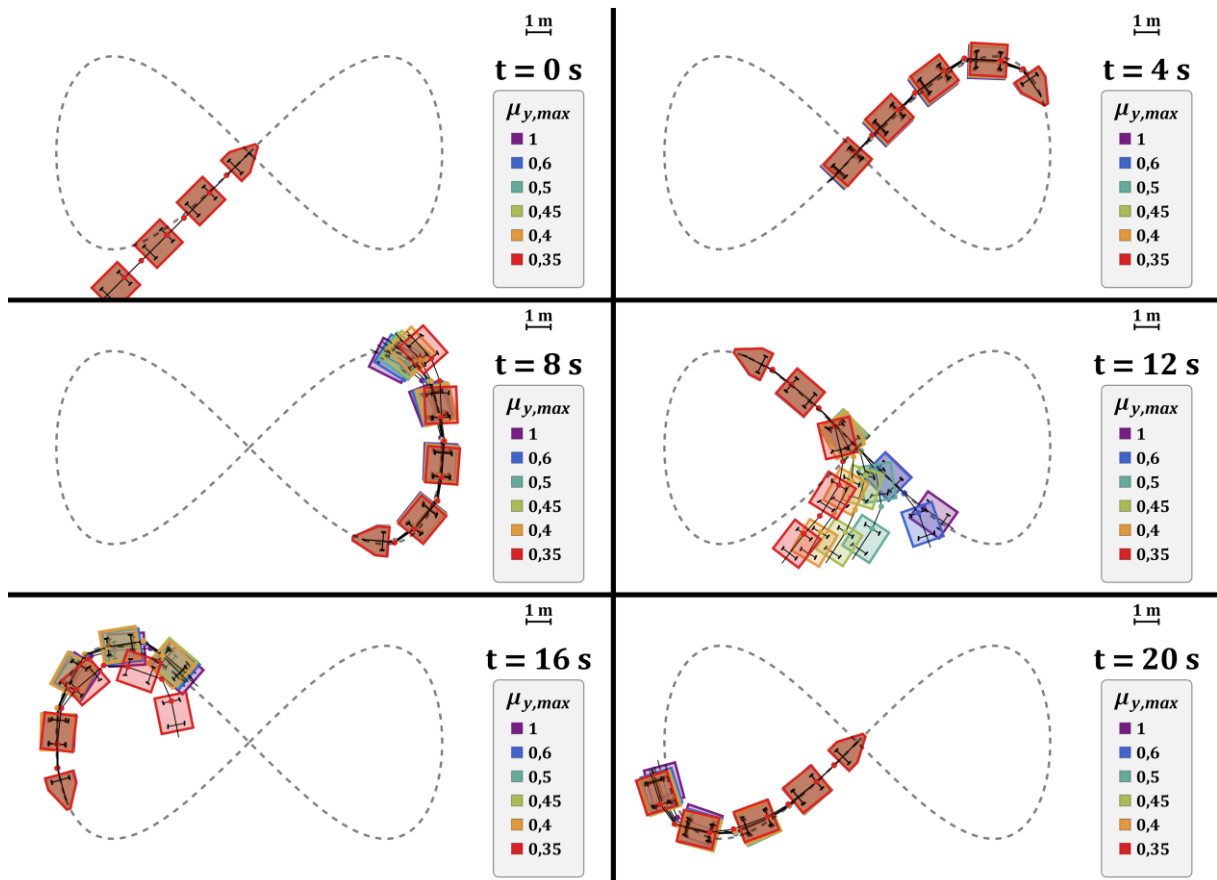
gdzie:

$$\begin{aligned} \dot{x}^P &= \frac{4\pi}{5} \text{ m/s} \\ \dot{y}^P &= \frac{4\pi}{5} \text{ m/s} \\ \dot{\beta}_0^P &= \dot{\beta}_{i1}^P = \dot{\beta}_{i2}^P = 0 \text{ rad/s} & \text{dla } i = 0, \dots, 4 \\ \dot{\varphi}_{fM0}^P &= 0 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Wyniki przedstawiono w postaci pozycji pociągu logistycznego w wybranych chwilach czasowych (rys. 6.18).

Tab. 6.7. Parametry modelu dynamicznego pociągu logistycznego (dla $i = 1, \dots, 4$)

Parametry geometryczne		Pozostałe parametry	
Parametr	Wartości [m]	Parametr	Wartości
h_0	0,823	m_0	800 kg
b_0	0,748	m_{rL0}	2,63 kg
d_0	1	$m_{rR0} = m_{fM0}$	2,63 kg
c_0	0,305	I_0	60 kg · m ²
r_{r0}	0,1	$I_{rL0} = I_{rR0} = I_{fM0}$	0,006 kg · m ²
e_{fM0}	0,05	m_i	238 kg
h_i	1	$m_{rLi} = m_{rRi}$	2,63 kg
b_i	0,7	$m_{fLi} = m_{fRi}$	2,63 kg
d_i	0,5	m_{di}	2 kg
c_i	0,5	I_i	55 kg · m ²
c_{di}	0,5	$I_{rLi} = I_{rRi}$	0,006 kg · m ²
d_{fi}	1	$I_{fLi} = I_{fRi}$	0,006 kg · m ²
		I_{di}	0,007 kg · m ²
		C_y	7
		g	9,81 N/s ²



Rys. 6.18. Pozycje pociągu logistycznego z przyczepami typu DASS w wybranych chwilach czasowych podczas przejazdu

Przeprowadzone symulacje dla zestawu z przyczepami wyposażonymi w układ podwójnego Ackermanna (DASS) wykazały występowanie poślizgu poprzecznego przyczep podczas przejazdu po trajektorii w kształcie ósemki, w warunkach ograniczonej przyczepności bocznej. Poślizg ten objawiał się odchyleniem orientacji i położenia przyczep względem toru ruchu holownika, szczególnie w rejonie zakrętów dla ostatniej przyczepy zestawu.

6.5 Badania symulacyjne neuroewolucyjnego algorytmu sterowania EANN

Badania symulacyjne neuroewolucyjnego algorytmu sterowania miały na celu wytrenowanie modelu sieci neuronowej do sterowania pociągiem logistycznym, poruszającym się w korytarzu transportowym o charakterze tunelowym. Stanowią one część prac opublikowanych w [184], której pierwszym autorem jest autor pracy. Opis architektury modelu EANN (ang. *Evolution Algorithm–Neural Network*), łączącego algorytm ewolucyjny z siecią neuronową, zawarto w podrozdziale 5.2. Do realizacji symulacji zastosowano model dynamiczny uwzględniający tarcie poprzeczne (DM-LF), opisany w podrozdziale 4.3.2. Symulacje przeprowadzono na laptopie z 64-bitowym systemem Windows 11, wyposażonym w procesor AMD Ryzen 7 4800HS, 16 GB pamięci RAM oraz kartę graficzną NVIDIA RTX2060 Max-Q. System sterowania oraz wizualizacja zostały zaimplementowane w *Python 3.7* 64-bit. Symulacje modelu dynamicznego (DM-LF) przeprowadzono w środowisku *Wolfram Mathematica 12*. Analizowany układ składał się z ciągnika typu DDT i czterech przyczep (DFSS). Parametry zastosowane w modelu dynamicznego przedstawiono w tabeli 6.8, przy czym:

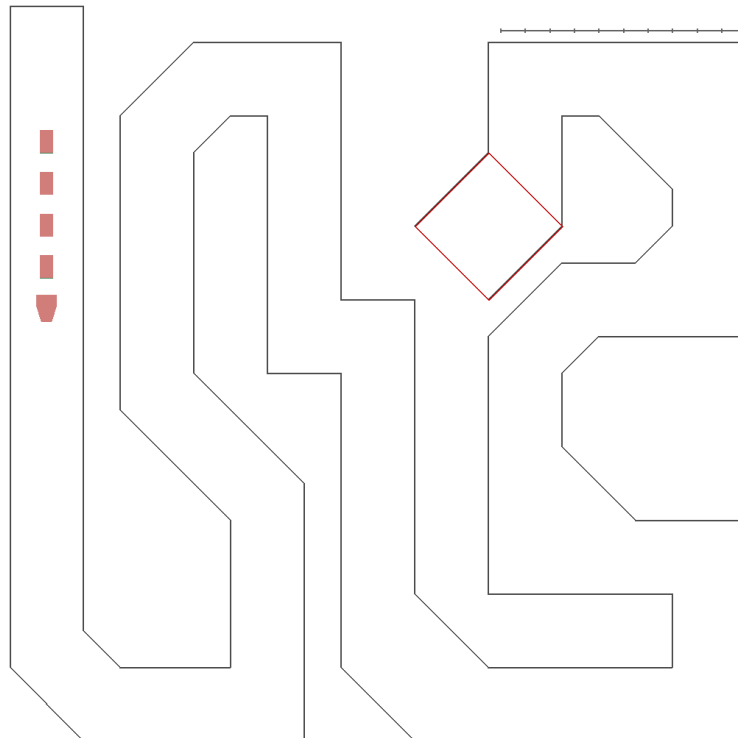
$$\begin{aligned} \mu_{yfM0} = \mu_{yrL0} = \mu_{yrR0} = \mu_{yfLi} = \mu_{yfRi} = \mu_{yrLi} = \mu_{yrLi} = \mu_y \\ C_{yfM0} = C_{yrL0} = C_{yrR0} = C_{yfLi} = C_{yfRi} = C_{yrLi} = C_{yrLi} = C_y, \end{aligned} \quad (6.24)$$

dla $i = 1, \dots, 4$. Dodatkowo parametry bloku inercji były równe: $K_{iner} = 0,25$, $T_s = 0,05$ s. Proces uczenia sieci neuronowej przeprowadzono w ramach algorytmu ewolucyjnego, w którym wszystkie wagi połączeń oraz wartości progowe były ustalane na podstawie losowych inicjalizacji i iteracyjnej selekcji. Przetestowano łącznie 80 populacji, z których każda reprezentowała 40 zestawów ciągnik–przyczepy rozpoczynające przejazd z losowo zainicjalizowaną siecią neuronową. Ocena przejazdu opierała się głównie na pokonanej odległości i średniej prędkości zestawu. Trzy najlepiej punktujące sieci były wybierane jako rodzice kolejnej generacji. Pozostałe osobniki były modyfikowane przez mutację: prawdopodobieństwo mutacji wynosiło 25%, a maksymalna zmiana pojedynczej wagi nie przekraczała 15%, zgodnie z rozkładem normalnym. Dodatkowo, jeśli ciągnik ukończył

przejazd i dotarł do celu, jego wynik punktowy był podwajany, co umożliwiło odróżnienie kompletnego przejazdu od prób częściowych. Mapę, po której poruszał się pojazd przedstawiono na rysunku 6.19. Cel oznaczono czerwonym kwadratem.

Tab. 6.8. Parametry modelu dynamicznego pociągu logistycznego (dla $i = 1, \dots, 4$)

Parametry geometryczne		Pozostałe parametry	
Parametr	Wartości [m]	Parametr	Wartości
h_0	0,823	m_0	250 kg
b_0	0,748	m_{rL0}	3 kg
d_0	0,662	m_{rR0}	3 kg
c_0	0,325	m_{fM0}	3 kg
r_{r0}	0,1	I_0	30 kg · m ²
e_{fM0}	0,05	I_{rL0}	0,06 kg · m ²
h_i	1	I_{rR0}	0,06 kg · m ²
b_i	0,7	I_{fM0}	0,06 kg · m ²
d_i	0,649	m_i	50 kg
d_{fi}	0,15	$m_{rLi} = m_{rRi}$	3 kg
e_{fLi}	0,05	$m_{fLi} = m_{fRi}$	3 kg
e_{fRi}	0,05	I_i	1 kg · m ²
		$I_{rLi} = I_{rRi}$	0,06 kg · m ²
		$I_{fLi} = I_{fRi}$	0,06 kg · m ²
		μ_y	0,7
		C_y	7

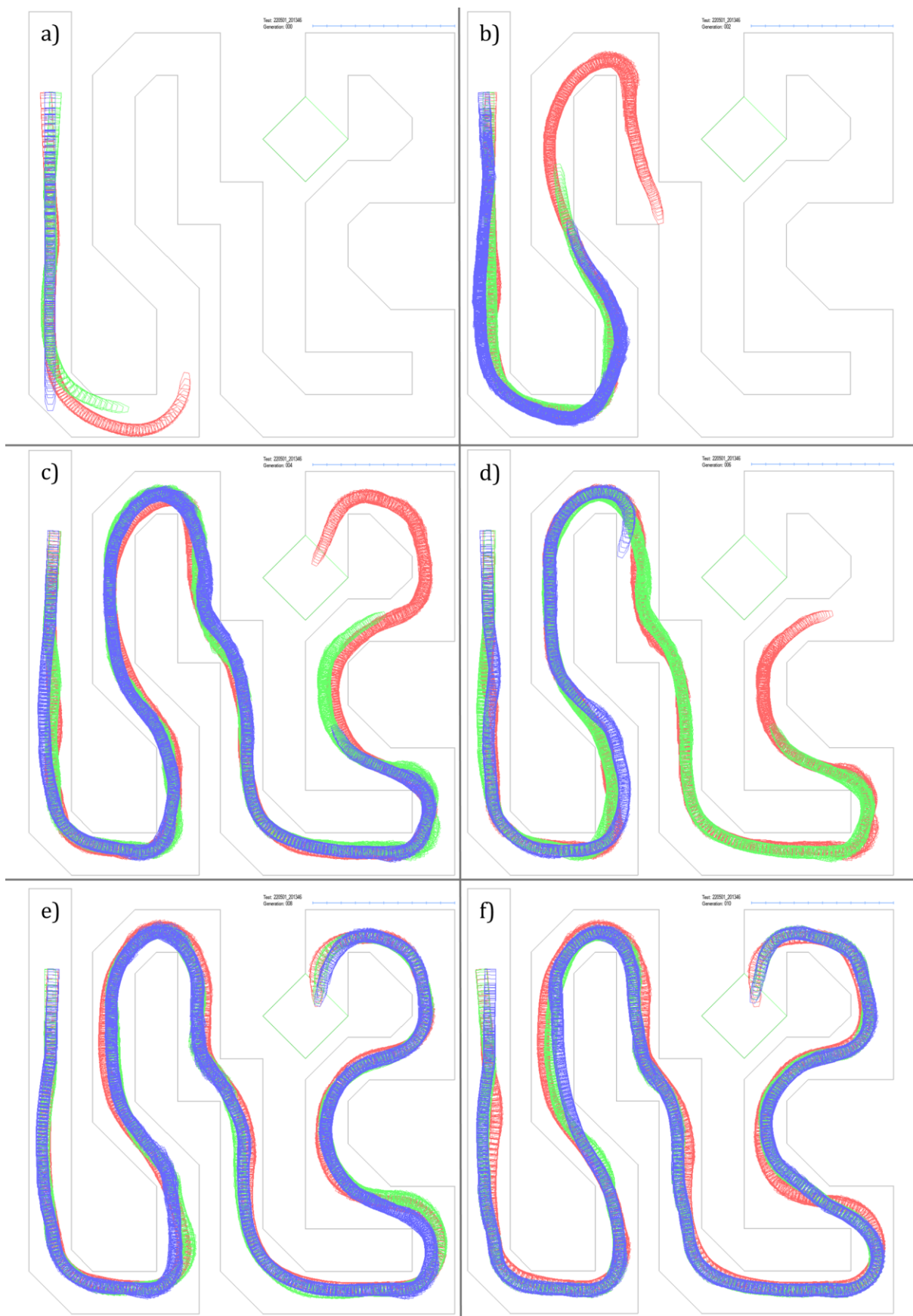


Rys. 6.19. Mapa tunelowa z początkową pozycją pojazdu i celem końcowym (czerwony kwadrat)

Aby zapobiec przeuczeniu sieci neuronowych jednej konkretnej trasy, początkowe ustawienie zestawu było losowane. Dzięki temu sieć uczyła się ogólnych zasad poruszania się w zakrętach i unikania przeszkód, zamiast zapamiętywać jedną ścieżkę. Wprowadzono także niewielką losowość odchylenia początkowego względem ściany korytarza (w zakresie od -5° do 5°), co dodatkowo zwiększało odporność modelu na zmienność warunków początkowych.

Maksymalna możliwa liczba punktów przyznawana była proporcjonalnie do przebytej odległości. Pełna długość toru wynosiła 132 metry, co odpowiadało maksymalnie 1320 punktom. Aby uniknąć sztucznego wydłużania przejazdu przez nieefektywne manewry (np. cofanie), wprowadzono ograniczenie maksymalnego czasu przejazdu do 6000 iteracji, co odpowiadało 300 sekundom czasu symulowanego. Na rysunku 6.20 przedstawiono porównanie skrajni ruchu dla trzech najlepiej punktujących pojazdów w wybranych generacjach. Pociągi te oznaczono kolorami: czerwony (najlepszy wynik), zielony (drugi najlepszy), niebieski (trzeci najlepszy). Dla pierwszej generacji symulacja zakończyła się na bardzo wczesnym etapie, co wynikało z faktu, że proces uczenia się sieci dopiero się rozpoczynał. Wraz z kolejnymi populacjami pojazdy zbliżały się coraz bardziej do celu, z wyjątkiem populacji nr 9, w której symulacja dla najlepszego pociągu zakończyła się wcześniej niż w generacji nr 7. Począwszy od populacji nr 9, wszystkie trzy najlepiej ocenione pociągi osiągały założone położenie docelowe. W kolejnych generacjach uzyskane skrajnie ruchu ulegały zmianie. W większości przypadków przejazdu trzech najlepszych pociągów ulegały poprawie (otrzymywały wyższe oceny), jednak czasami występowało pogorszenie. Wynikało to z charakterystyki procesu uczenia, którego rezultaty nie zawsze były zgodne z oczekiwaniami.

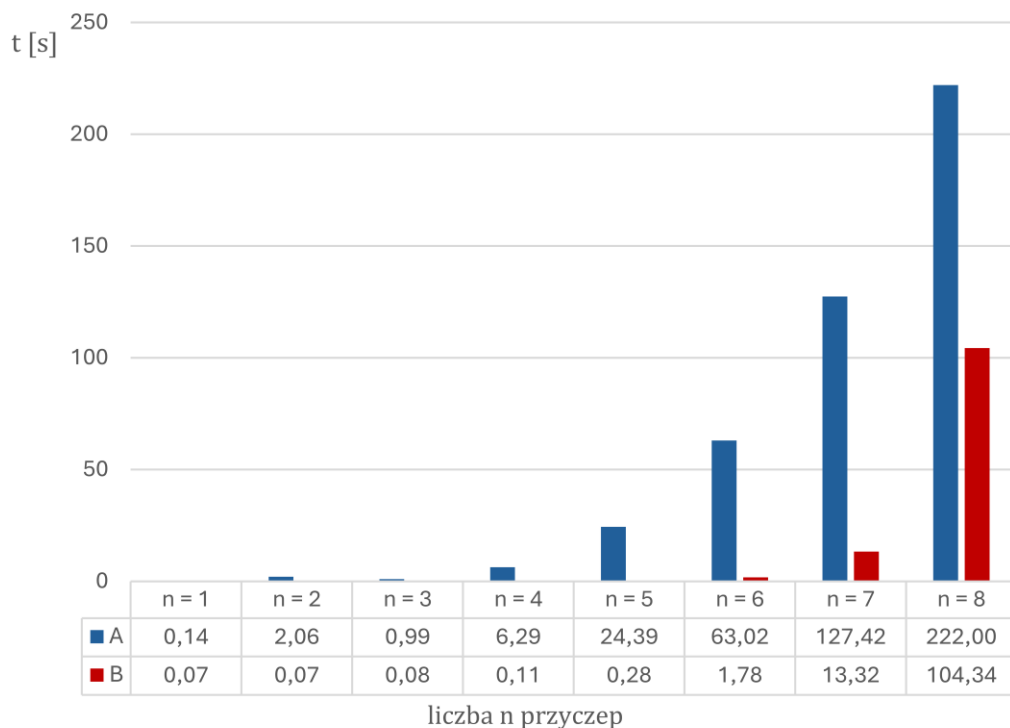
Na podstawie uzyskanych wyników można jednoznacznie stwierdzić, że opracowany algorytm sterowania spełnił swoje zadanie, pomimo że pomiary odległości do przeszkód były wykonywane jedynie dla holownika, a nie dla przyczep.



Rys. 6.20. Skrajnia 3 najlepszych pociągów logistycznych dla wybranych generacji: a) generacja nr 1; b) generacja nr 3; c) generacja nr 5; d) generacja nr 7; e) generacja nr 9; f) generacja nr 11

6.6 Analiza porównawcza metod wyznaczania macierzy transformacji prędkości

W celu oceny efektywności różnych podejść do wyznaczania macierzy transformacji prędkości przeprowadzono porównanie dwóch metod na przykładzie zestawu złożonego z ciągnika typu DDT oraz n przyczep (FDSS). Pierwsza z analizowanych metod (metoda A) to podejście konwencjonalne, oparte na rozwiązaniu układu równań algebraicznych wynikających z macierzy ograniczeń nieholonomicznych. Druga metoda (metoda B), zaproponowana w ramach niniejszej pracy, stanowi alternatywne podejście autorskie. Choć nie została znaleziona w literaturze, nie wyklucza się, że była stosowana w innych kontekstach. Niemniej jednak jej implementacja okazała się skuteczna i korzystna pod względem obciążenia obliczeniowego. Porównania dokonano dla liczby przyczep $n = 1, \dots, 8$. Wyniki zestawiono w formie wykresu (6.21), który jednoznacznie pokazuje, że czas potrzebny do wyznaczenia macierzy transformacji przy zastosowaniu metody autorskiej jest krótszy dla każdej analizowanej liczby przyczep. Zauważalnym trendem jest jednak stopniowe zmniejszanie się stosunku czasów wykonania między obiema metodami wraz ze wzrostem liczby członów w zestawie, co szczególnie widoczne jest dla przypadku $n = 8$.

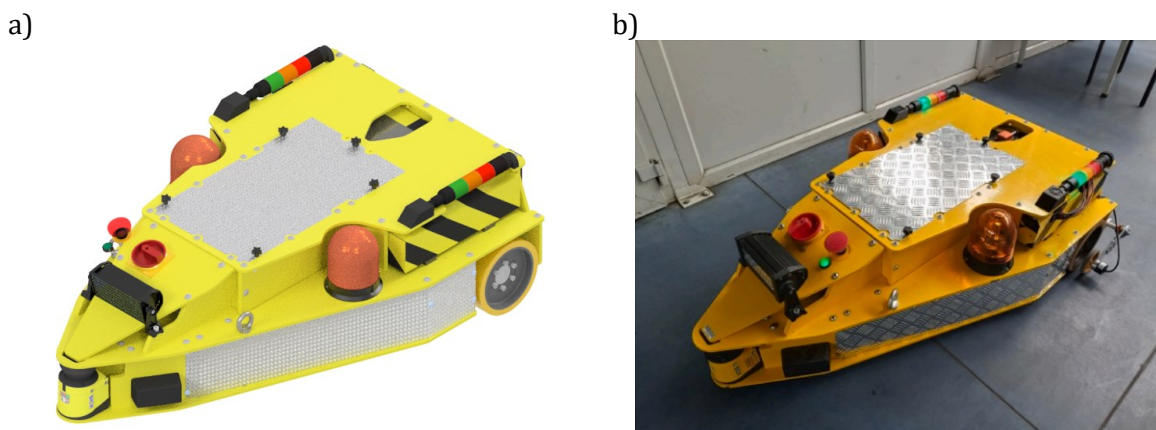


Rys. 6.21. Porównanie czasów wyznaczania macierzy transformacji prędkości dla dwóch metod

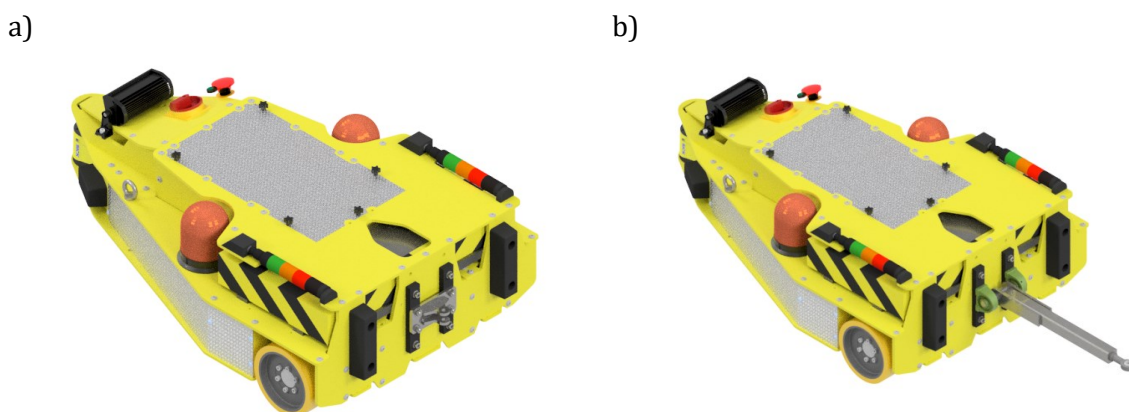
7. Badania eksperymentalne pociągu logistycznego

7.1 Konstrukcja automatycznego pociągu logistycznego

W celu przeprowadzenia walidacji modeli symulacyjnych, zaprojektowano, a następnie zbudowano pociąg logistyczny. Założono, że pociąg będzie składał się z holownika trójkołowego (DDT), w którym kołami napędzanymi będą dwa koła stałe na tylnej osi (rys. 7.1). Przednie koło pełni funkcję koła podporowego i jest swobodnie skrętne. Do badań eksperymentalnych użyto przyczep z układem skrętnym stałego dyszla, który umożliwia łatwą rekonfigurację z dyszla z przodu na odwrócony dyszel. Holownik również został zaprojektowany z możliwością współpracy z obiema konfiguracjami układu dyszla. Holownik w obu wariantach układu skrętnego przedstawiono na rysunku 7.2, a przyczepy w obu wariantach na rysunku 7.3. Model 3D pociągu logistycznego składającego się z holownika i czterech przyczep w układzie dyszla z przodu przedstawiono na rysunku 7.4.



Rys. 7.1. Holownik: a) model 3D; b) rzeczywisty pojazd

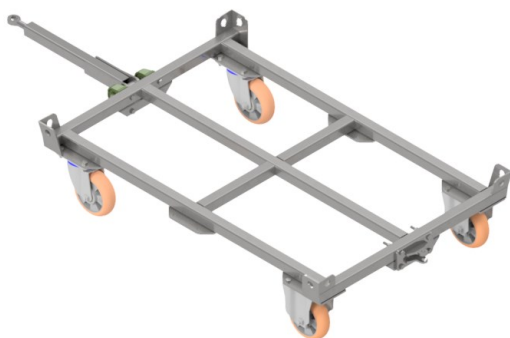


Rys. 7.2. Model 3D holownika a) Dyszel z przodu; b) Odwrócony dyszel

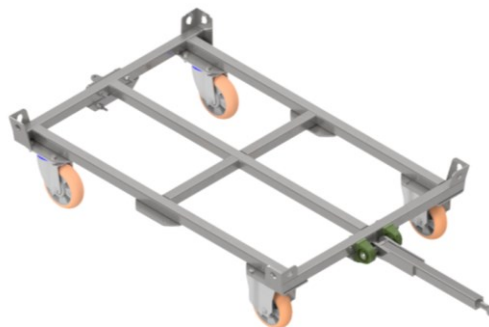
Holownik został wyposażony w dwa niezależne, bezszczotkowe silniki prądu stałego, z których każdy charakteryzuje się mocą znamionową 440 W. Przeniesienie momentu obrotowego z silnika na koło realizowane jest za pomocą przekładni planetarnej oraz

napędu pasowego. Konstrukcję nośną pojazdu wykonano z blach stalowych o grubości 8 mm i 12 mm. Masa całkowita holownika wynosi około 300 kg i zależy od zastosowanego układu skrętnego: 304 kg dla układu z dyszlem z przodu lub 307 kg w konfiguracji z odwróconym dyszlem. Pojazd zasilany jest akumulatorem litowo-jonowym o napięciu 48 V.

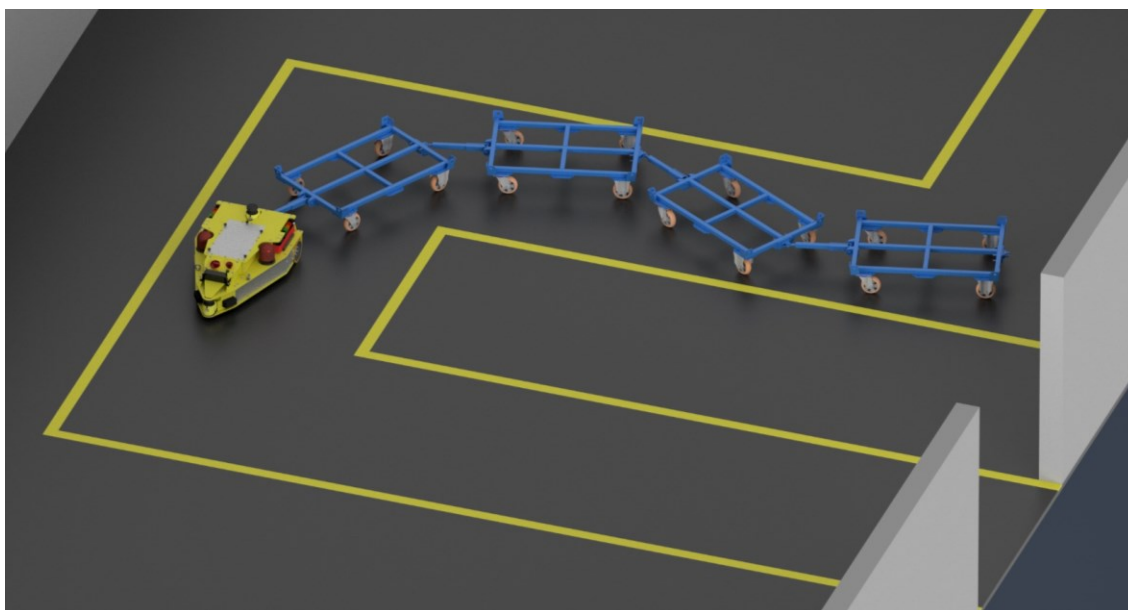
a)



b)



Rys. 7.3. Model 3D przyczepy a) Dyszel z przodu; b) Odwrócony dyszel



Rys. 7.4. Model 3D pociągu logistycznego

System sterowania holownikiem został zaprojektowany z wykorzystaniem dwóch sterowników silników prądu stałego mcDSA-E45 (miControl), komputera przemysłowego CX2030 z funkcjonalnością PLC (Beckhoff) oraz kontrolera bezpieczeństwa (SICK, Niemcy), wyposażonego w skaner LiDAR S300 Pro i enkodery bezpieczeństwa DFS60S. Głównym zadaniem komputera IPC jest sterowanie niskopoziomowe lampami i sygnalizatorami dźwiękowymi, komunikacja ze sterownikami silników przez magistralę CAN, a także odczyt danych z LiDAR. Całość systemu działa na zewnętrznym komputerze z systemem operacyjnym Ubuntu 22.04.

Skaner LiDAR zamontowano z przodu pojazdu, aby mógł prawidłowo realizować funkcje bezpieczeństwa. Pole widzenia skanera wynosi 270° .

7.2 Walidacja modeli symulacyjnych pociągu logistycznego

7.2.1 Metodyka badań eksperymentalnych

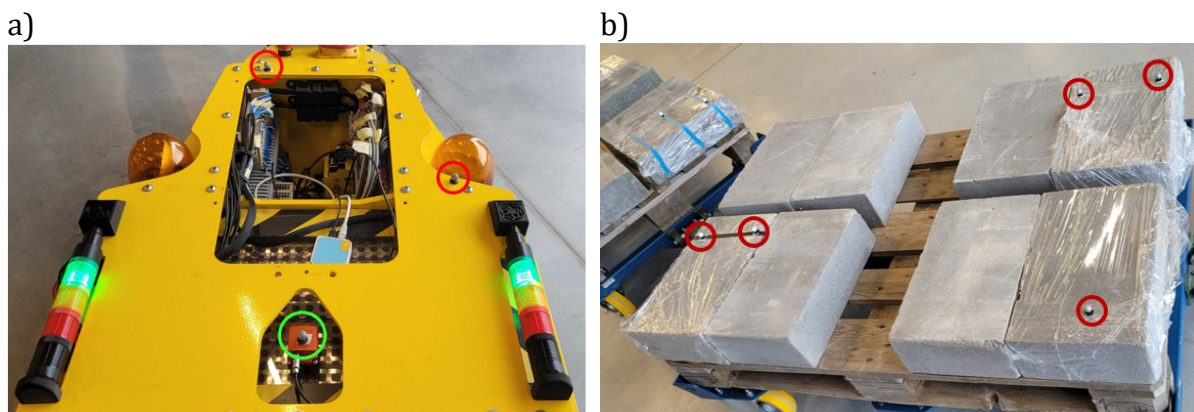
W celu weryfikacji poprawności modeli symulacyjnych przeprowadzono ich walidację. Badania wykonano dla obu konfiguracji układu skrętnego: z dyszlem z przodu oraz z odwróconym dyszlem. Testy zostały zrealizowane w pomieszczeniu posiadającym gładką powierzchnię. Przejazd pociągu podczas przejazdu przedstawiono na rysunku 7.5.



Rys. 7.5. Pociąg logistyczny podczas przejazdu w trakcie badań

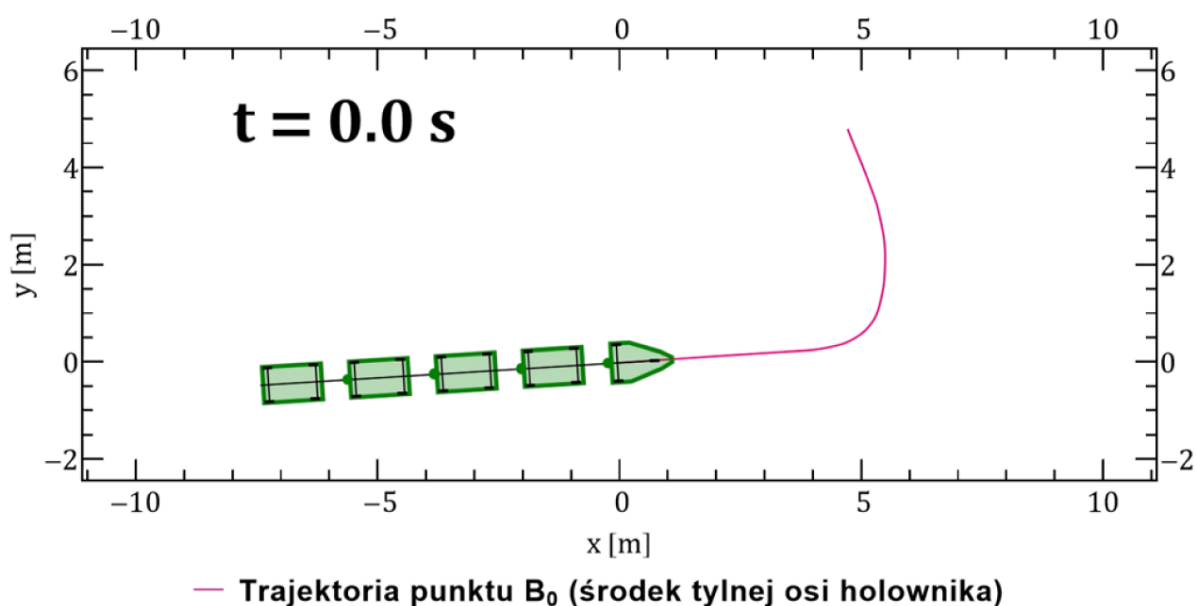
W badaniach eksperymentalnych zastosowano system śledzenia ruchu *OptiTrack*, umożliwiający precyzyjny pomiar położenia i orientacji poszczególnych jednostek zestawu w globalnym układzie współrzędnych. Wykorzystana w badaniu konfiguracja systemu *OptiTrack* składała się z dwunastu kamer *Prime X 13* oraz jednostki centralnej. Działanie kamer opiera się na detekcji światła podczerwonego odbitego lub emitowanego przez markery, na podstawie którego generowany jest obraz. Następnie obrazy te są przetwarzane, umożliwiając precyzyjne określenie pozycji i orientacji pojazdu. Kamery pracowały z częstotliwością 120 FPS (120 Hz) i rozdzielczością 1,3 MPx. Deklarowana dokładność jednej kamery systemu *OptiTrack* wynosi $\pm 0,2$ mm. W rzeczywistych warunkach pomiarowych końcowa dokładność rekonstrukcji położenia markerów zależy jednak od liczby kamer obserwujących dany marker oraz od jakości kalibracji całego układu. Na holowniku umieszczono 3 markery, a na każdej przyczepie po 5 markerów, co przedstawiono na rysunku 7.6. Na początku badań przeprowadzono procedurę referencyjnego ustawienia wszystkich członów pojazdu. W tym celu holownik i przyczepy kolejno ustawiono w określonych położeniach i z zadanymi kątami orientacji. Procedura

ta służyła do zdefiniowania wspólnej bazy odniesienia, względem której system pomiarowy określał dalsze pozycje i orientacje.



Rys. 7.6. Przymocowanie markerów a) Holownik; b) Jedna z przyczep

Przed każdym przejazdem holownik ustawiano w pozycji początkowej z określoną orientacją. Przyczepy były ustawiane w tej samej orientacji, co zapewniało zerowy kąt pomiędzy kolejnymi członami zestawu. W wyniku pomiarów uzyskano współrzędne przestrzenne markerów zamocowanych na poszczególnych jednostkach oraz odpowiadające im kąty orientacji. Dane te stanowiły podstawę do analizy ruchu zestawu oraz walidacji wyników symulacyjnych. Dla obu konfiguracji układu skrętnego, dyszla z przodu oraz odwróconego dyszla, wykonano po jednym przejeździe testowym. W trakcie przejazdów holownik był sterowany manualnie przez operatora za pomocą kontrolera. Przykład jednego z przejazdów przedstawiono na rysunku 7.7. Podczas badań eksperymentalnych pominięto wpływ kół swobodnie skrętnych. W pozycji początkowej koła te miały dowolną orientację kątową (rys. 7.8).



Rys. 7.7. Odzworowanie przejazdu za pomocą KM



Rys. 7.8. Pociąg logistyczny w pozycji początkowej

W celu zminimalizowania efektu poślizgu, każda z przyczep została dodatkowo obciążona, zastosowano po cztery betonowe bloczki o masie 21 kg każdy, rozmieszczone symetrycznie na palecie o masie 20 kg.

W kolejnych sekcjach przedstawiono wyniki walidacji modeli symulacyjnych. Rzeczywisty przejazd porównano z trzema modelami: kinematycznym (KM), dynamicznym z więzami nieholonomicznymi (DM-NC) oraz dynamicznym uwzględniającym tarcie poprzeczne (DM-LF). Ze względu na zastosowane obciążenie każdej z przyczep, stosunkowo niską prędkość liniową układu oraz złożoność wyznaczania parametrów modelu tarcia poprzecznego kół, w modelu DM-LF przyjęto takie wartości tych parametrów, które zapewniają brak poślizgu poprzecznego. Pozycje poszczególnych jednostek zestawu wyznaczono na podstawie danych z punktów referencyjnych zamontowanych na pojazdach, uzyskanych w ramach badań eksperymentalnych.

Celem walidacji było sprawdzenie poprawności działania modeli matematycznych, ze szczególnym uwzględnieniem zachowania przyczep podczas ruchu. W związku z tym, w celu wyeliminowania wpływu ciągnika oraz pominięcia charakterystyki jego napędu, modele symulacyjne zmodyfikowano tak, aby danymi wejściowymi do symulacji było położenie punktu D_0 , czyli punktu połączenia przyczep z ciągnikiem. W modelach KM i DM-LF położenie tego punktu zadano bezpośrednio. Natomiast w przypadku modelu DM-NC konieczne było zastosowanie dwóch sił działających w kierunkach osi x i y , których wartości były dostosowywane przez regulator PID w taki sposób, aby uzyskać możliwie najbliższą trajektorię punktu D_0 względem tej uzyskanej z badań

eksperymentalnych. Zmodyfikowane modele symulacyjne zostały udostępnione w repozytorium [186]. Symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem danych przedstawionych w tabeli 7.1.

Tab. 7.1. Parametry pociągu logistycznego

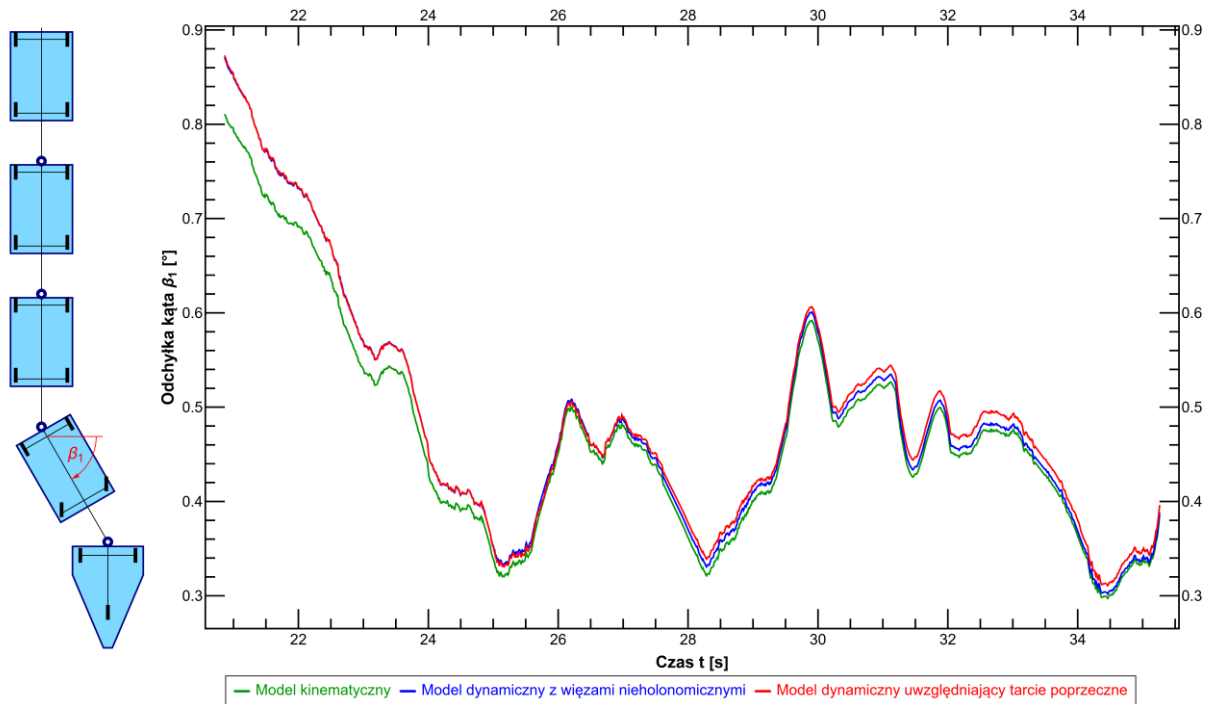
Dyszel z przodu		Odwrócony dyszel	
Parametr	Wartości	Parametr	Wartości
h_i	1 m	h_i	1 m
b_i	0,7 m	b_i	0,7 m
d_i	0,15 m	d_i	0,65 m
d_{fi}	0,65 m	d_{fi}	0,15 m
c_i	0,514 m	c_i	0,49 m
m_i	238 kg	m_i	238 kg
I_i	54,479 kg · m ²	I_i	54,499 kg · m ²
μ_y	1	μ_y	1
C_y	7	C_y	7
g	9,81 N/s ²	g	9,81 N/s ²

Porównanie przejazdów symulacyjnych z rzeczywistym wykonano na podstawie odchyłki kąta orientacji β_i oraz odchyłki położenia punktu B_i dla $i = 1, \dots, 4$. Warto podkreślić, że ze względu na ograniczoną przestrzeń pomiarową, czas pomiaru uwzględniony w porównaniu różnił się dla poszczególnych przyczep. Wynikało to z faktu, że dane dotyczące położenia danej przyczepy były brane pod uwagę wyłącznie w tych momentach, gdy zarówno ona, jak i ciągnik znajdowały się jednocześnie w obszarze pomiarowym. W związku z tym przyczepy, które jako pierwsze wjeżdżały w obszar pomiarowy, miały dłuższy czas pomiaru, ponieważ położenie każdej z przyczep było analizowane tylko wtedy, gdy ona sama i ciągnik znajdowały się w obszarze pomiarowym. Wynika to z faktu, że odwzorowanie przejazdu było niemożliwe w sytuacji, gdy ciągnik znajdował się poza strefą pomiarową. Zatem najdłuższy czas pomiaru wystąpił dla pierwszej przyczepy, a najkrótszy dla czwartej – ostatniej przyczepy. Przykładowy przejazd pociągu logistycznego został zamieszczony w repozytorium [186].

7.2.2 Dyszel z przodu

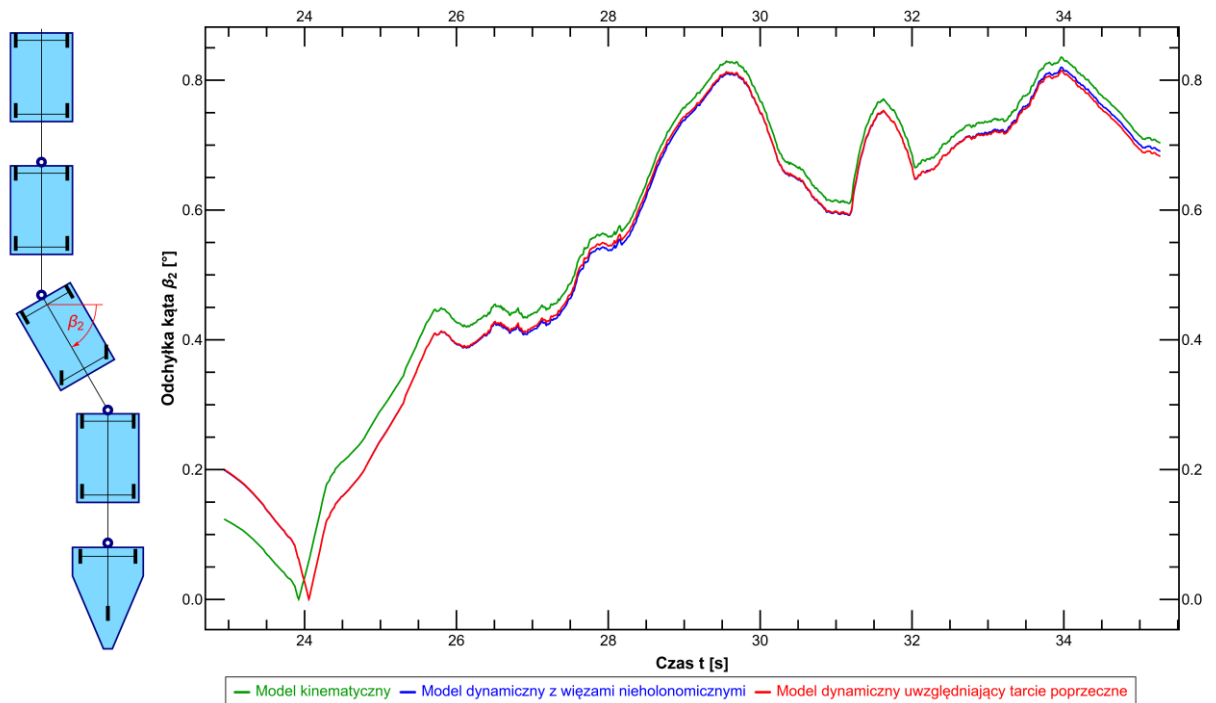
Na rysunku 7.9 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji β_1 pierwszej przyczepy. Na początku przejazdu widoczne są wyraźne różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi z modelu kinematycznego a modelami dynamicznymi. Wraz z upływem czasu, od około 25 sekundy przejazdu, rozpiętość tych odchyłek ulega zmniejszeniu, a wyniki dla

wszystkich modeli są zbliżone do siebie. W żadnym z analizowanych modeli maksymalna odchyłka nie przekroczyła 1° , a maksymalna wartość odchyłki wystąpiła na początku.



Rys. 7.9. Odchyłka kąta β_1 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

Na rysunku 7.10 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji drugiej przyczepy β_2 . W tym przypadku największą odchyłkę zaobserwowano w drugiej połowie przejazdu.

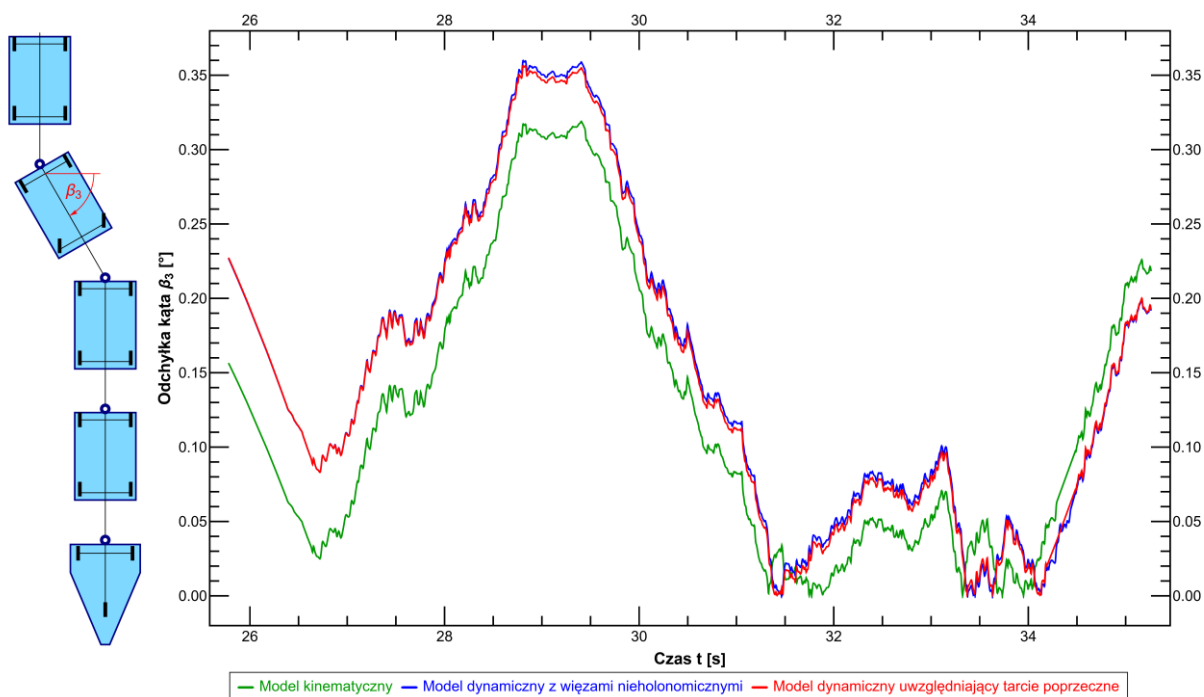


Rys. 7.10. Odchyłka kąta β_2 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

Na początku przejazdu odchyłka była stosunkowo niewielka, a w pewnym momencie zbliżała się do zera. Podobnie, jak w przypadku pierwszej przyczepy, w początkowej fazie

przejazdu występowały największe różnice pomiędzy modelem kinematycznym, a modelami dynamicznymi. Różnice pomiędzy modelami dynamicznymi były niewielkie. W żadnym z modeli maksymalna odchyłka nie przekroczyła $0,85^\circ$, a maksymalna wartość odchyłki wystąpiła w końcowej części rejestrowanego pomiaru.

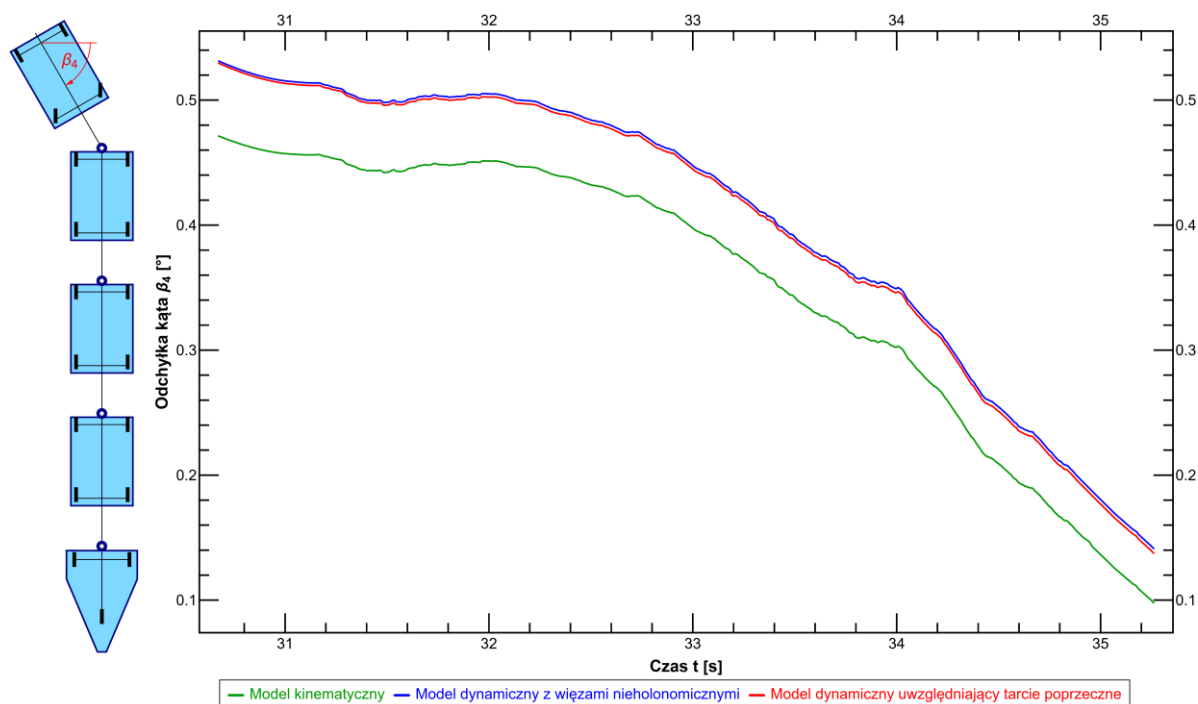
Na rysunku 7.11 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji trzeciej przyczepy β_3 . Podobnie jak w poprzednich przypadkach, największe różnice pomiędzy modelem kinematycznym a modelami dynamicznymi występują na początku rejestrowanego pomiaru. W dalszej części przejazdu różnice te ulegają zmniejszeniu. Wartości maksymalne odchyłki występują w środkowej części zarejestrowanego pomiaru, następnie wartość odchyłki maleje. W końcowej fazie przejazdu wszystkie trzy modele wykazują tendencję wzrostową odchyłki. Dla żadnego z modeli maksymalna odchyłka nie przekroczyła $0,4^\circ$, a maksymalna wartość odchyłki wystąpiła w pierwszej połowie rejestrowanego pomiaru.



Rys. 7.11. Odchyłka kąta β_3 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

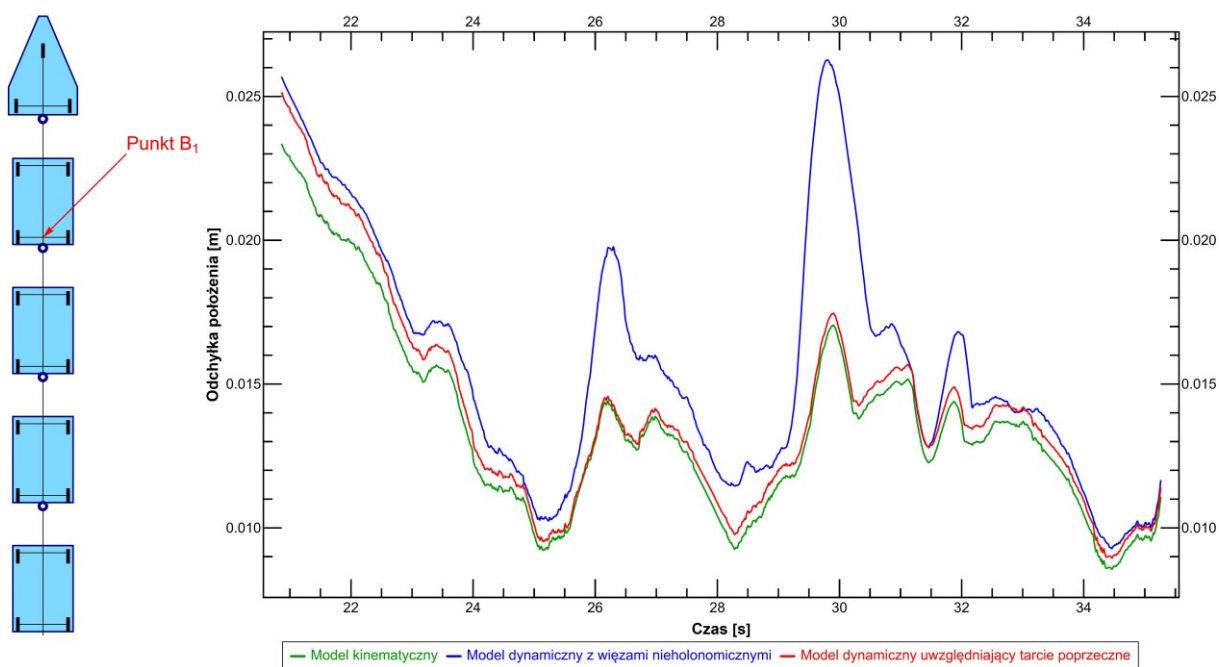
Na rysunku 7.12 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji β_4 ostatniej, czwartej przyczepy. Czas pomiaru dla tej przyczepy był stosunkowo krótki. Przez cały okres rejestracji widoczne są minimalne różnice pomiędzy modelami dynamicznymi, natomiast różnice pomiędzy modelem kinematycznym a modelami dynamicznymi są wyraźniejsze. W przeciwieństwie do wcześniejszych przypadków, różnica pomiędzy wynikami modelu kinematycznego i dynamicznego pozostaje względnie stała w czasie trwania pomiaru. Odchyłki wykazują tendencję spadkową, osiągając najmniejsze wartości pod koniec

rejestrowanego przebiegu. Dla modelu kinematycznego odchyłka nie przekroczyła $0,5^\circ$, natomiast w przypadku modeli dynamicznych w początkowej fazie odchyłka przekroczyła tę wartość, jednak nie przekroczyła $0,55^\circ$.



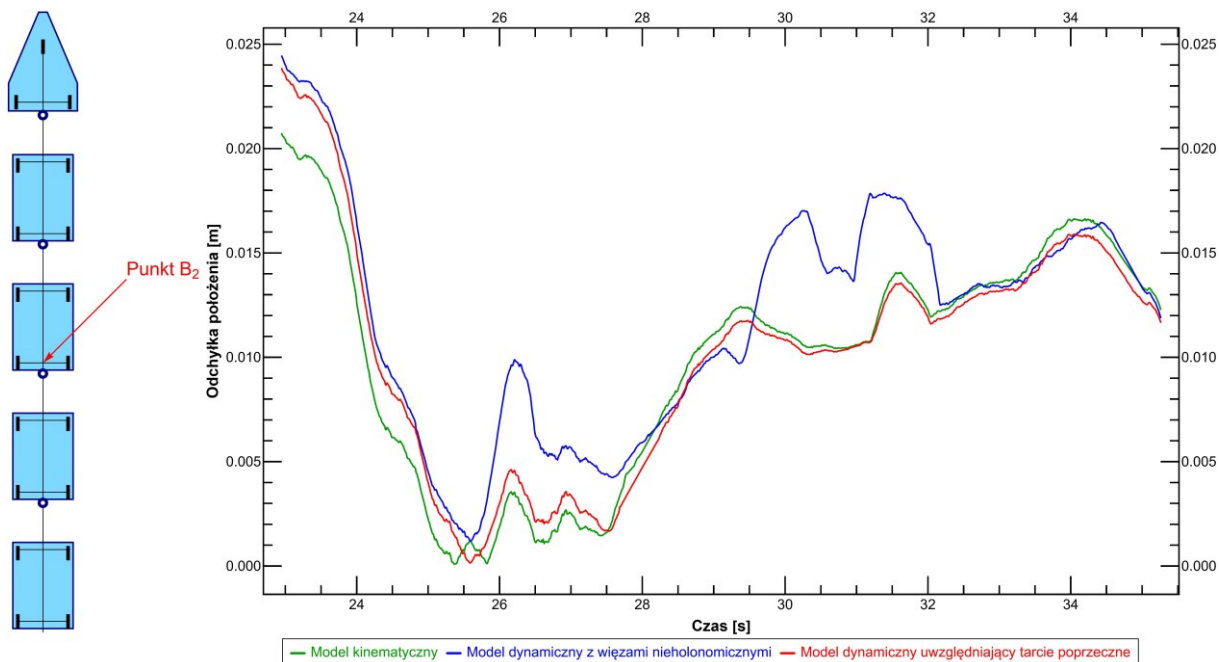
Rys. 7.12. Odchyłka kąta β_4 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

Na rysunku 7.13 przedstawiono odchyłkę położenia punktu B_1 . Największą odchyłkę zanotowano dla modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi. W niektórych fragmentach trajektorii zaobserwować można znaczące różnice między wynikami tego modelu, a pozostałymi. Prawdopodobną przyczyną tych rozbieżności jest odmienny sposób odwzorowania przejazdu. W przypadku DM-NC zastosowano sterowanie z użyciem regulatora PID, gdzie w przypadku pozostałych modeli punkt D_0 był bezpośrednio zadany. Różnice pomiędzy podejściami zastosowanymi w poszczególnych modelach sprawiają, że w DM-NC układ dąży do realizacji trajektorii punktu D_0 poprzez sterowanie siłami przyłożonymi do tego punktu, natomiast w pozostałych modelach, współrzędne tego punktu stanowią dane wejściowe dla modelu. W związku z tym obserwowane różnice można uznać za błąd wynikający z odwzorowania przejazdu w środowisku symulacyjnym. Tym bardziej, że różnice te nie były zauważalne w przebiegu odchyłki kąta, co może świadczyć o tym, że położenie punktu D_0 nie zostało idealnie odwzorowane w symulacji modelu DM-NC. Pomijając, te chwilowe wzrosty odchyłki dla tego modelu, to wartości dla poszczególnych modeli są do siebie zbliżone. Jedynie na początku odchyłka przekroczyła wartość $0,025$ m w przypadku właśnie modeli dynamicznych.



Rys. 7.13. Odchyłka położenia punktu B_1 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

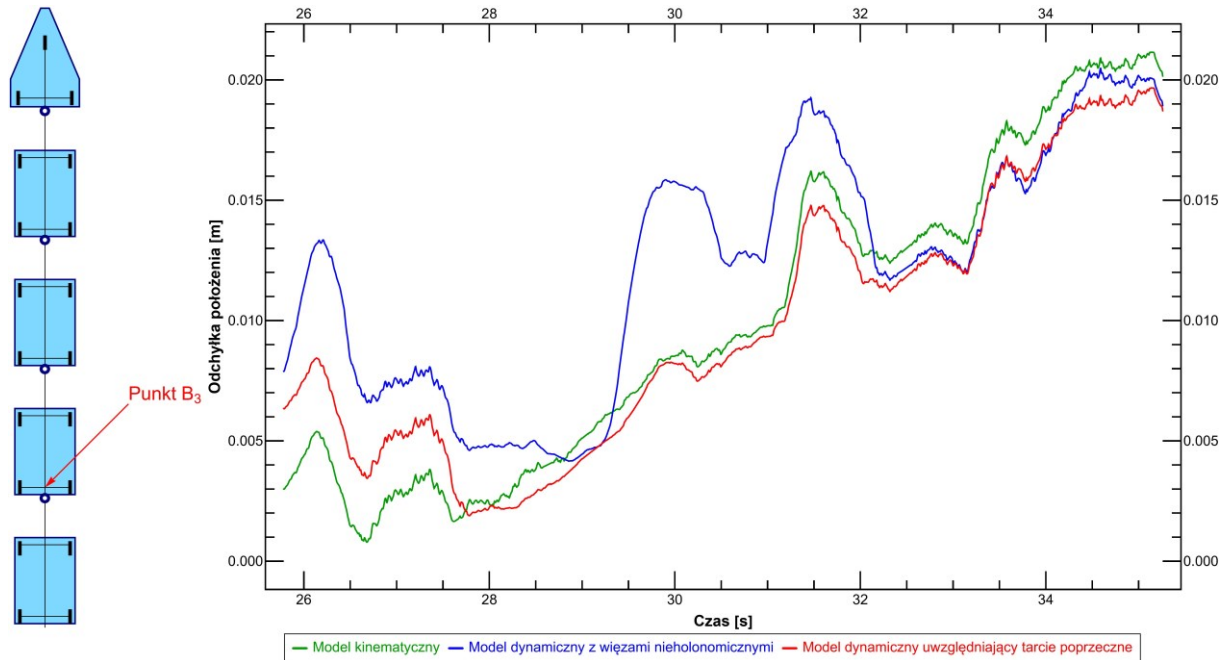
Na rysunku 7.14 przedstawiono odchyłkę położenia punktu B_2 . Również w tym przypadku obserwuje się lokalne wzrosty odchyłki dla DM-NC, jednak nie są aż tak duże jak poprzednio. Największe wartości odchyłki występują w początkowej fazie symulacji. Wartości maksymalne odchyłki dla żadnego z modeli nie przekroczyły 0,025 m.



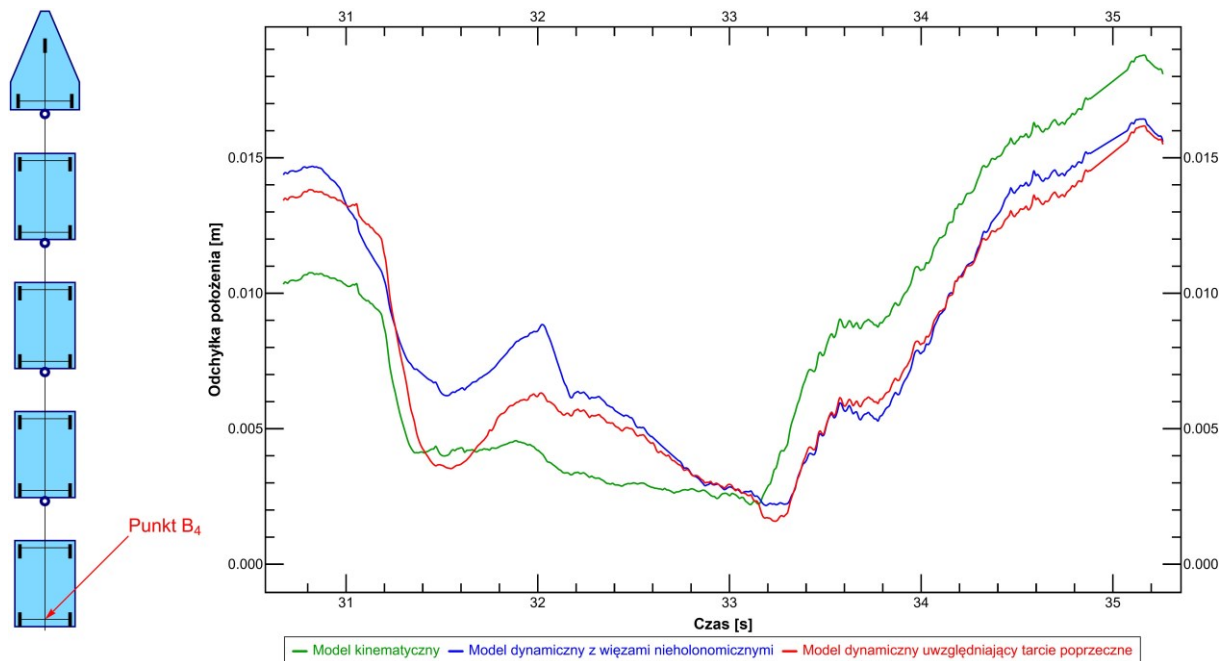
Rys. 7.14. Odchyłka punktu B_2 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

Na rysunku 7.15 przedstawiono odchyłkę położenia punktu B_3 . W tym przypadku największe wartości odchyłki wystąpiły w końcowej fazie rejestrowanego pomiaru. Wartość maksymalnej odchyłki nie przekroczyła 0,022 m.

Na rysunku 7.16 przedstawiono odchyłkę położenia punktu B_4 . W tym przypadku największe wartości odchyłki wystąpiły również pod koniec rejestrowanego pomiaru. Wartość maksymalnej odchyłki nie przekroczyła 0,019 m.



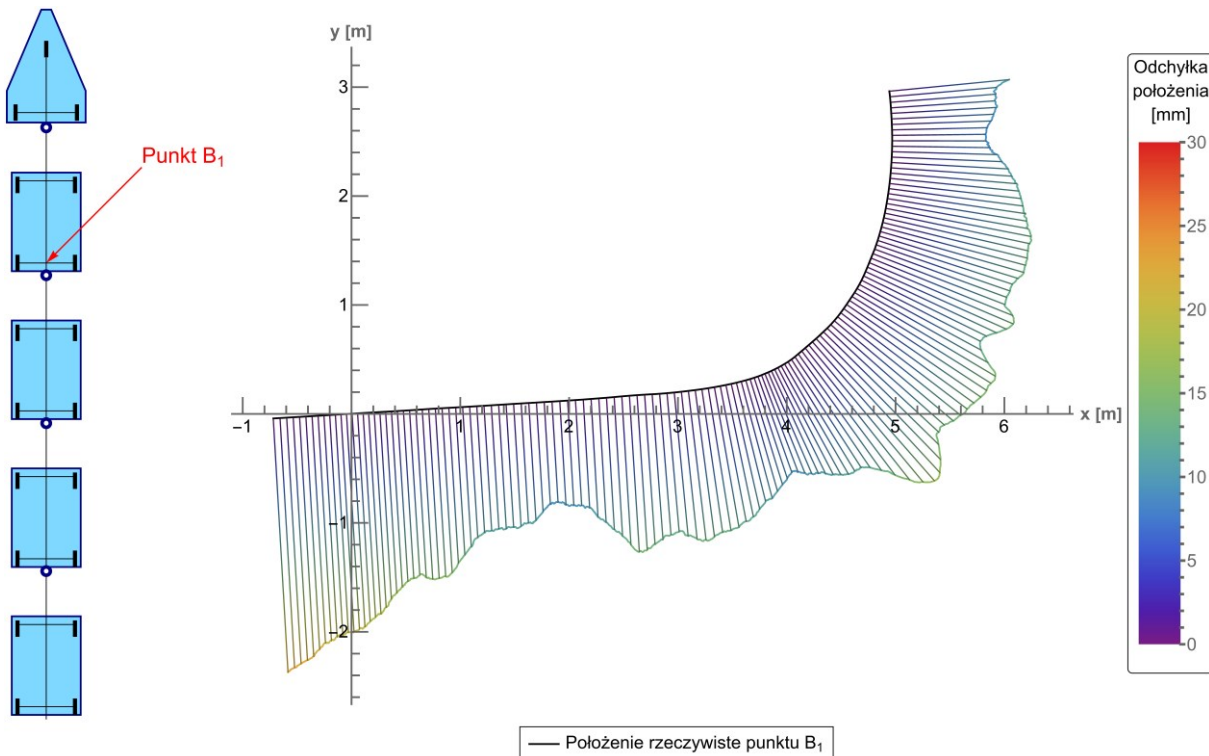
Rys. 7.15. Odchyłka punktu B_3 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych



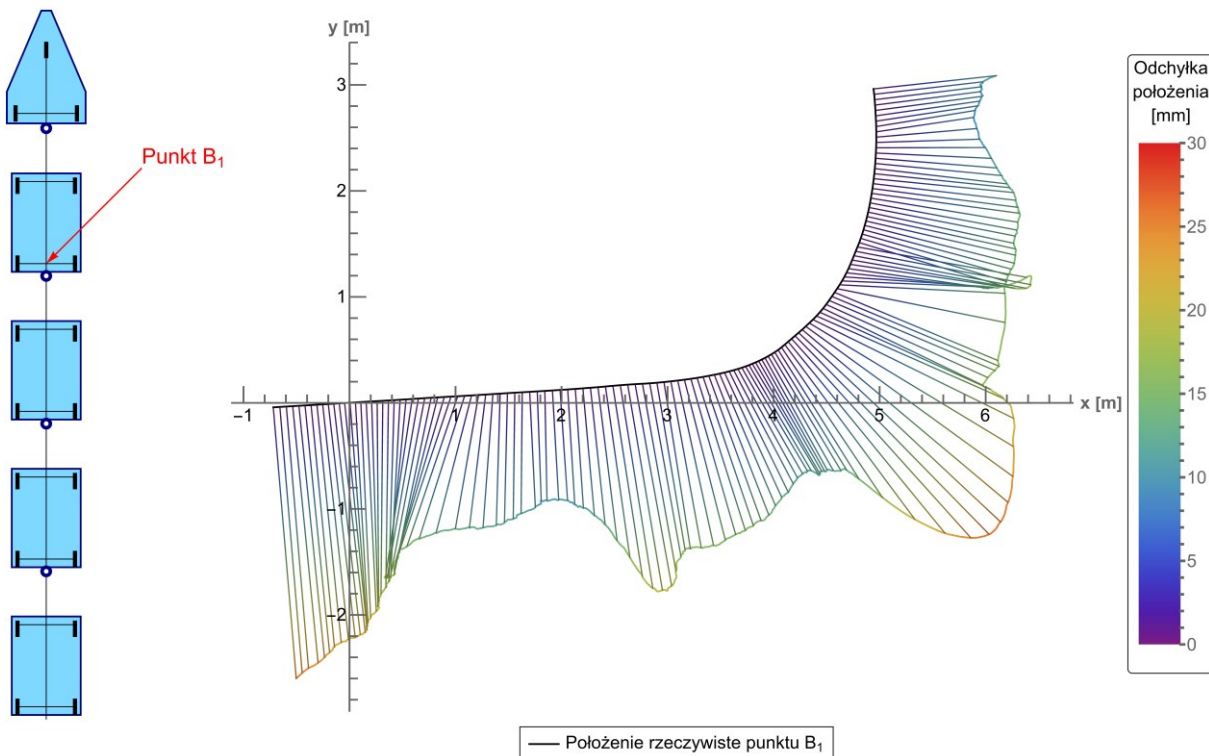
Rys. 7.16. Odchyłka punktu B_4 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

Na rysunkach 7.17, 7.18 i 7.19 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B_1 uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z oznaczeniem odchyłki położenia. Można zaobserwować, że punkt B_1 we wszystkich

analizowanych symulacjach znajdował się przez cały czas przejazdu po zewnętrznej stronie łuku względem jego rzeczywistego położenia.

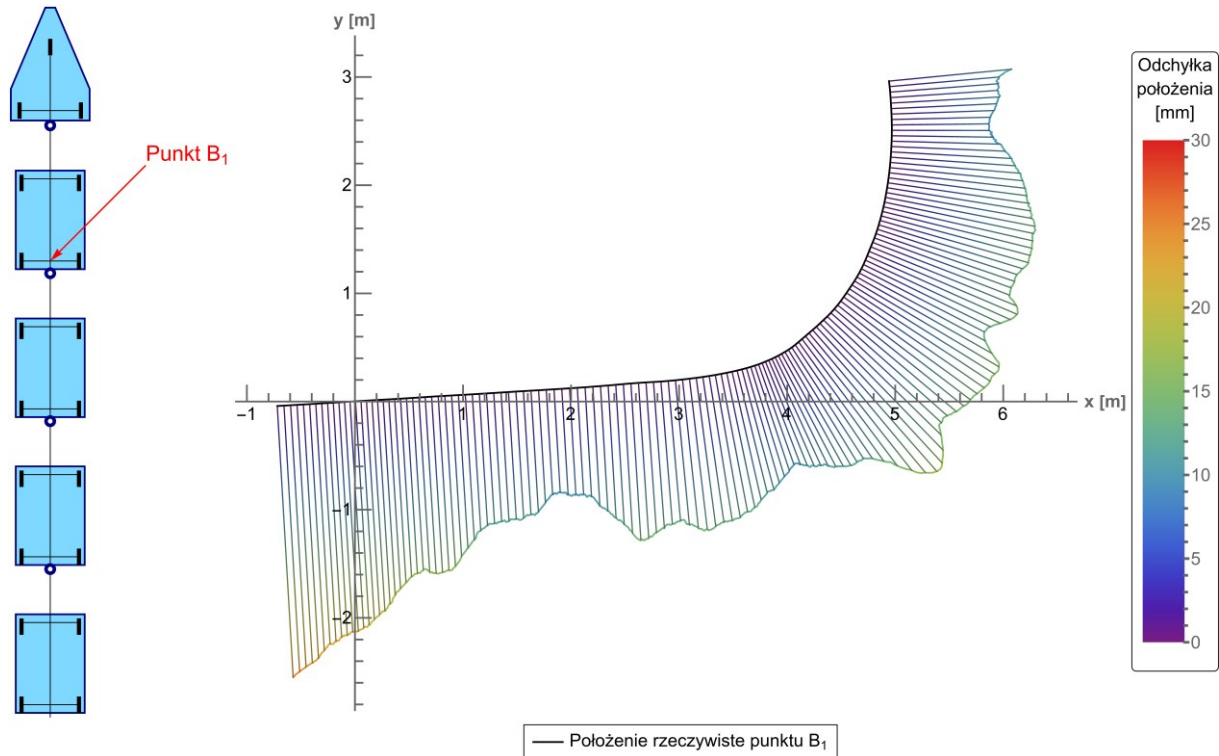


Rys. 7.17. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B₁ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.18. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B₁ wraz z oznaczoną odchyłką położenia

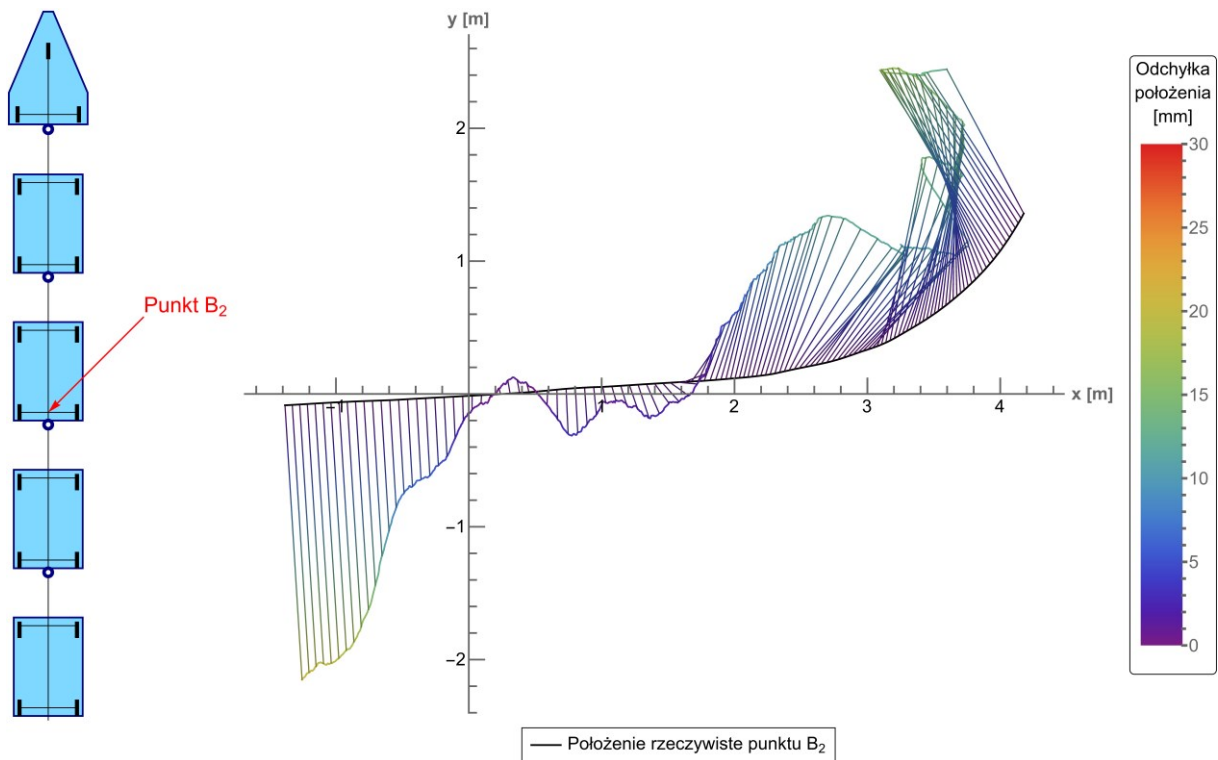
Porównując uzyskaną trajektorię w modelu DM-NC z trajektorią modelu kinematycznego, można zauważyć większy wpływ odchyłki w kierunku wzdłużnym oraz wyraźne wahania przebiegu trajektorii. Zjawisko to wynika z odmiennego sposobu odwzorowania trajektorii w tym modelu w porównaniu z pozostałymi. W przypadku DM-LF nie zauważono większego wpływu odchyłki w kierunku wzdłużnym.



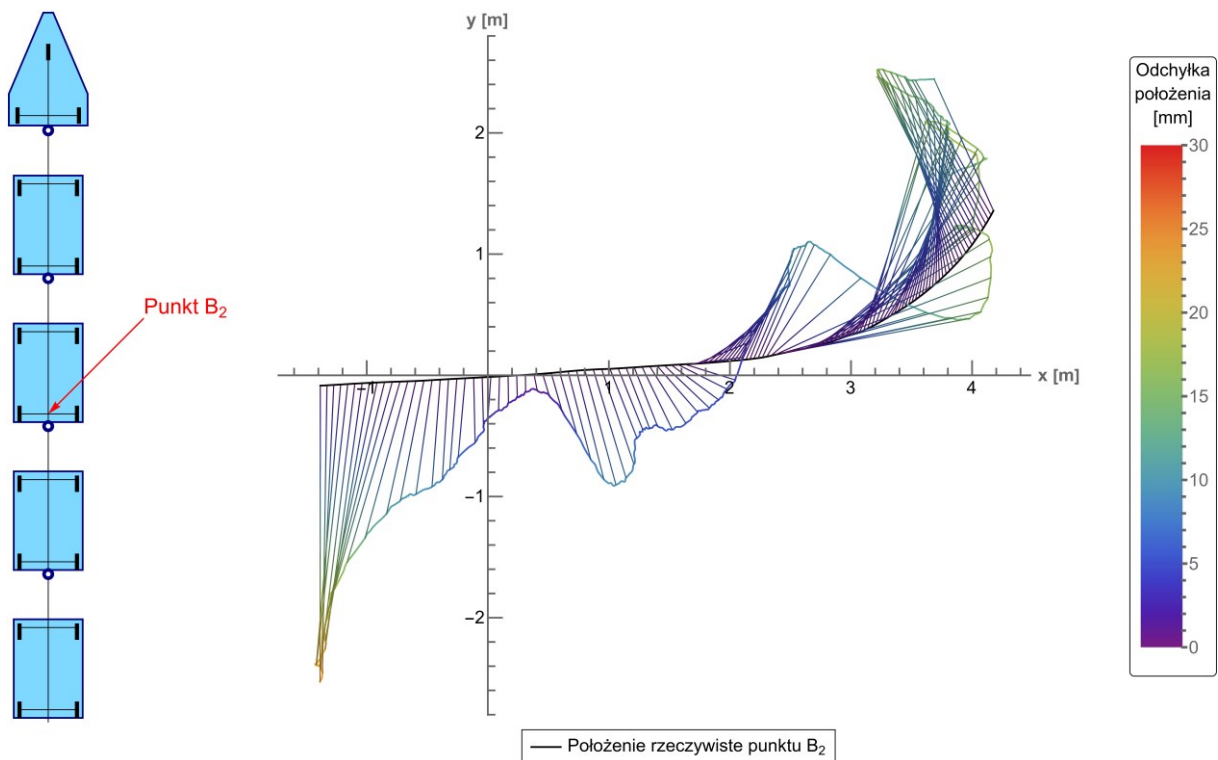
Rys. 7.19. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzecznego; położenie punktu B_1 wraz z oznaczoną odchyłką położenia

Na rysunkach 7.20, 7.21 oraz 7.22 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B_2 uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z oznaczeniem odchyłki położenia. W tym przypadku pozycja punktu B_2 w każdej z symulacji występowała zarówno po zewnętrznej, jak i po wewnętrznej stronie względem rzeczywistej trajektorii punktu B_2 . W końcowej fazie rejestracji pomiaru można zauważyć wpływ wzdłużnej składowej odchyłki położenia.

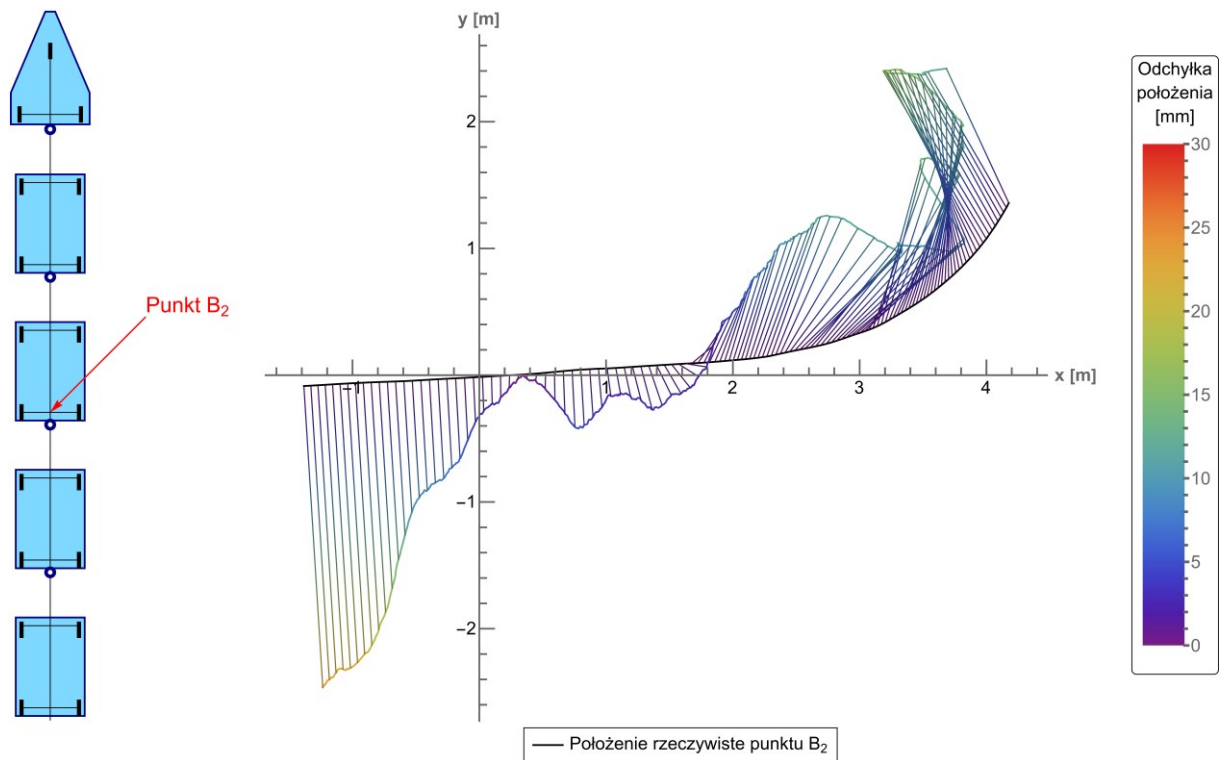
Na rysunkach 7.23, 7.24 i 7.25 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B_3 uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z oznaczeniem odchyłki położenia. Podobnie, jak dla punktu B_2 , punkt B_3 uzyskany w symulacji modelu kinematycznego okresowo znajduje się po obu stronach rzeczywistej trajektorii. Zauważalny jest znaczący wpływ odchyłki w kierunku wzdłużnym dla DM-NC.



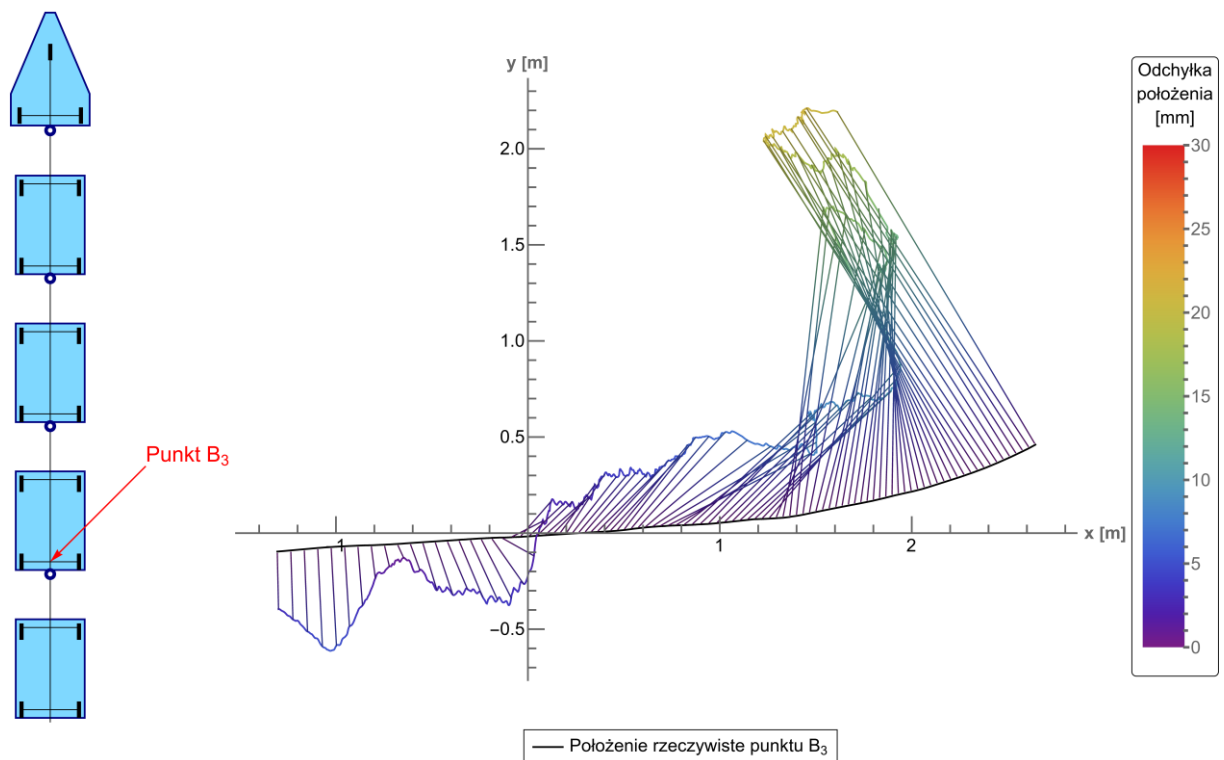
Rys. 7.20. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B₂ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



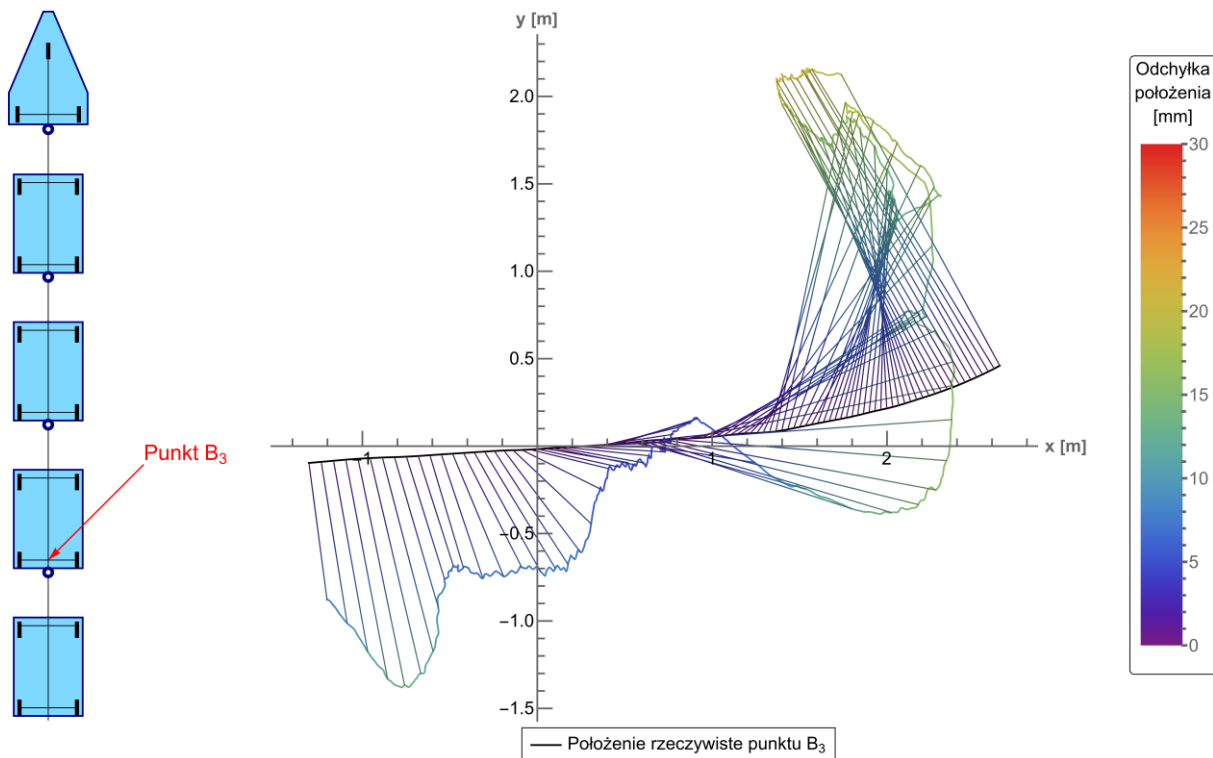
Rys. 7.21. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B₂ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



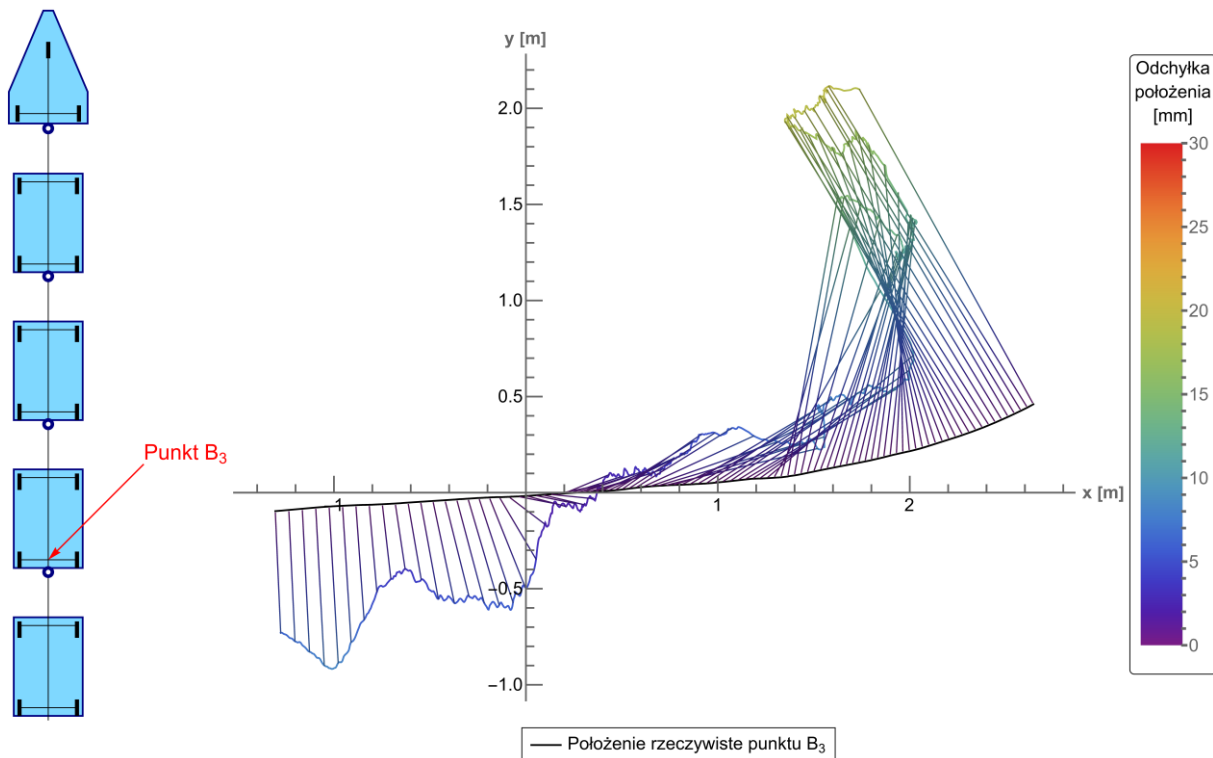
Rys. 7.22. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzecznego położenie punktu B₂ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.23. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B₃ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



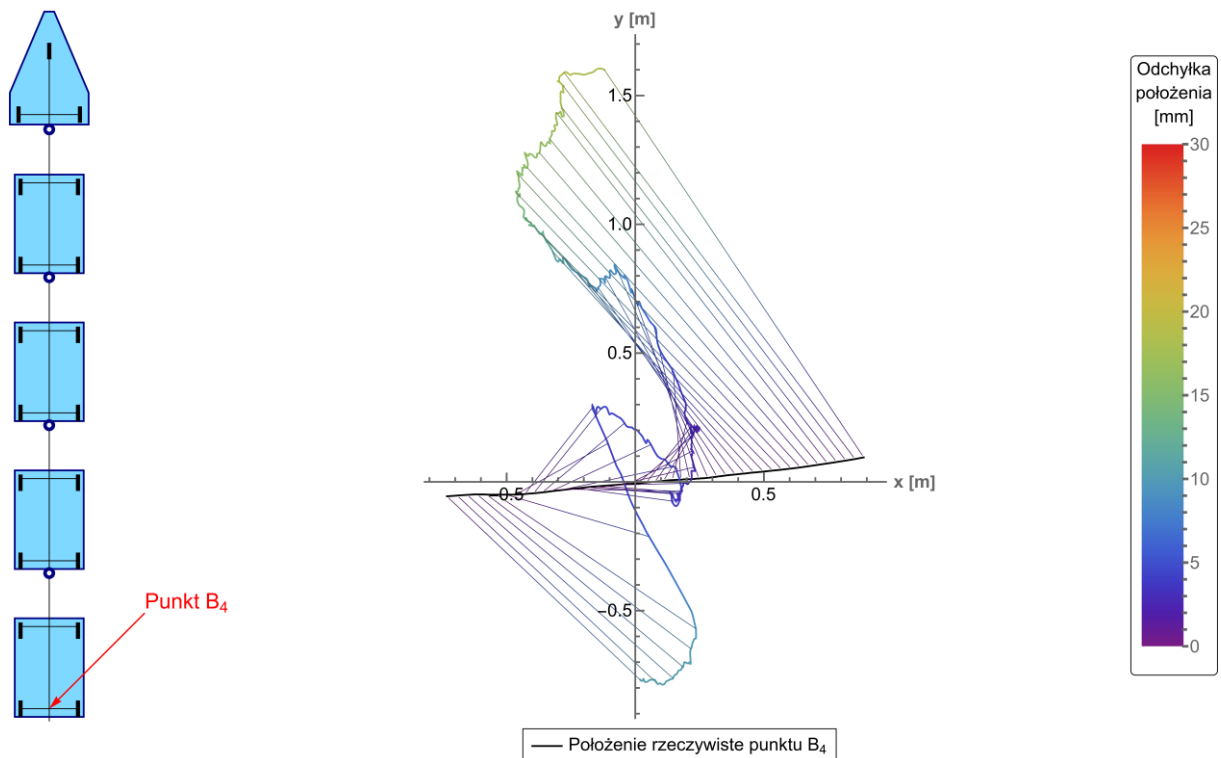
Rys. 7.24. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B₃ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



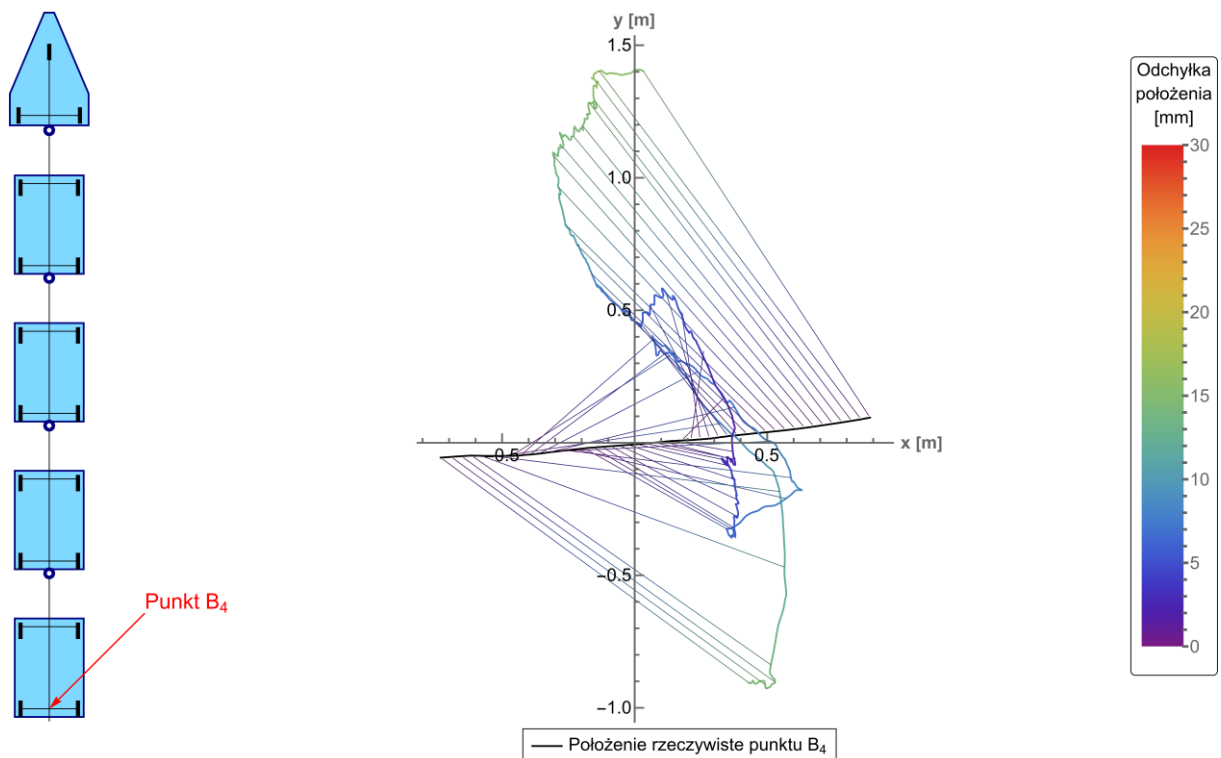
Rys. 7.25. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzecznego położenie punktu B₃ wraz z oznaczoną odchyłką położenia

Na rysunkach 7.26, 7.27 i 7.28 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B₄ uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z

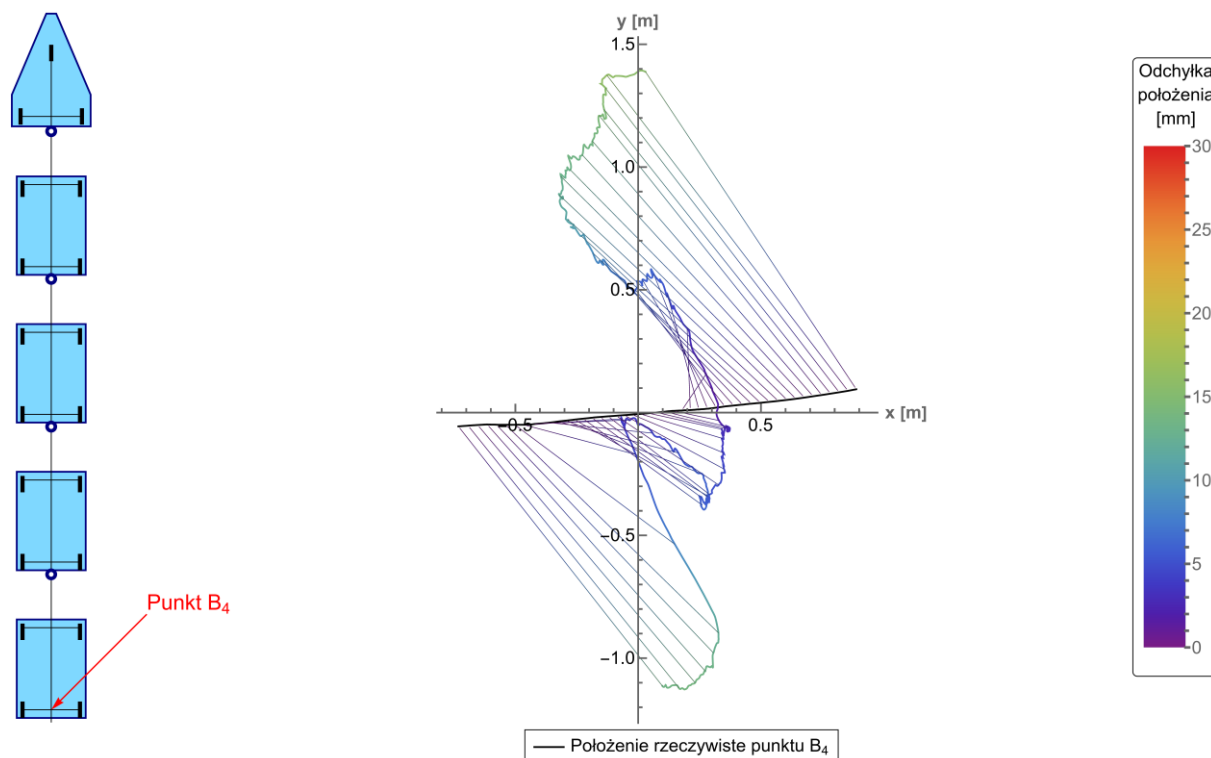
oznaczeniem odchyłki położenia. Kształt uzyskanych trajektorii w modelach KM i DM-LF jest do siebie zbliżony.



Rys. 7.26. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B_4 wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.27. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B_4 wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.28. Rzeczywiste oraz przeskalowane uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzecznego położenie punktu B_4 wraz z oznaczoną odchyłką położenia

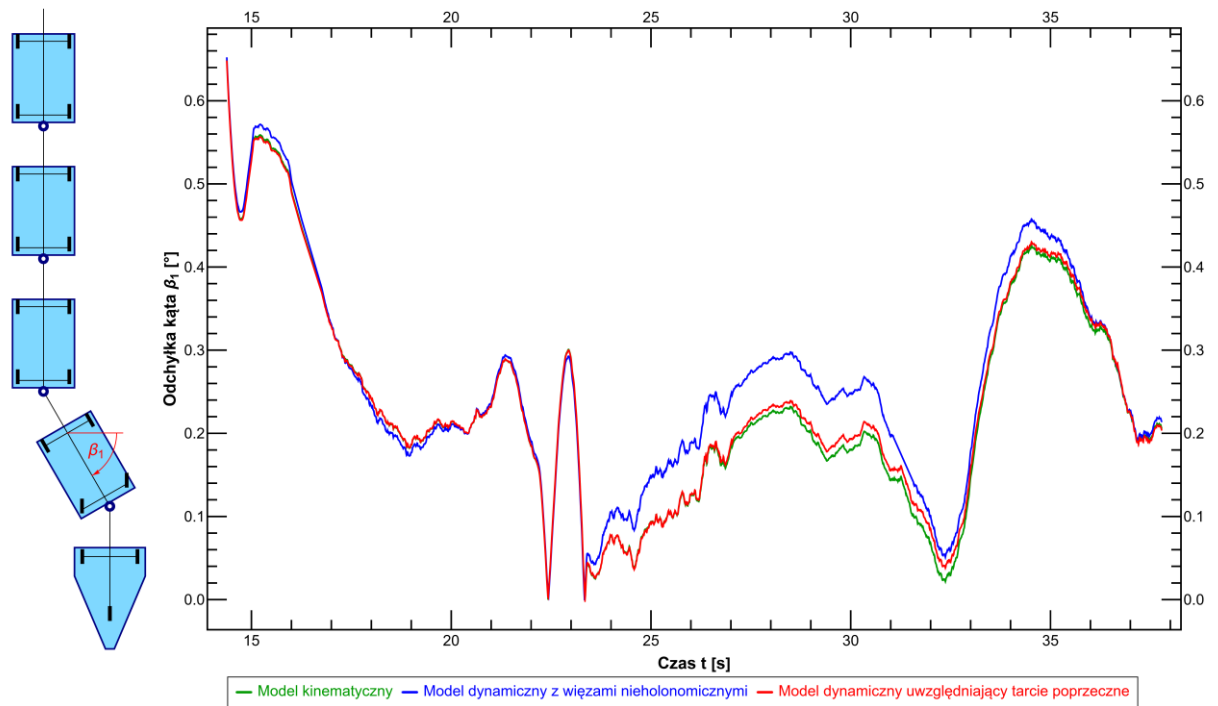
7.2.3 Odwrócony dyszel

Na rysunku 7.29 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji β_1 pierwszej przyczepy. W zakresie od 22 do 32 sekund symulacji widoczne są wyraźne różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi dla modelu DM-NC a pozostałymi modelami. Największe wartości odchyłki występowały na początku symulacji we wszystkich modelach, jednak ich maksymalna wartość nie przekroczyła $0,65^\circ$.

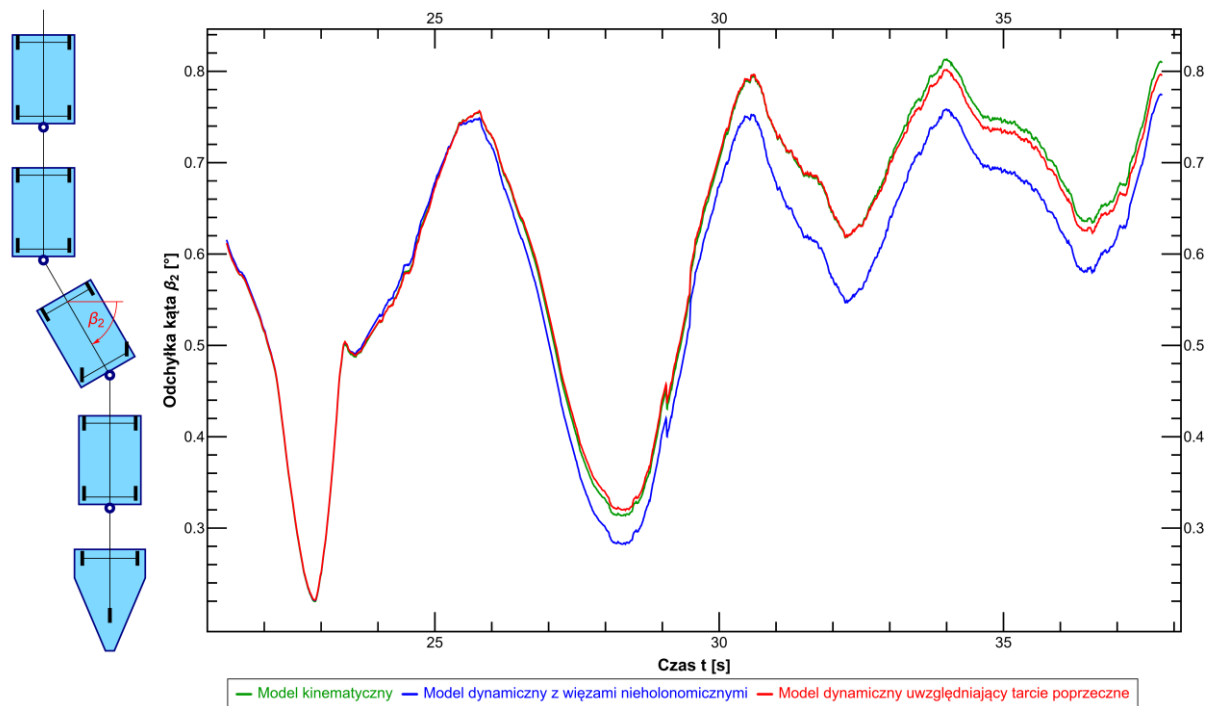
Na rysunku 7.30 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji β_2 drugiej przyczepy. Podobnie jak w przypadku pierwszej przyczepy, w wybranych zakresach czasowych zauważalne są odstępstwa wyników uzyskanych z modelu DM-NC względem pozostałych modeli. Największe wartości odchyłki występowały pod koniec symulacji, jednak nie przekroczyły one $0,85^\circ$.

Na rysunku 7.31 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji β_3 trzeciej przyczepy. Początkowo wartości odchyłki są zbliżone we wszystkich modelach, natomiast pod koniec zarejestrowanego przebiegu pojawiają się zauważalne rozbieżności.

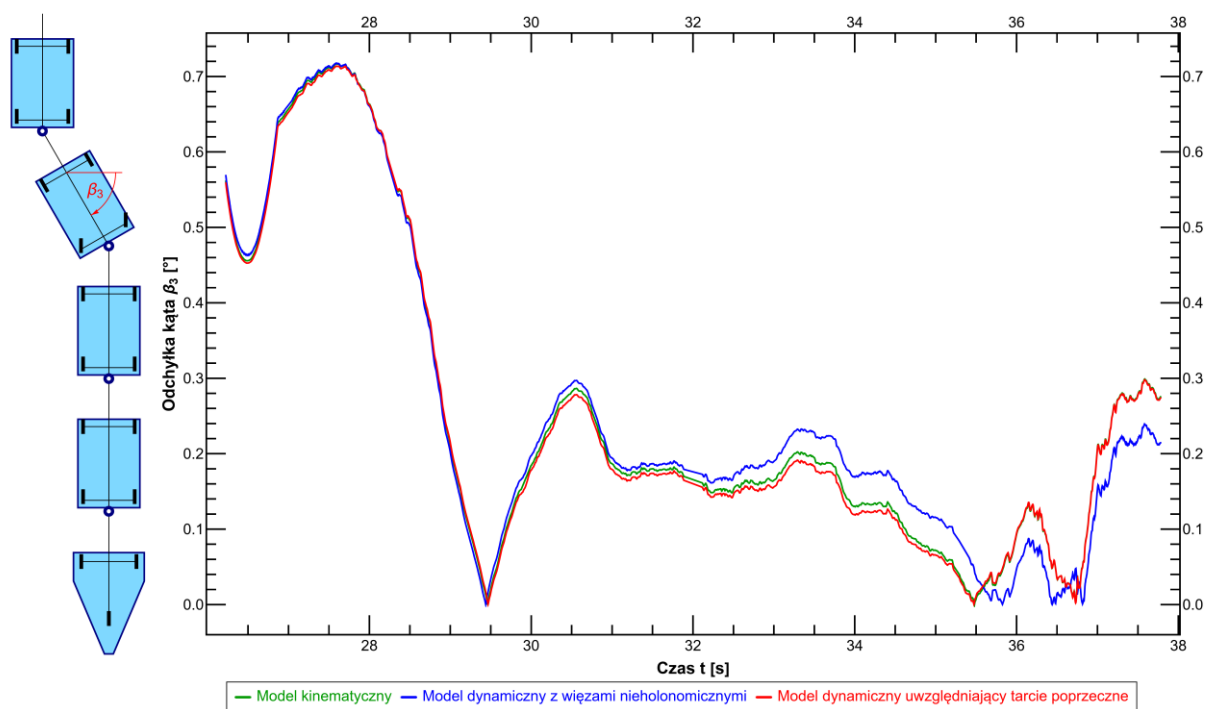
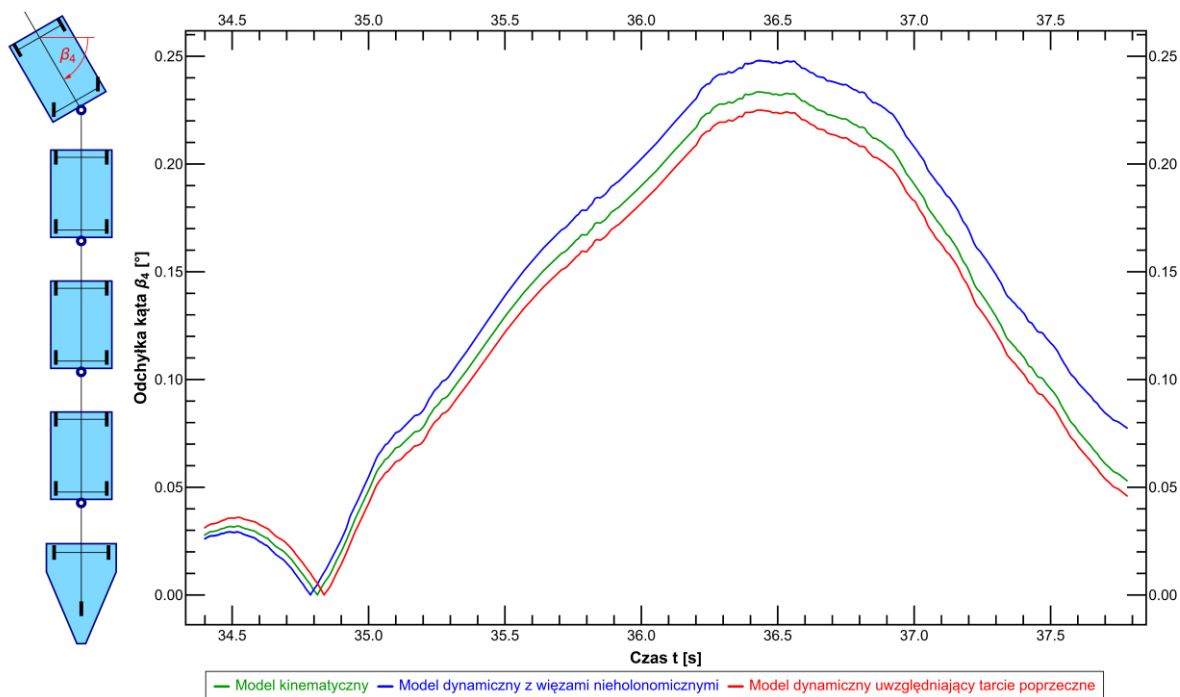
Na rysunku 7.32 przedstawiono odchyłkę kąta orientacji β_4 ostatniej, czwartej przyczepy. Czas rejestracji pomiaru dla tej przyczepy był stosunkowo krótki. Kształt przebiegu odchyłki kąta orientacji jest zbliżony we wszystkich modelach, a wartość maksymalna wyniosła około $0,25^\circ$.



Rys. 7.29. Odchyłka kąta β_1 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

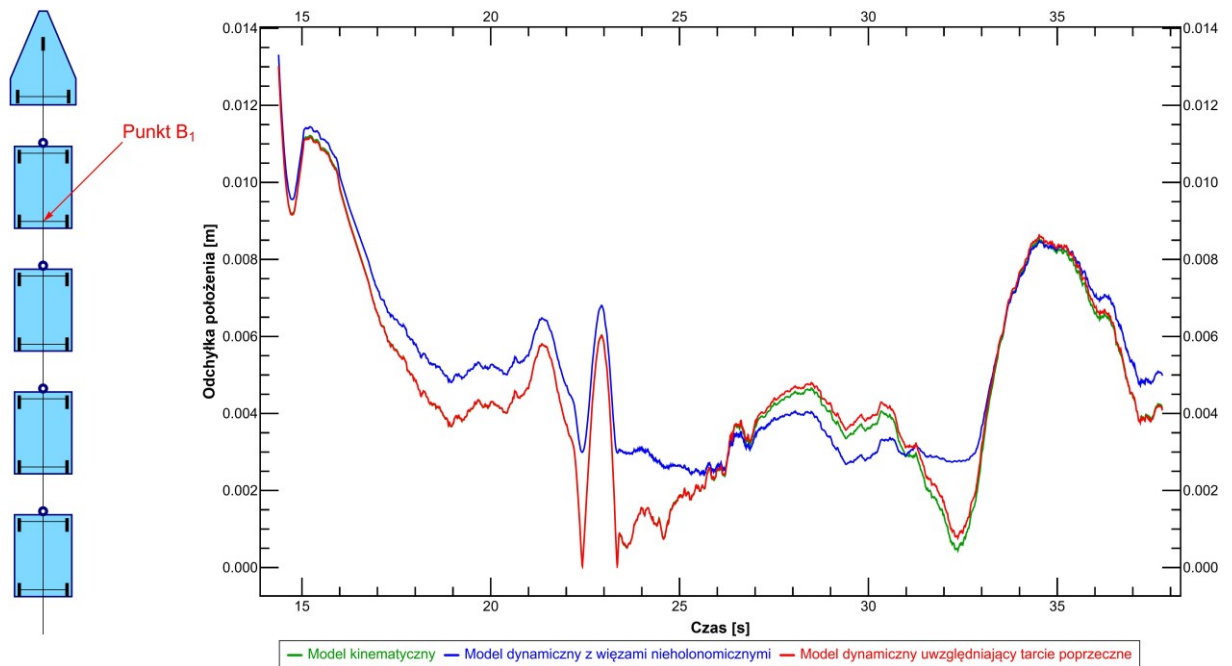


Rys. 7.30. Odchyłka kąta β_2 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

Rys. 7.31. Odchyłka kąta β_3 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznychRys. 7.32. Odchyłka kąta β_4 dla układu dyszla z przodu dla trzech modeli matematycznych

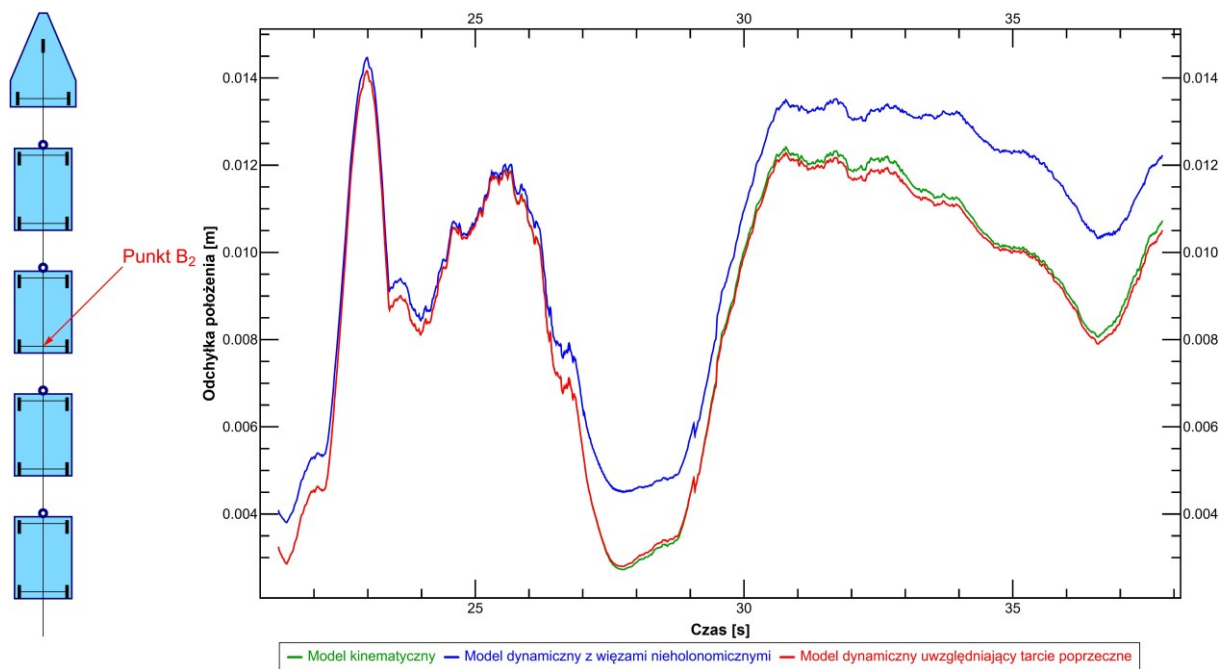
Na rysunku 7.33 przedstawiono odchyłkę położenia punktu B_1 . Podobnie jak w konfiguracji z dyszlem z przodu, w modelu dynamicznym z więzami nieholonomicznymi zastosowano odmienny sposób odwzorowania przejazdu w środowisku symulacyjnym. Różnice wynikające z tego podejścia nie są jednak tak duże, jak miało to miejsce w przypadku konfiguracji z przednim dyszlem. W porównaniu do tamtej konfiguracji

wartości odchyłki są wyraźnie mniejsze. Dla pierwszej przyczepy wartość maksymalna odchyłki kąta orientacji nie przekroczyła 0,014 m.



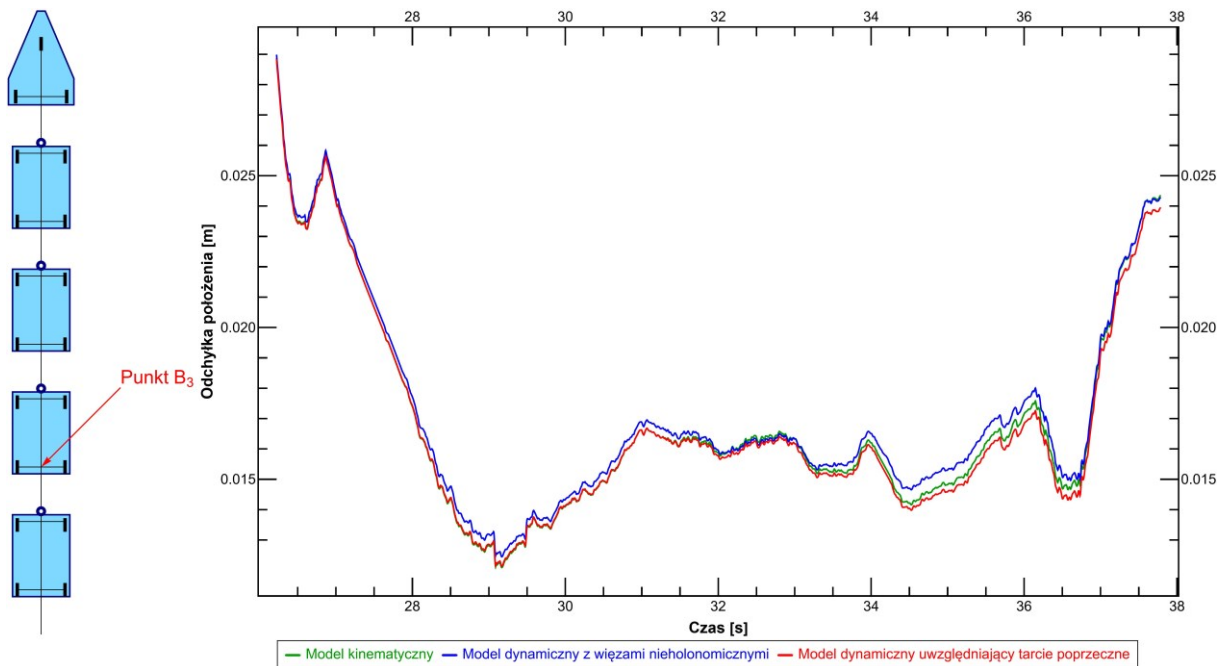
Rys. 7.33. Odchyłka położenia punktu B_1 dla układu odwróconego dyszla dla trzech modeli matematycznych

Na rysunku 7.34 przedstawiono odchyłkę położenia punktu B_2 . Maksymalne wartości odchyłki są zbliżone do uzyskanych dla przyczepy nr 1. Nie przekroczyły one wartości 0,0145 m. Zauważalny jest wzrost odchyłki dla DM-NC względem pozostałych modeli.



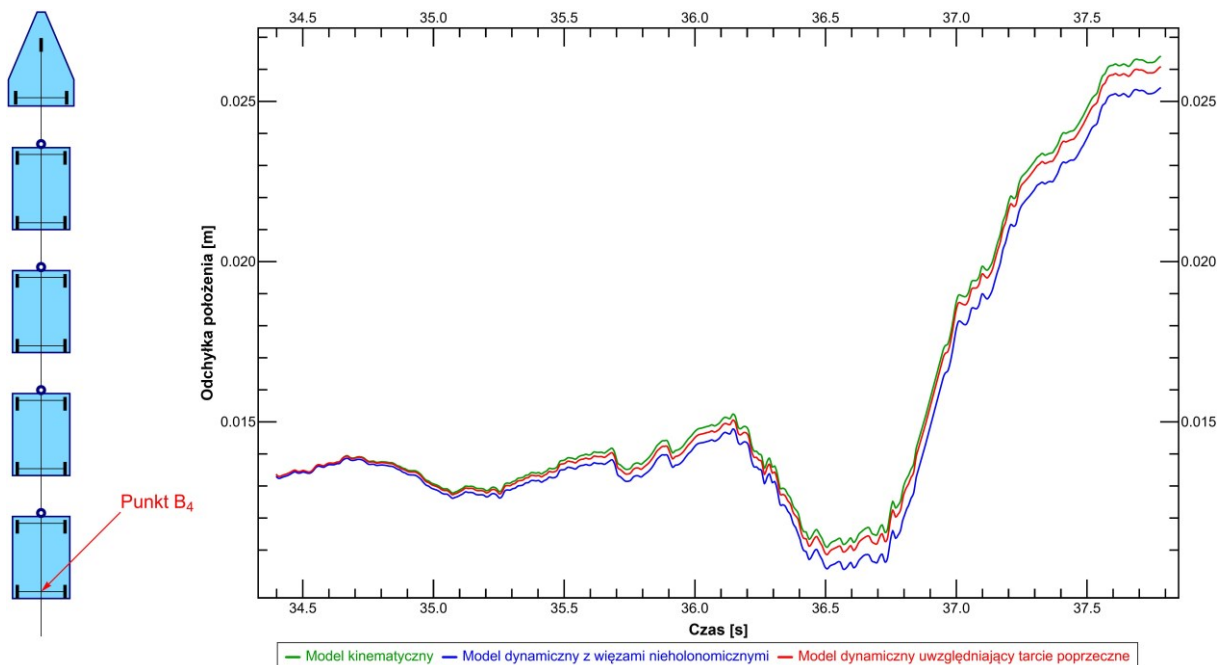
Rys. 7.34. Odchyłka położenia punktu B_2 dla układu odwróconego dyszla dla trzech modeli matematycznych

Większe wartości odchyłki odnotowano dla punktu B₃, gdzie wartości maksymalne nie przekroczyły 0,030 m, co przedstawiono na rysunku 7.35.



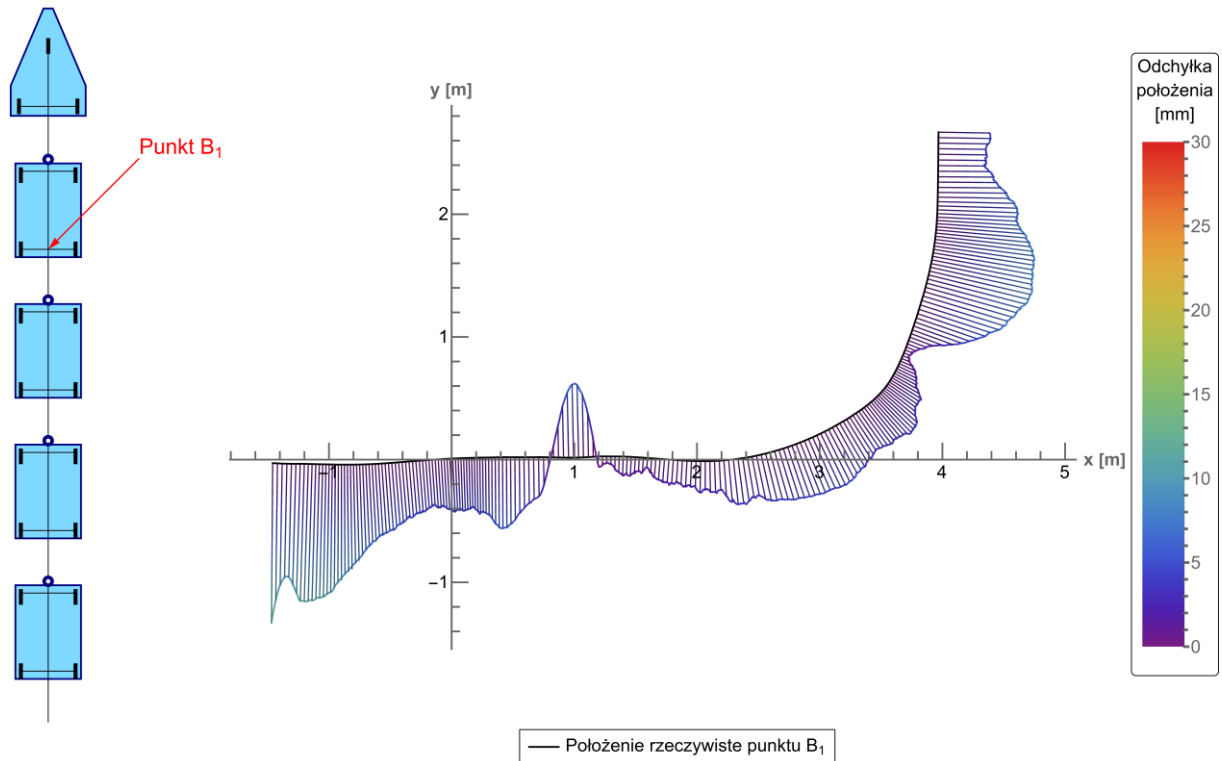
Rys. 7.35. Odchyłka położenia punktu B₃ dla układu odwróconego dyszla dla trzech modeli matematycznych

Podobne maksymalne wartości odchyłki uzyskano dla punktu B₄, gdzie wartości maksymalne wystąpiły tym razem pod koniec pomiaru i nie przekroczyły 0,03 m.

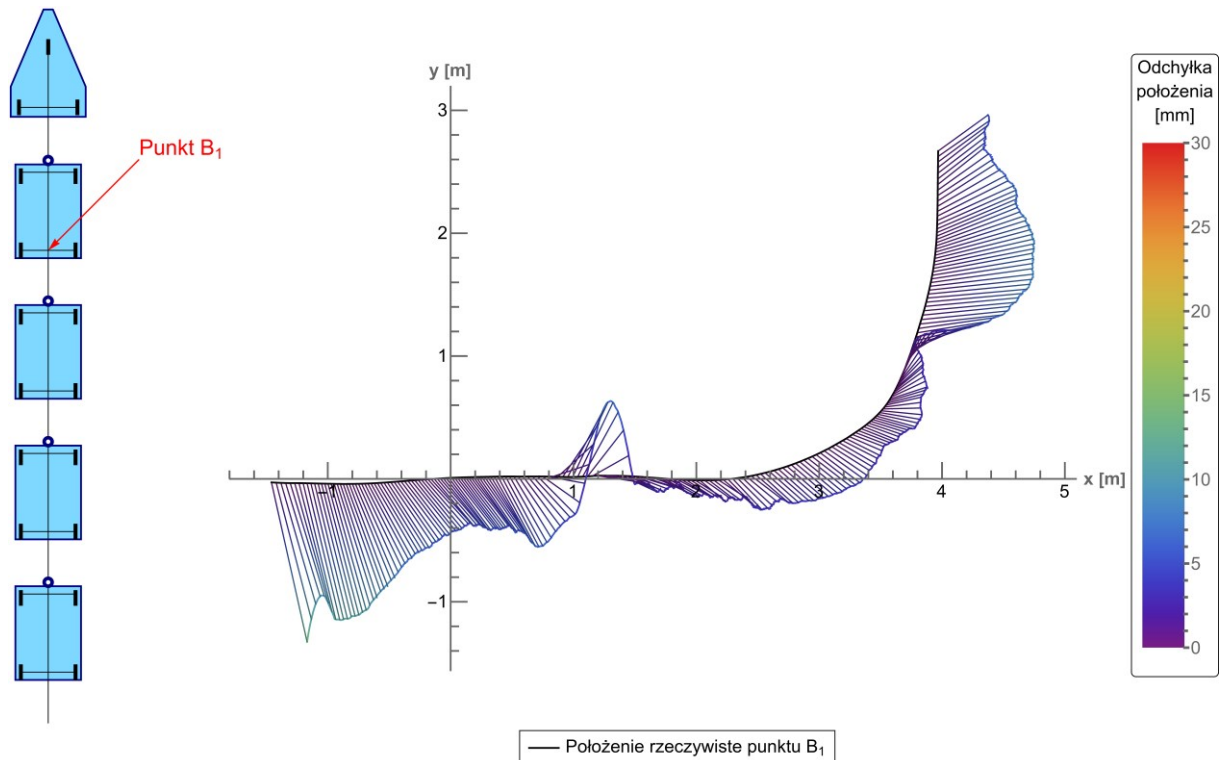


Rys. 7.36. Odchyłka położenia punktu B₄ dla układu odwróconego dyszla dla trzech modeli matematycznych

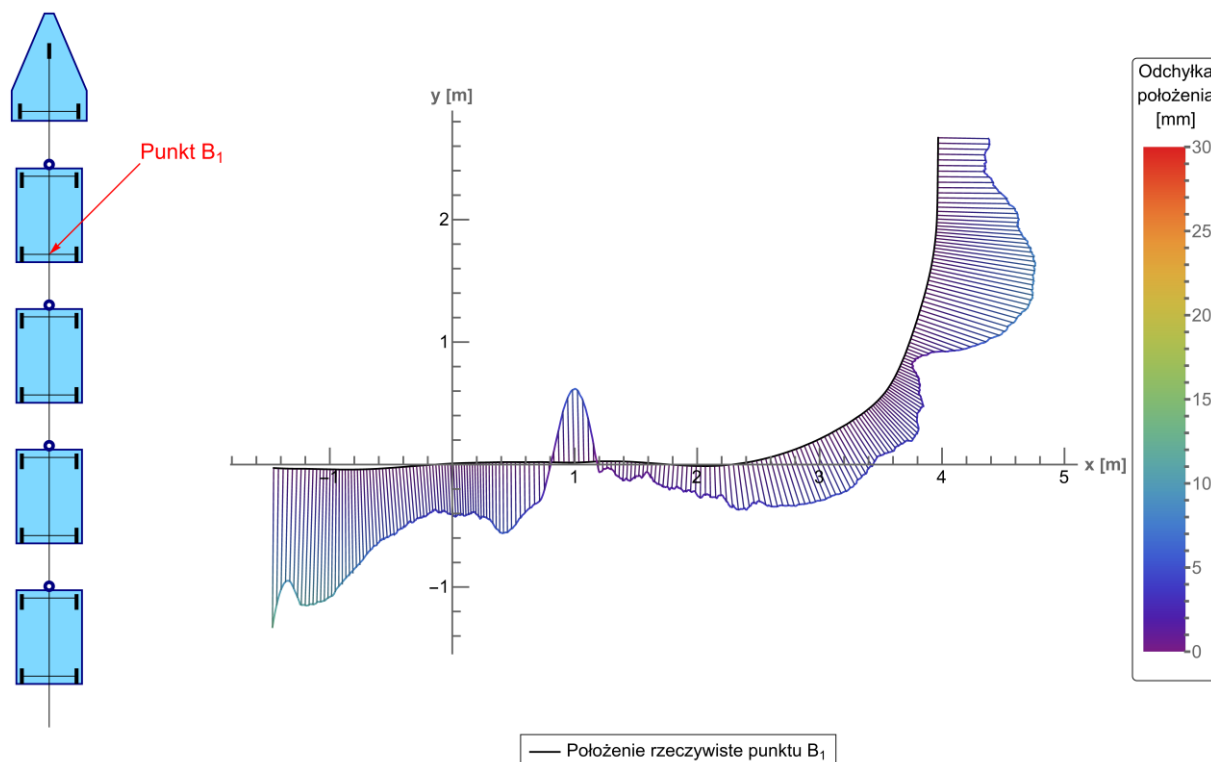
Na rysunkach 7.37, 7.38 i 7.39 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B_1 uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z oznaczeniem odchyłki położenia.



Rys. 7.37. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B_1 wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.38. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B_1 wraz z oznaczoną odchyłką położenia

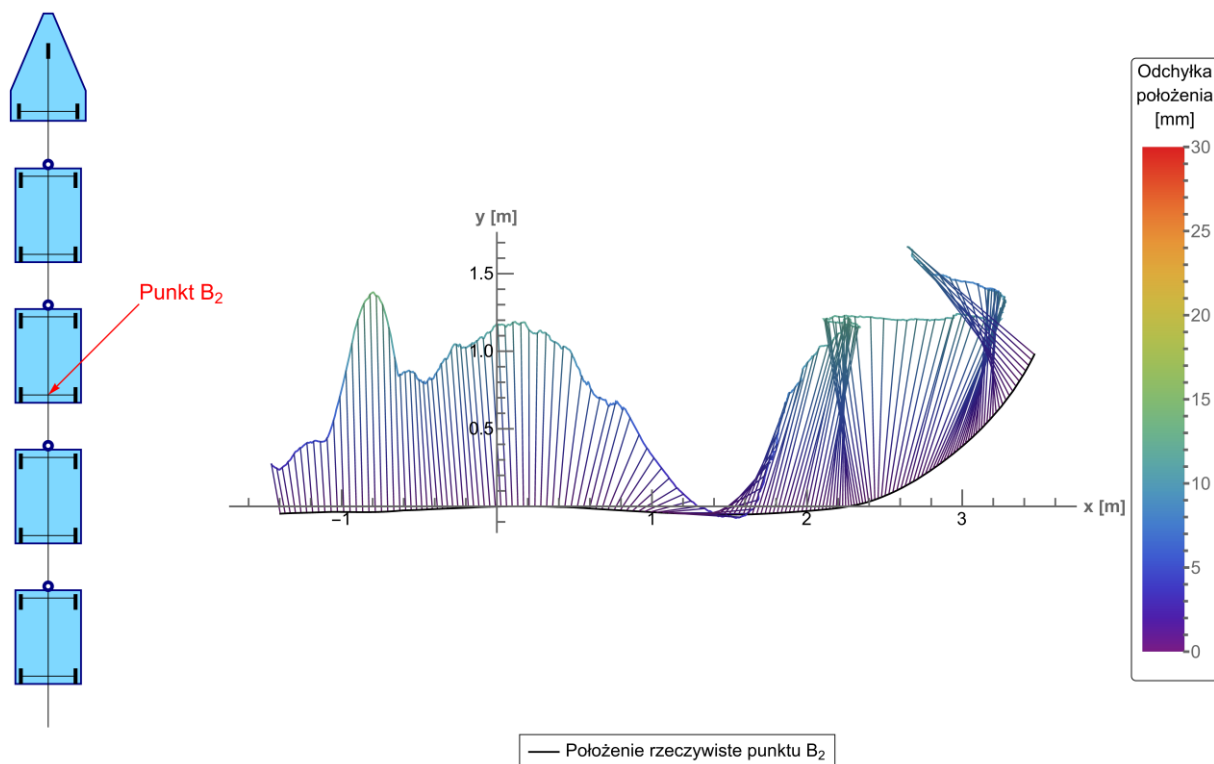


Rys. 7.39. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzeczne położenie punktu B_1 wraz z oznaczoną odchyłką położenia

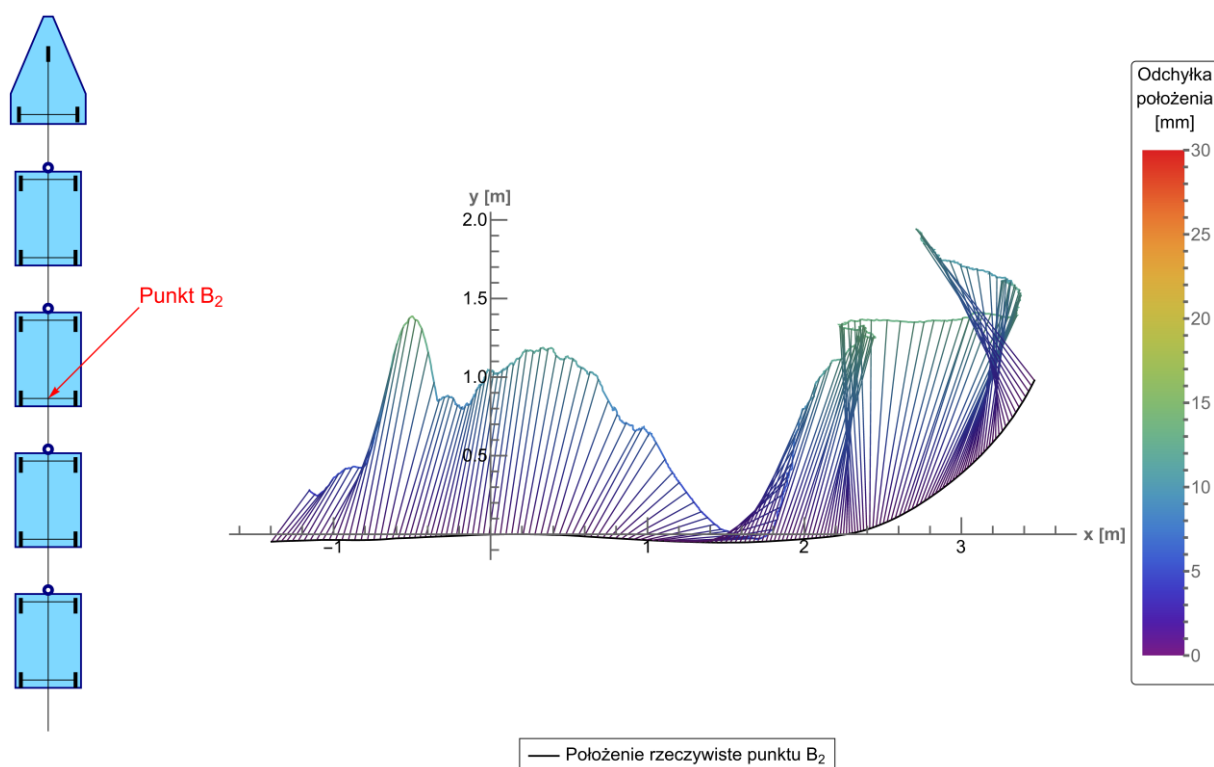
Można zaobserwować, że punkt B_1 we wszystkich analizowanych symulacjach znajdował się przeważnie po zewnętrznej stronie łuku względem jego rzeczywistego położenia, z wyjątkiem jednego fragmentu wspólnego dla wszystkich modeli, co potwierdza ich wzajemną zbieżność. Sugeruje to, że obserwowane odchyłki wynikają przede wszystkim z niedokładności pomiaru lub kalibracji systemu podczas badań eksperymentalnych, a nie z ograniczeń opracowanych modeli.

Na rysunkach 7.40, 7.41 i 7.42 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B_2 uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z oznaczeniem odchyłki położenia. W środkowej i końcowej części rejestrowanego przebiegu widoczny jest zauważalny wpływ odchyłki w kierunku wzdłużnym.

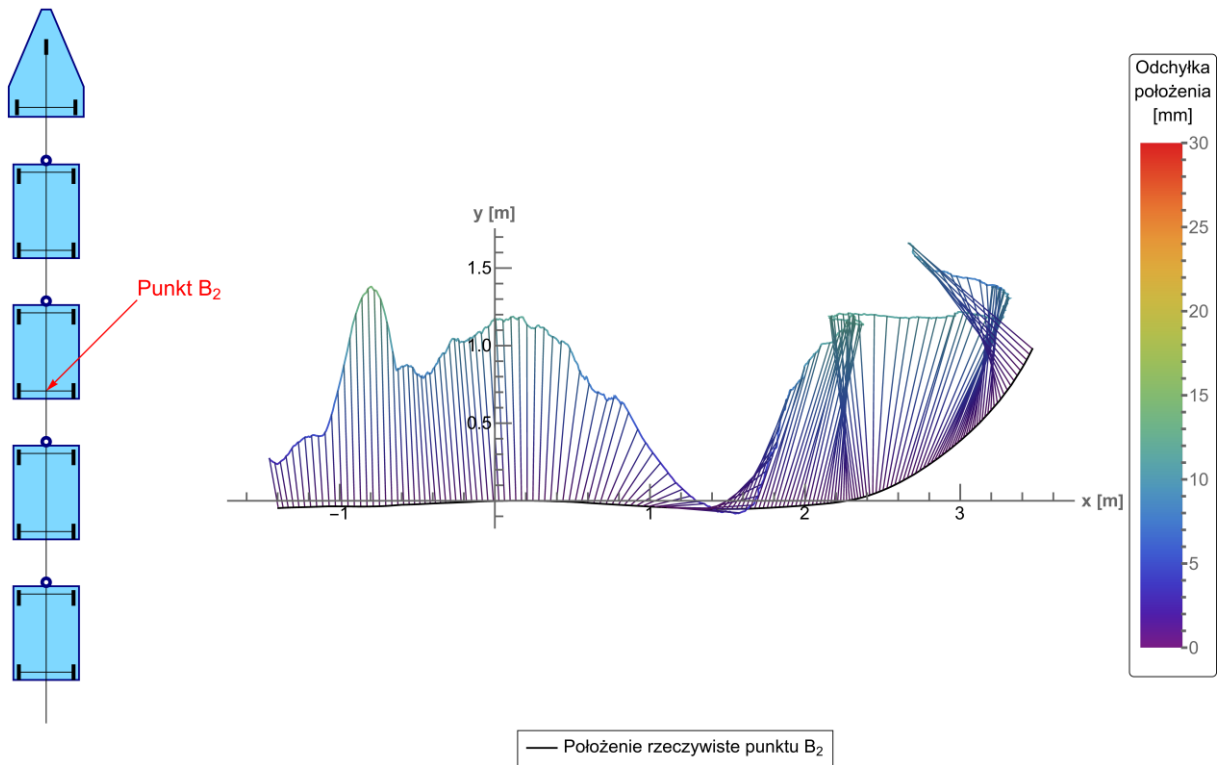
Na rysunkach 7.43, 7.44 i 7.45 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B_3 uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF, wraz z oznaczeniem odchyłki położenia. Dla tego punktu odnotowano większe wartości odchyłki, jednak mimo to trajektoria punktu B_3 pozostaje zbieżna dla wszystkich analizowanych modeli.



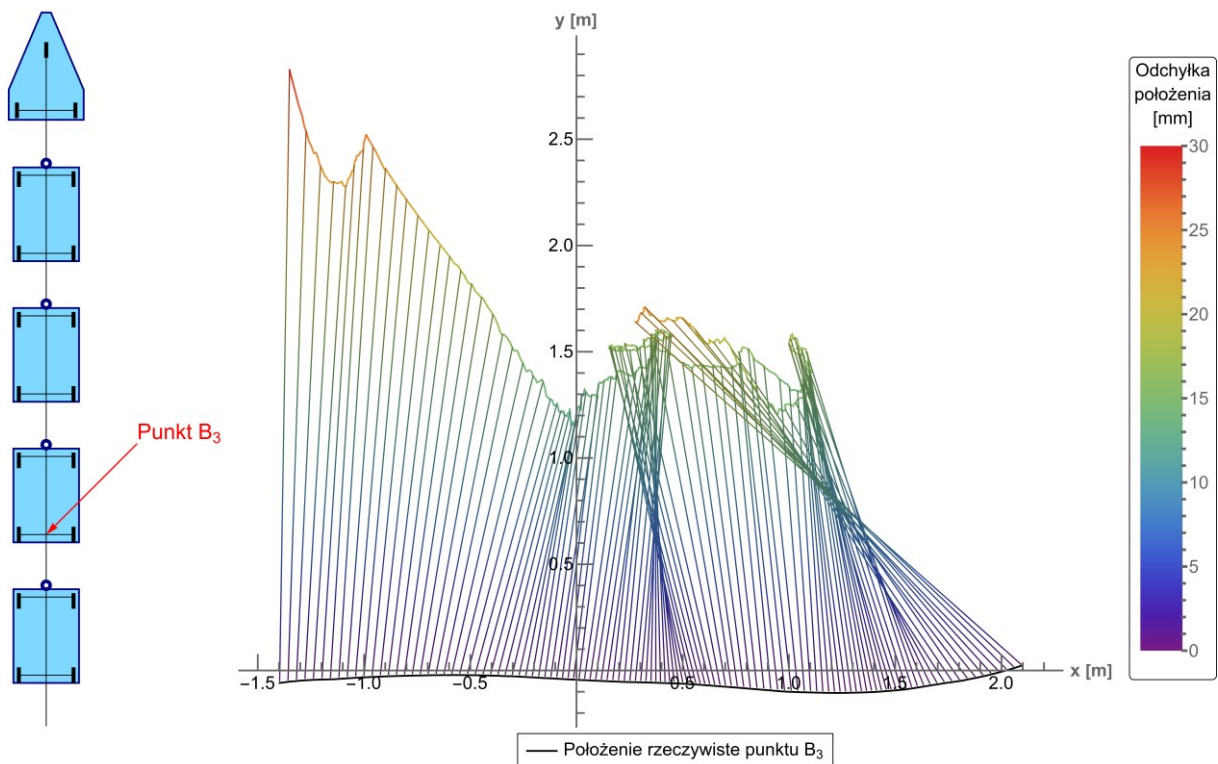
Rys. 7.40. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B₂ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



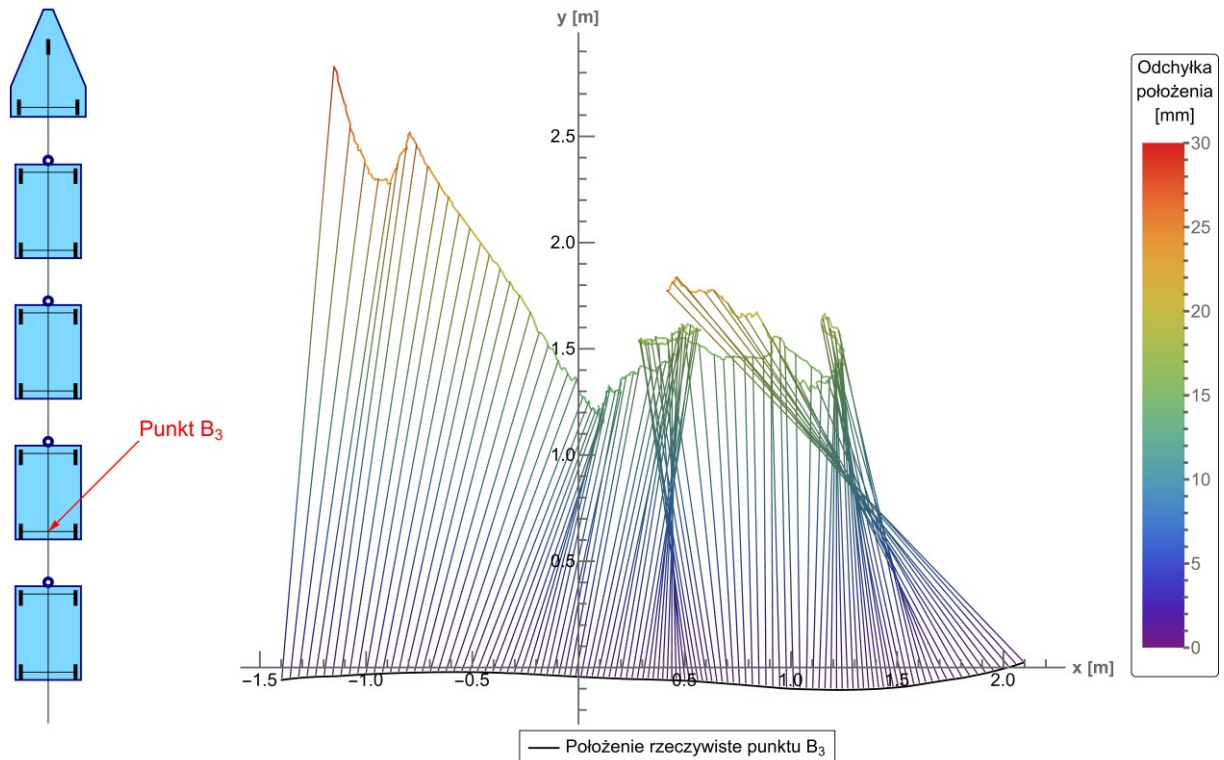
Rys. 7.41. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B₂ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



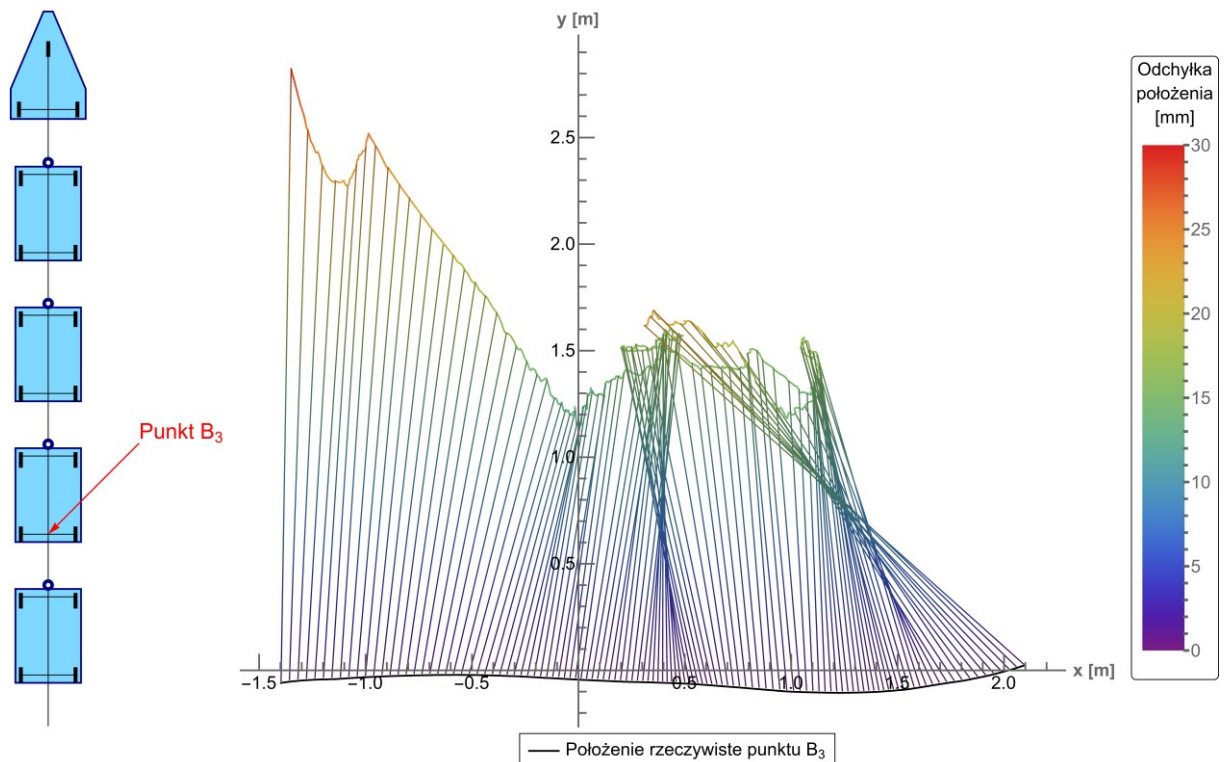
Rys. 7.42. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzeczne położenie punktu B₂ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.43. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B₃ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



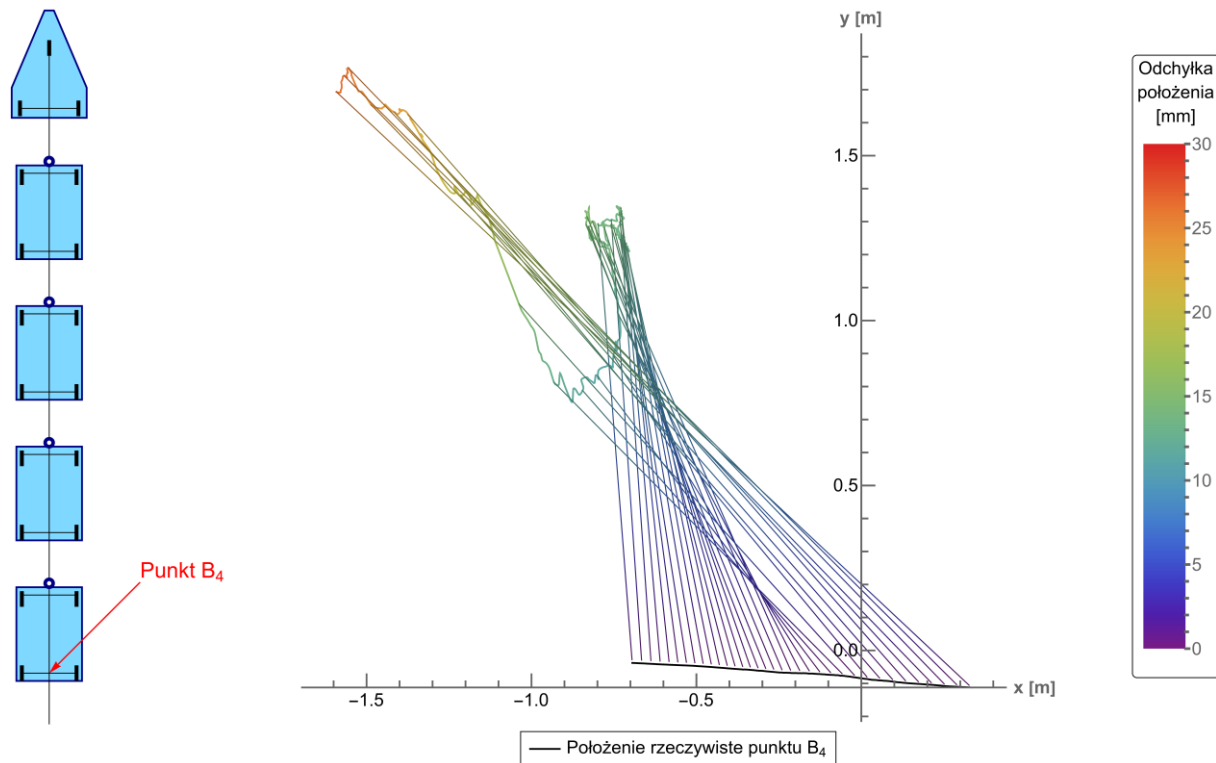
Rys. 7.44. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B₃ wraz z oznaczoną odchyłką położenia



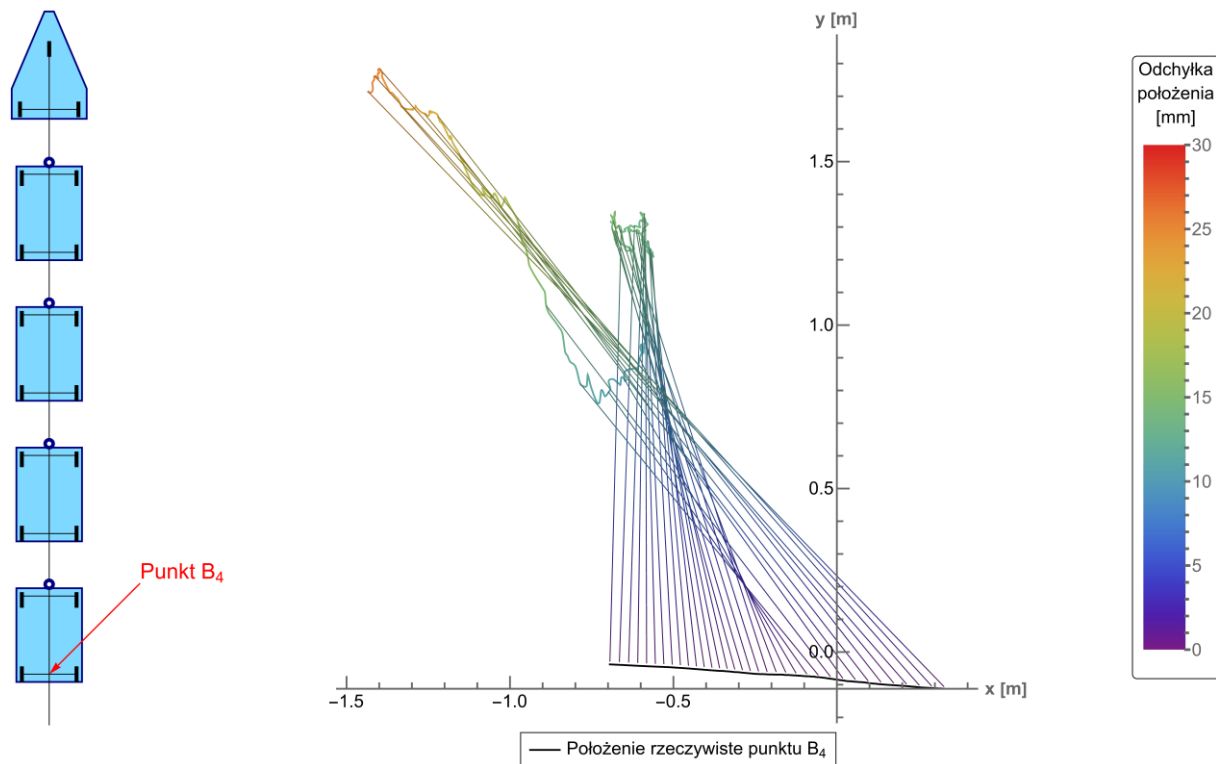
Rys. 7.45. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzecznego położenie punktu B₃ wraz z oznaczoną odchyłką położenia

Na rysunkach 7.46, 7.47 oraz 7.48 przedstawiono rzeczywiste oraz przeskalowane położenia punktu B₄ uzyskane w symulacji odpowiednio: KM, DM-NC oraz DM-LF,

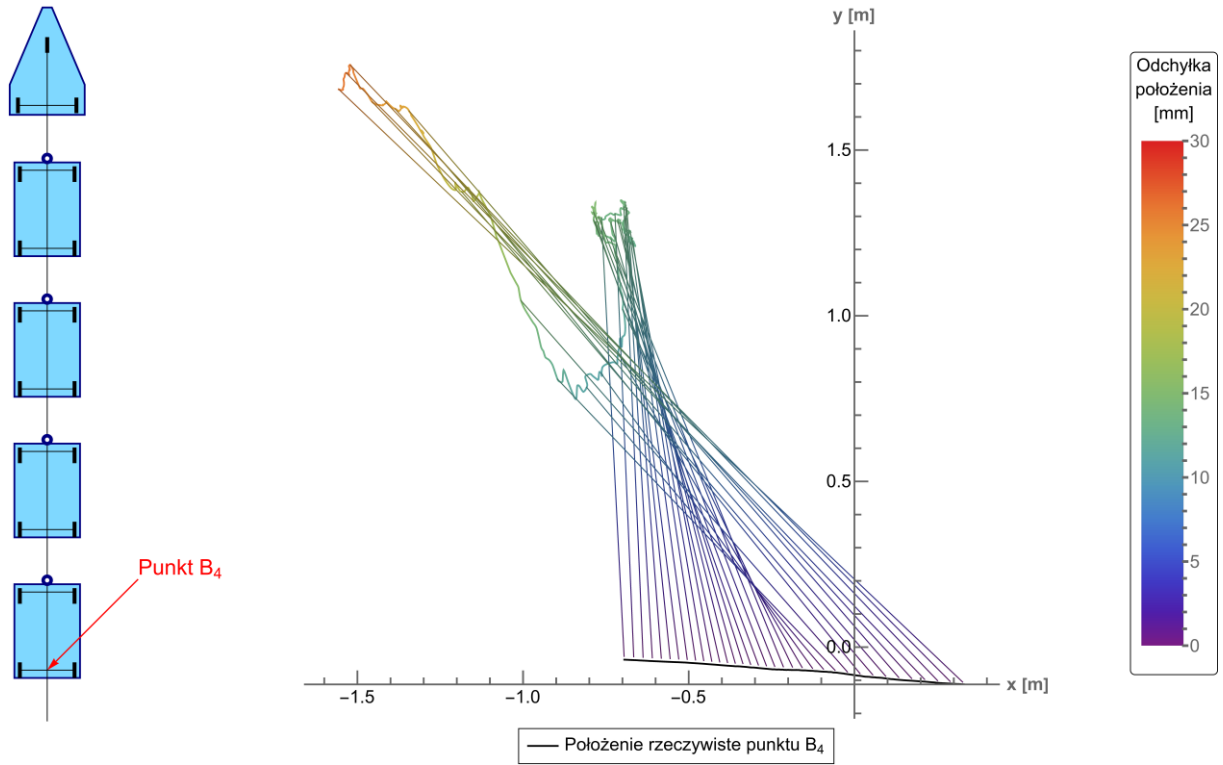
wraz z oznaczeniem odchyłki położenia. Pomimo krótkiego czasu rejestracji pomiaru, uzyskana trajektoria punktu B_4 wykazuje zbieżność we wszystkich analizowanych modelach.



Rys. 7.46. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu kinematycznego położenie punktu B_4 wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.47. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z więzami nieholonomicznymi położenie punktu B_4 wraz z oznaczoną odchyłką położenia



Rys. 7.48. Rzeczywiste oraz uzyskane z symulacji modelu dynamicznego z uwzględnieniem tarcia poprzeczne położenie punktu B_4 wraz z oznaczoną odchyłką położenia

7.2.4 Podsumowanie badań eksperymentalnych

W niniejszym podrozdziale przedstawiono podsumowanie badań eksperymentalnych mających na celu ocenę dokładności modeli symulacyjnych odwzorowujących ruch holowanych przyczep. Analizie poddano odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i oraz odchyłki położenia punktu referencyjnego B_i dla każdej z przyczep ($i = 1, 2, 3, 4$), stosując następujące wskaźniki błędów:

- pierwiastek błędów średniokwadratowego (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T_{S2} - T_{S1}} \int_{T_{S1}}^{T_{S2}} [\varepsilon(t)]^2 dt}, \quad (7.1)$$

- średni błąd bezwzględny (MAE):

$$MAE = \frac{1}{T_{S2} - T_{S1}} \int_{T_{S1}}^{T_{S2}} |\varepsilon(t)| dt, \quad (7.2)$$

- maksymalny błąd (MAX):

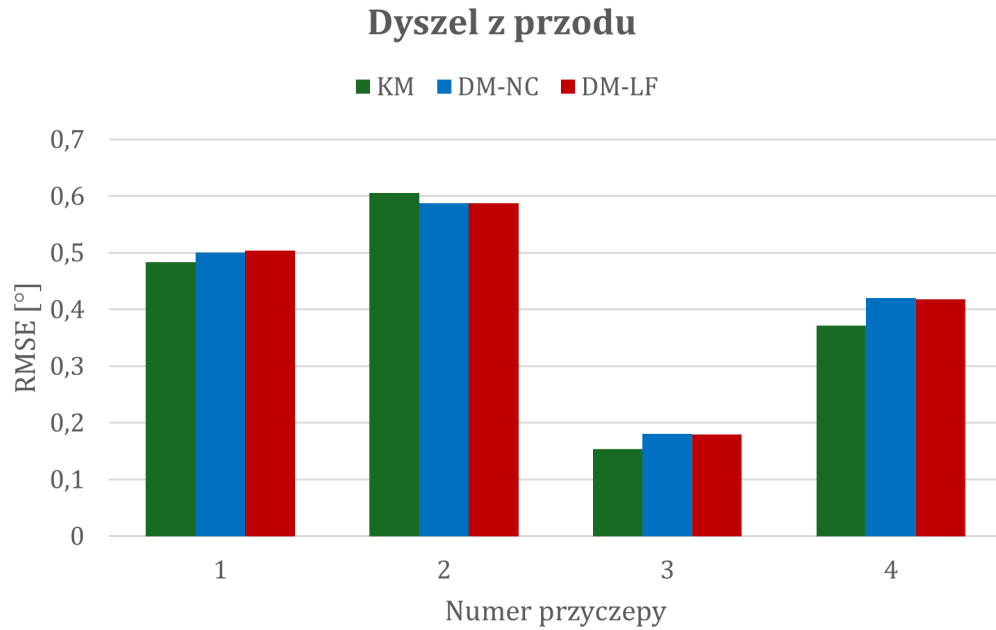
$$MAX = \max_{t \in [T_{S1}, T_{S2}]} |\varepsilon(t)|, \quad (7.3)$$

gdzie: $\varepsilon(t)$ jest funkcją odchyłki błędów, a T_{S1} i T_{S2} to początek i koniec analizowanego przedziału czasowego. Zestawienie tych wskaźników błędów dla odchyłek kątów orientacji

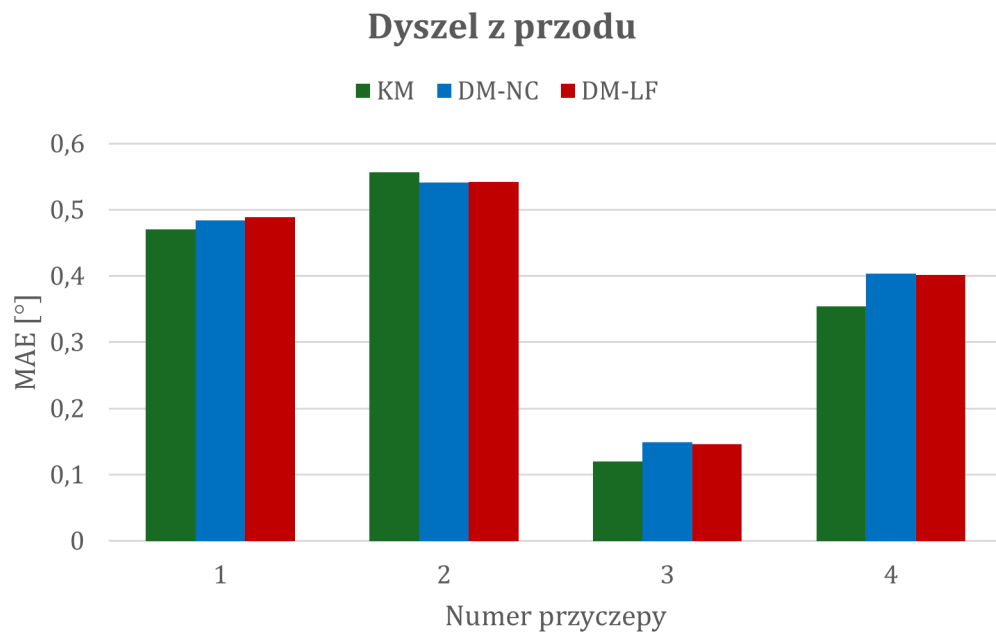
przyczep przedstawiono w tabeli 7.2. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE), średni błąd bezwzględny (MAE), maksymalny błąd (MAX) dla odchyłek kątów orientacji przyczep przedstawiono w formie graficznej na rysunkach: 7.49, 7.50, 7.51 dla układu dyszla z przodu i na rysunkach 7.52, 7.53, 7.54 dla układu odwróconego dyszla.

Tab. 7.2. Zestawienie wskaźników błędu (RMSE, MAE, MAX) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i ($i = 1,2,3,4$) w różnych modelach symulacyjnych

Układ skrętny przyczep	Numer przyczepy	Model symulacyjny	RMSE [°]	MAE [°]	MAX [°]
Dyszel z przodu	1	KM	0,483	0,470	0,81
		DM-NC	0,500	0,484	0,87
		DM-LF	0,504	0,489	0,872
	2	KM	0,605	0,557	0,835
		DM-NC	0,587	0,541	0,82
		DM-LF	0,587	0,542	0,815
	3	KM	0,153	0,12	0,319
		DM-NC	0,181	0,149	0,36
		DM-LF	0,179	0,146	0,356
	4	KM	0,371	0,354	0,471
		DM-NC	0,420	0,404	0,531
		DM-LF	0,418	0,402	0,529
Odwrócony dyszel	1	KM	0,268	0,235	0,648
		DM-NC	0,289	0,261	0,651
		DM-LF	0,271	0,238	0,647
	2	KM	0,628	0,609	0,813
		DM-NC	0,594	0,577	0,775
		DM-LF	0,626	0,608	0,802
	3	KM	0,321	0,25	0,717
		DM-NC	0,323	0,253	0,718
		DM-LF	0,318	0,246	0,714
	4	KM	0,151	0,132	0,233
		DM-NC	0,164	0,144	0,248
		DM-LF	0,144	0,126	0,225



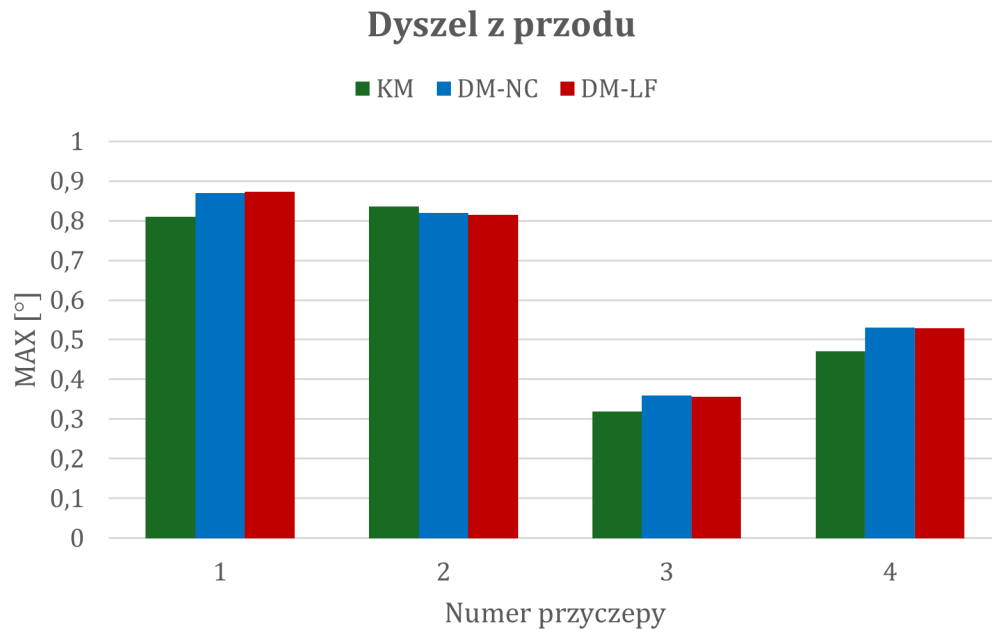
Rys. 7.49. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i z układem dyszla z przodu dla $i = 1, 2, 3, 4$



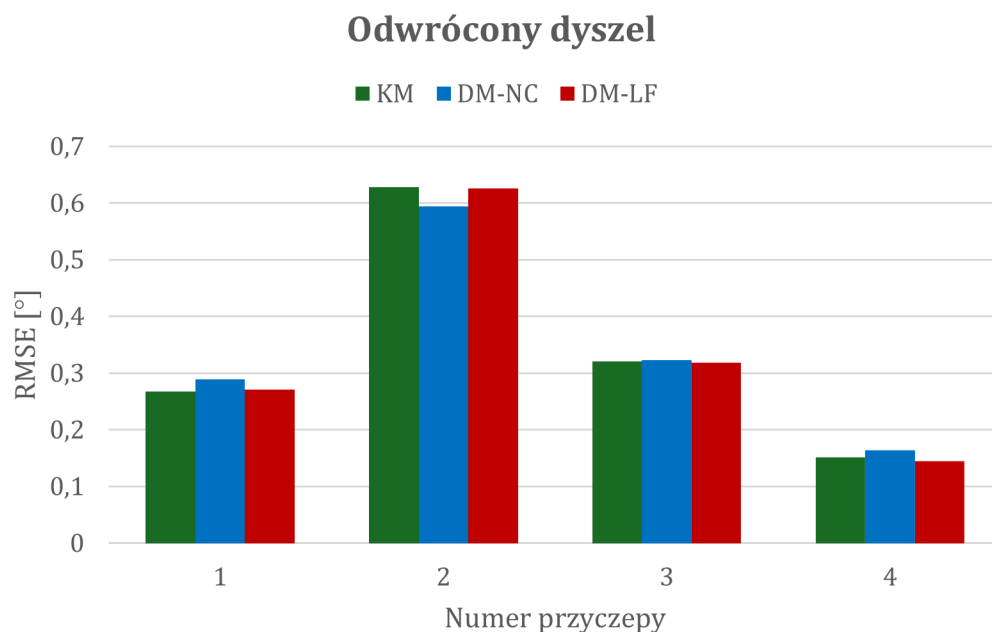
Rys. 7.50. Średni błąd bezwzględny (MAE) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i z układem dyszla z przodu dla $i = 1, 2, 3, 4$

Na podstawie wyznaczonych wskaźników można stwierdzić, że dla układu dyszla z przodu odchyłki kąta orientacji przyczepy są mniejsze. Dla przejazdu pociągu z układem skrętnym przyczep dyszla z przodu, najmniejsze odchyłki kąta orientacji uzyskano dla trzeciej przyczepy. Dla przyczep: 1, 3 i 4 najmniejszą odchyłkę kąta orientacji uzyskano dla modelu kinematycznego. Dla przyczepy drugiej ta odchyłka okazała się największa.

W układzie z dyszlem z przodu najmniejszy błąd maksymalny odchyłki kąta orientacji uzyskano dla trzeciej przyczepy. Największą odchyłkę dla modelu kinematycznego zaobserwowano dla przyczepy drugiej. Dla pozostałych modeli, największy błąd wystąpił w przyczepie pierwszej.

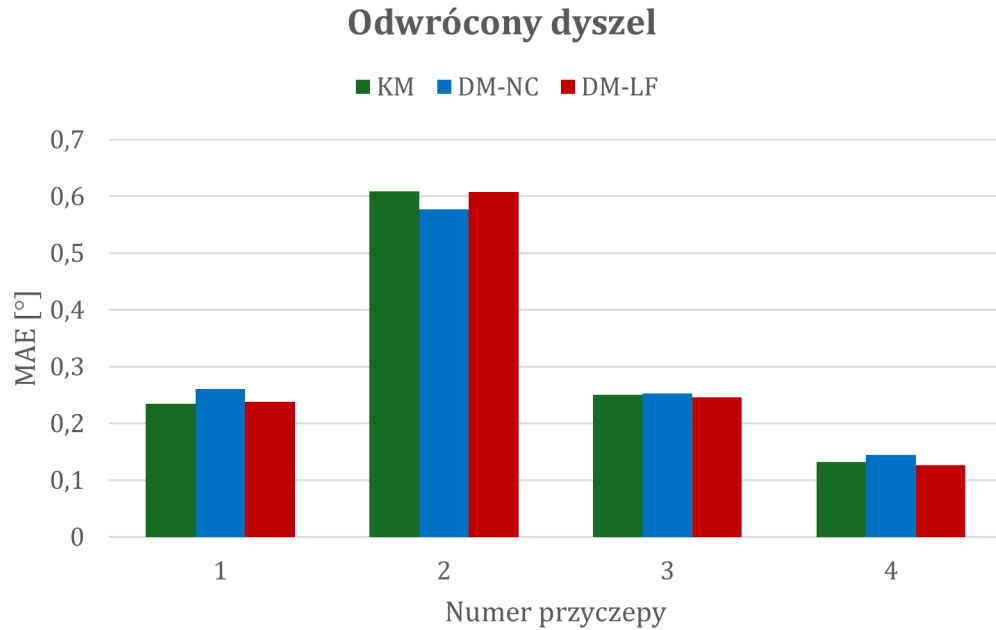


Rys. 7.51. Maksymalny błąd (MAX) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i z układem dyszla z przodu dla $i = 1, 2, 3, 4$

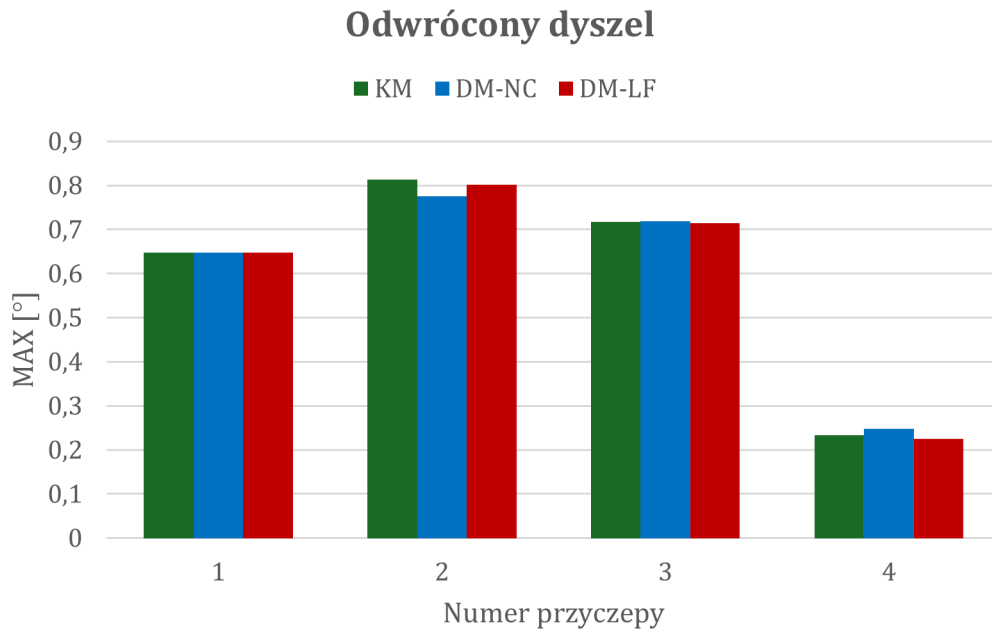


Rys. 7.52. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i z układem odwróconego dyszla dla $i = 1, 2, 3, 4$

W przypadku układu z odwróconym dyszlem uzyskane odchyłki okazały się największe na przyczepie drugiej. Najmniejsze dla przyczepy czwartej, następnie pierwszej.



Rys. 7.53. Średni błąd bezwzględny (MAE) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i z układem odwróconego dyszla dla $i = 1, 2, 3, 4$



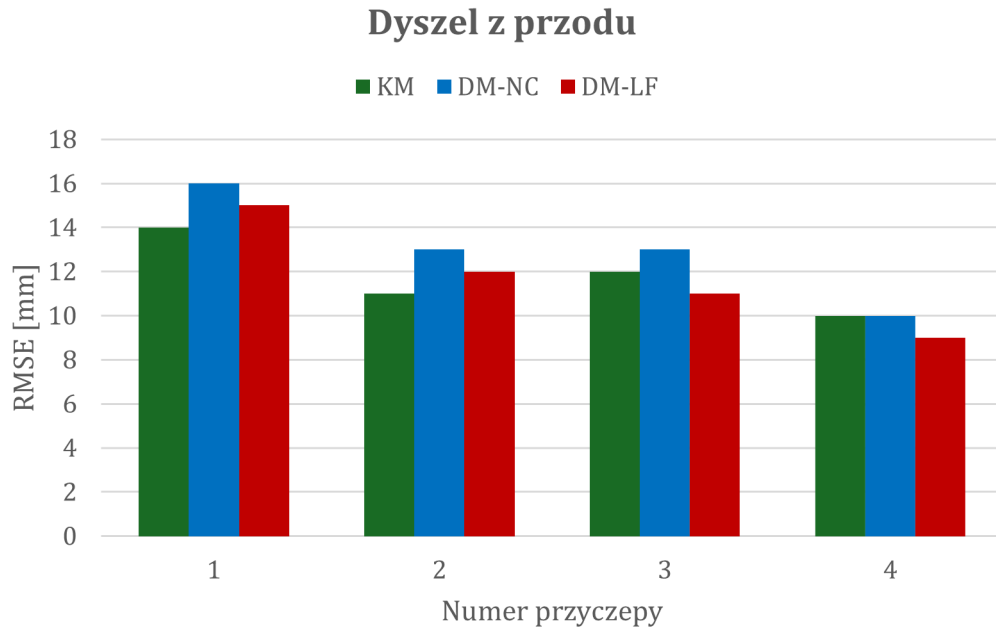
Rys. 7.54. Maksymalny błąd (MAX) dla odchyłki kąta orientacji przyczepy β_i z układem odwróconego dyszla dla $i = 1, 2, 3, 4$

Zestawienie wskaźników błędu dla odchyłek kątów orientacji przyczep przedstawiono w tabeli 7.3. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE), średni błąd bezwzględny (MAE), maksymalny błąd (MAX) dla odchyłek położenia punktów

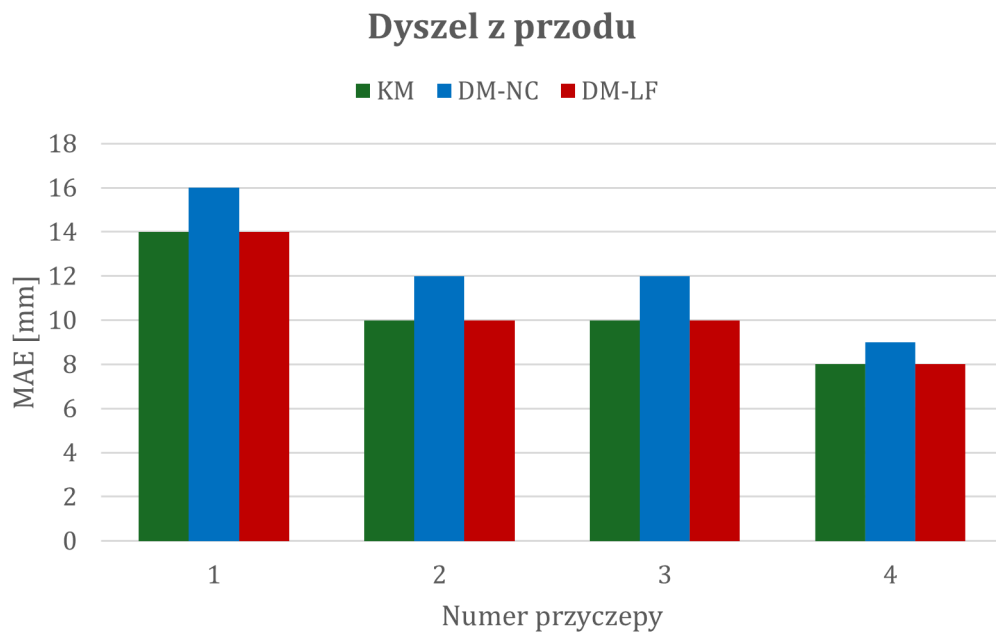
środku tylnej osi przyczep przedstawiono w formie graficznej na rysunkach: 7.55, 7.56, 7.57 dla układu dyszla z przodu i na rysunkach: 7.58, 7.59, 7.60 dla układu odwróconego dyszla.

Tab. 7.3. Zestawienie wskaźników błędu (RMSE, MAE, MAX) dla odchyłki położenia punktów B_i ($i = 1,2,3,4$) w różnych modelach symulacyjnych

Układ skrętny przyczep	Numer przyczepy	Model symulacyjny	RMSE [mm]	MAE [mm]	MAX [mm]
Dyszal z przodu	1	KM	14	14	23
		DM-NC	16	16	26
		DM-LF	15	14	25
	2	KM	11	10	21
		DM-NC	13	12	24
		DM-LF	12	10	24
	3	KM	12	10	21
		DM-NC	13	12	20
		DM-LF	11	10	20
	4	KM	10	8	19
		DM-NC	10	9	16
		DM-LF	9	8	16
Odwrócony dyszel	1	KM	5	5	13
		DM-NC	6	5	13
		DM-LF	5	5	13
	2	KM	9	9	14
		DM-NC	11	10	14
		DM-LF	9	9	14
	3	KM	17	17	29
		DM-NC	17	17	29
		DM-LF	17	17	29
	4	KM	16	16	26
		DM-NC	16	15	25
		DM-LF	16	16	26

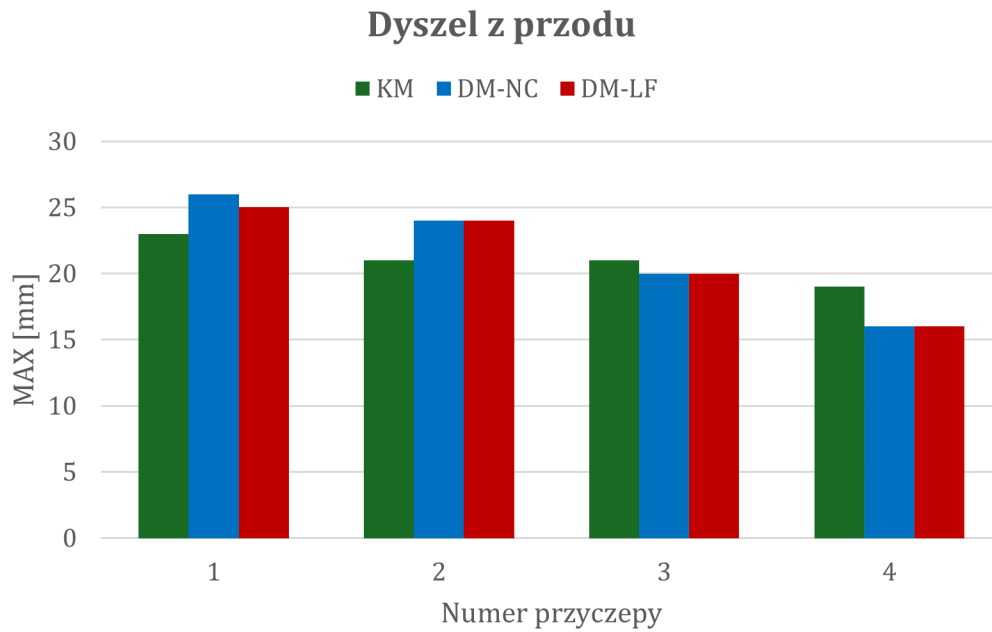


Rys. 7.55. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) dla odchyłki położenia punktu B_i z układem dyszla z przodu dla $i = 1, 2, 3, 4$

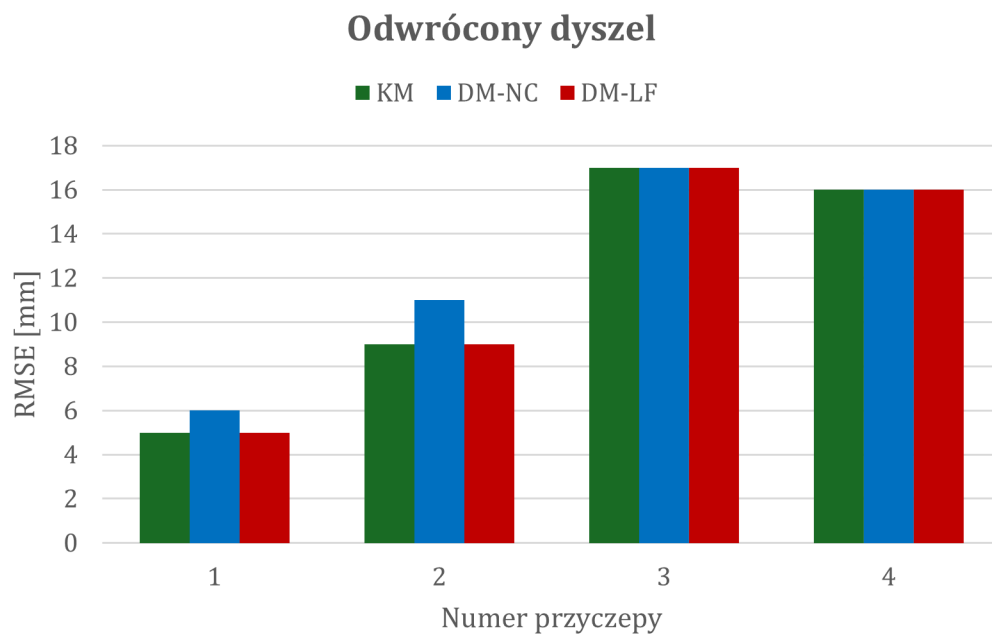


Rys. 7.56. Średni błąd bezwzględny (MAE) dla odchyłki położenia punktu B_i z układem dyszla z przodu dla $i = 1, 2, 3, 4$

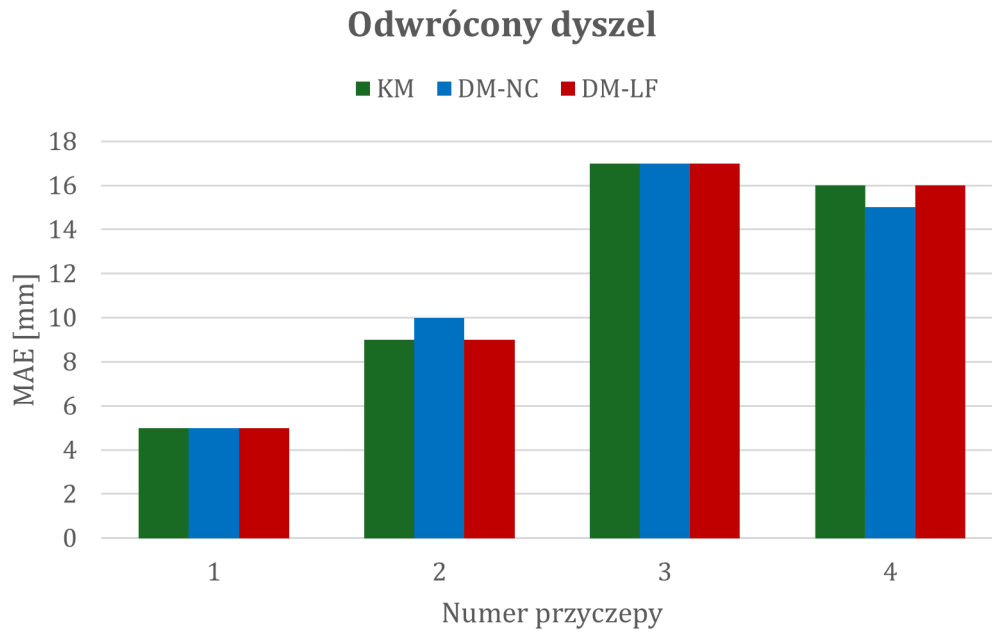
Dla pociągu logistycznego z przyczepami z układem dyszla z przodu, najmniejszą odchyłkę położenia punktów B_i uzyskano dla przyczepy czwartej, a największą dla przyczepy pierwszej. W przypadku odwróconego dyszla, największą odchyłkę uzyskano dla przyczepy czwartej, a najmniejszą dla przyczepy pierwszej.



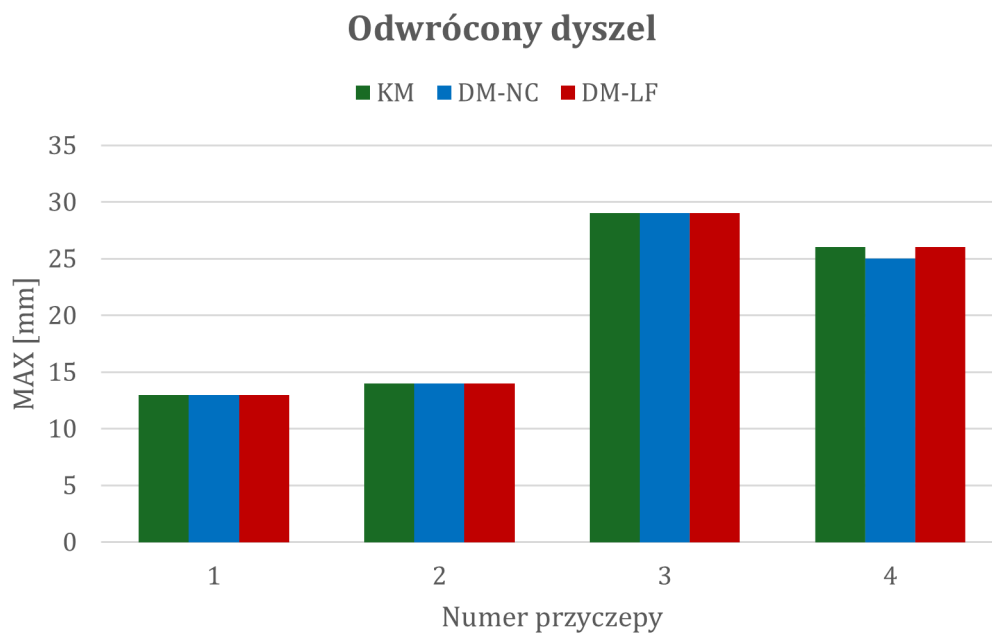
Rys. 7.57. Maksymalny błąd (MAX) dla odchyłki położenia punktu B_i z układem dyszla z przodu dla $i = 1, 2, 3, 4$



Rys. 7.58. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) dla odchyłki położenia punktu B_i z układem odwróconego dyszla dla $i = 1, 2, 3, 4$



Rys. 7.59. Średni błąd bezwzględny (MAE) dla odchyłki położenia punktu B_i z układem odwróconego dyszla dla $i = 1, 2, 3, 4$



Rys. 7.60. Maksymalny błąd (MAX) dla odchyłki położenia punktu B_i z układem odwróconego dyszla dla $i = 1, 2, 3, 4$

Podsumowując przeprowadzoną analizę wyników badań eksperymentalnych oraz ich odwzorowania w środowisku symulacyjnym, można stwierdzić, że opracowane modele wykazują wzajemną zbieżność. Wyjątkiem jest model DM-NC, dla którego zauważalne są większe odchyłki względem pozostałych modeli. Wszystko wskazuje jednak na to, że jest to rezultatem odmiennej metody odwzorowania przejazdu w symulacji w porównaniu

z innymi modelami. Różnica ta objawia się przede wszystkim większym udziałem odchyłki w kierunku wzdłużnym. Mimo to, wartości odchyłki kątów orientacji uzyskane w modelu DM-NC są zbliżone do tych otrzymanych w pozostałych modelach.

Zbieżność wyników pomiędzy modelami potwierdza ich wiarygodność i sugeruje, że głównym źródłem obserwowanych odchyłek nie jest jakość opracowanych modeli, lecz niedokładności związane z pomiarem oraz dokładnością odtworzenia przejazdu w środowisku symulacyjnym. Na wartość odchyłek mogły mieć wpływ m.in.:

- dokładność wyznaczenia pozycji markerów,
- precyzja kalibracji jednostek pomiarowych przed rozpoczęciem badań,
- dokładność ustawienia holownika, przyczep i ich kół skrętnych w pozycji początkowej,
- ewentualne przemieszczenia betonowych bloczków, do których przymocowano markery.

8. Podsumowanie, wnioski i kierunki dalszych badań

8.1 Podsumowanie

W rozprawie sformułowano trzy główne cele badawcze, obejmujące opracowanie modeli matematycznych pociągu logistycznego, zaprojektowanie algorytmu sterowania bazującego na ograniczonym zakresie informacji sensorycznej oraz stworzenie podstaw do wdrożenia automatycznego sterowania w środowisku przemysłowym. Cele te miały charakter zarówno teoretyczny, jak i aplikacyjny.

Na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych i eksperymentalnych można jednoznacznie stwierdzić, że wszystkie założone cele zostały zrealizowane:

- I. **Model matematyczny** – Opracowano wiarygodne modele matematyczne pociągu logistycznego, w tym dynamiczne modele uwzględniające poślizgi i dynamikę kół. Ich poprawność została potwierdzona wynikami badań eksperymentalnych, w których odchyłki orientacji i położenia przyczep były niewielkie.
- II. **Algorytm sterowania** – Zaprojektowano skuteczny algorytm EANN umożliwiający bezkolizyjny przejazd w zamkniętym korytarzu transportowym, przy wykorzystaniu wyłącznie danych z czujnika LiDAR zamontowanego na holowniku. Algorytm ten wykazał się dużą skutecznością i odpornością na zmienność warunków początkowych.
- III. **Utylitarny aspekt pracy** – Opracowane rozwiązanie stanowi podstawę do zastąpienia manualnego sterowania pociągiem logistycznym automatycznym systemem sterowania, co może znaleźć zastosowanie w rzeczywistych układach transportu wewnętrznego.

Osiągnięte rezultaty nie tylko potwierdzają poprawność zaproponowanych rozwiązań, lecz także otwierają możliwości dalszego rozwoju w kierunku implementacji systemów sterowania w rzeczywistych warunkach przemysłowych.

8.2 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych oraz eksperymentalnych sformułowano następujące wnioski:

- I. Opracowane modele matematyczne pociągu logistycznego cechują się wysoką zgodnością z rzeczywistym zachowaniem systemu. Potwierdzają to wyniki walidacji eksperymentalnej, w której maksymalne odchyłki kątów orientacji przyczep nie przekroczyły 1° , a odchylenie położenia punktu odniesienia

pozostało poniżej 30 mm. Świadczy to o dużej wiarygodności modeli w odwzorowaniu manewrów logistycznych w środowisku przemysłowym.

- II. Zastosowanie neuroewolucyjnego algorytmu sterowania EANN (ang. *Evolutionary Algorithm–Neural Network*) umożliwiło wytrenowanie sztucznej sieci neuronowej wieloczłonowego pojazdu przegubowego do samodzielnego, bezkolizyjnego i skutecznego poruszania się w złożonym środowisku symulacyjnym. Opracowany system spełnia wymagania w zakresie płynności trajektorii oraz prędkości przejazdu, przy zachowaniu prostoty implementacyjnej. Efektywność sterowania została osiągnięta przy wykorzystaniu pomiaru odległości wyłącznie dla jednostki prowadzącej (ciągnika), co znacząco upraszcza układ sensoryczny.
- III. Zaimplementowany algorytm sterowania EANN wykazuje odporność na zmienność warunków początkowych. Dzięki losowej inicjalizacji pozycji i orientacji pojazdu w fazie uczenia, sieć neuronowa opanowała ogólne zasady manewrowania, a nie jedynie zapamiętała konkretną trajektorię. W rezultacie uzyskano adaptacyjne rozwiązanie sterujące, zdolne do działania w zmiennych warunkach otoczenia.
- IV. Algorytm sterowania EANN został opracowany w taki sposób, aby odwzorowywał rzeczywiste warunki działania pojazdu, m.in. poprzez symulację pomiaru odległości realizowanego przez ciągnik wyposażonego w czujnik typu LiDAR. Takie podejście sprawia, że opracowany system sterowania nadaje się do implementacji na rzeczywistym obiekcie.
- V. Z perspektywy implementacyjnej algorytm EANN może być stosowany zarówno do treningu bezpośrednio na rzeczywistym obiekcie, jak i do wcześniejszego wytrenowania sieci neuronowej w środowisku symulacyjnym, a następnie przeniesienia jej na pojazd rzeczywisty. Drugie z tych podejść wydaje się szczególnie korzystne, ponieważ umożliwia równoległe uczenie wielu konfiguracji w ramach jednej generacji oraz znacząco skraca czas procesu uczenia w porównaniu do warunków rzeczywistych, gdzie pojedynczy przejazd trwa dłużej i wiąże się z ryzykiem kolizji oraz koniecznością każdorazowego przywracania pojazdu do pozycji początkowej.
- VI. Algorytm EANN może być również wykorzystany do planowania trajektorii dla wieloczłonowych pojazdów przegubowych. W procesie uczenia możliwe jest wyznaczenie korzystnego przebiegu przejazdu, który może następnie posłużyć

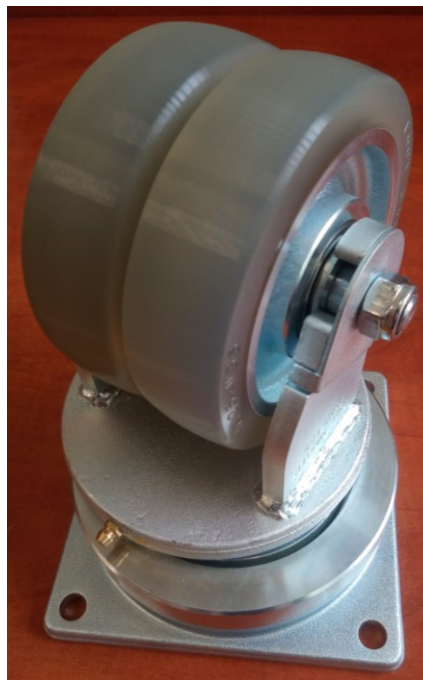
jako trajektoria referencyjna do odtworzenia przy użyciu klasycznych algorytmów śledzenia trajektorii.

- VII. Opracowane algorytmy śledzenia trajektorii spełniły swoje zadanie, zapewniając skuteczne odwzorowanie zadanej trajektorii przez ciągnik holujący przyczepy w środowisku symulacyjnym dla różnych wariantów opracowanych modeli, z wyjątkiem modelu DM-EXT. W tym przypadku zastosowany układ sterowania nie jest przystosowany do implementacji ani na rzeczywistym obiekcie, ani w modelu dynamicznym uwzględniającym poślizg wzdłużny, co ogranicza jego praktyczną przydatność.
- VIII. Zastosowanie układu skrętnego przyczep w konfiguracji podwójnego Ackermanna (DASS) pozwala uzyskać wyraźnie większą powtarzalność toru ruchu poszczególnych przyczep względem siebie, w porównaniu z układem ze stałym dyszlem (FDSS). Wyższa powtarzalność trajektorii przekłada się na mniejszą powierzchnię wymaganą do przejazdu pociągu logistycznego, co ma szczególne znaczenie w ograniczonej przestrzeni hal produkcyjnych i magazynowych. Dodatkowo, rozwiązanie to znacząco ułatwia ręczne prowadzenie takiego zestawu, zwłaszcza w przypadku większej liczby przyczep, poprawiając ogólną przewidywalność i stabilność toru ruchu.
- IX. Uwzględnienie dynamiki kół swobodnie skrętnych oraz poślizgu poprzecznego znacząco wpływa na dokładność odwzorowania trajektorii, szczególnie w warunkach wymagających manewrów o dużej precyzji. Ich pominięcie może prowadzić do istotnych rozbieżności pomiędzy wynikami różnych modeli symulacyjnych, co potwierdzają przeprowadzone analizy porównawcze.
- X. Zaproponowana metoda wyznaczania macierzy transformacji prędkości okazała się wydajniejsza od metody konwencjonalnej w przypadku zestawu ciągnika typu DDT z n przyczepami typu FDSS, dla $n = 1, \dots, 8$ – czyli w zakresie odpowiadającym najczęściej spotykanej liczbie przyczep w praktycznych zastosowaniach pociągów logistycznych.

8.3 Kierunki dalszych badań

Podczas pracy nad przygotowaniem rozprawy oraz opracowaniem wyników badań dostrzeżono kilka możliwych kierunków dalszych badań związanych z modelowaniem dynamicznym pociągów logistycznych i ich sterowaniem. Dotyczą one:

- I. Zaprojektowania skutecznego algorytmu sterowania umożliwiającego bezpieczne i stabilne cofanie wielocłonowego pojazdu przegubowego w korytarzach transportowych. Z uwagi na propagację błędów orientacji, nieliniowy charakter dynamiki ruchu wstecznego oraz odwrócenie kierunku działania, co w przypadku cofania oznacza, że ciągnik pcha przyczepy zamiast je ciągnąć, zagadnienie to wymaga dedykowanego podejścia.
- II. Implementacji algorytmu sterowania EANN na rzeczywistym obiekcie. Pozwoli to ocenić jego efektywność w warunkach rzeczywistych, uwzględniających opóźnienia, ograniczenia sensoryczne oraz możliwe niedokładności pomiarowe, a tym samym potwierdzić praktyczną użyteczność opracowanego rozwiązania.
- III. Zastosowania zoptymalizowanych kół swobodnie skrętnych, które mogą poprawić właściwości jezdne i zwiększyć powtarzalność trajektorii, szczególnie podczas zawracania, gdzie ich wpływ jest najbardziej zauważalny. Przykład takiego koła przedstawiono na rysunku 8.1.
- IV. Badań eksperymentalnych dotyczących wyznaczania właściwości poślizgowych kół przemysłowych, zarówno w kierunku poprzecznym, jak i wzdłużnym. Celem tych badań byłoby zwiększenie precyzji odwzorowania oddziaływania koła z podłożem i dalsze doskonalenie modeli dynamicznych.



Rys. 8.1. Koło swobodnie skrętne dostosowujące się do kierunku jazdy

Bibliografia

- [1] Satoh I., *A formal approach for milk-run transport logistics*, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, t. E91.A, nr 11, s. 3261–3268, 2008, doi:10.1093/ietfec/e91-a.11.3261.
- [2] Wang S., Li C., Lim A., *ROPHS: Determine Real-Time status of a Multi-Carriage logistics train at airport*, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, t. 23, nr 7, s. 6347–6356, 2022, doi:10.1109/tits.2021.3055838.
- [3] Feng J., Yang B., Pei X., Zhou P., *Research on path planning and control of driverless logistics train*, w: *Proceedings of the 2021 5th CAA International Conference on Vehicular Control and Intelligence (CVCI)*, IEEE, 2021, doi:10.1109/cvci54083.2021.9661132.
- [4] Strnad D., Fedorko G., Dribnak J., *Implementation of the logistics train in the intralogistics system: A case study*, Open Engineering, t. 11, nr 1, s. 896–906, 2021, doi:10.1515/eng-2021-0091.
- [5] Kluska K., *Yamazumi analysis in milk-run intralogistics systems using simulation tools*, w: *Intelligent Systems in Production Engineering and Maintenance. ISPEM 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*, (red.: Burduk A., Chlebus E., Nowakowski T., Tubis A.), Cham: Springer, t. 835, 2019, s. 509–519, doi:10.1007/978-3-319-97490-3_49.
- [6] Wuddi P. M., Fottner J., *Key figure systems: Backbone of intelligent solutions in future logistics*, w: *Proceedings of the 2020 International Conference on Big Data in Management*, ACM, 2020, s. 125–129, doi:10.1145/3437075.3437090.
- [7] Meyer A., *Milk Run design: Definitions, concepts and solution approaches*. Karlsruhe: KIT Scientific Publishing, 2017, ISBN: 978-3-7315-0566-2, doi:10.5445/ksp/1000057833.
- [8] Lieb C., Klenk E., Galka S., Keuntje C., *Einsatz von Routenzugsystemen zur Produktionsversorgung – Studie zu Planung, Steuerung und Betrieb*. Garching b. München: Lehrstuhl für Fördertechnik Materialfluss Logistik, Technische Universität München, 2017, ISBN: 978-3-941702-79-0.
- [9] Osieczko-Potoczna K., *Pociągi logistyczne i AGV – definicja oraz charakterystyka*, Zarządzanie Innowacyjne w Gospodarce i Biznesie, t. 2, nr 39, s. 121–134, 2024, doi:10.25312/2391-5129.39/2024_07kopt.
- [10] Samaniego R., Rodríguez R., Vázquez F., López J., *Efficient path planing for articulated vehicles in cluttered environments*, Sensors, t. 20, nr 23, s. 1–25, 2020, doi:10.3390/s20236821.
- [11] Paszkowiak W., Bartkowiak T., Pelic M., *Kinematic model of a logistic train with a double Ackermann steering system*, International Journal of Simulation Modelling, t. 20, nr 2, s. 243–254, 2021, doi:10.2507/ijssimm20-2-550.
- [12] Paszkowiak W., Bartkowiak T., Pelic M., *Kinematic model of multiple trailers on a tractor system for production logistics applications*, Archives of Mechanical Technology and Materials, t. 39, nr 1, s. 16–25, 2019, doi:10.2478/amt-2019-0004.
- [13] Oliveira R., Ljungqvist O., Lima P. F., Wahlberg B., *Optimization-based on-road path planning for articulated vehicles*, IFAC-PapersOnLine, t. 53, nr 2, s. 15572–15579, 2020, doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.2402.
- [14] Van De Wouw N., Ritzen P., Roebroek E., Jiang Z. P., Nijmeijer H., *Active trailer steering for robotic tractor-trailer combinations*, w: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2015, s. 4073–4079, doi:10.1109/cdc.2015.7402853.

- [15] Švestka P., Overmars M. H., *Probabilistic path planning*, w: *Robot Motion Planning and Control*, (red.: Laumond J.-P.), Berlin, Heidelberg: Springer, 1998, s. 255–304, doi:10.1007/bfb0036074.
- [16] Jiménez P., Thomas F., Torras C., *Collision detection algorithms for motion planning*, w: *Robot Motion Planning and Control*, (red.: Laumond J.-P.), Berlin, Heidelberg: Springer, 1998, s. 305–343, doi:10.1007/bfb0036075.
- [17] Liu J., Dong X., Wang J., Lu C., Zhao X., Wang X., *A novel EPT autonomous motion control framework for an off-axle hitching tractor-trailer system with drawbar*, IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, t. 6, nr 2, s. 376–385, 2021, doi:10.1109/tiv.2020.3033115.
- [18] Ljungqvist O., Bergman K., Axehill D., *Optimization-based motion planning for multi-steered articulated vehicles*, IFAC-PapersOnLine, t. 53, nr 2, s. 15580–15587, 2020, doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.2403.
- [19] Li B., Li L., Acarman T., Shao Z., Yue M., *Optimization-based maneuver planning for a tractor-trailer vehicle in a curvy tunnel: A weak reliance on sampling and search*, IEEE Robotics and Automation Letters, t. 7, nr 2, s. 706–713, 2022, doi:10.1109/lra.2021.3131693.
- [20] Prochowski L., Ziubiński M., Szwajkowski P., Gidlewski M., Pusty T., Stańczyk T. L., *Impact of control system model parameters on the obstacle avoidance by an autonomous car-trailer unit: Research results*, Energies, t. 14, nr 10, s. 2958, 2021, doi:10.3390/en14102958.
- [21] Jtec Industries (pociąg logistyczny), <https://www.jtecindustries.com/mother-daughter-tugger-cart-system/> (dostęp: 04.05.2023).
- [22] Wamech (pociąg logistyczny), <https://www.wamech.com/intralogistyka-pociagi-logistyczne-wamech/> (dostęp: 04.05.2023).
- [23] Gyulai D., Pfeiffer A., Sobottka T., Váncza J., *Milkrun vehicle routing approach for shop-floor logistics*, Procedia CIRP, t. 7, s. 127–132, 2013, doi:10.1016/j.procir.2013.05.022.
- [24] Paszkowiak W., Bartkowiak T., *Dynamics of logistic train*, w: *Applicable Solutions in Non-Linear Dynamical Systems*, (red.: Awrejcewicz J., Kaźmierczak M., Olejnik P.), Łódź: Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2019, s. 397–408.
- [25] Paszkowiak W., Bartkowiak T., *Dynamic model of a logistic train with different steering systems and tire models*, Latin American Journal of Solids and Structures, t. 18, nr 1, s. 1–27, 2021, doi:10.1590/1679-78256147.
- [26] López J., Zalama E., Gómez-García-Bermejo J., *A simulation and control framework for AGV based transport systems*, Simulation Modelling Practice and Theory, t. 116, s. 102430, 2022, doi:10.1016/j.simpat.2021.102430.
- [27] Silva I., Pendao C., Torres-Sospedra J., Moreira A., *TrackInFactory: A tight coupling particle filter for industrial vehicle tracking in indoor environments*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, t. 52, nr 7, s. 4151–4162, 2022, doi:10.1109/tsmc.2021.3091987.
- [28] Matzka J., Di Mascolo M., Furmans K., *Buffer sizing of a Heijunka Kanban system*, Journal of Intelligent Manufacturing, t. 23, nr 1, s. 49–60, 2012, doi:10.1007/s10845-009-0317-3.
- [29] Miqueo A., Gracia-Cadarso M., Torralba M., Gil-Vilda F., Antonio Yagüe-Fabra J., *Multi-model in-plant logistics using milkruns for flexible assembly systems under disturbances: An industry study case*, Machines, t. 11, nr 1, s. 66, 2023, doi:10.3390/machines11010066.
- [30] Baudin M., *Lean logistics : The nuts and bolts of delivering materials and goods*. New York: Productivity Press, 2005, ISBN: 9781563272967.

-
- [31] Facchini F., Mossa G., De Tullio S., *A milk-run routing and scheduling model for a smart manufacturing system*, IFAC-PapersOnLine, t. 55, nr 10, s. 1122–1127, 2022, doi:10.1016/j.ifacol.2022.09.540.
 - [32] Kluska K., Pawlewski P., *The use of simulation in the design of milk-run intralogistics systems*, IFAC-PapersOnLine, t. 51, nr 11, s. 1428–1433, 2018, doi:10.1016/j.ifacol.2018.08.314.
 - [33] Knez M., Gajšek B., *Implementation of in-plant milkrun system for material supply in lean automotive parts manufacturing*, w: *Pre-conference proceedings of the 12th International Conference on Logistics & Sustainable Transport 2015*, Celje: University of Maribor, Faculty of Logistics, 2015, s. 121–126.
 - [34] Lieb C., Prinz T., Gunthner W. A., Fottner J., *Modeling and simulation of generic handling operations in in-plant milk-run systems*, w: *Proceedings of 2019 8th International Conference on Industrial Technology and Management, ICITM 2019*, Cambridge: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019, s. 218–223, doi:10.1109/icitm.2019.8710720.
 - [35] Alnahhal M., Ridwan A., Noche B., *In-plant milk run decision problems*, w: *Proceedings of 2nd IEEE International Conference on Logistics Operations Management*, Rabat: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2014, s. 85–92, doi:10.1109/gol.2014.6887421.
 - [36] Amaral V. P., Ferreira A. C., Ramos B., *Internal logistics process Improvement using PDCA: A case study in the automotive sector*, Business Systems Research, t. 13, nr 3, s. 100–115, 2022, doi:10.2478/bsrj-2022-0027.
 - [37] Bursi F., Gebennini E., Grassi A., Rimini B., *On the modeling of line feeding systems with bin-kanban and logistic trains as polling systems*, w: *Proceedings of the XX Summer School "Francesco Turco"*, Napoli: Associazione Francesco Turco, 2015, s. 112–117.
 - [38] Altin I., Sipahioglu A., *Simulated annealing algorithm for in-plant milk-run system*, w: *Production Research. ICPR-Americas 2020*, (red.: Rossit D. A., Tohmé F., Mejía Delgadillo G.), Cham: Springer, t. 1407, 2021, s. 187–201, doi:10.1007/978-3-030-76307-7_15.
 - [39] Bocewicz G., Banaszak Z., Rudnik K., Witczak M., Smutnicki C., Wikarek J., *Milk-Run routing and scheduling subject to fuzzy pickup and delivery time constraints: An ordered fuzzy numbers approach*, w: *2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Glasgow, 2020, s. 1–10, doi:10.1109/fuzz48607.2020.9177733.
 - [40] Mao Z., Huang D., Fang K., Wang C., Lu D., *Milk-Run routing problem with progress-lane in the collection of automobile parts*, Annals of Operations Research, t. 291, nr 1–2, s. 657–684, 2020, doi:10.1007/s10479-019-03218-x.
 - [41] Mestiri S., Jamil J., Fottner J., *A flexible and generic simulation model for in-bound transport systems*, w: *Proceedings of the 20th International Conference on Modeling & Applied Simulation (MAS 2021)*, CAL-TEK, 2021, s. 85–90, doi:10.46354/i3m.2021.mas.011.
 - [42] Simić D., Svirčević V., Corchado E., Calvo-Rolle J. L., Simić S. D., Simić S., *Modelling material flow using the milk run and Kanban systems in the automotive industry*, Expert Systems, t. 38, nr 1, s. e12546, 2021, doi:10.1111/exsy.12546.
 - [43] Lei G., Zheng Y., *Research on cooperative trajectory planning algorithm based on tractor-trailer wheeled robot*, IEEE Access, t. 10, s. 64209–64221, 2021, doi:10.1109/access.2021.3062392.
 - [44] González-Hernández H. G., Reyes-Avendaño J. A., Mora-Salinas R. J., García-Rodríguez A., Castillo-García J. G., García-Toxqui G., *Automation of a tow-tractor for the autonomous delivery of materials in an industrial complex*, International Journal on Interactive Design and Manufacturing, t. 16, nr 2, s. 503–516, 2022, doi:10.1007/s12008-021-00819-4.
-

- [45] Zhao H., Chen W., Zhou S., Liu Z., Zheng F., Liu Y.-H., *Online trajectory planning for an industrial tractor towing multiple full trailers*, w: *Proceedings of the 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Paris: IEEE, 2020, s. 6089–6095, doi:10.1109/icra40945.2020.9196656.
- [46] Minguez J., Lamiroux F., Laumond J.-P., *Motion planning and obstacle avoidance*, w: *Springer Handbook of Robotics*, (red.: Siciliano B., Khatib O.), Berlin, Heidelberg: Springer, 2008, s. 827–852, doi:10.1007/978-3-540-30301-5_36.
- [47] Bereszyński K., Pelic M., Paszkowiak W., Pabiszczak S., Myszkowski A., Walas K., Czechmanowski G., Węgrzynowski J., Bartkowiak T., *Passive wheels – A new localization system for automated guided vehicles*, *Heliyon*, t. 10, nr 15, s. e34967, 2024, doi:10.1016/j.heliyon.2024.e34967.
- [48] Chung W., Park M., Yoo K., Roh J. Il, Choi J., *Backward-motion control of a mobile robot with n passive off-hooked trailers*, *Journal of Mechanical Science and Technology*, t. 25, nr 11, s. 2895–2905, 2011, doi:10.1007/s12206-011-0909-7.
- [49] Khalaji A. K., Moosavian S. A. A., *Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot*, *Journal of Mechanical Science and Technology*, t. 30, nr 1, s. 421–428, 2016, doi:10.1007/s12206-015-1246-z.
- [50] Jin X., Dai S. L., Liang J., *Adaptive constrained formation-tracking control for a tractor-trailer mobile robot team with multiple constraints*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 68, nr 3, s. 1700–1707, 2023, doi:10.1109/tac.2022.3151846.
- [51] Amezquita-Semprun K., Del Rosario J. M., Chen P. C. Y., *Dynamics model of a differential drive mobile robot towing an off-axle trailer*, *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, t. 7, nr 6, s. 583–589, 2018, doi:10.18178/ijmerr.7.6.583-589.
- [52] Yale, <https://www.yale.com/en-gb/emea/industries/auto-parts-distribution/> (dostęp: 04.05.2023).
- [53] Toyota Material Handling Systems, <https://www.atlantaforklifts.com/product/core-tow-tractor/> (dostęp: 04.05.2023).
- [54] Linde Material Handling (P20), <https://www.linde-mh.com/en/Products/Tow-Trucks/P20/> (dostęp: 04.05.2023).
- [55] CLARK, <https://clarkmheu.com/en/tow-trucks-and-tugger-trains/ctx40-70> (dostęp: 05.05.2023).
- [56] Bradshaw EV, <https://www.bradshawev.com/bradshaw/product-range/tow-tractors/t1200> (dostęp: 06.05.2023).
- [57] STILL, <https://www.still.pl/produkty/nowe-wozki-widlowe/ciagnik-elektryczny/lxt-120-350.html> (dostęp: 04.05.2023).
- [58] Linde Material Handling (P120-P350), <https://www.linde-mh.pl/pl/Produkty/Ciagniki-i-wozki-ciagnikowe-z-platforma/P120-P350/> (dostęp: 02.05.2025).
- [59] Seegrid, <https://seegrid.com/autonomous-mobile-robots/tow-tractor-s7-amr/> (dostęp: 07.05.2023).
- [60] STILL (automated tugger trains), <https://www.still-forklift.is/trucks/new-trucks/tugger-trains/automated-tugger-trains.html> (dostęp: 02.05.2025).
- [61] BMW Group (Schiller), <https://www.press.bmwgroup.com/global/article/detail/T0284289EN/autonomous-helpers-in-production-logistics--driverless-tugger-trains-reach-next-level?language=en> (dostęp: 02.05.2025).

-
- [62] Jtec Products (tongue & floor lock), <https://jtecproducts.com/tongue/> (dostęp: 02.05.2025).
- [63] LKE Group (dyszel), <https://www.lke-group.com/pl/produkt/dyszel-ciagnika-linde-still/> (dostęp: 04.05.2023).
- [64] Gimer D., *Kupplung für Transportanhänger*, Europejski Urząd Patentowy, EP1852282A1, 07.11.2007.
- [65] Korhonen E., Gronholm J., Piirainen P., Makela J., *Wózek z przesuwnie chowanym drążkiem holowniczym*, Europejski Urząd Patentowy, EP2778015T3, tłumaczenie opublikowane w Polsce, 29.03.2019.
- [66] Keuntje C., Kelterborn M., Günthner W. A., *Considering ergonomics in the planning of tugger train systems for production supply*, MATEC Web of Conferences, t. 95, s. 11005, 2017, doi:10.1051/matecconf/20179511005.
- [67] Keuntje C., Hormes F., Fottner J., *Considering technical details in the planning of tugger train systems*, w: *Proceedings of the 2nd International Conference on High Performance Compilation, Computing and Communications*, New York: ACM, 2018, s. 97–105, doi:10.1145/3195612.3195624.
- [68] WAMECH (Taxi-Liner), <https://www.leanintralogistics.com/taxi-liner/> (dostęp: 02.05.2025).
- [69] FlexQube, <https://www.flexqube.com/product/conveyor-tugger-cart-1190-x-1190-mm/> (dostęp: 08.05.2023).
- [70] Eilders J., *Urządzenie do transportu towarów drobnicowych*, Europejski Urząd Patentowy, EP3141455T3, tłumaczenie opublikowane w Polsce, 31.10.2019.
- [71] Eilders J., Beele P., *Wózek*, Europejski Urząd Patentowy, EP3459816T3, tłumaczenie opublikowane w Polsce, 14.06.2021.
- [72] Eidams W., Eilders J., *Wózek do transportu drobnicy*, Europejski Urząd Patentowy, EP3115274T3, tłumaczenie opublikowane w Polsce, 31.08.2018.
- [73] Berghammer F., *System Comprising a tugger train having at least one tugger-train trailer and at least one cart that can be received by the tugger-train trailer*, Światowa Organizacja Własności Intelektualnej, WO2020239376A1, 03.12.2020.
- [74] Schroder H., *Wózek i przyczepa*, Europejski Urząd Patentowy, EP2952406T3, tłumaczenie opublikowane w Polsce, 29.06.2018.
- [75] Knepp J. W., *Tugger and rider cart assembly*, Stany Zjednoczone, US9211900B2, 15.12.2015.
- [76] Knepp J. W., Buckert K. A., Kaiser N. M., Greiner R. W., *Tugger and rider cart assembly*, Stany Zjednoczone, US11014593B2, 25.05.2021.
- [77] Eilders J., *Trailerzuganhänger mit trägervorrichtung zum transport von flurförderfahrzeugen*, Europejski Urząd Patentowy, EP2632787B1, 18.05.2016.
- [78] LKE Group (układy skrętne), <https://www.lke-group.com/pl/casestudies/systemy-sterowania-dla-holownikow/> (dostęp: 03.05.2025).
- [79] Atres Intralogistics (układy skrętne), <https://atres.pl/know-how-logistyki-wewnetrznej/> (dostęp: 03.05.2025).
- [80] Atres Intralogistics (wózek platformowy sześciokołowy), <https://atres.pl/produkt/platformowe-szesciokolowe/> (dostęp: 03.05.2025).
- [81] Jtec Industries (importance of steering in material handling carts), <https://www.jtecindustries.com/importance-of-steering-styles/> (dostęp: 03.05.2025).
- [82] WAMECH (V-Liner), <https://www.leanintralogistics.com/lean-manufacturing/v-liner/> (dostęp: 03.05.2025).
-

- [83] Zhao H., Liu Z., Li Z., Zhou S., Chen W., Suo C., Liu Y. H., *Modelling and dynamic tracking control of industrial vehicles with tractor-trailer structure*, w: *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2019, s. 2905–2910, doi:10.1109/iroso40897.2019.8967986.
- [84] Pramanik S., Thipse S. S., *Kinematic synthesis of central-lever steering mechanism for four wheel vehicles*, *Acta Polytechnica*, t. 60, nr 3, s. 252–258, 2020, doi:10.14311/ap.2020.60.0252.
- [85] Dong L., Wang B., Shi R., *Analysis of the steering mechanism based on spatial linkages of an underground vehicle*, *Advanced Materials Research*, t. 479–481, s. 894–898, 2012, doi:10.4028/www.scientific.net/amr.479-481.894.
- [86] Shuib A. R., Radzi M. K. F. M., Bakri M. A. M., Khalid M. R. M., *Development of a harvesting and transportation machine for oil palm plantations*, *Journal of the Saudi Society of Agricultural Sciences*, t. 19, nr 5, s. 365–373, 2020, doi:10.1016/j.jssas.2020.05.001.
- [87] Ye M., Wang Q., Jiao S., *Robust H_2/H_∞ control for the electrohydraulic steering system of a four-wheel vehicle*, *Mathematical Problems in Engineering*, t. 2014, 2014, doi:10.1155/2014/208019.
- [88] Murali V., Mangaluru Ramananda A., Pandit S., *Design and development of four-wheel steering for All Terrain Vehicle (A.T.V)*, *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, t. 7, nr 11, s. 1660–1668, 2020, doi:10.31224/3021.
- [89] Hulttinen L., Mattila J., *Flow-limited path-following control of a double Ackermann steered hydraulic mobile manipulator*, w: *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, IEEE, 2020, s. 625–630, doi:10.1109/aim43001.2020.9158987.
- [90] Abroshan M., Taiebat M., Goodarzi A., Khajepour A., *Automatic steering control in tractor semi-trailer vehicles for low-speed maneuverability enhancement*, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, t. 231, nr 1, s. 83–102, 2017, doi:10.1177/1464419316651375.
- [91] Zhao H., Liu Y. H., Zhou S., *Motion control of a tractor with multiple trailers*, w: *Proceedings of the 2017 IEEE International Conference on Real-Time Computing and Robotics*, IEEE, 2017, s. 321–326, doi:10.1109/rcar.2017.8311881.
- [92] K.Hartwall (LiftLiner), <https://k-hartwall.com/products/tugger-trains/liftliner/> (dostęp: 03.05.2025).
- [93] Still (dyszel składany), <https://www.still.pl/firma/wiadomosci/nawosci/detail/still-poszerza-oferte-ram-transportowych.html> (dostęp: 03.05.2025).
- [94] Helge Nyberg (Pick-train connection), <https://helge-nyberg.com/en-gb/article/pick-train-connection> (dostęp: 03.05.2025).
- [95] Klasson M., *A trolley coupling device, a trolley and a use thereof*, Europejski Urząd Patentowy, EP3098134A1, 30.11.2016.
- [96] Stergiopoulos J., Manesis S., *Anti-jackknife state feedback control law for nonholonomic vehicles with trailer sliding mechanism*, *International Journal of Systems, Control and Communications*, t. 1, nr 3, s. 297–311, 2009, doi:10.1504/ijsc.2009.024557.
- [97] Deligiannis V., Davrazos G., Manesis S., Arampatzis T., *Flatness conservation in the n-trailer system equipped with a sliding kingpin mechanism*, *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, t. 46, nr 2, s. 151–162, 2006, doi:10.1007/s10846-006-9056-2.
- [98] Siegwart R., Nourbakhsh I. R., *Introduction to autonomous mobile robots*. Cambridge: The MIT Press, 2004, ISBN: 026219502X.

-
- [99] Misiak J., *Mechanika ogólna, t. 1: Statyka i kinematyka*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2016, ISBN: 9788301187897.
- [100] Jazar R. N., *Vehicle Dynamics*. Dordrecht: Springer, 2008, ISBN: 9780387742434.
- [101] Jazar R. N., *Advanced vehicle dynamics*. Cham: Springer, 2019, ISBN: 9783030130626.
- [102] Keymasi Khalaji A., *Modeling and control of uncertain multibody wheeled robots*, Multibody System Dynamics, t. 46, nr 3, s. 257–279, 2019, doi:10.1007/s11044-019-09673-5.
- [103] Keymasi Khalaji A., Moosavian S. A. A., *Adaptive sliding mode control of a wheeled mobile robot towing a trailer*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering, t. 229, nr 2, s. 169–183, 2015, doi:10.1177/0959651814550539.
- [104] Keymasi Khalaji A., Rahimi Bidgoli M., Moosavian S. A. A., *Non-model-based control for a wheeled mobile robot towing two trailers*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, t. 229, nr 1, s. 97–108, 2015, doi:10.1177/1464419314550898.
- [105] Michałek M. M., Pazderski D., *Reconstruction of admissible joint-references from a prescribed output-reference for the non-standard and generalized N-trailers*, European Journal of Control, t. 58, s. 60–73, 2021, doi:10.1016/j.ejcon.2020.11.003.
- [106] Michałek M. M., *Lining-up control strategies for N-trailer vehicles*, Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications, t. 75, nr 1, s. 29–52, 2014, doi:10.1007/s10846-013-9846-2.
- [107] Michałek M. M., Patkowski B., Gawron T., *Modular kinematic modelling of articulated buses*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, t. 69, nr 8, s. 8381–8394, 2020, doi:10.1109/tvt.2020.2999639.
- [108] Guevara L., Michałek M. M., Cheein F. A., *Collision risk reduction of N-trailer agricultural machinery by off-track minimization*, Computers and Electronics in Agriculture, t. 178, s. 105757, 2020, doi:10.1016/j.compag.2020.105757.
- [109] Keymasi Khalaji A., Jalalnejhad M., *Stabilization of a tractor with n trailers in the presence of wheel slip effects*, Robotica, t. 39, nr 5, s. 787–797, 2021, doi:10.1017/s0263574720000727.
- [110] Luca A. De, Oriolo G., *Modelling and control of nonholonomic mechanical systems*, w: *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems. CISM International Centre for Mechanical Sciences, t. 360*, (red.: Angeles J., Kecskeméthy A.), Vienna: Springer, 1995, s. 277–342, doi:10.1007/978-3-7091-4362-9_7.
- [111] Ljungqvist O., *On motion planning and control for truck and trailer systems*, Licentiate Thesis, Linköping University, Linköping, 2019, doi:10.3384/lic-diva-153892.
- [112] Yeh Y. C., Li T. H. S., Chen C. Y., *Adaptive fuzzy sliding-mode control of dynamic model based car-like mobile robot*, International Journal of Fuzzy Systems, t. 11, nr 4, s. 272–286, 2009, doi:10.30000/ijfs.200912.0006.
- [113] Ahmad Abu Hatab R. D., *Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using Lagrange and Newton-Euler methodologies: A unified framework*, Advances in Robotics & Automation, t. 2, nr 2, s. 1–7, 2013, doi:10.4172/2168-9695.1000107.
- [114] Taniguchi T., Sugeno M., *Trajectory tracking controller design for a tricycle robot using piecewise multi-linear models*, w: *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2017*, 2017, s. 188–193.
- [115] Batlle J. A., Barjau A., *Holonomy in mobile robots*, Robotics and Autonomous Systems, t. 57, nr 4, s. 433–440, 2009, doi:10.1016/j.robot.2008.06.001.
-

- [116] Tzafestas S. G., *Introduction to mobile robot control*. Amsterdam: Elsevier, 2013, ISBN: 9780124170490, doi:10.1016/c2013-0-01365-5.
- [117] Ott H., Degen R., Leijon M., Ruschitzka M., *Model-based approach to investigate the influences of different load states to the vehicle dynamics of light electric vehicles*, Journal of Transportation Technologies, t. 11, nr 2, s. 213–230, 2021, doi:10.4236/jtts.2021.112014.
- [118] Bae D. S., Won Y. S., *A Hamiltonian equation of motion for realtime vehicle simulation*, w: *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, ASME, t. 2, 1990, s. 151–157, doi:10.1115/detc1990-0062.
- [119] Nukulwuthiopas W., Laowattana S., Maneewarn T., *Dynamic modeling of a one-wheel robot by using Kane's method*, w: *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology*, IEEE, t. 1, 2002, s. 524–529, doi:10.1109/icit.2002.1189952.
- [120] Qin W. B., Zhang Y., Takács D., Stépán G., Orosz G., *Nonholonomic dynamics and control of road vehicles: moving toward automation*, Nonlinear Dynamics, t. 110, nr 3, s. 1959–2004, 2022, doi:10.1007/s11071-022-07761-4.
- [121] Korayem M. H., Shafei A. M., Shafei H. R., *Dynamic modeling of nonholonomic wheeled mobile manipulators with elastic joints using recursive Gibbs–Appell formulation*, Scientia Iranica, t. 19, nr 4, s. 1092–1104, 2012, doi:10.1016/j.scient.2012.05.001.
- [122] Pius P. E., Selekwa M. F., *Dynamic modelling of a 4WD/4WS ground vehicle by using Gibbs–Appell approach*, w: *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, ASME, t. 5, 2022, doi:10.1115/imece2022-95436.
- [123] Altche F., Polack P., De La Fortelle A., *A simple dynamic model for aggressive, near-limits trajectory planning*, w: *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, IEEE, 2017, s. 141–147, doi:10.1109/ivs.2017.7995711.
- [124] Adamiec-Wojcik I., Drąg Ł., Grzegożek W., Wojciech S., *Calibration of an articulated vehicle model and analysis of friction model in the connection between two vehicle units*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, t. 14, nr 5, 2019, doi:10.1115/1.4042638.
- [125] Kayacan E., Kayacan E., Ramon H., Saeys W., *Nonlinear modeling and identification of an autonomous tractor-trailer system*, Computers and Electronics in Agriculture, t. 106, s. 1–10, 2014, doi:10.1016/j.compag.2014.05.002.
- [126] Kayacan E., Kayacan E., Ramon H., Saeys W., *Modeling and identification of the yaw dynamics of an autonomous tractor*, w: *Proceedings of the 9th Asian Control Conference (ASCC 2013)*, Istanbul: IEEE, 2013, s. 1–6, doi:10.1109/ascc.2013.6606388.
- [127] Mircea N., Nicolae I., *Study on the dynamic Interaction between agricultural tractor and trailer during braking using Lagrange equation*, Applied Mechanics and Materials, t. 659, s. 515–520, 2014, doi:10.4028/www.scientific.net/amm.659.515.
- [128] Gao J., Jia H., *Control research for a small fixed-wing UAV during ground taxiing*, Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), t. 24, nr 2, s. 51–57, 2017, doi:10.11916/j.issn.1005-9113.15249.
- [129] Brach R. M., Brach R. M., *Tire models for vehicle dynamic simulation and accident reconstruction*, SAE Technical Papers, 2009, doi:10.4271/2009-01-0102.
- [130] Kong J., Pfeiffer M., Schildbach G., Borrelli F., *Kinematic and dynamic vehicle models for autonomous driving control design*, w: *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, Seoul: IEEE, 2015, s. 1094–1099, doi:10.1109/ivs.2015.7225830.
- [131] Cviklovic V., Srnanek R., Hruby D., Harnicarova M., *The control reversing algorithm for autonomous vehicles with PSD-controlled trailers*, Acta Technologica Agriculturae, t. 24, nr 4, s. 187–194, 2021, doi:10.2478/ata-2021-0031.

-
- [132] Hulme K., Kasprzak E., English K., Moore-Russo D., Lewis K., *Experiential learning in vehicle dynamics education via motion simulation and interactive gaming*, International Journal of Computer Games Technology, nr 1, 2009, doi:10.1155/2009/952524.
- [133] Lucet E., Grand C., Sallé D., Bidaud P., *Stabilization algorithm for a high speed car-like robot achieving steering maneuver*, w: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Pasadena: IEEE, 2008, s. 2540–2545, doi:10.1109/robot.2008.4543595.
- [134] Bloch A. M., *Nonholonomic mechanics and control*, t. 24. New York: Springer, 2003, ISBN: 978-1-4419-3043-9, doi:10.1007/b97376.
- [135] Bravo-Doddoli A., García-Naranjo L. C., *The dynamics of an articulated n-trailer vehicle*, Regular and Chaotic Dynamics, t. 20, nr 5, s. 497–517, 2015, doi:10.1134/s1560354715050019.
- [136] Chaplygin S. A., *On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem*, Regular and Chaotic Dynamics, t. 13, nr 4, s. 369–376, 2008, doi:10.1134/s1560354708040102.
- [137] Zhang N., Li T., Ma J., Yin G., *The mechanism research of body sway of car-trailer combinations considering steering system characteristics*, w: *Advances in Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks. IAVSD 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, (red.: Klomp M., Bruzelius F., Nielsen J., Hillemy A.), Cham: Springer, 2020, s. 1435–1446, doi:10.1007/978-3-030-38077-9_165.
- [138] Martinez J.-J., Avila J.-C., Canudas de Wit C., *A new bicycle vehicle model with dynamic contact friction*, w: *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, t. 37, nr 22, 2004, s. 625–630, doi:10.1016/s1474-6670(17)30413-5.
- [139] Blundell M., Harty D., *The multibody systems approach to vehicle dynamics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014, ISBN: 9780080994253, doi:10.1016/c2012-0-07000-7.
- [140] Halvani O., Or Y., *Nonholonomic dynamics of the Twistcar vehicle: Asymptotic analysis and hybrid dynamics of frictional skidding*, Nonlinear Dynamics, t. 107, nr 4, s. 3443–3459, 2022, doi:10.1007/s11071-021-07151-2.
- [141] Moore D. F., *The friction of pneumatic tyres*. Elsevier Scientific Pub. Co., 1975, ISBN: 9780444413239.
- [142] Yoshida K., Ishigami G., *Steering characteristics of a rigid wheel for exploration on loose soil*, w: *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, t. 4, 2004, s. 3995–4000, doi:10.1109/iroso.2004.1390039.
- [143] Xu N., Tang Z., Askari H., Zhou J., Khajepour A., *Direct tire slip ratio estimation using intelligent tire system and machine learning algorithms*, Mechanical Systems and Signal Processing, t. 175, s. 1–19, 2022, doi:10.1016/j.ymssp.2022.109085.
- [144] Vandewal B., Gillis J., Pipeleers G., Swevers J., *Simplified wheel slip modeling and estimation for omnidirectional vehicles*, w: *Proceedings of the 17th International Conference on Advanced Motion Control*, IEEE, 2022, s. 389–395, doi:10.1109/amc51637.2022.9729312.
- [145] Canudas-de-Wit C., Tsiotras P., Velenis E., Basset M., Gissinger G., *Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction*, Vehicle System Dynamics, t. 39, nr 3, s. 189–226, 2003, doi:10.1076/vesd.39.3.189.14152.
- [146] Pacejka H. B., *Tire and vehicle dynamics. 3rd edition*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012, ISBN: 9780080970165, doi:10.1016/c2010-0-68548-8.
- [147] Liang W., Medanic J., Ruhl R., *Analytical dynamic tire model*, Vehicle System Dynamics, t. 46, nr 3, s. 197–227, 2008, doi:10.1080/00423110701267466.
- [148] Baffet G., Charara A., Stéphant J., *Sideslip angle, lateral tire force and road friction estimation in simulations and experiments*, w: *Proceedings of the IEEE International*
-

- Conference on Control Applications*, IEEE, 2006, s. 903–908, doi:10.1109/ccca.2006.285967.
- [149] Stepanyuk S., Bruns R., Krivenkov K., *Empirical lateral-force-model for forklift tires*, *Logistics Research*, t. 10, nr 1, 2017, doi:10.23773/2017_1.
- [150] Rill G., *TMeasy 6.0 - A handling tire model that incorporates the first two belt eigenmodes*, w: *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics (EURODYN)*, European Association for Structural Dynamics, t. 1, 2020, s. 676–689, doi:10.47964/1120.9054.18673.
- [151] Velenis E., Tsiotras P., Canudas-de-Wit C., Sorine M., *Dynamic tyre friction models for combined longitudinal and lateral vehicle motion*, *Vehicle System Dynamics*, t. 43, nr 1, s. 3–29, 2005, doi:10.1080/00423110412331290464.
- [152] Guarino Lo Bianco C., Gerelli O., *An alternative model for the evaluation of tyre shear forces under steady-state conditions*, w: *Proceedings of the 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, IEEE, 2008, s. 1983–1989, doi:10.1109/iro.2008.4650724.
- [153] Ma B., Yang Y., Liu Y., Ji X., Zheng H., *Analysis of vehicle static steering torque based on tire-road contact patch sliding model and variable transmission ratio*, *Advances in Mechanical Engineering*, t. 8, nr 9, s. 1–11, 2016, doi:10.1177/1687814016668765.
- [154] Bartkowiak T., Paszkowiak W., Pelic M., *Experimental study into the torsional friction between AGV wheel and various floors*, *Materials Research Proceedings*, t. 12, s. 104–109, 2019, doi:10.21741/9781644900215-15.
- [155] Zhao T., Li P., Yuan Y., Zhang L., Zhao Y., *Trajectory re-planning and tracking control for a tractor-trailer mobile robot subject to multiple constraints*, *Actuators*, t. 13, nr 3, s. 109, 2024, doi:10.3390/act13030109.
- [156] Yin C., Wang S., Li X., Yuan G., Jiang C., *Trajectory tracking based on adaptive sliding mode control for agricultural tractor*, *IEEE Access*, t. 8, s. 113021–113029, 2020, doi:10.1109/access.2020.3002814.
- [157] Yu M., Gong X., Fan G., Zhang Y., *Trajectory planning and tracking for carrier aircraft-tractor system based on autonomous and cooperative movement*, *Mathematical Problems in Engineering*, t. 2020, 2020, doi:10.1155/2020/6531984.
- [158] Xie H., Xi Y., Song K., Guo F., *A trajectory tracking control algorithm of self-driving tractor-trailer based on online estimation of cornering stiffness*, w: *Proceedings of the 41st Chinese Control Conference*, IEEE, 2022, s. 5414–5419, doi:10.23919/ccc55666.2022.9902621.
- [159] Binh N. T., Tung N. A., Nam D. P., Quang N. H., *An adaptive backstepping trajectory tracking control of a tractor trailer wheeled mobile robot*, *International Journal of Control, Automation and Systems*, t. 17, nr 2, s. 465–473, 2019, doi:10.1007/s12555-017-0711-0.
- [160] Naderolasli A., Shojaei K., Chatraei A., *Leader-follower formation control of Euler-Lagrange systems with limited field-of-view and saturating actuators: A case study for tractor-trailer wheeled mobile robots*, *European Journal of Control*, t. 75, s. 100903, 2024, doi:10.1016/j.ejcon.2023.100903.
- [161] Khanpoor A., Khalaji A. K., Moosavian A. A. S., *Modeling and control of an underactuated tractor-trailer wheeled mobile robot*, *Robotica*, t. 35, nr 12, s. 2297–2318, 2017, doi:10.1017/s0263574716000886.
- [162] Hassan N., Saleem A., *Neural network-based adaptive controller for trajectory tracking of wheeled mobile robots*, *IEEE Access*, t. 10, s. 13582–13597, 2022, doi:10.1109/access.2022.3146970.

- [163] Lin F., Lin Z., Qiu X., *LQR controller for car-like robot*, w: *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference*, IEEE, 2016, s. 2515–2518, doi:10.1109/chicc.2016.7553742.
- [164] Aguiar A. P., Hespanha J. P., *Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty*, IEEE Transactions on Automatic Control, t. 52, nr 8, s. 1362–1379, 2007, doi:10.1109/tac.2007.902731.
- [165] Ailon A., Zohar I., *Point-to-point control and trajectory tracking in wheeled mobile robots: some further results and applications*, IFAC Proceedings Volumes, t. 41, nr 2, s. 9546–9551, 2008, doi:10.3182/20080706-5-kr-1001.01614.
- [166] De Luca A., Oriolo G., Samson C., *Feedback control of a nonholonomic car-like robot*, w: *Robot Motion Planning and Control*, (red.: Laumond J.-P.), Berlin, Heidelberg: Springer, 1998, s. 171–253, doi:10.1007/bfb0036073.
- [167] Ljungqvist O., Evestedt N., Axehill D., Cirillo M., Pettersson H., *A path planning and path-following control framework for a general 2-trailer with a car-like tractor*, Journal of Field Robotics, t. 36, nr 8, s. 1345–1377, 2019, doi:10.1002/rob.21908.
- [168] Mashadi B., Mahmoudi-Kaleybar M., Ahmadizadeh P., Oveisi A., *A path-following driver/vehicle model with optimized lateral dynamic controller*, Latin American Journal of Solids and Structures, t. 11, nr 4, s. 613–630, 2014, doi:10.1590/s1679-78252014000400004.
- [169] Essaidi A. B., Lakhal O., Coelen V., Belarouci A., Haddad M., Merzouki R., *Trajectory planning for autonomous wheeled mobile robots with trailer*, IFAC-PapersOnLine, t. 53, nr 2, s. 9766–9771, 2020, doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.2657.
- [170] Liu Z., Yue M., Guo L., Zhang Y., *Trajectory planning and robust tracking control for a class of active articulated tractor-trailer vehicle with on-axle structure*, European Journal of Control, t. 54, s. 87–98, 2020, doi:10.1016/j.ejcon.2019.12.003.
- [171] Bergman K., Ljungqvist O., Glad T., Axehill D., *An optimization-based receding horizon trajectory planning algorithm*, IFAC-PapersOnLine, t. 53, nr 2, s. 15550–15557, 2020, doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.2399.
- [172] Michałek M., Kielczewski M., *Helping a driver in backward docking with N-trailer vehicles by the passive control-assistance system*, w: *Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, IEEE, 2013, s. 1993–1999, doi:10.1109/itsc.2013.6728522.
- [173] Roh J. Il, Chung W., *Reversing control of a car with a trailer using the driver assistance system*, International Journal of Advanced Robotic Systems, t. 8, nr 2, s. 114–121, 2011, doi:10.5772/10578.
- [174] Shojaei S., Rahmani Hanzaki A., Azadi S., Saeedi M. A., *A novel decision-making unit for automated maneuver of articulated vehicles in real traffic situations*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, t. 234, nr 1, s. 152–171, 2020, doi:10.1177/0954407019838380.
- [175] Bozek P., Karavaev Y. L., Ardentov A. A., Yefremov K. S., *Neural network control of a wheeled mobile robot based on optimal trajectories*, International Journal of Advanced Robotic Systems, t. 17, nr 2, s. 1–10, 2020, doi:10.1177/1729881420916077.
- [176] Shojaei K., Abdolmaleki M., *Saturated observer-based adaptive neural network leader-following control of N tractors with n-trailers with a guaranteed performance*, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, t. 35, nr 1, s. 15–37, 2021, doi:10.1002/acs.3188.

- [177] Cai P., Mei X., Tai L., Sun Y., Liu M., *High-speed autonomous drifting with deep reinforcement learning*, IEEE Robotics and Automation Letters, t. 5, nr 2, s. 1247–1254, 2020, doi:10.1109/lra.2020.2967299.
- [178] Cutler M., How J. P., *Autonomous drifting using simulation-aided reinforcement learning*, w: *Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 2016, s. 5442–5448, doi:10.1109/icra.2016.7487756.
- [179] Zhao C., Zhu Y., Du Y., Liao F., Chan C. Y., *A novel direct trajectory planning approach based on generative adversarial networks and rapidly-exploring random tree*, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, t. 23, nr 10, s. 17910–17921, 2022, doi:10.1109/tits.2022.3164391.
- [180] Leu J., Wang Y., Tomizuka M., Di Cairano S., *Improved a-search guided tree for autonomous trailer planning*, w: *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2022, s. 7190–7196, doi:10.1109/iros47612.2022.9982121.
- [181] Zhang X., Eck J., Lotz F., *A path planning approach for tractor-trailer system based on semi-supervised learning*, w: *Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2022, s. 3549–3555, doi:10.1109/itsc55140.2022.9922552.
- [182] Feng X., Zhu Y., *Trace AI simulation of feedforward neural network visualization optimized by genetic algorithm based on Unity3D*, w: *China Automation Congress (CAC)*, IEEE, 2021, s. 4934–4938, doi:10.1109/cac53003.2021.9727304.
- [183] Eraqi H. M., Eldin Y. E., Moustafa M. N., *Reactive collision avoidance using evolutionary neural networks*, w: *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Computational Intelligence*, SciTePress, 2016, s. 251–257, doi:10.5220/0006084902510257.
- [184] Paszkowiak W., Pelic M., Bartkowiak T., *A neural-network-based control system for a dynamic model of tractor with multiple trailers system*, International Journal of Control, Automation and Systems, t. 21, nr 10, s. 3456–3469, 2023, doi:10.1007/s12555-022-0741-0.
- [185] Dokumentacja Wolfram Mathematica,
<https://library.wolfram.com/infocenter/Books/8501/MathematicsAndAlgorithms.pdf>
(dostęp: 02.05.2025).
- [186] Paszkowiak W., *Materiały dodatkowe do rozprawy doktorskiej (OneDrive)*.
https://putpoznanpl-my.sharepoint.com/:f:/g/personal/wojciech_paszkowiak_put_poznan_pl/EgyG_zpYt0JDqEP-akV4BwgBkfmQ04Q2kl6SB_DrAcfqQ?e=eLIVzc.

Dodatek A. Rozszerzony model dynamiczny (DM-EXT)

A.1 Założenia modelowe

Niniejszy rozdział poświęcony jest rozszerzonemu modelowi dynamicznemu (DM-EXT), który uwzględnia tarcie poprzeczne, wzdluzne oraz opory toczenia kół. Podczas budowania tego modelu przyjęto następujące założenia:

- każdy komponent układu jest traktowany jako bryła sztywna,
- ruch pojazdu odbywa się w płaskim, dwuwymiarowym środowisku pozbawionym przeszkód,
- dynamika w kierunku pionowym nie jest uwzględniana, a wszystkie koła pozostają w stałym kontakcie z podłożem,
- siły reakcji podłoża w kierunku pionowym (siły normalne) są wyznaczane na podstawie wyrażen wynikających ze statycznej równowagi danej jednostki,
- każde koło posiada własną masę, nieujęłą w masie jednostki, do której jest przymocowane,
- środek ciężkości każdej jednostki znajduje się na jej osi podłużnej,
- środek masy każdego koła skrętnego znajduje się na pionowej osi przechodzącej przez punkt styku tego koła z podłożem (czyli w płaszczyźnie ruchu przyjmuje się, że punkt styku i środek masy pokrywają się w rzucie 2D).
- w układzie podwójnego Ackermanna dyszel przedni przyczepy jest traktowany jako osobny element posiadający własną masę.

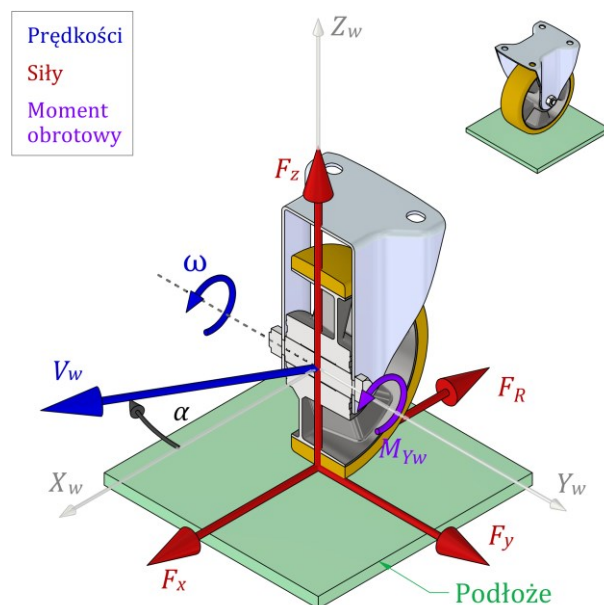
A.2 Siły działające na koło

A.2.1 Charakterystyka sił działających na koło

Ten podrozdział poświęcono opracowaniu funkcji wyznaczających siły oddziałujące na koło. Schemat ideowy sił działających na koło przedstawiono na rysunku A.1. uwzględniono siły pochodzące od poślizgu wzdluznego F_x i poprzecznego F_y oraz siłę wynikającą z oporu toczenia F_r .

W warunkach rzeczywistego ruchu pojazdu koła mogą doświadczać jednocześnie poślizgu wzdluznego oraz poprzecznego. W takiej sytuacji całkowita siła kontaktowa działająca na koło jest ograniczona. W niniejszym modelu siły wzdluzne i poprzeczne zostały opisane niezależnie, bez uwzględnienia interakcji między nimi. Takie podejście upraszcza analizę i implementację modelu, a jednocześnie pozwala zachować fizycznie uzasadniony charakter nieliniowych zależności siły od parametrów poślizgu.

Ograniczenie eliptyczne może zostać dodane w dalszych etapach, jeśli zajdzie potrzeba modelowania granicznych stanów przyczepności.



Rys. A.1. Schemat ideowy sił działających na koło; X_w, Y_w, Z_w – współrzędne lokalnego układu współrzędnych koła

A.2.2 Siła oporu toczenia

Do opisu oporów toczenia w modelu zastosowano uproszczony model, bazujący na założeniu, że siła oporu toczenia jest proporcjonalna do siły reakcji podłoża. Ze względu na to, że wpływ prędkości na siłę oporów toczenia jest nieznaczny dla prędkości, z jakimi poruszają się pojazdy w intralogistyce (co przedstawiono na rysunku 1.14 w podrozdziale 1.7.2), założono, że wartość tej siły nie zależy od prędkości w sposób bezpośredni. Siła ta występuje tylko podczas toczenia się koła, więc funkcja wyznaczająca tę siłę musi to uwzględniać. W wielu modelach dynamicznych funkcja siły oporu toczenia modelowana jest jako siła działająca przeciwnie do kierunku ruchu, którego zwrot określany jest za pomocą funkcji signum (sgn). Takie podejście może jednak prowadzić do poważnych problemów numerycznych, zwłaszcza przy bardzo małych prędkościach. Funkcja signum powoduje bowiem nagłe przejścia wartości siły w pobliżu zera, co może skutkować nadmierną korektą prędkości w modelu oraz powstawaniem nienaturalnych oscylacji. Efektem tego są niestabilności w symulacjach, które nie odpowiadają rzeczywistemu zachowaniu układu. Zazwyczaj zakłada się, że funkcja ta jest aktywowana poprzez prędkość liniową w kierunku wzdłużnym środka koła. Przypadek ten nie uwzględnia jednak wszystkich sytuacji, np. hamowania koła i wystąpienia pełnego poślizgu wzdłużnego. W takiej sytuacji koło może mieć zerową prędkość kątową, a $V_x \neq 0$, więc opory toczenia są nadal uwzględniane. Przeczy to podstawowemu założeniu, że

siła oporu toczenia występuje tylko podczas toczenia koła. W związku z tym autor niniejszej rozprawy zaproponował podwójną aktywację funkcji siły oporu toczenia. Aktywacja tej funkcji jest dokonywana zarówno poprzez prędkość liniową środka koła w kierunku wzdłużnym V_x jak i prędkość kątową koła ω . W związku z tym funkcja wyznaczająca siłę oporu toczenia może być zapisana jako:

$$F_r(V_x, \omega, F_z) = F_z \mu_r \tanh(k_{r_1} V_x) \tanh(k_{r_2} |\omega|), \quad (A.1)$$

gdzie: F_z to siłą reakcji podłoża, μ_r to współczynnik tarcia tocznego, V_x to pozioma prędkość liniowa w kierunku wzdłużnym środka koła, ω to prędkość kątowa koła, k_{r_1}, k_{r_2} to współczynniki szybkości nasycenia określające stromość funkcji aktywacji. Zastosowanie wartości bezwzględnej dla ω pozwala zachować poprawność znaków w sytuacji jednoczesnych ujemnych wartości V_x i ω .

A.2.3 Siła tarcia wzdłużnego

Poślizg wzdłużny koła pojawia się w sytuacji, gdy prędkość obrotowa koła nie odpowiada jego prędkości postępowej w kierunku wzdłużnym. W przypadku idealnego toczenia bez poślizgu, prędkość liniowa środka koła jest równa prędkości obwodowej wynikającej z jego obrotu. Jeżeli jednak te wartości się różnią, występuje poślizg wzdłużny.

Wielkość poślizgu wzdłużnego określa się na podstawie różnicy między prędkością obwodową koła a jego prędkością postępową w kierunku wzdłużnym względem koła, co można zapisać w formie funkcji:

$$V_s(V_x, \omega, r) = r\omega - V_x \quad (A.2)$$

gdzie r jest promieniem koła. Wiele modeli matematycznych opisujących poślizg wzdłużny, wyznacza go na podstawie współczynnika poślizgu (ang. *slip ratio*), jednak to wiąże się z pewnymi ograniczeniami. Dlatego w niniejszej pracy zastosowano uproszczony model siły tarcia wzdłużnego wyrażony jako funkcja tangensa hiperbolicznego zależna od prędkości poślizgu $V_s(V_x, \omega, r)$, który pozwala uniknąć problemów związanych z nieciągłością, niejednoznacznością definicją poślizgu oraz brakiem jego określoności przy zerowej prędkości koła lub pojazdu. Dodatkowo model ten jest ciągły, różniczkowalny i posiada jedynie dwa łatwo interpretowalne parametry, co czyni go znacznie bardziej praktycznym w zastosowaniach symulacyjnych [144]:

$$\mu_x(V_x, \omega, r) = \mu_{x,max} \tanh(C_x V_s(V_x, \omega, r)), \quad (A.3)$$

gdzie: $\mu_{x,max}, C_x$ są parametrami sterującymi kształtem krzywej współczynnika tarcia wzdłużnego w zależności od prędkości poślizgu. Funkcja siły tarcia wzdłużnego przyjmuje postać:

$$F_x(V_x, \omega, r, F_z) = F_z \mu_x(V_x, \omega, r). \quad (A.4)$$

A.2.4 Siła tarcia poprzecznego

Do wyznaczenia sił tarcia poprzecznego między kołem a podłożem zastosowano model funkcji sigmoidalnej, który został opisany w podrozdziale 4.3.2 funkcją w równaniu 4.54. Funkcję wyznaczającą kąt znoszenia bocznego opisano w równaniu 4.55.

A.3 Model dynamiczny ciągnika

A.3.1 Ciągnik z różnicowo napędzanymi kołami tylnej osi (DDT)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-EXT ciągnika typu DDT. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.3. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.8. W tym przypadku wektor współrzędnych uogólnionych składa się z 7 współrzędnych uogólnionych (rys. A.2), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_0 = [x \ y \ \beta_0 \ \varphi_{fM0} \ \theta_{fM0} \ \theta_{rL0} \ \theta_{rR0}]^T, \quad (A.5)$$

gdzie: $\theta_{fM0}, \theta_{rL0}, \theta_{rR0}$ to współrzędne kątowe obrotu kół, kolejno: koła przedniego, koła lewego tylnego oraz koła prawego tylnego.

Całkowitą energię kinetyczną ciągnika można zapisać jako:

$$T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (A.6)$$

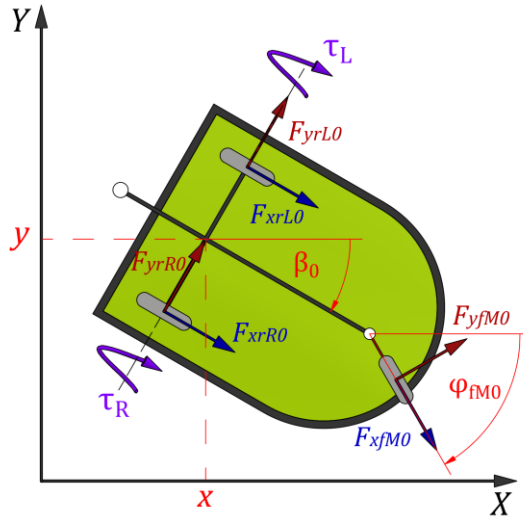
gdzie: $T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu ciągnika (bez kół), $T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna lewego tylnego koła ciągnika, $T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna prawego tylnego koła ciągnika, $T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna przedniego koła ciągnika. Energia kinetyczna korpusu ciągnika może zostać zapisana jako:

$$T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_0 (\dot{x}_{C_0}^2 + \dot{y}_{C_0}^2) + I_0 \dot{\beta}_0^2), \quad (A.7)$$

gdzie: m_0 oraz I_0 oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu ciągnika względem osi pionowej przechodzącej przez jego środek masy, x_{C_0}, y_{C_0} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół ciągnika można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
 T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rL0}(\dot{x}_{E_0}^2 + \dot{y}_{E_0}^2) + I_{rL0}\dot{\beta}_0^2 + I_{\theta rL0}\dot{\theta}_{rL0}^2) \\
 T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rR0}(\dot{x}_{F_0}^2 + \dot{y}_{F_0}^2) + I_{rR0}\dot{\beta}_0^2 + I_{\theta rR0}\dot{\theta}_{rR0}^2) \quad , \quad (A.8) \\
 T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fM0}(\dot{x}_{A_{0s}}^2 + \dot{y}_{A_{0s}}^2) + I_{fM0}\dot{\varphi}_{fM0}^2 + I_{\theta fM0}\dot{\theta}_{fM0}^2)
 \end{aligned}$$

gdzie: $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rL0}, I_{rR0}, I_{fM0}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła, $I_{\theta rL0}, I_{\theta rR0}, I_{\theta fM0}$ to ich momenty bezwładności przechodzące przez ich oś obrotową Y_w . $(x_{E_0}, y_{E_0}), (x_{F_0}, y_{F_0}), (x_{A_{0s}}, y_{A_{0s}})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego oraz przedniego koła ciągnika. Siły działające na ciągnik zostały przedstawione na rysunku A.2.



Rys. A.2. Siły działające na DDT (siły poprzeczne względem kół oznaczono kolorem czerwonym, a siły wzdłużne – kolorem niebieskim)

Macierz sił działających na ciągnik można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_{yrL0} \sin(\beta_0) & F_{yrL0} \cos(\beta_0) \\ F_{xrL0} \cos(\beta_0) & -F_{xrL0} \sin(\beta_0) \\ F_{yrR0} \sin(\beta_0) & F_{yrR0} \cos(\beta_0) \\ F_{xrR0} \cos(\beta_0) & -F_{xrR0} \sin(\beta_0) \\ F_{yfM0} \sin(\varphi_{fM0}) & F_{yfM0} \cos(\varphi_{fM0}) \\ F_{xfM0} \cos(\varphi_{fM0}) & -F_{xfM0} \sin(\varphi_{fM0}) \end{bmatrix}, \quad (A.9)$$

gdzie: $F_{yrL0}, F_{yrR0}, F_{yfM0}$ to siły tarcia poprzecznego, a $F_{xrL0}, F_{xrR0}, F_{xfM0}$ to siły wzdłużne. Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{A_{0s}} & y_{A_{0s}} \\ x_{A_{0s}} & y_{A_{0s}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 10})$$

Ze względu na to, że współrzędne katowe obrotu poszczególnych kół są uwzględniane w modelu to należy uwzględnić siły powodujące powstawanie momentu względem tych współrzędnych katowych. W związku z tym wektor momentów zewnętrznych, zawiera również momenty, które nie są przyłożone zewnętrznie, ale wynikają z interakcji kół z podłożem, co można zapisać jako:

$$\hat{\mathbf{M}}_0 = [\tau_L \quad \tau_R \quad F_{xrL0}r_{r0} \quad F_{xrR0}r_{r0} \quad F_{xfM0}r_{f0}]^T. \quad (\text{A. 11})$$

Odpowiadający mu wektor współrzędnych katowych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varpi}_0(\mathbf{q}) = [\theta_{rL0} \quad \theta_{rR0} \quad \theta_{rL0} \quad \theta_{rR0} \quad \theta_{fM0}]^T. \quad (\text{A. 12})$$

Momenty zadane na koło lewe τ_L , i prawe ciągnika τ_R uwzględniają zarówno momenty napędowe, hamujące, jak i moment wynikający z oporów mechanicznych przekładni i innych elementów układu przeniesienia napędu. Siły wzdłużne są wynikiem oddziaływania podłoża na koło w wyniku poślizgu wzdłużnego, oporów toczenia oraz momentów napędów w sytuacji ich występowania, co można zapisać jako:

$$\begin{aligned} F_{xrL0} &= -F_r(V_{xrL0}, \dot{\theta}_{rL0}, F_{zrL0}) + F_x(V_{xrL0}, \dot{\theta}_{rL0}, r_{r0}, F_{zrL0}) + \tau_L/r_{r0} \\ F_{xrR0} &= -F_r(V_{xrR0}, \dot{\theta}_{rR0}, F_{zrR0}) + F_x(V_{xrR0}, \dot{\theta}_{rR0}, r_{r0}, F_{zrR0}) + \tau_R/r_{r0}, \\ F_{xfM0} &= -F_r(V_{xfM0}, \dot{\theta}_{fM0}, F_{zfM0}) + F_x(V_{xfM0}, \dot{\theta}_{fM0}, r_{f0}, F_{zfM0}) \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} V_{xrL0} &= \dot{x}_{E_0} \cos \beta_0 - \dot{y}_{E_0} \sin \beta_0 \\ V_{xrR0} &= \dot{x}_{F_0} \cos \beta_0 - \dot{y}_{F_0} \sin \beta_0 \\ V_{xfM0} &= \dot{x}_{A_{0s}} \cos \varphi_{fM0} - \dot{y}_{A_{0s}} \sin \varphi_{fM0} \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \alpha_{rL0} &= \alpha(\dot{x}_{E_0}, \dot{y}_{E_0}, \beta_0) \\ \alpha_{rR0} &= \alpha(\dot{x}_{F_0}, \dot{y}_{F_0}, \beta_0) \\ \alpha_{fM0} &= \alpha(\dot{x}_{A_{0s}}, \dot{y}_{A_{0s}}, \varphi_{fM0}) \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

Siły reakcji podłoża na poszczególne koła zostały wyznaczone w równaniu 4.67 w sekcji 4.3.2.2.1. Siły tarcia poprzecznego działające na ciągnik można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
F_{yrL0} &= F_y(\alpha_{rL0}, F_{zrL0}, \mu_{yrL0}, C_{yrL0}) \\
F_{yrR0} &= F_y(\alpha_{rR0}, F_{zrR0}, \mu_{yrR0}, C_{yrR0}) , \\
F_{yfM0} &= F_y(\alpha_{fM0}, F_{zfM0}, \mu_{yfM0}, C_{yfM0})
\end{aligned}
\tag{A.16}$$

gdzie: $\mu_{yrL0}, \mu_{yrR0}, \mu_{yfM0}$ to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrL0}, C_{yrR0}, C_{yfM0}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

A.3.2 Ciągnik z napędzanym skrętnym sterowanym przednim kołem (TTFS)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-EXT ciągnika typu TTFS. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.6. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.8. W tym przypadku wektor współrzędnych uogólnionych składa się z 7 współrzędnych uogólnionych (rys. A.3), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_0 = [x \ y \ \beta_0 \ \varphi_{fM0} \ \theta_{fM0} \ \theta_{rL0} \ \theta_{rR0}]^T, \tag{A.17}$$

gdzie: $\theta_{fM0}, \theta_{rL0}, \theta_{rR0}$ to współrzędne kątowe obrotu kół, kolejno: koła przedniego, koła lewego tylnego oraz koła prawego tylnego. Całkowitą energię kinetyczną ciągnika można zapisać jako:

$$T_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{4.18}$$

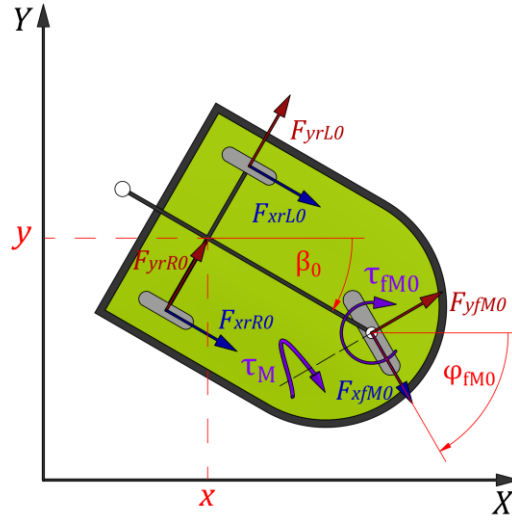
gdzie: $T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu ciągnika (bez kół), $T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna lewego tylnego koła ciągnika, $T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna prawego tylnego koła ciągnika, $T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna przedniego koła ciągnika. Energia kinetyczna korpusu ciągnika może zostać zapisana jako:

$$T_{b0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_0(\dot{x}_{C_0}^2 + \dot{y}_{C_0}^2) + I_0 \dot{\beta}_0^2), \tag{4.19}$$

gdzie: m_0 i I_0 oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu ciągnika, x_{C_0}, y_{C_0} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół ciągnika można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
T_{rL0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rL0}(\dot{x}_{E_0}^2 + \dot{y}_{E_0}^2) + I_{rL0} \dot{\beta}_0^2 + I_{\theta rL0} \dot{\theta}_{rL0}^2) \\
T_{rR0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rR0}(\dot{x}_{F_0}^2 + \dot{y}_{F_0}^2) + I_{rR0} \dot{\beta}_0^2 + I_{\theta rL0} \dot{\theta}_{rL0}^2) , \\
T_{fM0}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fM0}(\dot{x}_{A_0}^2 + \dot{y}_{A_0}^2) + I_{fM0} \dot{\varphi}_{fM0}^2 + I_{\theta fM0} \dot{\theta}_{fM0}^2)
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

gdzie: $m_{rL0}, m_{rR0}, m_{fM0}$ to odpowiednio masy poszczególnych kół, a $I_{rL0}, I_{rR0}, I_{fM0}$ to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła, $I_{\theta rL0}, I_{\theta rR0}, I_{\theta fM0}$ to ich momenty bezwładności przechodzące przez ich oś obrotową Y_w . $(x_{E_0}, y_{E_0}), (x_{F_0}, y_{F_0}), (x_{A_0}, y_{A_0})$ to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego oraz przedniego koła ciągnika. Siły działające na ciągnik zostały przedstawione na rysunku A.3.



Rys. A.3. Siły działające na TTFS (siły poprzeczne względem kół oznaczono kolorem czerwonym, a siły wzdłużne – kolorem niebieskim)

Macierz sił działających na ciągnik można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{f}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_{yrL0} \sin(\beta_0) & F_{yrL0} \cos(\beta_0) \\ F_{xrL0} \cos(\beta_0) & -F_{xrL0} \sin(\beta_0) \\ F_{yrR0} \sin(\beta_0) & F_{yrR0} \cos(\beta_0) \\ F_{xrR0} \cos(\beta_0) & -F_{xrR0} \sin(\beta_0) \\ F_{yfM0} \sin(\varphi_{fM0}) & F_{yfM0} \cos(\varphi_{fM0}) \\ F_{xfM0} \cos(\varphi_{fM0}) & -F_{xfM0} \sin(\varphi_{fM0}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 21})$$

gdzie: $F_{yrL0}, F_{yrR0}, F_{yfM0}$ to siły tarcia poprzecznego, a $F_{xrL0}, F_{xrR0}, F_{xfM0}$ to siły wzdłużne.

Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{E_0} & y_{E_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{F_0} & y_{F_0} \\ x_{A_0} & y_{A_0} \\ x_{A_0} & y_{A_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 22})$$

Wektor momentów zewnętrznych można zapisać jako:

$$\hat{\mathbf{M}}_0 = [\tau_{fM0} \quad \tau_M \quad F_{xrL0}r_{r0} \quad F_{xrR0}r_{r0} \quad F_{xfM0}r_{f0}]. \quad (\text{A. 23})$$

Odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varpi}_0(\mathbf{q}) = [\varphi_{fM0} \quad \theta_{fM0} \quad \theta_{rL0} \quad \theta_{rR0} \quad \theta_{fM0}]. \quad (\text{A.24})$$

Momenty zadane na obrót przedniego koła τ_M , oraz jego skręt τ_{fM0} uwzględniają zarówno momenty napędowe, hamujące, jak i moment wynikający z oporów mechanicznych przekładni i innych elementów układu przeniesienia napędu. Siły wzdłużne są wynikiem oddziaływania podłoża na koło w wyniku poślizgu wzdłużnego, oporów toczenia oraz momentów napędów w sytuacji ich występowania, co można zapisać jako:

$$\begin{aligned} F_{xrL0} &= -F_r(V_{xrL0}, \dot{\theta}_{rL0}, F_{zrL0}) + F_x(V_{xrL0}, \dot{\theta}_{rL0}, r_{r0}, F_{zrL0}) \\ F_{xrR0} &= -F_r(V_{xrR0}, \dot{\theta}_{rR0}, F_{zrR0}) + F_x(V_{xrR0}, \dot{\theta}_{rR0}, r_{r0}, F_{zrR0}) \\ F_{xfM0} &= -F_r(V_{xfM0}, \dot{\theta}_{fM0}, F_{zfM0}) + F_x(V_{xfM0}, \dot{\theta}_{fM0}, r_{f0}, F_{zfM0}) \tau_M / r_{f0} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} V_{xrL0} &= \dot{x}_{E_0} \cos \beta_0 - \dot{y}_{E_0} \sin \beta_0 \\ V_{xrR0} &= \dot{x}_{F_0} \cos \beta_0 - \dot{y}_{F_0} \sin \beta_0 \\ V_{xfM0} &= \dot{x}_{A_0} \cos \varphi_{fM0} - \dot{y}_{A_0} \sin \varphi_{fM0} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \alpha_{rL0} &= \alpha(\dot{x}_{E_0}, \dot{y}_{E_0}, \beta_0) \\ \alpha_{rR0} &= \alpha(\dot{x}_{F_0}, \dot{y}_{F_0}, \beta_0) \\ \alpha_{fM0} &= \alpha(\dot{x}_{A_0}, \dot{y}_{A_0}, \varphi_{fM0}) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Siły reakcji podłoża na poszczególne koła zostały wyznaczone w równaniu 4.82 w sekcji 4.3.2.2.2. Siły tarcia poprzecznego działające na ciągnik można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} F_{yrL0} &= F_y(\alpha_{rL0}, F_{zrL0}, \mu_{yrL0}, C_{yrL0}) \\ F_{yrR0} &= F_y(\alpha_{rR0}, F_{zrR0}, \mu_{yrR0}, C_{yrR0}) \\ F_{yfM0} &= F_y(\alpha_{fM0}, F_{zfM0}, \mu_{yfM0}, C_{yfM0}) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

gdzie: $\mu_{yrL0}, \mu_{yrR0}, \mu_{yfM0}$ to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrL0}, C_{yrR0}, C_{yfM0}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

A.4 Model dynamiczny *i*-tej przyczepy

A.4.1 Przyczepa z układem stałego dyszla (FDSS)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-EXT *i*-tej przyczepy typu FDSS. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.7.

Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.23. Wektor współrzędnych uogólnionych i -tej przyczepy z układem stałego dyszla składa się z 7 współrzędnych uogólnionych, co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_i = [\beta_i \quad \varphi_{fLi} \quad \varphi_{fRi} \quad \theta_{rLi} \quad \theta_{rRi} \quad \theta_{fLi} \quad \theta_{fRi}]^T. \quad (\text{A. 29})$$

Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (\text{A. 30})$$

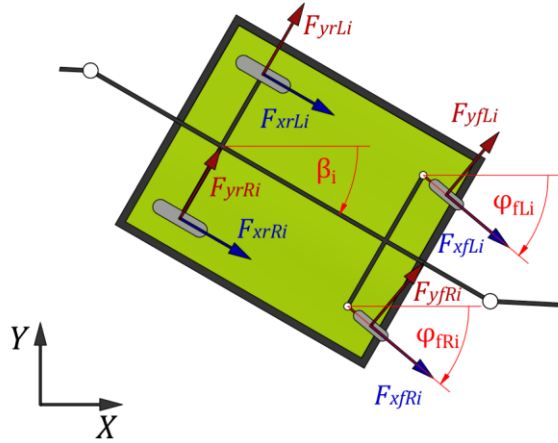
gdzie $T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy (bez kół), $T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energie kinetyczne lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy może zostać zapisana jako:

$$T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_i (\dot{x}_{Ci}^2 + \dot{y}_{Ci}^2) + I_i \dot{\beta}_i^2), \quad (\text{A. 31})$$

gdzie: m_i i I_i oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu i -tej przyczepy, x_{Ci} , y_{Ci} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rLi} (\dot{x}_{Ei}^2 + \dot{y}_{Ei}^2) + I_{rLi} \dot{\beta}_i^2 + I_{\theta rLi} \dot{\theta}_{rLi}^2) \\ T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rRi} (\dot{x}_{Fi}^2 + \dot{y}_{Fi}^2) + I_{rRi} \dot{\beta}_i^2 + I_{\theta rLi} \dot{\theta}_{rRi}^2) \\ T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fLi} (\dot{x}_{His}^2 + \dot{y}_{His}^2) + I_{fLi} \dot{\phi}_{fLi}^2 + I_{\theta rLi} \dot{\theta}_{fLi}^2) \\ T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fRi} (\dot{x}_{Gis}^2 + \dot{y}_{Gis}^2) + I_{fRi} \dot{\phi}_{fRi}^2 + I_{\theta rLi} \dot{\theta}_{fRi}^2) \end{aligned}, \quad (\text{A. 32})$$

gdzie: m_{rLi} , m_{rRi} , m_{fLi} , m_{fRi} to odpowiednio masy poszczególnych kół, a I_{rLi} , I_{rRi} , I_{fLi} , I_{fRi} to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła, $I_{\theta rLi}$, $I_{\theta rRi}$, $I_{\theta fLi}$, $I_{\theta fRi}$ to ich momenty bezwładności przechodzące przez ich oś obrotową $Y_w (x_{Ei}, y_{Ei})$, (x_{Fi}, y_{Fi}) , (x_{His}, y_{His}) , (x_{Gis}, y_{Gis}) to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Siły działające na i -tą przyczepę zostały przedstawione na rysunku A.4.



Rys. A.4. Siły działające na i -tą przyczepę typu FDSS (siły poprzeczne względem kół oznaczono kolorem czerwonym, a siły wzdłużne – kolorem niebieskim)

Macierz sił działających na i -tą przyczepę można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_{yrLi} \sin(\varphi_{rLi}) & F_{yrLi} \cos(\varphi_{rLi}) \\ F_{xrLi} \cos(\varphi_{rLi}) & -F_{xrLi} \sin(\varphi_{rLi}) \\ F_{yrRi} \sin(\varphi_{rRi}) & F_{yrRi} \cos(\varphi_{rRi}) \\ F_{xrRi} \cos(\varphi_{rRi}) & -F_{xrRi} \sin(\varphi_{rRi}) \\ F_{yfLi} \sin(\varphi_{fLi}) & F_{yfLi} \cos(\varphi_{fLi}) \\ F_{xfLi} \cos(\varphi_{fLi}) & -F_{xfLi} \sin(\varphi_{fLi}) \\ F_{yfRi} \sin(\varphi_{fRi}) & F_{yfRi} \cos(\varphi_{fRi}) \\ F_{xfRi} \cos(\varphi_{fRi}) & -F_{xfRi} \sin(\varphi_{fRi}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

gdzie: $F_{yrLi}, F_{yrRi}, F_{yfLi}, F_{yfRi}$ to siły tarcia poprzecznego, a $F_{xrLi}, F_{xrRi}, F_{xfLi}, F_{xfRi}$ to siły wzdłużne. Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{Ei} & y_{Ei} \\ x_{Fi} & y_{Fi} \\ x_{Hi} & y_{Hi} \\ x_{Gi} & y_{Gi} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Wektor momentów zewnętrznych można zapisać jako:

$$\hat{\mathbf{M}}_i = [F_{xrLi}r_{ri} \quad F_{xrRi}r_{ri} \quad F_{xfLi}r_{fi} \quad F_{xfRi}r_{fi}]. \quad (\text{A.35})$$

Odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varpi}_i(\mathbf{q}) = [\theta_{rLi} \quad \theta_{rRi} \quad \theta_{fLi} \quad \theta_{fRi}]. \quad (\text{A.36})$$

Siły wzdłużne są wynikiem oddziaływania podłoża na koło w wyniku poślizgu wzdłużnego i oporów toczenia, co można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
F_{xrLi} &= -F_r(V_{xrLi}, \dot{\theta}_{rLi}, F_{zrLi}) + F_x(V_{xrLi}, \dot{\theta}_{rLi}, r_{ri}, F_{zrLi}) \\
F_{xrRi} &= -F_r(V_{xrRi}, \dot{\theta}_{rRi}, F_{zrRi}) + F_x(V_{xrRi}, \dot{\theta}_{rRi}, r_{ri}, F_{zrRi}) \\
F_{xfLi} &= -F_r(V_{xfLi}, \dot{\theta}_{fLi}, F_{zfLi}) + F_x(V_{xfLi}, \dot{\theta}_{fLi}, r_{fi}, F_{zfLi}) \\
F_{xfRi} &= -F_r(V_{xfRi}, \dot{\theta}_{fRi}, F_{zfRi}) + F_x(V_{xfRi}, \dot{\theta}_{fLi}, r_{fi}, F_{zfRi})
\end{aligned} \tag{A.37}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
V_{xrLi} &= \dot{x}_{Ei} \cos \beta_0 - \dot{y}_{Ei} \sin \beta_i \\
V_{xrRi} &= \dot{x}_{Fi} \cos \beta_0 - \dot{y}_{Fi} \sin \beta_i \\
V_{xfLi} &= \dot{x}_{His} \cos \varphi_{fLi} - \dot{y}_{His} \sin \varphi_{fLi} \\
V_{xfRi} &= \dot{x}_{Gis} \cos \varphi_{fRi} - \dot{y}_{Gis} \sin \varphi_{fRi}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\alpha_{rLi} &= \alpha(\dot{x}_{Ei}, \dot{y}_{Ei}, \beta_i) \\
\alpha_{rRi} &= \alpha(\dot{x}_{Fi}, \dot{y}_{Fi}, \beta_i) \\
\alpha_{fLi} &= \alpha(\dot{x}_{His}, \dot{y}_{His}, \varphi_{fLi}) \\
\alpha_{fRi} &= \alpha(\dot{x}_{Gis}, \dot{y}_{Gis}, \varphi_{fRi})
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Siły reakcji podłoża na poszczególne koła zostały wyznaczone w równaniu 4.91 w sekcji 4.3.2.3.1. Siły tarcia poprzecznego działające na i -tą przyczepę można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
F_{yrLi} &= F_y(\alpha_{rLi}, F_{zrLi}, \mu_{yrLi}, C_{yrLi}) \\
F_{yrRi} &= F_y(\alpha_{rRi}, F_{zrRi}, \mu_{yrRi}, C_{yrRi}) \\
F_{yfLi} &= F_y(\alpha_{fLi}, F_{zfLi}, \mu_{yfLi}, C_{yfLi}) \\
F_{yfRi} &= F_y(\alpha_{fRi}, F_{zfRi}, \mu_{yfRi}, C_{yfRi})
\end{aligned} \tag{A.40}$$

gdzie: $\mu_{yrLi}, \mu_{yrRi}, \mu_{yfLi}, \mu_{yfRi}$, to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrLi}, C_{yrRi}, C_{yfLi}, C_{yfRi}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.

A.4.2 Przyczepa z układem podwójnego Ackermanna (DASS)

W tej sekcji przedstawiony jest DM-EXT i -tej przyczepy typu DASS. Parametry geometryczne i punkty charakterystyczne zostały przedstawione na rysunku 3.11. Wyrażenia opisujące punkty charakterystyczne zostały opisane w równaniu 3.36. Wektor współrzędnych uogólnionych i -tej przyczepy z układem podwójnego Ackermanna składa się z 6 współrzędnych uogólnionych (rys. 4.13), co można zapisać jako:

$$\mathbf{q}_i = [\beta_{i1} \ \beta_{i2} \ \theta_{rLi} \ \theta_{rRi} \ \theta_{fLi} \ \theta_{fRi}]^T. \tag{A.41}$$

Całkowitą energię kinetyczną i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (\text{A.42})$$

gdzie $T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy (bez kół i bez przedniego dyszla) oraz energia kinetyczna jej dyszla przedniego, $T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ to odpowiednio energie kinetyczne lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Energia kinetyczna korpusu i -tej przyczepy może zostać zapisana jako:

$$T_{bi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_i (\dot{x}_{Ci}^2 + \dot{y}_{Ci}^2) + I_i \dot{\beta}_{i2}^2), \quad (\text{A.43})$$

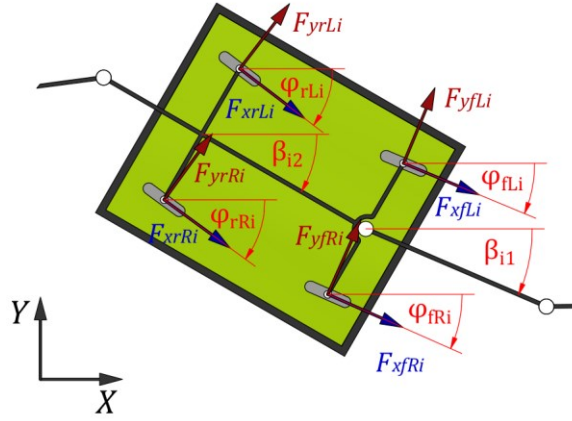
gdzie: m_i i I_i oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności korpusu i -tej przyczepy, x_{Ci} , y_{Ci} to współrzędne jego środka masy. Energia kinetyczna przedniego dyszla i -tej przyczepy może być wyrażona jako:

$$T_{di}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (m_{di} (\dot{x}_{Cdi}^2 + \dot{y}_{Cdi}^2) + I_{di} \dot{\beta}_{i1}^2), \quad (\text{A.44})$$

gdzie: m_{di} i I_{di} – oznaczają odpowiednio masę oraz moment bezwładności przedniego dyszla i -tej przyczepy, x_{Cdi} , y_{Cdi} to współrzędne jego środka masy. Energie kinetyczne poszczególnych kół i -tej przyczepy można zapisać jako:

$$\begin{aligned} T_{rLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rLi} (\dot{x}_{Ei}^2 + \dot{y}_{Ei}^2) + I_{rLi} \dot{\phi}_{rLi}^2 + I_{\theta fLi} \dot{\theta}_{rLi}^2) \\ T_{rRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{rRi} (\dot{x}_{Fi}^2 + \dot{y}_{Fi}^2) + I_{rRi} \dot{\phi}_{rRi}^2 + I_{\theta fLi} \dot{\theta}_{rRi}^2) \\ T_{fLi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fLi} (\dot{x}_{Hi}^2 + \dot{y}_{Hi}^2) + I_{fLi} \dot{\phi}_{fLi}^2 + I_{\theta fLi} \dot{\theta}_{fLi}^2) \\ T_{fRi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (m_{fRi} (\dot{x}_{Gi}^2 + \dot{y}_{Gi}^2) + I_{fRi} \dot{\phi}_{fRi}^2 + I_{\theta fLi} \dot{\theta}_{fRi}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

gdzie: m_{rLi} , m_{rRi} , m_{fLi} , m_{fRi} to odpowiednio masy poszczególnych kół, a I_{rLi} , I_{rRi} , I_{fLi} , I_{fRi} to ich momenty bezwładności względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy każdego koła, $I_{\theta rLi}$, $I_{\theta rRi}$, $I_{\theta fLi}$, $I_{\theta fRi}$ to ich momenty bezwładności przechodzące przez ich oś obrotową Y_w . (x_{Ei}, y_{Ei}) , (x_{Fi}, y_{Fi}) , (x_{Hi}, y_{Hi}) , (x_{Gi}, y_{Gi}) to współrzędne środków masy odpowiednio: lewego tylnego, prawego tylnego, lewego przedniego oraz prawego przedniego koła i -tej przyczepy. Kąty orientacji kół ϕ_{rLi} , ϕ_{rRi} , ϕ_{fLi} , ϕ_{fRi} wyznaczono w podrozdziale 3.4 (równanie 3.52). Siły działające na i -tą przyczepę zostały przedstawione na rysunku A.5.



Rys. A.5. Siły działające na i -tą przyczepę typu DASS (siły poprzeczne względem kół oznaczono kolorem czerwonym, a siły wzdłużne – kolorem niebieskim)

Macierz sił działających na i -tą przyczepę można przedstawić w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}_i = \begin{bmatrix} F_{yrLi} \sin(\varphi_{rLi}) & F_{yrLi} \cos(\varphi_{rLi}) \\ F_{xrLi} \cos(\varphi_{rLi}) & -F_{xrLi} \sin(\varphi_{rLi}) \\ F_{yrRi} \sin(\varphi_{rRi}) & F_{yrRi} \cos(\varphi_{rRi}) \\ F_{xrRi} \cos(\varphi_{rRi}) & -F_{xrRi} \sin(\varphi_{rRi}) \\ F_{yfLi} \sin(\varphi_{fLi}) & F_{yfLi} \cos(\varphi_{fLi}) \\ F_{xfLi} \cos(\varphi_{fLi}) & -F_{xfLi} \sin(\varphi_{fLi}) \\ F_{yfRi} \sin(\varphi_{fRi}) & F_{yfRi} \cos(\varphi_{fRi}) \\ F_{xfRi} \cos(\varphi_{fRi}) & -F_{xfRi} \sin(\varphi_{fRi}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

gdzie: $F_{yrLi}, F_{yrRi}, F_{yfLi}, F_{yfRi}$ to siły tarcia poprzecznego, a $F_{xrLi}, F_{xrRi}, F_{xfLi}, F_{xfRi}$ to siły wzdłużne. Macierz położenia punktów przyłożenia sił poziomych ma postać:

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \begin{bmatrix} x_{Ei} & y_{Ei} \\ x_{Ei} & y_{Ei} \\ x_{Fi} & y_{Fi} \\ x_{Fi} & y_{Fi} \\ x_{Hi} & y_{Hi} \\ x_{Hi} & y_{Hi} \\ x_{Gi} & y_{Gi} \\ x_{Gi} & y_{Gi} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.47})$$

Wektor momentów zewnętrznych można zapisać jako:

$$\hat{\mathbf{M}}_i = [F_{xrLi}r_{ri} \quad F_{xrRi}r_{ri} \quad F_{xfLi}r_{fi} \quad F_{xfRi}r_{fi}]. \quad (\text{A.48})$$

Odpowiadający mu wektor współrzędnych kątowych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varpi}_i(\mathbf{q}) = [\theta_{rLi} \quad \theta_{rRi} \quad \theta_{fLi} \quad \theta_{fRi}]. \quad (\text{A.49})$$

Siły wzdłużne są wynikiem oddziaływania podłoża na koło w wyniku poślizgu wzdłużnego i oporów toczenia, co można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
F_{xrLi} &= -F_r(V_{xrLi}, \dot{\theta}_{rLi}, F_{zrLi}) + F_x(V_{xrLi}, \dot{\theta}_{rLi}, r_{ri}, F_{zrLi}) \\
F_{xrRi} &= -F_r(V_{xrRi}, \dot{\theta}_{rRi}, F_{zrRi}) + F_x(V_{xrRi}, \dot{\theta}_{rRi}, r_{ri}, F_{zrRi}) \\
F_{xfLi} &= -F_r(V_{xfLi}, \dot{\theta}_{fLi}, F_{zfLi}) + F_x(V_{xfLi}, \dot{\theta}_{fLi}, r_{fi}, F_{zfLi}) \\
F_{xfRi} &= -F_r(V_{xfRi}, \dot{\theta}_{fRi}, F_{zfRi}) + F_x(V_{xfRi}, \dot{\theta}_{fRi}, r_{fi}, F_{zfRi})
\end{aligned} \tag{A.50}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
V_{xrLi} &= \dot{x}_{Ei} \cos \varphi_{fLi} - \dot{y}_{Ei} \sin \varphi_{rLi} \\
V_{xrRi} &= \dot{x}_{Fi} \cos \varphi_{fRi} - \dot{y}_{Fi} \sin \varphi_{rRi} \\
V_{xfLi} &= \dot{x}_{His} \cos \varphi_{fLi} - \dot{y}_{His} \sin \varphi_{fLi} \\
V_{xfRi} &= \dot{x}_{Gis} \cos \varphi_{fRi} - \dot{y}_{Gis} \sin \varphi_{fRi}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Kąty znoszenia bocznego dla poszczególnych kół można wyznaczyć na podstawie funkcji z równania 4.55, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\alpha_{rLi} &= \alpha(\dot{x}_{Ei}, \dot{y}_{Ei}, \varphi_{rLi}) \\
\alpha_{rRi} &= \alpha(\dot{x}_{Fi}, \dot{y}_{Fi}, \varphi_{rRi}) \\
\alpha_{fLi} &= \alpha(\dot{x}_{His}, \dot{y}_{His}, \varphi_{fLi}) \\
\alpha_{fRi} &= \alpha(\dot{x}_{Gis}, \dot{y}_{Gis}, \varphi_{fRi})
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Siły reakcji podłoża na poszczególne koła zostały wyznaczone w równaniu 4.102 w sekcji 4.3.2.3.2. Siły tarcia poprzecznego działające na i -tą przyczepę można wyznaczyć na podstawie funkcji zapisanej w równaniu 4.54, co ostatecznie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
F_{yrLi} &= F_y(\alpha_{rLi}, F_{zrLi}, \mu_{yrLi}, C_{yrLi}) \\
F_{yrRi} &= F_y(\alpha_{rRi}, F_{zrRi}, \mu_{yrRi}, C_{yrRi}) \\
F_{yfLi} &= F_y(\alpha_{fLi}, F_{zfLi}, \mu_{yfLi}, C_{yfLi}) \\
F_{yfRi} &= F_y(\alpha_{fRi}, F_{zfRi}, \mu_{yfRi}, C_{yfRi})
\end{aligned} \tag{A.53}$$

gdzie: $\mu_{yrLi}, \mu_{yrRi}, \mu_{yfLi}, \mu_{yfRi}$ to maksymalne współczynniki tarcia poprzecznego dla poszczególnych kół, a $C_{yrLi}, C_{yrRi}, C_{yfLi}, C_{yfRi}$ to odpowiadające im sztywności boczne. Wartości tych parametrów stanowią dane wejściowe modelu i powinny być dobrane tak, aby uzyskać pożądany kształt charakterystyki siły bocznej.